บทที่ 8
เรื่องพิเศษ

ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นโดยทั่วไป เป็นปัญหาขนาดใหญ่ การแก้ปัญหาจำต้องใช้คอมพิวเตอร์เข้ามาช่วย ซึ่งส่วนมากไม่ได้ใช้วิธีการซิมเพลกซ์โดยตรง แต่จะมีการพัฒนาปรับปรุงกระบวนการที่ใช้ขึ้นมาใหม่ ให้เหมาะสมต่อการใช้คอมพิวเตอร์ กระบวนการที่ใช้กันบ่อยที่สุดคือกระบวนการที่เรียกว่า วิธีการซิมเพลกซ์ปรับปรุง (Revised Simplex Method) อย่างไรก็ตาม สำหรับปัญหาที่มีขนาดโตมากกระบวนการที่เหมาะสมที่สุด ที่จะนำมาใช้ในการแก้ปัญหา ก็คือกระบวนการที่เรียกว่า วิธีการแยกเป็นปัญหาย่อย (Decomposition Method) ในที่นี้ เราจะกล่าวถึงหลักในการแยกเป็นปัญหาย่อยซึ่งนำมาใช้กับปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นที่มีขนาดโตมาก แต่ตัวอย่างที่นำมาแสดงเป็นตัวอย่างของปัญหาขนาดเล็ก เพียงเพื่อเป็นแนวทาง ให้นักศึกษาเกิดความเข้าใจ และเกิดแนวความคิดในการนำไปประยุกต์ใช้ต่อไป เรื่องที่สำคัญอีกเรื่องหนึ่งที่จะกล่าวถึงในบทนี้ ก็คือ การวิเคราะห์ความไว (Sensitivity Analysis) ซึ่งเป็นวิธีการวิเคราะห์เพื่อตรวจสอบว่า หากมีการเปลี่ยนแปลงในตัวเลขข้อมูลต่าง ๆ เช่น กำไรต่อหน่วย จำนวนหน่วยของทรัพยากรที่มีอยู่ เป็นต้น การตัดสินใจจะเปลี่ยนแปลงไป อย่างไรบ้าง คำตอบที่ได้ผิดพลาดไปจากคำตอบที่เหมาะสมตามเป้าหมายหรือไม่ มากน้อยแค่ไหน ซึ่งการวิเคราะห์ความไวจะเป็นแนวทาง แสดงความแม่นยำ ถูกต้องของตัวเลขในรายละเอียดต่าง ๆ ของข้อมูล ที่เก็บรวบรวมมา และแสดงถึงความเชื่อถือได้ ของตัวแบบปัญหาที่ใช้อยู่ อันเป็นผลให้ ผู้ตัดสินใจมีความเชื่อมั่นในการตัดสินใจของตนเองมากยิ่งขึ้น

8.1 วิธีการซิมเพลกซ์ปรับปรุง (Revised Simplex Method)

ก่อนอื่นให้เรามาทบทวนการหาคำตอบ ต่อปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น ด้วยวิธีการซิมเพลกซ์ สมมติเรามีตัวแบบมาตรฐาน

หาค่าสูงสุดของ $P = \underline{C}'\underline{X} = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ ....(8.1)

โดยมีข้อจำกัด

$$A\underline{X} = x_1\underline{a}_1 + x_2\underline{a}_2 + \ldots + x_n\underline{a}_n = \underline{b} \qquad \text{..........(8.2)}$$

และ $\underline{X} = x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$ ....(8.3)

ในที่นี้ A เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด $m \times n, n > m$

$\underline{a}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ เป็นคอลัมน์เวคเตอร์ j ของเมทริกซ์ A

$\underline{X}$ เป็นคอลัมน์เวคเตอร์ของตัวแปร n ตัว

$\underline{C}$ เป็นคอลัมน์เวคเตอร์ของ ส.ป.ส. ของ x_j ในฟังก์ชันเป้าหมาย P

เราแบ่ง A เป็นเมทริกซ์ย่อย คือ เมทริกซ์ B ที่ประกอบด้วยคอลัมน์เวคเตอร์ที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน m เวคเตอร์ และเมทริกซ์ N ที่ประกอบด้วยเวคเตอร์ที่เหลือใน A ซึ่งเป็นเวคเตอร์พึ่งพิงกัน n − m เวคเตอร์ นั่นก็คือ B เป็นเมทริกซ์ของ basic vectors และ N เป็นเมทริกซ์ของ nonbasic vectors

ให้ $\underline{X}_B$ และ $\underline{X}_N$ เป็นเวคเตอร์ของตัวแปรที่สมนัยกับเมทริกซ์ B และเมทริกซ์ N ตามลำดับ

$\underline{C}_B$ และ $\underline{C}_N$ เป็นเวคเตอร์ของ ส.ป.ส. ในฟังก์ชันเป้าหมายของ X_B และ X_N ตามลำดับ

เขียนตัวแบบ (8.1) - (8.3) ใหม่ดังนี้

หาค่าสูงสุดของ $P = \underline{C}_B'\underline{X}_B + \underline{C}_N'\underline{X}_N$

โดยมีข้อจำกัด $B\underline{X}_B + N\underline{X}_N = \underline{b}$ ....(8.4)

และ $\underline{X}_B, \underline{X}_N \geqslant 0$

พิจารณาสมการข้อจำกัด จะได้ว่า

$$B^{-1}B\underline{X}_B + B^{-1}N\underline{X}_N = B^{-1}\underline{b}$$

หรือ $\underline{X}_B + B^{-1}N\underline{X}_N = B^{-1}\underline{b}$

นั่นก็คือ $\underline{X}_B = B^{-1}\underline{b} - B^{-1}N\underline{X}_N$ แทนค่าที่ได้นี้ในฟังก์ชันเป้าหมาย P จะได้

$$P = \underline{C}_B'(B^{-1}\underline{b} - B^{-1}N\underline{X}_N) + \underline{C}_N'\underline{X}_N$$

$$= \underline{C}_B'B^{-1}\underline{b} + (\underline{C}_N' - \underline{C}_B'B^{-1}N)\underline{X}_N$$

ด้วยเหตุที่ คำตอบที่เป็นไปได้ของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นมี $\underline{X}_B > 0$ และ $\underline{X}_N = 0$

เพราะฉะนั้น $\underline{X}_B = B^{-1}\underline{b}$

และ $P = \underline{C}_B'B^{-1}\underline{b}$

เขียนตารางซิมเพลกซ์

	ค่าของฟังก์ชันเป้าหมาย และคำตอบของตัวแปรฐาน	ตัวแปรฐาน basic variables	ตัวแปรนอกฐาน nonbasic variables
$\underline{X}_B$	$B^{-1}\underline{b}$	I	$B^{-1}N$
P	$\underline{C}_B'B^{-1}\underline{b}$	$\underline{0}'$	$\underline{C}_N' - \underline{C}_B'B^{-1}N$

(ในที่นี้ เพื่อความสะดวก เรากำหนด m เวคเตอร์แรกของเมทริกซ์ A เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน โดยทั่ว ๆ ไป เรากำหนด

$$B = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$$

ดัชนีล่าง i ของคอลัมน์เวคเตอร์ใน B ไม่ได้หมายถึง ลำดับของคอลัมน์เวคเตอร์ใน A แต่จะเป็นเวคเตอร์ใดของ A ก็ได้

เราเขียนคอลัมน์เวคเตอร์ a_j ของเมทริกซ์ N ให้อยู่ในรูปการรวมกันเชิงเส้นของคอลัมน์เวคเตอร์ของ B ได้ดังนี้

$$\underline{a}_j = x_{1j}\underline{a}_1 + \ldots + x_{mj}\underline{a}_m = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}\underline{a}_i = B\underline{X}_j$$

หรือ $\underline{X}_j = B^{-1}\underline{a}_j \;;\; \underline{X}_j = [x_{1j}, \ldots, x_{mj}]'$ ....(8.5)

$\underline{X}_j = (x_{1j}, \ldots, x_{mj})'$ เป็นคอลัมน์เวคเตอร์

ในที่นี้ ดัชนีล่าง j หมายถึงเวคเตอร์ $\underline{a}_j$ ของ N

และ ดัชนีล่าง i หมายถึงเวคเตอร์คอลัมน์ $\underline{a}_i$ ของ B

$\underline{X}_B = (x_{B1}, \ldots, x_{Bm})' = B^{-1}\underline{b} \geqslant 0$ ....(8.6)

เป็นเวคเตอร์คอลัมน์ที่แสดงค่าของตัวแปรฐาน m ตัว

$\underline{C}_B' = (c_{B1}, \ldots, c_{Bm})$ ....(8.7)

C_{Bi} แสดงถึง ส.ป.ส. ของตัวแปรฐาน x_{Bi} ในฟังก์ชันเป้าหมาย P

ดัชนีล่าง i มีความหมายถึง c_{Bi} และ x_{Bi} ที่สมนัยกับคอลัมน์เวคเตอร์ $\underline{a}_i$ ของ B ตัวอย่างเช่น ถ้า a_{17} เป็นคอลัมน์เวคเตอร์ที่ 2 ของเมทริกซ์ B เราจะได้

$x_{B2} = x_{17}$ และ $c_{B2} = c_{17}$

สำหรับคำตอบที่เป็นไปได้ขั้นฐานชุดใด เราหาค่าของฟังก์ชันเป้าหมาย ได้จาก

$P = \underline{C}_B'B^{-1}\underline{b} = \underline{C}_B'\underline{X}_B$ ....(8.8)

สำหรับตัวแปรนอกฐาน ต่างมีค่าเป็น 0 จึงไม่ปรากฏในสมการนี้

เรากำหนด s_j โดย

$$s_j = x_{1j}c_{B1} + \dots + x_{mj}c_{Bm} = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}c_{Bi} = \underline{C}_B'\underline{X}_j \qquad \dots\dots\dots(8.9)$$

และจะได้ว่า

$c_j - s_j = 0$ ทุก ๆ basic column j

$c_j - s_j \neq 0$ ทุก ๆ nonbasic column j

นั่นก็คือ $\underline{C}_N' - \underline{C}_B'B^{-1}N$ เป็นเวคเตอร์ที่ประกอบด้วย $c_j - s_j$ ของตัวแปรนอกฐาน x_j

การทำซ้ำ (iteration) แต่ละตารางในวิธีการซิมเพลกซ์ จะประกอบด้วย 3 ขั้นตอนดังนี้

1) ตรวจสอบค่าของ $\underline{C}_N' - \underline{C}_B'B^{-1}N$

1.1 ถ้าทุกค่าที่ได้ น้อยกว่าหรือเท่ากับ 0 หมด แสดงว่าเราได้คำตอบอุตมะ นั่นก็คือ ผลลัพธ์ที่ได้จากตารางนี้ เป็นคำตอบที่ดีที่สุดแล้ว

1.2 ถ้ามีบางค่ามากกว่า 0 เลือกตัวแปรนอกฐาน x_k ที่มีอัตราการเพิ่มของกำไรต่อหน่วยมากที่สุดเข้ามาในฐาน นั่นก็คือ เราเลือก x_k เข้ามาในฐาน ในเมื่อ

$$c_k - s_k = \underset{j}{\text{ค่าสูงสุด}}\ (c_j - s_j,\ c_j - s_j > 0)$$

คอลัมน์เวคเตอร์ของเมทริกซ์ N ที่เกี่ยวข้องคือ $\underline{a}_k$

2) เลือกตัวแปรที่จะออกจากฐาน

ในขั้นตอนนี้ เราคำนวณอัตราส่วนระหว่าง $B^{-1}\underline{b}$ กับ $B^{-1}\underline{a}_k$ ที่อยู่ในลำดับเดียวกัน

2.1 หากทุกค่าของ ส.ป.ส. ของ $B^{-1}\underline{a}_k$ น้อยกว่าหรือเท่ากับ 0 แสดงว่าปัญหานี้ไม่มีคำตอบอุตมะที่จำกัด นั่นก็คือ มี unbounded solutions

2.2 สมมติได้ค่าของอัตราส่วนต่ำสุด อยู่ในแถวที่ r นั่นก็คือ

$$\frac{\text{ค่าของ } x_{Br}}{x_{rk}} = \underset{i}{\text{ค่าต่ำสุด}} \left\{ \frac{\text{ค่าของ } x_{Bi}}{\text{ส.ป.ส. } x_{ik}} \ ;\ x_{ik} > 0 \right\}$$

เอาตัวแปรฐาน x_{Br} ออกจากฐาน

3) เปลี่ยนฐาน โดยมี x_k เข้ามาในฐาน แทนตัวแปรฐานในแถว r เขียนตารางใหม่ ทำซ้ำวิธีการเดิม

จะเห็นได้ว่า ด้วยวิธีการซิมเพลกซ์ อาศัยข้อมูลเดิมที่มีคือ A, $\underline{b}$ และ $\underline{C}$ นำมาคำนวณหาค่า B^{-1}, $B^{-1}\underline{a}_j$, $B^{-1}\underline{b}$ และ $\underline{C}'_B B^{-1}$ จากข้อเท็จจริงที่ได้นี้ จะเป็นแนวทางในการพัฒนาปรับปรุงวิธีการให้เหมาะสม และมีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น ซึ่งเราเรียกวิธีการนี้ว่า วิธีการซิมเพลกซ์ปรับปรุง

วิธีการซิมเพลกซ์ปรับปรุง ถูกพัฒนาขึ้นมาโดย Dantzig, Orchard - Hays และคนอื่น ๆ ในบริษัท RAND ให้เป็นกระบวนการที่มีประสิทธิภาพสำหรับแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น โดยใช้คอมพิวเตอร์เชิงตัวเลข *(digital computers)* วิธีการซิมเพลกซ์ปรับปรุงมีหลักเกณฑ์ในการแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น เช่นเดียวกับวิธีการซิมเพลกซ์ แตกต่างกันในรายละเอียดการดำเนินงาน ในวิธีการซิมเพลกซ์ปรับปรุง การคำนวณในแต่ละตาราง เราเปลี่ยนแปลงเฉพาะค่า B^{-1}, $\underline{X}_B$, $\underline{C}'_B B^{-1}$ และค่าของ P เท่านั้น รายการที่ปรากฏในแต่ละตารางน้อยกว่าในตารางซิมเพลกซ์ วิธีการซิมเพลกซ์ปรับปรุงจะมีรูปแบบมาตรฐาน 2 แบบ ขึ้นอยู่กับว่า จะได้เมทริกซ์เอกลักษณ์เริ่มต้นประกอบด้วยเวคเตอร์เทียมหรือไม่ แยกรูปแบบมาตรฐานได้ดังต่อไปนี้

รูปแบบมาตรฐาน 1 เป็นกรณีที่เราจะได้เมทริกซ์เอกลักษณ์ จากการบวกตัวแปรที่เป็น slack และ surplus variables เข้าไป

รูปแบบมาตรฐาน 2 เป็นกรณีที่ต้องใช้ตัวแปรเทียมเข้ามาช่วย จึงจะได้เมทริกซ์เอกลักษณ์ รูปแบบมาตรฐาน 2 ต้องใช้วิธีการ Two - Phase เข้ามาช่วยในการแก้ปัญหา เช่นเดียวกับการแก้ปัญหาด้วยวิธีการซิมเพลกซ์ แต่จะมีวิธีการแตกต่างไปบ้างเล็กน้อย

8.1.1 วิธีการซิมเพลกซ์ปรับปรุง แบบมาตรฐาน 1

ในวิธีการซิมเพลกซ์ปรับปรุง จะถือว่า ฟังก์ชันเป้าหมายทำหน้าที่เป็นข้อจำกัดหนึ่ง นั่นก็คือ จากฟังก์ชันเป้าหมาย (8.1) เปลี่ยนให้มาอยู่ในรูปสมการข้อจำกัด ดังนี้คือ

$$P - \underline{C}'\underline{X} = P - c_1x_1 - \ldots - c_nx_n = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (8.10)$$

จากข้อจำกัดนี้ เราต้องการให้ได้ค่าของ P มากที่สุดหรือน้อยที่สุด เท่าที่จะเป็นไปได้

ท้ายที่สุด เราจะได้ ระบบสมการเชิงเส้นที่มี m + 1 สมการ และ n + 1 ตัวแปร คือ P, $x_1, \ldots, x_n$ ดังต่อไปนี้

$$P - c_1 x_1 - \ldots - c_n x_n = 0$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (8.11)$$

เราต้องการหาคำตอบต่อระบบสมการนี้ ที่จะทำให้ค่าของ P มากที่สุด (หรือน้อยที่สุด) เท่าที่จะเป็นไปได้ โดยไม่กำหนดเครื่องหมาย แต่ต้องอยู่ภายใต้ข้อกำหนดว่า ตัวแปร x_j จะต้องมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0 ทุก ๆ $j = 1, 2, \ldots, n$

หากเรากำหนด $x_o = P$ และ $-c_j = a_{oj}$ ระบบสมการใน (8.11) จะเปลี่ยนเป็น

$$\begin{aligned} x_o + a_{o1}x_1 + \ldots + a_{on}x_n &= 0 \\ a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (8.12)$$

เขียนในรูปของ partitioned matrix ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & a^o \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_o \\ \underline{X} \end{bmatrix} \begin{matrix} = \\ = \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{b} \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (8.13)$$

ในเมื่อ $a^o = (\underline{a}_{o1}, \ldots, \underline{a}_{on})$ และ A คือเมทริกซ์ A ของ $A\underline{X} = \underline{b}$

สำหรับกรณีของระบบสมการเชิงเส้น (8.11) เมื่อเขียนในรูป partitioned matrix จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 1 & -\underline{C}' \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ \underline{X} \end{bmatrix} \begin{matrix} = \\ = \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{b} \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (8.14)$$

เรานิยามเวคเตอร์ $\underline{a}_j$ ที่ประกอบด้วย ส.ป.ส. m + 1 ค่า ได้ใหม่ดังนี้

$$\underline{a}_j^{(1)} = (-c_j, \underline{a}_j) = (a_{oj}, \underline{a}_j), j = 1, 2, \ldots, n \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (8.15)$$

และนิยามเวคเตอร์ b ที่ประกอบด้วย m + 1 ค่า ที่สมนัยกัน ดังนี้

$$\underline{b}^{(1)} = (0, \underline{b}) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (8.16)$$

คอลัมน์ที่สมนัยกับ $P = x_o$ เป็นเวคเตอร์เอกลักษณ์ e_1 ที่มี m + 1 ค่า

เมทริคซ์ฐานของเซทของสมการ (8.13) หรือ (8.14) จะมีขนาด m + 1เราต้องการหาคำตอบฐานต่อระบบสมการ (8.13) หรือ (8.14) โดยที่คำตอบฐานแต่ละชุด จะต้องมีตัวแปรฐานตัวหนึ่งเป็น $P = x_o$ และตัวแปรฐานอื่น ๆ $x_{Bi} > 0$ อีก m ตัว มีเป้าหมายว่าจะต้องได้ค่าของ P โตที่สุดเท่าที่จะทำได้

โดยเหตุที่ เราต้องการหาค่าสูงสุดของ P ตัวแปรนี้จะต้องอยู่ในคำตอบฐานทุก ๆ ชุดที่เราหาได้ นั่นก็คือ เมทริคซ์ฐานที่เราหาได้แต่ละครั้ง จะต้องมีเวคเตอร์ e_1 ที่สมนัยกันกับ x_o ปรากฏอยู่ด้วยเสมอ ดังนั้น เมทริคซ์ฐานที่ได้จะต้องประกอบด้วย เวคเตอร์ e_1 และเวคเตอร์ $a_j^{(1)}$ ที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน m เวคเตอร์ แทนค่าด้วย B_1 ดังนี้

$$B_1 \quad = \quad (\underline{e}_1, a_1^{(1)}, \ldots, \underline{a}_m^{(1)}), \quad \underline{e}_1 = \underline{a}_o^{(1)} \qquad \ldots\ldots\ldots(8.17)$$

หากเราเขียน B_1 ในรูปของ patitioned matrix จะได้

$$B \quad = \begin{bmatrix} 1 & \underline{C}_B' \\ 0 & B \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots\ldots(8.18)$$

และจะได้เมทริคซ์ผกผัน $B_1^{(-1)}$ ดังนี้

$$B_1^{(-1)} = \begin{bmatrix} 1 & \underline{C}_B' B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots\ldots(8.19)$$

เราเขียนคอลัมน์เวคเตอร์ $\underline{a}_j^{(1)}$ ใด ๆ ของ A ที่ไม่ได้อยู่ในเมทริคซ์ฐาน B ได้ดังต่อไปนี้

$$\underline{a}_j^{(1)} \quad = x_{0j}\underline{a}_o^{(1)} + x_{aj}\underline{a}_1^{(1)} + - - - + x_{mj}\underline{a}_m^{(1)} \qquad \ldots\ldots\ldots(8.20)$$

หรือ $$\underline{X}_j^{(1)} \quad = B_1^{-1}\underline{a}_j^{(1)}, \quad \underline{X}_j^{(1)} = (x_{oj}, x_{1j}, \ldots, x_{mj})' \qquad \ldots\ldots\ldots(8.21)$$

อย่างไรก็ตาม หากเราใช้ $B_1^{(-1)}$ ใน (8.19) และ $\underline{a}_j^{(1)}$ ใน (8.15) ผลที่ตามมาก็คือ

$$\underline{X}^{(1)} \quad = \begin{bmatrix} 1 & C_B' B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c_j \\ \underline{a}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_j + \underline{C}_B' B^{-1}\underline{a}_j \\ B^{-1}\underline{a}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_j - c_j \\ \underline{X}_j \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots\ldots(8.22)$$

จะเห็นได้ว่า ค่าแรกของ $\underline{X}_j^{(1)}$ ก็คือค่า $s_j - c_j$ นั่นเอง ส่วนค่าที่เหลือ m ค่า จะเป็นค่าใน $\underline{X}_j$ นี่ก็เป็นเหตุผลที่ว่า ทำไมเราจึงกำหนด ฟังก์ชันเป้าหมาย P เข้าเป็นสมการข้อจำกัดหนึ่ง

หากเรานิยามเวคเตอร์ $\underline{X}_B^{(1)}$ เป็นเวคเตอร์ที่ประกอบด้วยตัวแปรฐาน m + 1 ตัว โดย

$$\underline{X}_B^{(1)} \quad = \quad B_1^{-1}\underline{b}^{(1)} \qquad \ldots\ldots\ldots(8.23)$$

แล้ว $\underline{X}_B^{(1)}$ จะเป็นคำตอบฐานของ (8.13) ที่สมนัยกับเมทริคซ์ฐาน B_1

จาก (8.16) และ (8.19) เราจะได้ว่า

$$\underline{X}_B^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & \underline{C}_B'B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{C}_B'B^{-1}\underline{b} \\ B^{-1}\underline{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ \underline{X}_B \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8.24)$$

จะเห็นได้ว่า ค่าแรกของ $\underline{X}_B^{(1)}$ ก็คือค่าของฟังก์ชันเป้าหมาย P ส่วนค่าที่เหลือ m ค่า จะเป็นคำตอบของ x_{Bi} ซึ่งเป็นคำตอบฐานต่อสมการ $A\underline{X} = \underline{b}$ ที่สมนัยกับเมทริคซ์ฐาน B

8.1.2 กระบวนการคำนวณสำหรับแบบมาตรฐาน 1

ในการประยุกต์ใช้แบบมาตรฐาน 1 เราถือว่า มีเมทริคซ์เอกลักษณ์เป็นเมทริคซ์ย่อยของเมทริคซ์ A สำหรับเมทริคซ์ฐานแรกในระบบสมการเชิงเส้น (8.13) เราใช้คอลัมน์ $\underline{a}_j^{(1)}$ แทนคอลัมน์ a_j ที่อยู่ในเมทริคซ์เอกลักษณ์แรกของ A จะได้เมทริคซ์ผกผันเมทริคซ์ฐานแรกเป็น

$$B_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & C_B' \\ 0' & I_m \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots (8.25)$$

และถ้าคอลัมน์จาก A ที่รวมกันเป็น I_m สมนัยกันกับ slack variables แสดงว่า $\underline{C}_B = 0$ คำตอบฐานชุดแรกต่อ (8.13) ก็คือ $\underline{X}_B^{(1)} = (\underline{C}_B'\underline{b}, \underline{b})$

คำนวณค่าของ $s_j - c_j$ ของแต่ละ $\underline{a}_j^{(1)}$ ที่ไม่ได้อยู่ในฐาน จากผลคูณเชิงสเกลาร์ระหว่างแถวแรกของ B_1^{-1} กับ $\underline{a}_j^{(1)}$ แต่ละ j เลือกเวคเตอร์ $\underline{a}_k^{(1)}$ เข้ามาในฐาน ถ้าหาก

$$s_k - c_k = \underset{j}{\text{ค่าต่ำสุด}} \, (s_j - c_j, s_j - c_j < 0) \quad \ldots\ldots\ldots (8.26)$$

กรณีที่มีค่าต่ำสุดมากกว่า 1 เลือกเวคเตอร์ที่มีดัชนี j น้อยที่สุด

ขั้นต่อไป เป็นขั้นของการพิจารณาว่า จะเอาเวคเตอร์ใดออกจากฐาน กำหนดหมายเลขของคอลัมน์เวคเตอร์ใน B_1 เป็น 0, 1, ... , m คำนวณค่า

$$\underline{X}_k^{(1)} \qquad B_1^{-1}\underline{a}_k^{(1)} = (s_k - c_k, \underline{X}_k) \quad \ldots\ldots\ldots$$

คำนวณอัตราส่วนระหว่างค่าของ x_{Bi} กับ ส.ป.ส. x_{ik}, $x_{ik} > 0$, i = 1, 2, ... , m สมมติได้

$$\frac{x_{Br}}{x_{rk}} = \underset{i}{\text{ค่าต่ำสุด}} \left\{ \frac{x_{Bi}}{x_{ik}}, x_{ik} > 0 \right\} \quad \ldots\ldots\ldots (8.27)$$

เอาเวคเตอร์ $\underline{a}_r$ ออกจากฐาน B_1

ขั้นต่อไป เปลี่ยนแปลงฐานใหม่ โดยมี $\underline{a}_k$ ของ A แทนที่เวคเตอร์ $\underline{a}_r$ ของ B นั่นก็คือ เราหาคำตอบที่เป็นไปได้ขั้นฐานชุดใหม่ ที่จะทำให้ค่าแรกของ $\underline{X}_B^{(1)}$ มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับค่าเดิม เปลี่ยนค่า B_1^{-1} และ $\underline{X}_B^{(1)}$ ใหม่ ดังต่อไปนี้

ถ้าเมทริคซ์ผกผันใหม่คือ $\hat{B}_1^{-1}$ และคำตอบฐานชุดใหม่คือ $\hat{X}_B^{(1)}$ เราจะได้ว่า

$$\hat{B}_1^{-1} \qquad E_1B_1^{-1}$$

$$\hat{\underline{X}}_B^{(1)} = E_1B_1^{-1}\underline{b}^{(1)} = E_1\underline{X}_B^{(1)} \qquad \text{..........(8.28)}$$

ในเมื่อ เมทริคซ์ $E_1 = (e_1, .. , e_r, \eta^{(1)}, e_{r+2}, \dots , e_{m+1})$

หมายเหตุ $\eta^{(1)}$ เป็นคอลัมน์เวคเตอร์ที่ r + 1 ของ E_1 เนื่องจากเวคเตอร์ที่ r ของ B_1 อยู่ในคอลัมน์ r + 1 ของ B_1

เพราะฉะนั้น

$$\eta^{(1)} \qquad [- \frac{Sk - c_k}{x_{rk}}, - \frac{x_{1k}}{x_{rk}}, .. , \frac{1}{x_{rk}}, \dots, - \frac{x_{mk}}{x_{rk}}] \qquad \text{..........(8.29)}$$

กำหนดให้ m คอลัมน์สุดท้ายของ B_1^{-1} เป็น $\beta_1^{(1)}, \dots , \beta_m^{(1)}$ และ $\beta_j^{(1)} = (\beta_{oj}, \beta_{1j}, \dots , \beta_{mj})$

ดังนั้น

$$\hat{B}_1^{(-1)} = (e_1, \hat{\beta}_1^{(1)}, \dots , \hat{\beta}_m^{(1)}) = E_1B_1^{-1} = (\underline{e}_1, E_1\beta_1^{(1)}, \dots , E_1\beta_m^{(1)})$$

และเราจะได้ว่า

$$\hat{\beta}_j^{(1)} = \beta_j^{(1)} + \beta_{rj}\Phi^{(1)} \quad , \quad X_B^{(1)} = X_B^{(1)} + x_{Br}\Phi^{(1)} \qquad \text{..........(8.31)}$$

ในเมื่อ

$$\Phi^{(1)} = \eta^{(1)} - e_{r+1} = [- \frac{Sk - c_k}{x_{rk}}, - \frac{x_{1k}}{x_{rk}}, \dots . \frac{1}{x_{rk}} - 1, \dots . - \frac{x_{mk}}{x_{rk}}] \qquad \text{..........(8.32)}$$

หากเรากำหนดให้

$$\beta_{oo} = P \ , \quad \beta_{io} = x_{Bi}, \ i = 1, 2, \dots , m, \ x_{ok} = s_k - c_k \qquad \text{..........(8.33)}$$

เขียน (8.31) ใหม่ จะได้ว่า

$$\hat{\beta}_{ij} = \beta_{ij} - \frac{x_{rk}}{x_{ik}} \beta_{rj}, \ i = 0, 1, \dots , m, \ i \neq r, \ j = 0, 1, \dots , m \qquad \text{..........(8.34)}$$

และ $\hat{\beta}_{rj} = \beta_{rj} / x_{rk}$ ....(8.35)

นี่เป็นการแสดงให้เห็นว่า เราจะเปลี่ยน B^{-1} และ $\underline{X}_B^{(1)}$ ได้อย่างไร เมื่อเราต้องการเคลื่อนที่จากคำตอบที่เป็นไปได้ชุดหนึ่ง ไปยังคำตอบที่เป็นไปได้อีกชุดหนึ่ง

โดยการใช้ B_1^{-1} ที่ได้ใหม่ หาค่า $s_j - c_j$ จากผลคูณเชิงสกาลาร์ของแถวแรกของ B_1^{-1} กับ $a_j^{(1)}$ ที่ไม่ได้อยู่ในฐาน หากไม่มีค่าใดเป็นลบ แสดงว่า คำตอบที่ได้นี้เป็นคำตอบที่ดีที่สุด หากยังมีค่าใดเป็นลบ ทำซ้ำกระบวนการนี้ใหม่

การเขียนตารางในวิธีการซิมเพลกซ์ปรับปรุง จะแสดง ตัวแปรฐาน $\beta_j^{(1)}$, j = 1, ..., m (ด้วยเหตุที่ คอลัมน์แรกของ B_1^{-1} แต่ละชุดคือเวคเตอร์ e_1 เราจึงไม่จำเป็นต้องแสดงคอลัมน์ของ $\beta_0^{(1)}$) $\underline{X}_B^{(1)}$ และ $\underline{X}_k^{(1)}$ ดังต่อไปนี้

ตารางที่ 8.1 ตารางสำหรับวิธีการซิมเพลกซ์ปรับปรุง แบบมาตรฐาน 1

ตัวแปรฐาน	$\beta_1^{(1)}$	$\beta_2^{(1)}$	, ...,	$\beta_m^{(1)}$	$X_B^{(1)}$	$X_k^{(1)}$
x_o	a_{o1}	a_{o2}	.....	a_{om}	$p = x_0$	$s_k - c_k$
x_{B1}	a_{11}	a_{12}	.....	a_{1m}	x_{B1}	x_{1k}
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
x_{Bm}	a_{m1}	a_{m2}	.....	a_{mm}	x_{Bm}	x_{mk}

โดยทั่วไป การหา B_1^{-1}, $X_B^{(1)}$ และ $X_k^{(1)}$ เรามักจะคิดในเศษกระดาษ แล้วนำผลที่ได้ เขียนลงใน

ตัวอย่างที่ 8.1

จากตัวอย่างที่ 1.3.1 - 1 เรามีตัวแบบมาตรฐานของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น

หาค่าสูงสุดของ $P = 600x_1 + 320x_2$

โดยมีข้อจำกัด

$$20x_1 + 5x_2 + x_3 = 600$$
$$20x_1 + 8x_2 + x_4 = 660$$
$$15x_1 + 10x_2 + x_5 = 675$$

และ $x_j (j = 1, \dots 5) \geqslant 0$

จงหาคำตอบที่ดีที่สุด โดยใช้วิธีการซิมเพลกซ์ปรับปรุง

วิธีทำ

ในที่นี้

เรามี

$$A = \begin{bmatrix} (& \underline{a}_1 & \underline{a}_2 & \underline{a}_3 & \underline{a}_4 & \underline{a}_5 \\ & 20 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ = & 20 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ & 15 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{vmatrix}, c = \begin{vmatrix} 600 \\ 320 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \text{ และ } \underline{b} = \begin{bmatrix} 600 \\ 660 \\ 675 \end{bmatrix}$$

1. เริ่มต้นคำตอบชุดแรก โดยมีตัวแปร slack เป็นตัวแปรฐาน ดังนั้น $B = I_3$ และ $B^{-1} = I_3$ด้วย $\underline{C}_B' = (0\,0\,0)$, $B_1^{-1} = I_4$, และ $X_B^{(1)} = (0\;600\;660\;675)$ แสดงค่าที่ได้ในตาราง ดังต่อไปนี้

ตัวแปรฐาน	$\beta_1^{(1)}$	$\beta_2^{(1)}$	$\beta_3^{(1)}$	$X_B^{(1)}$
x_0	0	0	0	000
x_3	1	0	0	600
x_4	0	1	0	660
x_5	0	0	1	675

2. คำนวณค่า $s_j - c_j$ ของตัวแปรนอกฐาน x_j โดยการหาผลคูณเชิงสกาลาร์ของแถวแรกของ B_1^{-1} กับ $\underline{a}_j^{(1)}$ ของ A ที่ไม่ได้อยู่ในฐาน นั่นก็คือ $\underline{a}_1^{(1)}$ และ $\underline{a}_2^{(1)}$ จะได้

$$(s_1 - c_1, s_2 - c_2) = (1\;0\;0\;0)\begin{bmatrix} -600 & -320 \\ 20 & 5 \\ 20 & 8 \\ 15 & 10 \end{bmatrix} = (-600, -320)$$

พิจารณาค่าที่ได้ จะเห็นว่า $s_j - c_j$ มีค่าน้อยกว่า 0 และได้

$s_1 - c_1 =$ ค่าต่ำสุด $(-600, -320) = -600$

เลือก x_1 เข้ามาในฐาน และคำนวณหา

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 15 \end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้น $X_1^{(1)} = (-600\ 20\ 20\ 15)'$

เขียนตารางที่ 1 ได้ดังต่อไปนี้

ตัวแปรฐาน	$\beta_1^{(1)}$	$\beta_2^{(1)}$	$\beta_3^{(1)}$	$X_B^{(1)}$	$X_1^{(1)}$
x_0	0	0	0	000	-600
x_3	1	0	0	600	020
x_4	0	1	0	660	020
x_5	0	0	1	675	015

3. คำนวณอัตราส่วน ระหว่างค่าของ x_{Bi} กับ ส.ป.ส. x_{ik}, $i = 1, 2, 3$ เปรียบเทียบผลที่ได้

$$\frac{x_{B1}}{x_{11}} = \text{ค่าต่ำสุด} \left(\frac{600}{020}, \frac{660}{020}, \frac{675}{015}\right) = 30$$

เอา x_{B1} ออกจากฐาน (ในตาราง $x_{B1} = x_3$)

4. เปลี่ยนฐานใหม่ มี $x_{B1} = x_1$ หา $\hat{B}_1^{-1}$ และ $\hat{X}_B^{(1)}$ (ใช้สูตร 8.28 หรือ 8.34 กับ 8.35 ก็ได้ ในที่นี้ใช้สูตร 8.28) อาศัยสูตร (8.29) เราได้

$$\eta^{(1)} = (600/20\ \ 1/20\ \ -20/20\ \ -15/20)' = (30\ \ 1/20\ \ -1\ \ -3/4)'$$

อาศัยสูตร (8.28) เราจะได้

$$\hat{B}_1^{-1} = E_1 B_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 1/20 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3/4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 1/20 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3/4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X_B^{(1)} = E_1 X_B^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 1/20 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3/4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 000 \\ 600 \\ 660 \\ 675 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18000 \\ 00030 \\ 00060 \\ 00225 \end{bmatrix}$$

เอาเครื่องหมาย ∧ ออก เอาผลที่ได้เขียนลงในตารางที่ 2 ทำซ้ำวิธีการเดิม นั่นก็คือ ทำต่อข้อ 2 จะได้

$$(s_2 - c_2, s_3 - c_3) = (1\ 30\ 0\ 0) \begin{bmatrix} -320 & 0 \\ 5 & 1 \\ 8 & 0 \\ 10 & 0 \end{bmatrix} = (-170\ 30)$$

จะได้ว่า $s_2 - c_2 =$ ค่าต่ำสุด $(-170, 30) = -170$

เลือก x_2 เข้ามาในฐานใหม่ คำนวณหา $X_2^{(1)}$ จะได้

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1/20 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3/4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 3 \\ 25/4 \end{bmatrix}$$

แสดงผลที่ได้ในตารางที่ 2 ดังต่อไปนี้

ตัวแปรฐาน	$\beta_1^{(1)}$	$\beta_2^{(1)}$	$\beta_3^{(1)}$	$X_B^{(1)}$	$X_2^{(1)}$
x_0	30	0	0	18000	-170
x_1	1/20	0	0	00030	1/4
x_4	-1	1	0	00060	3
x_5	-3/4	0	1	00225	25/4

ขั้น 3 เป็นการเปรียบเทียบอัตราส่วนของ x_{Bi} กับ $x_{i2}, x_{i2} > 0, i = 1, 2, 3$ จะได้ว่า

$$x_{B2}/x_{22} = \text{ค่าต่ำสุด } \left(\frac{30}{1/4}\ \ \frac{60}{3}\ \ \frac{225}{25/4}\right) = 20$$

เอา x_{B2} (ในตารางนี้คือ x_4) ออกจากฐาน ทำขั้น 4 ต่อไป นั่นก็คือ
เปลี่ยนฐานใหม่ โดยมี $x_{B2} = x_2$ หา B_1^{-1} และ $X_B^{(1)}$ โดยใช้สูตร (8.28) และ (8.29) ได้

$$\eta^{(1)} = (170/3 \ \ -1/12 \ \ 1/3 \ \ -25/12)'$$

$$\hat{B}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 170/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/12 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -25/12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 1/20 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3/4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -80/3 & 170/3 & 0 \\ 0 & 2/15 & -1/12 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 4/3 & -25/12 & 1 \end{bmatrix} 1$$

$$\hat{X}_B^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 170/3 & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -25/12 & 1 \\ 0 & 1 & -1/12 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18000 \\ 00030 \\ 00060 \\ 00225 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21400 \\ 00025 \\ 00020 \\ 00100 \end{bmatrix}$$

เอาเครื่องหมาย ∧ ออก ทำซ้ำขั้น 2 นั่นก็คือ หาผลคูณเชิงสกาลาร์ ระหว่างแถวแรกของ B_1^{-1} กับ $a_j^{(1)}$ ที่ไม่ได้อยู่ในฐาน จะได้

$$(s_3 - c_0,\ s_4 - c_4) = (1 \ \ -80/3 \ \ 170/3 \ \ 0) \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = (-80/3,\ 170/3)$$

ผลปรากฏว่าได้ $s_3 - c_3$ = ค่าต่ำสุด $(-80/3, 170/3) = (-80/3)$ แสดงว่า x_3 เข้ามาในฐานใหม่ Ml $X_3^{(1)}$ ต่อไป จะได้ว่า

$$X_3 = \begin{bmatrix} 2/15 & -1/12 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 0 \\ 4/3 & -25/12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/15 \\ -1/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}$$

แสดงผลที่ได้ลงในตารางที่ 3 ดังต่อไปนี้

ตัวแปรฐาน	$\beta_1^{(1)}$	$\beta_2^{(1)}$	$\beta_3^{(1)}$	$X_B^{(1)}$	$X_3^{(1)}$
x_0	$-80/3$	$170/3$	0	21400	$-80/3$
x_1	$2/15$	$-1/12$	0	00025	$2/15$
x_2	$-1/3$	$1/3$	0	00020	$-1/3$
x_5	$4/3$	$-25/12$	1	00100	$4/3$

ทำต่อขั้น 3 คือเปรียบเทียบอัตราส่วนระหว่าง x_{Bi} กับ $x_{i3}, x_{i3} > 0, i = 1, 3$ ผลปรากฏว่า

$$x_{B3}/x_{33} = \text{ค่าต่ำสุด} \left(\frac{25}{2/15} \quad \frac{100}{4/3}\right) = 75$$

เอา x_{B3} ในตารางนี้ x_{B3} คือ x_5 ออกจากฐาน ทำขั้นที่ 4 ต่อไป นั่นก็คือ เปลี่ยนฐานใหม่ โดยมี $x_{B3} = x_3$ ใช้สูตร (8.28) และ (8.29) จะได้

$$\eta^{(1)} = \left[\frac{80/3}{4/3} \quad -\frac{2/15}{4/3} \quad \frac{1/3}{4/3} \quad \frac{1}{4/3}\right] = \left[20 \quad -\frac{1}{10} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{3}{4}\right]$$

$$\hat{B}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & -1/10 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -80/3 & 170/3 & 0 \\ 0 & 2/15 & -1/12 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 4/3 & -25/12 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 15 & 20 \\ 0 & 0 & 1/8 & -1/10 \\ 0 & 0 & -3/16 & 1/4 \\ 0 & 1 & -25/16 & 3/4 \end{bmatrix}$$

$$\hat{X}_B^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & -1/10 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21400 \\ 00025 \\ 00020 \\ 00100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23400 \\ 00015 \\ 00045 \\ 00075 \end{bmatrix}$$

เอาเครื่องหมาย $\wedge$ ออก ทำซ้ำขั้นที่ 2 นั่นก็คือ หาผลคูณเชิงสกาลาร์ ระหว่างแถวแรกของ B_1^{-1} กับ $a_j^{(1)}$ ที่ไม่ได้อยู่ในฐาน จะได้

$$(s_4 - c_4, s_5 - c_5) = [1\ 0\ 15\ 20]\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (15, 20)$$

จะเห็นได้ว่า ไม่มี $s_j - c_j$ ใดมีค่าเป็นลบ แสดงว่าได้คำตอบที่ดีที่สุดแล้ว เขียนตารางที่ 4 ซึ่งจะเป็นตารางสุดท้าย ได้ดังต่อไปนี้

ตัวแปรฐาน	$\beta_1^{(1)}$	$\beta_2^{(1)}$	$\beta_3^{(1)}$	$X_b^{(1)}$
x_0	0	15	20	23400
x_1	0	1/8	−1/10	00015
x_2	0	− 3/16	1/4	00045
x_3	1	−25/16	3/4	00075

จะเห็นได้ว่า การหาคำตอบต่อปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น ด้วยวิธีการซิมเพลกซ์ปรับปรุง การคิดคำนวณส่วนมาก จะเป็นการคำนวณในกระดาษทด แล้วนำผลที่ได้เขียนลงในตาราง ซึ่งในตอนแรกจะเป็นตัวแปรฐาน $\beta_j^{(1)}$, j = 1, 2, ...m และ $X_b^{(1)}$ ก่อน แล้วจึงจะได้ $X_k^{(1)}$ ซึ่งในตารางสุดท้ายจะไม่มี เราสรุปกระบวนการคำนวณแสดงในตารางได้ดังต่อไปนี้

ตารางที่	ตัวแปรฐาน	$\beta_1^{(1)}$	$\beta_2^{(1)}$	$\beta_3^{(1)}$	$X_b^{(1)}$	$X_k^{(1)}$ (k = 1)
1	x_0	0	0	0	000	-600
	x_3	1	0	0	600	020
	x_4	0	1	0	660	020
	x_5	0	0	1	675	015
2	x_0	30	0	0	18000	-170 k = 2
	x_1	1/20	0	0	00030	1/4
	x_4	- 1	1	0	00060	3
	x_5	−3/4	0	1	00225	25/4

ตารางที่	ตัวแปรฐาน	$\beta_1^{(1)}$	$\beta_2^{(1)}$	$\beta_3^{(1)}$	$X_B^{(1)}$	$X_k^{(1)}$	หมายเหตุ
	x_0	−80/3	170/3	0	21400	−80/3	k = 3
	x_1	2/15	−1/12	0	00025	2/15	
3	x_2	−1/3	1/3	0	00020	−1/3	
	x_5	4/3	−25/12	1	00100	4/3	
	x_0	0	15	20	23400		
	x_1	0	1/8	−1/10	00015		
4	x_2	0	−3/16	1/4	00045		
	x_3	1	−25/16	3/4	00075		

ตารางที่ 4 เป็นตารางที่ให้คำตอบอุตมะ อ่านผลที่ได้จากตาราง ปรากฏว่า ได้กำไรสูงสุด 23400 บาท โดยผลิตโต๊ะ 15 ตัว ผลิตเก้าอี้ 45 ตัว แล้วยังมีไม้ประเภท 1 เหลืออยู่ 75 แผ่น-ฟุต ซึ่งเป็นคำตอบเดียวกันกับที่เราแก้ด้วยวิธีการซิมเพลกซ์ หรือวิธีกราฟ

8.1.3 วิธีการซิมเพลกซ์ปรับปรุงกับแบบมาตรฐาน 2

แบบมาตรฐาน 2 จะถูกนำมาใช้ เมื่อเราต้องเพิ่มเวคเตอร์เทียมเข้าไปในระบบ เพื่อให้ได้เมทริคซ์เอกลักษณ์เป็นเมทริคซ์ฐานเริ่มต้น และแก้ปัญหาโดยใช้วิธีการ Two - Phase แบ่งการคำนวณเป็น 2 ส่วนดังนี้ Phase – 1 เป็นส่วนของการคำนวณเพื่อให้ได้คำตอบที่เป็นไปได้ นั่นก็คือ ตัวแปรเทียมจะถูกขจัดออกไป หรือเป็นส่วนที่ทำให้ตัวแปรเทียมทุกตัวมีค่าเป็น 0 นั่นเอง ส่วน Phase – 2 จะเป็นส่วนของการคำนวณเพื่อปรับปรุงให้ได้คำตอบที่ดีที่สุด สมมติตัวแบบของปัญหาดังกล่าวนี้คือ

หาค่าสูงสุดของ $P^* = -x_{a1} - \dots - x_{am}$ (phase – I)

หาค่าสูงสุดของ $P = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$ (Phase – II)

โดยมีข้อจำกัด

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + x_{a1} = b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 \dots\ a_{mn}x_n + x_{am} = b_m$$

และ $x_j\ (j = 1, \dots, n),\ x_{ai}\ (i = 1, \dots, m) \geqslant 0$

ในเมื่อ x_{ai} เป็นตัวแปรเทียมในข้อจำกัด i

วิธีการแก้ปัญหาดำเนินไปเช่นเดียวกับวิธีการที่ใช้กับแบบมาตรฐาน 1 นั่นก็คือ เราเปลี่ยนให้ฟังก์ชันเป้าหมายเป็นสมการ แล้วรวมเข้าไปในระบบสมการข้อจำกัด มีที่พิเศษกว่านั้นก็คือ แบบมาตรฐาน 2 จะมีตัวแปรเทียม รวมอยู่ในแต่ละสมการข้อจำกัด และเราจะเปลี่ยนฟังก์ชันเป้าหมาย P* เป็น

$$P^* + x_{a1} + \dots + x_{am} = 0$$

แล้วรวมเข้าไปเป็นสมการข้อจำกัดอีกอันหนึ่งด้วย

เมื่อเรากำหนด $P = x_0,\ -c_j = a_{oj},\ P^* = x_{n+1},\ b_i = b_{i+1}$

$$x_{ai} = x_{a+1+i},\ a_{ij} = a_{i+1,j},\ i = 1, \dots, m\ ;\ j = 1, \dots, n$$

เราจะได้ระบบสมการเชิงเส้นที่มี $m + 2$ สมการ และ $n + m + 2$ ตัวแปร ดังต่อไปนี้

$$\begin{array}{llllll}
x_0 + a_{01}x_1 & + \dots + a_{on}x_n & & & = & 0 \\
 & & x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+m+1} & & = & 0 \\
a_{21}x_1 & + \dots + a_{2n}x_n & + x_{n+2} & & = & b_2 \quad \dots(8.36) \\
 & \vdots & & & & \\
a_{m+1,\,,}\,x_1 & + \dots + a_{m+1,\,n}\,x_n & & + x_{n+m+1} & = & b_{m+1}
\end{array}$$

ภายใต้ข้อกำหนดว่าตัวแปรทุกตัว ยกเว้น x_o และ x_{n+1} จะต้องไม่มีค่าเป็นลบ เราเริ่มต้นการคำนวณใน Phase – I นั่นก็คือ พยายามทำให้ตัวแปรเทียมแต่ละตัวมีค่าเป็น 0 หรือให้ได้ $x_{n+1} = 0$ นั่นเอง หากมีตัวแปรเทียมตัวใดมีค่ามากกว่า 0 นั่นก็คือ x_{n+1}, ไม่เท่ากับ 0 แสดงว่าปัญหานี้ไม่มีคำตอบที่เป็นไปได้ เมื่อเราได้ $x_{n+1} = 0$ ทำ Phase – II ต่อไป นั่นก็คือ หาค่าตัวแปรที่จะทำให้ได้ค่าของ x_0 มีค่ามากที่สุด เท่าที่จะทำได้

หากเราพิจารณาการหาคำตอบ จะเห็นว่า เมื่อเราทำต่อ Phase – II ตัวแปรเทียมยังคงอยู่ในระบบสมการของเรา แต่มีค่าเป็น 0 หมดทุกตัว ซึ่งเป็นการประกันว่า การใช้วิธีการซิมเพลกซ์ปรับปรุงแก้ปัญหา ในกรณีที่ต้องใช้ตัวแปรเทียมเข้ามาช่วย ตัวแปรเทียมเหล่านั้นจะถูกทำให้มีค่าเป็น 0 เมื่อเราได้คำตอบที่เป็นไปได้ขั้นฐานแล้ว ตัวแปรเทียมเหล่านั้นยังคงมีค่าเป็น 0 ตลอดเวลาไม่มีทางมากกว่า 0 ได้ สรุปได้ว่า ใน Phase – II จะมีสมการข้อจำกัดของตัวแปรเทียมคือ

$x_{a1} + \ldots + x_{am} = 0$

รวมอยู่ด้วย

8.1.4 กระบวนการคำนวณสำหรับแบบมาตรฐาน 2

กำหนดคอลัมน์เวคเตอร์ที่สมนัยกับ ตัวแปร x_j ใน (8.36) โดย

$$a_j^{(2)} = (a_{0j}, a_{1j}, \ldots, a_{m+1,j})' \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(8.37)$$

สำหรับเวคเตอร์จริง นั่นก็คือเวคเตอร์ใน A

$$a_j^{(2)} = (-c_j, 0, a_j), j = 1, \ldots, n \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(8.38)$$

และสำหรับเวคเตอร์เทียม

$$a_{n+1+i}^{(2)} = q_i^{(2)} = (0, 1, e_i) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(8.39)$$

คอลัมน์เวคเตอร์ที่สมนัยกับ x_0 คือ e_1 และคอลัมน์เวคเตอร์ที่สมนัยกับ x_{n+1} คือ e_2 ค่าลำดับชั้น (rank) ของเมทริคซ์ของ ส.ป.ส.ใน (8.36) จะเท่ากับ $m + 2$ ดังนั้นเมทริคซ์ฐานใด ๆ จะมีขนาด $m + 2$ และกำหนดไว้ดังนี้

$$B_2 = (e_1, a_1^{(2)}, \ldots, a_{m+1}^{(2)}), e_1 = a_0^{(2)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(8.40)$$

เห็นได้ว่า คอลัมน์แรกของ B_2 เป็น e_1 เสมอ และใน Phase – I คอลัมน์ที่ 2 ของ B_2 จะเป็น e_2 คำตอบที่เป็นไปได้ขั้นฐานต่อ (8.36) ได้จากการกำหนดตัวแปรทุกตัวเป็น 0 ยกเว้น x_0, x_{n+1} และตัวแปรเทียม ดังนั้นเมทริคซ์ฐานเริ่มต้นจะเป็น

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 1 & 1 \ldots 1 \\ 0 & 0 & 1 \ldots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(8.41)$$

จะเห็นว่า B_2 ไม่เป็นเมทริคซ์เอกลักษณ์ อย่างไรก็ตาม หากเราใช้การคำนวณหาเมทริคซ์ผกผัน โดยการแบ่งเป็นเมทริคซ์ย่อย เราจะได้

$$B_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 \dots & -1 \\ 0 & 0 & 1 \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \dots & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -1_m \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & I_m \end{array}\right] \quad \dots\dots\dots\dots (8.42)$$

(เราสามารถทดสอบได้ โดยแสดงให้เห็นว่า $B_2^{-1}B_2 = I_{m+2}$

คำตอบที่เป็นไปได้ขั้นฐาน $X_B^{(2)}$ ที่สมนัยกับเมทริคซ์ฐาน B_2 คือ

$$\underline{X}_B^{(2)} = B_2^{-1}\underline{b}^{(2)} = (x_0, x_{B1}, \dots, x_{B,m+1}) \quad \dots\dots\dots\dots (8.43)$$

ในเมื่อ $\underline{b}^{(2)}$ ก็คือค่าทางขวามือของ (8.36)

และเมื่อ B_2 ถูกกำหนดโดย (8.41) เราจะได้

$$\underline{X}_B^{(2)} = \left[0, -\sum_{i=2}^{m+1} b_i, b_2, \dots, b_{m+1}\right]' \quad \dots\dots\dots\dots (8.44)$$

เป็นคำตอบที่เป็นไปได้ขั้นฐานชุดแรก ซึ่งจะเป็นจุดเริ่มต้นของ Phase – I

ใน Phase – I เราแบ่งเมทริคซ์ฐาน B_2 ใด ๆ ที่ประกอบด้วย e_1 ในคอลัมน์แรก e_2 ในคอลัมน์ที่ 2 และ m เวคเตอร์ $a_j^{(2)}$ เป็นเมทริคซ์ย่อย ดังต่อไปนี้

$$B_2 = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -C_B \\ \hline 0 & 1 & -C_B^* \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & B \end{array}\right]$$

ในเมื่อ B เป็นเมทริคซ์ฐานที่สมนัยกับ $A\underline{X} = \underline{b}$ และประกอบด้วยคอลัมน์เวคเตอร์ $\underline{a}_j$, $\underline{C}_B^*, \underline{C}_B$, $\underline{C}_B^*, \underline{C}_B$ เป็น ป.ส.ส. ของตัวแปรฐานในฟังก์ชันเป้าหมายของ Phase – I และ Phase – II ตามลำดับ การคำนวณหาอินเวอร์สของมัน ใช้วิธีการแบ่งเป็นเมทริคซ์ย่อย ซึ่งจะเห็นได้ว่า ผลคูณเชิงสกาลาร์ ระหว่างแถวที่ 2 ของ B_2^{-1} กับ $\underline{a}_j^{(2)}$ ที่เป็นจริง ก็คือค่าของ $s_j^* - c_j^*$ ใน Phase – I นั่นเอง

สำหรับการพิจารณาเวคเตอร์ที่จะเข้ามาในฐานของ Phase – I ยังคงใช้หลักการเดิม นั่นก็คือ พิจารณาจากค่าต่ำสุดของ $s_j^* - c_j^*$ ที่มีค่าน้อยกว่า 0 เมื่อได้ $s_k^* - c_k^*$ เป็นค่าต่ำสุด หมายความว่า $a_k^{(2)}$ เป็นเวคเตอร์ที่เข้ามาในฐาน

หากเรานิยาม

$$\underline{X}_j^{(2)} = B_2^{-1}\underline{a}_j^{(2)} = (x_{oj}, x_{1j}, \ldots . x_{m+1,j})' \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (8.45)$$

จะเห็นได้ชัดว่า เมื่อ B^{-1} ปรากฏอยู่ทางมุมล่างด้านขวาของ B_2^{-1} ส่วนประกอบ m ตัวสุดท้ายของ $X_j^{(2)}$ ก็คือ X_j ที่สมนัยกับคำตอบที่เป็นไปได้ขั้นฐานต่อ $A\underline{X} = \underline{b}$ ในทำนองเดียวกัน ส่วนประกอบ m ตัวสุดท้ายของ $\underline{X}_B^{(2)}$ คือ x_{Bi} เนื่องจากการเปลี่ยนดัชนีล่างของ a_{ij} ในคราวก่อน ปริมาณ $x_{B,i+1}$ กับ $x_{i+1,j}$ ของ (8.43), (8.45) จะสมนัยกับ x_{Bi} กับ x_{ij} ที่อยู่ในลำดับเดียวกันกับคำตอบต่อระบบสมการ $A\underline{X} = \underline{b}$

ใน Phase – I จะมี 2 คอลัมน์แรกของ B_2^{-1} อยู่ในฐานเสมอ ดังนั้น เวคเตอร์ที่ถูกย้ายออกจากฐาน จะพิจารณาได้จาก

$$x_{Br}/x_{rk} = \text{ค่าต่ำสุด } (x_{Bi}/x_{ik}, x_{ik} > 0), i = 2, \ldots, m + 1 \qquad \ldots\ldots\ldots(8.46)$$

ในเมื่อ x_{Bi} และ x_{ik} คือค่าที่นิยามไว้ใน (8.43) และ (8.45) ตามลำดับ การเปลี่ยนฐานใหม่เพื่อให้ได้คำตอบที่ดีกว่า ใช้วิธีการเดียวกันกับที่กล่าวมาแล้วในแบบมาตรฐาน 1

การคำนวณใน Phase – I จะสิ้นสุดลงเมื่อ $x_{m+1} = 0$ หรือเมื่อ $s_j^* - c_j^*$ ทุก ๆ ตัวไม่มีค่าเป็นลบ เราทำต่อ Phase – II ต่อไป

ใน Phase – II เราถือว่า B_2 จะถูกแบ่งเป็นเมทริคซ์ย่อยดังนี้

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & -C_B^{(1)} \\ 0 & B_1 \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots\ldots(8.47)$$

ในเมื่อ B_1 เป็นเมทริคซ์ฐานที่มีขนาด m + 1 สำหรับเซทของข้อจำกัดในที่นี้ ยังคงรวมสมการข้อจำกัดของเวคเตอร์เทียมไว้ด้วย แต่อยู่ในระดับ 0 ผลที่จะได้ก็คือ จะมีแถวแรกของ $B_2^{-2} = (1, C_B^{(1)}, B_1^{-1})$ และ $\underline{C}_B^{(1)}$ จะมี m + 1 ค่า ด้วยเหตุนี้ เราจึงได้ค่า $s_j - c_j$ จากผลคูณเชิงสกาลาร์ระหว่างแถวแรกของ B_2^{-1} กับเวคเตอร์ที่เป็นจริง $a_j^{(2)}$ ที่ไม่ได้อยู่ในฐาน เราอาศัยค่าเหล่านี้ในการพิจารณาว่าควรจะมีการเปลี่ยนแปลงเวคเตอร์ใดหรือไม่ ถ้ามี จะให้เวคเตอร์ใดเข้ามาในฐาน หากผลปรากฏว่าเราได้เวคเตอร์ $a_k^{(2)}$ เข้ามาในฐาน เราคำนวณหา $X_k^{(2)}$ จาก

$$X_k^{(2)} = B_2^{-1}a_k^{(2)} = (x_{ok}, x_{1k}, \ldots, x_{m+1,k})$$

และพิจารณาเวคเตอร์ที่จะออกจากฐาน ได้จาก

$$x_{Br}/x_{rk} = \text{ค่าต่ำสุด } (x_{Bi}/x_{ik}, x_{ik} > 0),\ i = 1,\dots, m + 1 \qquad \text{..........(8.48)}$$

ตารางที่ใช้จะมีรูปแบบเดียวกับในแบบมาตรฐาน 1 เพียงแต่เพิ่มแถวและคอลัมน์ข้ามาอีก 1 ที่กล่าวมานี้ เป็นการแสดงให้เห็นถึงกระบวนการคำนวณที่ใช้สำหรับแบบมาตรฐาน 2 อย่างไรก็ตาม วิธีดังกล่าวมานี้ เริ่มต้นด้วยเมทริคซ์ฐานที่ไม่เป็นเมทริคซ์เอกลักษณ์ การคำนวณหาเมทริคซ์ผกผันจึงต้องใช้การแบ่งเป็นเมทริคซ์ย่อย หากเราต้องการให้เมทริคซ์ฐานเริ่มต้นเป็นเมทริคซ์-เอกลักษณ์ เช่นเดียวกับที่ใช้อยู่ในแบบมาตรฐาน 1 เราสามารถทำได้ โดยการรวมสมการข้อจำกัดเสียใหม่ เพื่อให้ได้เมทริคซ์เอกลักษณ์มา (เรียกสมการแบบนี้ว่า สมการ redundant) นั่นก็คือ จากระบบสมการเชิงเส้น (8.36) เราเอาสมการที่ 2 ลบด้วยผลบวกของสมการที่ 3 ถึง m + 1 จะได้ว่า

$$x_{n+1} + \sum_{i=2}^{m+1} x_{n+i} - \sum_{i=2}^{m+1} a_{i1}x_1 - \dots - \sum_{i=2}^{m+1} a_{in}x_n - \sum_{i=2}^{m+1} x_{n+1} = - \sum_{i=2}^{m+1} b_i$$

ผลที่ตามมาจะเป็นสมการใหม่ ซึ่งจัดเป็นสมการที่ 2 แทนสมการที่ 2 เดิม ของ (8.36) ดังนี้

$$x_{n+1} - \sum_{i=2}^{m+1} a_{i1}x_1 - \dots - \sum_{i=2}^{m+1} a_{in}x_n = - \sum_{i=2}^{m+1} b_i$$

หากเรานิยาม

$$a_{ij} = - \sum_{i=2}^{m+1} a_{ij},\ j = 1, 2, \dots, n\ ;\ b_1 = - \sum_{i=2}^{m+1} b_i$$

จะได้ระบบสมการเชิงเส้น ดังต่อไปนี้

$$\begin{array}{llllll}
x_0 + a_{01}x_1 + \dots + a_{0n}x_n & & & & = & 0 \\
\quad a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n & + x_{n+1} & & & = & b_1 \\
\quad a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n & & + x_{n+2} & & = & b_2 \quad \dots(8.49) \\
\quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & & & & & \\
\quad a_{m+1,1}x_1 + \dots + a_{m+1,n}x_n & & & + x_{n+m+1} & = & b_{m+1}
\end{array}$$

ขั้นตอนในการคำนวณยังคงเหมือนเดิม เพียงแต่เรานิยาม $\underline{a}_j^{(2)}$ และ $\underline{b}^{(2)}$ ใหม่ ดังต่อไปนี้

$$\underline{a}_j^{(2)} = (-c_j, - 1\ a,, a,)\ \text{LAX}\ \underline{b}^{(2)} = (0, - 1\ b, b) \qquad \text{...........(8.50)}$$

ข้อสังเกต

1. จากระบบสมการ (8.49) เราจะได้เมทริคซ์ฐานเริ่มต้น เป็นเมทริคซ์เอกลักษณ์ หลักในการดำเนินการของทั้งสองแบบ จะเหมือนกัน เพิ่มเติมเข้ามาตรงที่ แบบมาตรฐาน 2 นั้น จะต้องแสดงให้เห็นว่าการหาค่าสูงสุดของ x_{n+1} จะกำหนดได้โดยสมการที่ 2 ของ (8.49)
2. เมื่อตัวแปรเทียมแต่ละตัวเป็น 0 จะได้ว่า

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 2, \ldots, m + 1$$

และ

$$-\sum_{i=2}^{m+1} a_{i1}x_1 - \ldots - \sum_{i=2}^{m+1} a_{in}x_n = -\sum_{i=2}^{m+1} b_i$$

หรือ $x_{n+1} = 0$ นั่นเอง นอกจากนี้ เมื่อตัวแปรเทียมแต่ละตัวมีค่ามากกว่า 0 จะได้

$$-\sum_{j=2}^{n} \sum_{i=2}^{m+1} a_{ij}x_j \geqslant -\sum_{i=2}^{m+1} b_i$$

ผลที่ได้คือ $x_{n+1} \leqslant 0$ เสมอ ท้ายที่สุด หากมีตัวแปรเทียมใดมีค่ามากกว่า 0 แล้ว $x_{n+1} < 0$ นี่ย่อมแสดงว่า ค่าสูงสุดของ $x_{n+1} = 0$ และการหาค่าสูงสุดของ x_{n+1} ของ (8.49) ก็คือการทำให้ตัวแปรเทียมมีค่าเป็น 0 หมดทุกตัว

ตัวอย่างที่ 8.2

หาค่าสูงสุดของ $x_0 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4$

โดยมีข้อจำกัด

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \qquad &= 15 \\ 2x, + x_2 + 5x_3 \qquad &= 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 10 \end{aligned}$$

และ $\quad x, \ (j = 1, 2, 3, 4) \geqslant 0$

วิธีทำ

ระบบสมการนี้อยู่ในรูปสมการของตัวแปรควบคุมได้ ไม่มี slack variables และไม่มีเมทริคซ์เอกลักษณ์ เราจึงบวกตัวแปรเทียม x_6, x_7 และ x_8 ในสมการข้อจำกัดที่ 1, 2 และ 3 ตามลำดับ รวมสมการของฟังก์ชันเป้าหมายของ Phase – I

$$x_5 - x_6 - x_7 - x_8 = 0$$

(x_5 เป็นค่าของฟังก์ชันเป้าหมายใน Phase – I) เข้าในระบบ จัดรูปเป็นระบบสมการเชิงเส้นตาม (8.49) จะได้ว่า

$$
\begin{array}{lcr}
x_0 - x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 & = & 00 \\
-4x_1 - 5x_2 - 9x_3 - x_4 + x_5 & = & -45 \\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_6 & = & 15 \\
2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_7 & = & 20 \\
x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_8 & = & 10
\end{array}
$$

จากระบบสมการที่ได้ เรามี

$$
a_1^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_2^{(2)} = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a_3^{(2)} = \begin{bmatrix} -3 \\ -9 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_4^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

เริ่มต้นจาก Phase – I

$$
B_2^{-1} = B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{และ } X_B^{(2)} = \begin{bmatrix} 00 \\ -45 \\ 15 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}
$$

นำผลที่ได้เขียนลงในตารางที่ 1 ยกเว้นคอลัมน์ที่ 1 ของ B_2^{-1} (ดูตารางที่ 1 หน้า 416) ต่อไปหาผลคูณเชิงสกาลาร์ของแถวที่ 2 ของ B_2^{-1} กับ $\underline{a}_j^{(2)}$ ที่ไม่ได้อยู่ในฐาน จะได้ $s_j^* - c_j^*$, $j = 1,2,3,4$ ดังต่อไปนี้

$$
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 & 1 \\ -4 & -5 & -9 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -5 & -9 & -1 \end{bmatrix}
$$

จะเห็นว่า

$s_3^* - c_3^* =$ ค่าต่ำสุด $(-4, -5, -9, -1) = -9$

แสดงว่าเวคเตอร์ $a_3^{(2)}$ จะเข้ามาในฐาน เพื่อจะพิจารณาว่าเวคเตอร์ใดจะออกจากฐาน เราคำนวณหา

$X_3^{(2)} = a_3^{(2)} = (-3 \ \ -9 \ \ 3 \ \ 5 \ \ 1)'$ (เนื่องจาก $B_2^{-1} = I_5$)

เขียนผลที่ได้ในคอลัมน์ $X_k^{(2)}$ ในตารางที่ 1 (ดูตารางที่ 1 หน้า 416)

ขั้นต่อไป คำนวณหาอัตราส่วนระหว่าง x_{Bi} กับ $x_{i3}, x_{i3} > 0, i = 2, 3, 4$

จะเห็นว่า

$x_{B3}/x_{33} =$ ค่าต่ำสุด $\left(\frac{15}{3}, \frac{20}{5}, \frac{10}{1}\right) = 4$

แสดงว่าเวคเตอร์ $a_3^{(2)}$ ของ B จะถูกขจัดออก

ทำซ้ำครั้งที่ 2

เปลี่ยนฐานใหม่ มี $x_{B3} = x_3$ คำนวณหา $\hat{B}_2^{-1}$ กับ $\hat{X}_B^{(2)}$ โดยใช้สูตร (8.28), (8.29) หรือ (8.34), (8.35) ก็ได้ ในที่นี้เราใช้สูตร (8.34), (8.35) จะได้

$$[\hat{B}_2^{-1} \,\vdots\, \hat{X}_B^{(2)}] = \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & 0 & 3/5 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 9/5 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1/5 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

นำผลที่ได้เขียนลงในตารางที่ 2 ยกเว้นคอลัมน์ที่ 1 ของ B_2^{-1} (ดูตารางที่ 2 หน้า 416) ขั้นต่อไป หาผลคูณเชิงสกาลาร์ของแถวที่ 2 ของ B_2^{-1} กับ $a_j^{(2)}$ ที่ไม่ได้อยู่ในฐาน จะได้ $s_j^* - c_j^*$, $j = 1, 2, 4$ ตามลำดับ เท่ากับ

$$[0 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 9/5 \ \ 0] \left|\begin{array}{ccc} -1 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right| = [-2/5 \ \ -16/5 \ \ \ 9/5]$$

จะเห็นว่า

$s_2^* - c_2^* =$ ค่าต่ำสุด $(-2/5 - 16/5 - 9/5) = -16/5$

เลือก x_2 เข้ามาเป็นตัวแปรฐานใหม่ คำนวณหา $\underline{X}_2^{(2)}$ จะได้

$$X_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 9/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7/5 \\ -16/5 \\ 7/5 \\ 1/5 \\ 9/5 \end{bmatrix}$$

เขียนค่าที่ได้ลงในคอลัมน์ $X_2^{(2)}$ ในตารางที่ 2 (ดูตารางที่ 2 หน้า 416)

เปรียบเทียบอัตราส่วนระหว่าง x_{Bi} กับ x_{i2}, $x_{i2} > 0$, $i = 2, 3, 4$ จะได้

$$x_{B2}/x_{22} = \text{ค่าต่ำสุด} \left(\frac{3}{7/5}, \frac{4}{1/5}, \frac{6}{9/5}\right) = \frac{15}{7}$$

เอา x_6 ออกจากฐาน

ทำซ้ำครั้งที่ 3

เปลี่ยนฐานใหม่ มี $x_{B2} = x_2$ หา $\hat{B}_2^{-1}$ และ $\hat{\underline{X}}_B^{(2)}$ ใช้สูตร (8.34), (8.35) จะได้

$$[\hat{B}_2^{-1} \mid \hat{\underline{X}}_B^{(2)}] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 16/7 & 3/7 & 0 & -15/7 \\ 0 & 0 & 5/7 & -3/7 & 0 & 15/7 \\ 0 & 0 & -1/7 & 2/7 & 0 & 25/7 \\ 0 & 0 & 9/7 & 4/7 & 1 & 15/7 \end{array}\right]$$

นำผลที่ได้ ยกเว้นคอลัมน์แรกของ B_2^{-1} เขียนลงในตารางที่ 3 (ดูตารางที่ 3 หน้า 416) ขั้นต่อไป หาผลคูณเชิงสกาลาร์ของแถว 2 ของ B_2^{-1} กับ $a_j^{(2)}$ ที่ไม่ได้อยู่ในฐาน เปรียบเทียบผลที่ได้ ปรากฏว่า

$$s_4^* - c_4^* = \text{ค่าต่ำสุด } [0\ 1\ 16/7\ 3/7\ 0] \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \text{ค่าต่ำสุด } (-6/7,\ -1) = -1$$

เลือก x_4 เข้ามาในฐาน คำนวณหา

$$x_4^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 16/7 & 3/7 & 0 \\ 0 & 0 & 5/7 & -3/7 & 0 \\ 0 & 0 & -1/7 & 2/7 & 0 \\ 0 & 0 & -9/7 & 4/7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

นำผลที่ได้เขียนลงในคอลัมน์ $X_k^{(2)}$ ตารางที่ 3 (ดูตารางที่ 3 หน้า 416)

จากตาราง 3 (หน้า 416) หาอัตราส่วนระหว่าง x_{Bi} กับ x_{i4}, $x_{i4} > 0$ จะเห็นว่ามีเพียงค่าเดียวที่เป็นไปได้ คือ $x_{B4}/x_{44} = 15/7$ เอา x_8 ออกจากฐาน

ทำซ้ำครั้งที่ 4

เปลี่ยนฐานใหม่ ได้ $x_{B4} = x_4$ หา $\hat{B}_2^{-1}$ และ $\hat{X}_B^{(2)}$ โดยใช้สูตร (8.34), (8.35) จะได้ว่า

$$[\hat{B}_2^{-1} \mid \hat{X}_B^{(2)}] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 16/7 & -4/7 & -1 & 90/7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5/7 & -3/7 & 0 & 15/7 \\ 0 & 0 & -1/7 & 2/7 & 0 & 25/7 \\ 0 & 0 & -9/7 & 4/7 & 1 & 15/7 \end{array}\right]$$

นำผลที่ได้เขียนลงในตารางที่ 4 ยกเว้นคอลัมน์ 1 ของ B_2^{-1} (ดูตารางที่ 4 หน้า 416) พิจารณาผลที่ได้ในตารางที่ 4 จะเห็นว่า x_5 (ค่าของฟังก์ชันเป้าหมายใน Phase – I) มีค่าเป็น 0 แสดงว่า ตารางนี้จะเป็นตารางสุดท้ายของ Phase – I และจะเป็นตารางที่ 1 ของ Phase – II นั่นเอง

ดังนั้นการคำนวณในขั้นต่อไป จะเป็นการคำนวณใน Phase – II ซึ่งเราจะหาค่าของ $s_j - c_j$ ได้จากผลคูณเชิงสกาลาร์ของแถวที่ 1 ของ B_2^{-1} กับเวคเตอร์ $a_j^{(2)}$ ที่ไม่ได้อยู่ในฐาน ในที่นี้มีเพียงคอลัมน์เดียวคือ $a_1^{(2)}$ ดังนั้นเราจะได้

$$s_1 - c_1 = (1\ 0\ \frac{16}{7}\ -\frac{4}{7}\ -1)(-1\ -4\ 1\ 2\ 1)' = \frac{6}{7}$$

เลือก x_1 เข้ามาในฐาน หา

$$X_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 16/7 & -4/7 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5/7 & -3/7 & 0 \\ 0 & 0 & -1/7 & 2/7 & 0 \\ 0 & 0 & -9/7 & 4/7 & 1 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6/7 \\ 0 \\ -1/7 \\ 3/7 \\ 6/7 \end{vmatrix}$$

ผลที่ได้นี้ เขียนลงในตาราง 4 คอลัมน์ $\underline{X}_k^{(2)}$ (ดูตาราง 4 หน้า 416)

หาอัตราส่วนระหว่าง x_{Bi} กับ $x_{i1}, x_{i1} > 0, i = 3, 4$ เปรียบเทียบผลที่ได้ปรากฏว่า

$$x_{B4}/x_{41} = \text{ค่าต่ำสุด} \left(\frac{25/7}{3/7}, \frac{15/7}{6/7}\right) = \frac{5}{2}$$

เอา x_4 ออกจากฐาน

ทำซ้ำครั้งที่ 5 ซึ่งจะเป็นตารางที่ 2 ของ Phase – II

เปลี่ยนฐานใหม่ ได้ $x_{B4} = x_1$ หา $\hat{B}_2^{-1}$ และ $\hat{\underline{X}}_B^{(2)}$ โดยใช้สูตร (8.34), (8.35) จะได้ว่า

$$\left|\hat{B}_2^{-1} \;\vdots\; \hat{X}_B^{(2)}\right| = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/3 & 1/6 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 3/2 & 2/3 & 7/6 & 5/2 \end{array}\right]$$

นำผลที่ได้ เขียนลงในตารางที่ 5 ยกเว้นคอลัมน์ 1 ของ $\hat{B}_2^{-1}$ (ดูตารางที่ 5 ถ้า 417)

ขั้นต่อไป คำนวณหาผลคูณเชิงสกาลาร์ของแถวที่ 1 ของ B_2^{-1} กับ $a_j^{(2)}$ ที่ไม่ได้อยู่ในฐาน ในที่นี้คือ $a_4^{(2)}$ จะได้ $(1\ 0\ 1\ 0\ 0)(1\ -1\ 0\ 0\ 1)' = 1 = s_4 - c_4$

จะเห็นได้ว่ามีค่ามากกว่า 0 จึงสรุปได้ว่า ตารางที่ 5 เป็นตารางที่ให้คำตอบอุตมะ อ่านผลจากตารางได้คำตอบที่ดีที่สุดคือ

$x_1 = 5/2, x_2 = 5/2, x_3 = 5/2$ โดยมีค่าสูงสุดของ x_0 เท่ากับ 15

กระบวนการคำนวณทั้งหมด มีดังต่อไปนี้

ตารางที่	ตัวแปรฐาน	$\beta_1^{(1)}$	$\beta_2^{(2)}$	$\beta_3^{(2)}$	$\beta_4^{(2)}$	$X_B^{(2)}$	$X_k^{(2)}$	หมายเหตุ
	x_0	0	0	0	0	00	−3	Phase I
	x_5	1	0	0	0	-45	−9	k = 3
1	x_6	0	1	0	0	15	3	
	x_7	0	0	1	0	20	5	
	x_8	0	0	0	1	10	1	
	x_0	0	0	3/5	0	12	−7/5	k = 2
	x_5	1	0	9/5	0	-09	16/5	
2	x_6	0	1	−3/5	0	03	7/5	
	x_3	0	0	1/5	0	04	1/5	
	x_8	0	0	−1/5	1	06	9/5	
	x_0	0	1	0	0	15	1	k = 4
	x_5	1	16/7	3/7	0	-15/7	−1	
3	x_2	0	5/7	−3/7	0	15/7	0	
	x_3	0	−1/7	2/7	0	25/7	0	
	x_8	0	−9/7	4/7	1	15/7	1	
	x_0	0	16/7	−4/7	-1	90/7	−6/7	ตารางที่ 1
	x_5	1	1	1	1	0	0	ของ
4	x_2	0	5/7	−3/7	0	15/7	−1/7	Phase − II
	x_3	0	−1/7	2/7	0	25/7	3/7	k = 1
	x_4	0	−9/7	4/7	1	15/7	6/7	

ตารางที่	ตัวแปรฐาน	$\beta_{q}^{(1)}$	$\beta_{1}^{(2)}$	$\beta_{3}^{(2)}$	$\beta_{4}^{(2)}$	$X_{B}^{(2)}$	$X_{k}^{(2)}$	หมายเหตุ
	x_0	0	1	0	0	15		ตารางที่ 2
	x_5	1	1	1	1	00		ของ
5	x_2	0	1/2	-1/3	1/6	5/2		Phase – II
	x_3	0	1/2	0	– 1/2	5/2		และเป็น
	x_1	0	– 3/2	2/3	7/6	5/2		ตาราง
								สุดท้าย

ตารางที่ 5 เป็นตารางที่ให้คำตอบอุตมะ เนื่องจากว่า ผลคูณเชิงสกาลาร์ของ ส.ป.ส. ในแถวแรก ($\beta_j^{(2)}$, j = 0, 1, 2, 3, 4 กับ $\underline{a}_j^{(2)}$ ที่อยู่นอกฐานมีค่าเป็นบวกหมด

มีข้อสังเกตุว่า ส.ป.ส. ในแถว 2 ($\beta_j^{(2)}$, j = 1, 2, 3, 4) จะมีค่าเป็น 1 ทุกตัว และค่าของ x_5 (ค่าของฟังก์ชันเป้าหมายใน Phase – I) จะเป็น 0 เมื่อการคำนวณอยู่ใน Phase – II ซึ่งเป็นการย้ำว่า ผลรวมของตัวแปรเทียมเป็น 0 หรือตัวแปรเทียมทุกตัวจะมีค่าเป็น 0 นั่นเอง

8.1.5 สรุปกระบวนการคำนวณด้วยวิธีการซิมเพลกซ์ปรับปรุง

วิธีการซิมเพลกซ์ปรับปรุงจะมีขั้นตอนในการดำเนินการ ดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 จากตัวแบบมาตรฐาน (8.12) หรือ (8.49) เมื่อเป็นกรณีที่ต้องใช้ตัวแปรเทียม เราจะได้เมทริคซ์ฐานแรกเป็นเมทริคซ์เอกลักษณ์ และตัวแปรฐานชุดแรกพร้อมด้วยคำตอบ เป็นผลให้ $B^{-1} = B, \underline{X}_B = \underline{X}_B$ ผลที่ได้เขียนลงในตารางตามแบบตารางที่ 8.1 หน้า 397 ในที่นี้เราตัดดัชนี ที่แสดงถึง แบบมาตรฐาน 1 หรือแบบมาตรฐาน 2 ออก แต่จะใช้ B และ $\underline{X}_B$ แทนเมทริคซ์ฐานและคำตอบฐานของทั้งระบบ ไม่ว่าจะเป็นแบบมาตรฐาน 1 หรือ 2

ขั้นตอนที่ 2 ก) ถ้าเป็นตัวแบบ (8.49) และเป็นการคำนวณใน Phase – I หาผลคูณเชิงสกาลาร์ของแถวที่ 1 ของ B^{-1} กับ $\underline{a}_j$ ที่อยู่นอกฐาน

ข) ถ้าเป็นตัวแบบมาตรฐาน (8.12) หรือ (8.49) ที่อยู่ใน Phase – II (Phase – I สิ้นสุด เมื่อได้ $x_{n+1} = 0$ และตารางสุดท้ายของ Phase – I จะเป็นตารางแรกของ Phase – II)

หาผลคูณเชิงสกาลาร์ของแถวแรกของ B^{-1} กับ a_j ที่อยู่นอกฐาน ถ้าไม่มีค่าใดเป็นลบ แสดงว่าได้คำตอบอุตมะ แต่หากมีค่าใดเป็นลบ ให้ทำต่อขั้นที่ 3 (หมายเหตุ ในที่นี้ a_j แทนเวคเตอร์คอลัมน์ j ทั้งระบบ ที่ไม่ใช่เวคเตอร์ของตัวแปรเทียม)

ขั้นตอนที่ 3 เปรียบเทียบผลที่ได้จาก 2 เลือกค่าต่ำสุด สมมติได้ $s_k - c_k$ คำนวณหา

$$\underline{X}_k = B^{-1}\underline{a}_k$$

(อย่าลืมว่า เรากำหนด $\underline{a}_k$, B^{-1}, $\underline{X}_k$ ของทั้งระบบ)

ผลที่ได้เขียนลงในตาราง คอลัมน์สุดท้าย นั่นก็คือคอลัมน์ $\underline{X}_k$

ขั้นตอนที่ 4 หาอัตราส่วนระหว่าง คำตอบของ x_{Bi} กับ ส.ป.ส. x_{ik}, $x_{ik} > 0$ $i = 1, 2, \ldots, m$ ถ้าใช้ตัวแบบ (8.12); $i = 2, 3, \ldots, m+1$ ถ้าใช้ตัวแบบ (8.49) หาค่าต่ำสุด สมมติได้ x_{Br}/x_{rk} ทำต่อขั้นที่ 5

ถ้า $x_{ik} \leqslant 0$ ทุก ๆ i แสดงว่าปัญหานี้มีคำตอบที่ไม่จำกัด

ขั้นตอนที่ 5 เปลี่ยนฐานใหม่ มี $x_{Br} = x_k$ คำนวณหา $\hat{B}^{-1} = EB^{-1}$, $\hat{X}_B = EX_B$ หรือจะใช้สูตร (8.34), (8.35) ในการหา $\hat{B}^{-1}$ และ $\hat{\underline{X}}_B$ ก็ได้ เอาเครื่องหมาย $\wedge$ ออกนำผลที่ได้ ยกเว้นค่าในคอลัมน์ที่ 1 ของ B^{-1} เขียนลงในตาราง ทำต่อขั้นที่ 2

หมายเหตุ (1) เราใช้ $\underline{a}_j$, B, B^{-1}, $\underline{X}_B$, $\underline{X}_k$ เป็นของทั้งระบบ โดยไม่มีดัชนี 1 หรือ 2 ที่แทนแบบมาตรฐาน 1 แบบมาตรฐาน 2 ตามลำดับ เพื่อแสดงขั้นตอนการคำนวณของทั้ง 2 แบบ ให้เห็นว่าใช้หลักการเดียวกัน มีแตกต่างกันบ้างเล็กน้อยเมื่อใช้ตัวแปรเทียม

(2) กรณีที่มีค่าอัตราส่วน (ในขั้นตอนที่ 4) ต่ำสุด มากกว่า 1 ให้เลือกอัตราส่วนของคู่ที่มีดัชนี i ต่ำสุด

8.2 หลักการแยกของการโปรแกรมเชิงเส้น

ในทางปฏิบัติ จะพบว่า มีปัญหาอยู่ไม่น้อยที่มีขนาดโตและสลับซับซ้อนมาก จนเกินกว่าที่จะใช้คอมพิวเตอร์ได้ ปัญหาพวกนี้จะมีลักษณะพิเศษอย่างหนึ่ง ที่จะทำให้เราสามารถแยกเป็นส่วน ๆ ได้ นั่นก็คือ สามารถแยกเป็นกลุ่มย่อยที่มีลักษณะ ดังต่อไปนี้

หาค่าสูงสุดของ $P = \sum_{j=1}^{r} \underline{C}_j\underline{X}_j$ ....(8.51)

โดยมีข้อจำกัด

$$\sum_{j=1}^{r} A_j\underline{X}_j = b_0 \qquad \text{..........(8.52)}$$

$$B_j\underline{X}_j = b_j,\ j = 1, \ldots, r \qquad \text{..........(8.53)}$$

และ $\underline{X}_j \geqslant 0,\ j = 1, \ldots, r$

ข้อจำกัด (8.52) และ (8.53) เขียนให้อยู่ในรูปเมทริคซ์ได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & \ldots A_r \\ B_1 & 0 & 0 & \ldots 0 \\ 0 & B_2 & 0 & \ldots 0 \\ \\ 0 & 0 & 0 & \ldots B_r \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \\ X_r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \\ b_r \end{vmatrix} \qquad \text{.........(8.54)}$$

ในเมื่อ A_j เป็นเมทริคซ์ $m_0 x n_j$ และ B_j เป็นเมทริคซ์ $m_j x n_j$

X_j เป็นคอลัมน์เวคเตอร์ที่ประกอบด้วยตัวแปร n_j ตัว

C_j เป็นคอลัมน์เวคเตอร์ที่ประกอบด้วย ส.ป.ส.ของตัวแปร (ที่สมนัยกันกับ X_j) ในฟังก์ชันเป้าหมาย จึงเป็นเวคเตอร์ที่มีส่วนประกอบ n_j ตัว

$\underline{b}_0$ และ $\underline{b}_j$ เป็นคอลัมน์เวคเตอร์ที่ประกอบด้วยค่าคงที่ m_o และ m_j , $j = 1, \ldots, r$ ตามลำดับ เพราะฉะนั้น ปัญหาที่กล่าวมานี้ จะมีจำนวนข้อจำกัด m ข้อ และตัวแปร n ตัว โดยที่

$$m = \sum_{j=1}^{r} m_j \text{ และ } n = \sum_{j=1}^{r} n_j$$

จากลักษณะพิเศษของปัญหาดังกล่าว เราสามารถแยกเป็นปัญหาการโปรแกรมขนาดเล็ก r ปัญหา ในรูปของ $B_j\underline{X}_j = b_j$, $\underline{X}_j \geqslant 0$ ให้ได้ค่าสูงสุดของ $P_j = \underline{C}_j X_j$

ดังนั้น คำตอบต่อปัญหา (8.51) – (8.53) ย่อมเป็นคำตอบที่สอดคล้องกับ $B_j\underline{X}_j = \underline{b}_j$ วิธีการที่จะนำมาใช้สำหรับการแก้ปัญหาดังกล่าว ได้ถูกพัฒนาขึ้นมาโดย Dantzing, Wolfe และคนอื่น ๆ ซึ่งแสดงให้เห็นถึงขั้นตอนวิธีการแยก ภายใต้ข้อกำหนดว่า เซทของจุด $\underline{X}_j \geqslant 0$ ของ $B_j X_j = b_j$

(กำหนดเซทของคำตอบเป็น S_j) เป็น closed convex set ที่มีจำนวนจุดปลายสุดจำกัด และถือว่าเป็น bounded polyhedron แต่ละจุดในเซทของคำตอบ สามารถเขียนให้อยู่ในรูป convex combination ของจุดปลายสุด (จุดมุมของบริเวณคำตอบนั่นเอง)

หากเรากำหนด X_{kj} เป็นเวคเตอร์ของคำตอบต่อปัญหาย่อยที่ j, $B_j X_j = b_j$, $k = 1, \ldots, h_j$ โดยที่ h_j เท่ากับ ผลรวมของจำนวนจุดปลายสุดของเซทคำตอบ S_j

คำตอบที่เป็นไปได้ใด ๆ $X_j \geqslant 0$ ของปัญหาย่อยที่ j แสดงในรูป convex combination ของจุดปลายสุดใน S_j ได้ดังต่อไปนี้

$$X_j = \sum_{k=1}^{h_j} \lambda_{kj} X_{kj} \qquad \text{...........(8.55)}$$

ในเมื่อ $\sum_{k=1}^{h_j} \lambda_{kj} = 1$ และ $\lambda_{kj} \geqslant 0, k = 1, \ldots, h_j$ ....(8.56)

จากผลที่ได้ใน (8.55) แทนลงใน (8.51) และ (8.52) จะได้ผลตามลำดับ ดังต่อไปนี้

หาค่าสูงสุดของ $P = \sum_{j=1}^{r} C_j \left(\sum_{k=1}^{h_j} \lambda_{kj} X_{kj} \right) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{h_j} \lambda_{kj} C_j X_{kj}$ ...... (8.57)

และ $\sum_{j=1}^{r} A_j \left(\sum_{k=1}^{h_j} \lambda_{kj} X_{kj} \right) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{h_j} \lambda_{kj} A_j X_{kj} = b_0$ .... (8.58)

หากเรากำหนดให้

$d_{kj} = A_j X_{kj}$ และ $f_{kj} = C_j X_{kj}$ ทุกค่า j, k

แทนผลที่ได้ใน (8.57) และ (8.58) จะเห็นได้ว่า ปัญหา (8.51) – (8.53) สามารถเขียนในรูปแบบที่สมมูลย์ (equivalent) กัน กลายเป็นปัญหาที่มี $m_0 + r$ ข้อจำกัด ดังต่อไปนี้

หาค่าสูงสุดของ $P = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{h_j} f_{kj} \lambda_{kj}$

โดยมีข้อจำกัด

$$\sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{h_j} \lambda_{kj} d_{kj} = b_0 \qquad \text{..........(8.60)}$$

$$\sum_{k=1}^{h_j} \lambda_{kj} = 1, \; j = 1, \ldots, r$$

และ $\lambda_{kj} \geqslant 0$ ทุกค่า j, k

หากเราเขียนข้อจำกัดของ (8.60) ให้อยู่ในรูปแบบดังต่อไปนี้

$$\sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{h_j} \lambda_{kj} q_{kj} = b \qquad \text{..........(8.61)}$$

แล้ว $q_{kj} = (d_{kj}, e_j)$ ในเมื่อ e_j เป็นเวคเตอร์เอกลักษณ์ที่ประกอบด้วยค่า r ค่า และ $b = (b_o, 1')$ ในเมื่อ $1'$ เป็นผลบวกของเวคเตอร์ที่ประกอบด้วย r ค่า

กำหนดให้ B แทนเมทริคซ์ฐานของ (8.61) มีขนาด $m_o + r$

λ_B แทนเวคเตอร์ที่ประกอบด้วยตัวแปรในฐาน

และ f_B แทนเวคเตอร์ที่ประกอบด้วย ส.ป.ส. ในฟังก์ชันเป้าหมายของ (8.60) ที่สมนัยกันกับ B สมมติว่า เรามีคำตอบที่เป็นไปได้ขั้นฐาน $\lambda_B = B^{-1}b$ ต่อปัญหา (8.61)

ให้ $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) = f_B B^{-1}$

โดยที่ σ_1 มีส่วนประกอบของ m ตัวแรกของ σ และ σ_2 มีส่วนประกอบ r ที่เหลือของ σ อาศัยสูตรการแปลงรูป (8.59) เราจะได้

$$\begin{aligned} s_{kj} - f_{kj} &= f_B B^{-1} q_{kj} - f_{kj} \\ &= \sigma_1 d_{kj} + \sigma_{2j} - f_{kj} \qquad \text{..........(8.62)} \\ &= (\sigma_1 A_j - C_j) X_{kj} + \sigma_{2j} \end{aligned}$$

ในเมื่อ σ_{2j} เป็นส่วนประกอบตัวที่ j ของ σ_2

พิจารณาค่าของ $s_{kj} - f_{kj}$ ทุกค่าของ k และ j หากไม่มีค่าใดเป็นลบ แสดงว่า คำตอบที่เป็นไปได้ขั้นฐานที่กำหนดให้ เป็นคำตอบอุตมะ (คำตอบที่ดีที่สุด) แล้ว หากมีค่าใดเป็นลบ ให้หาค่าที่ต่ำสุด เราจะได้ค่าต่ำสุดของ $(s_{kj} - f_{kj})$ ทุกค่าของ k และ j จาก

$$\text{ค่าต่ำสุด} \left\{ \underset{k}{\text{ค่าต่ำสุด}} (s_{k1} - f_{k1}), \underset{k}{\text{ค่าต่ำสุด}} (s_{k2} - f_{k2}), \ldots, \underset{k}{\text{ค่าต่ำสุด}} (s_{kr} - f_{kr}) \right\} \quad \text{...(8.63)}$$

ทำซ้ำครั้งต่อไป

ถ้าเราหวนกลับไปดู (8.62) จะเห็นได้ว่า สำหรับค่า j ที่กำหนดให้ ค่าต่ำสุด $(s_{kj} - f_{kj})$ จะเกิดขึ้นที่จุดปลายสุดของ convex set ของคำตอบที่เป็นไปได้ต่อ $B_j \underline{X}_j = \underline{b}_j$ และค่าต่ำสุดที่ได้นี้จะมาจากผลบวกของ σ_{2j} กับค่าอุตมะของฟังก์ชันเป้าหมายในปัญหา

หาค่าต่ำสุดของ $P = (\sigma_1 A_j - \underline{C}_j) \underline{X}_j$

โดยมีข้อจำกัด $B_j X_j = b_j$ และ $X_j \geq 0$ ....(8.64)

ยิ่งกว่านั้น คำตอบอุตมะต่อปัญหา (8.64) ทำให้ได้จุดปลายสุด X_{kj} ที่สมนัยกับค่าต่ำสุด $(s_{kj} - f_{kj})$ อาศัย X_{kj} ที่ได้นี้ และใช้สูตร (8.59) เราจะได้ d_{kj}, f_{kj} ที่สมนัยกัน และผลที่ตามมาคือ q_{kj} ซึ่งก็เท่ากับว่า เราจะหาค่าต่ำสุดของ $(s_{kj} - f_{kj})$ ทุกค่า k และ j ได้จากการแก้ปัญหา (8.64) ปัญหานั่นเอง

หากเรามี P_j^* เป็นค่าอุตมะของ P_j ในปัญหาที่ j ของ (8.64) คำนวณค่า $P_j^* + \sigma_{2j}$ จะได้ว่า

$$\underset{k,j}{\text{ค่าต่ำสุด}}\ (s_{kj} - f_{kj}) = \underset{j}{\text{ค่าต่ำสุด}}\ (P_j^* + \sigma_{2j}) = P_s^* + \sigma_{2s} \qquad \text{..........(8.65)}$$

กำหนดให้ X_{rs}^* เป็นจุดปลายสุดอุตมะ นั่นก็คือ จุดที่ให้คำตอบที่ดีที่สุด ของ (8.64) เมื่อ $j = s$ การทำซ้ำครั้งต่อไป จะได้ฐานใหม่ประกอบด้วย $q_{rs} = (d_{rs}, e_s)$ ในเมื่อ $d_{rs} = A_sX_{rs}^*$ และ $f_{rs} = C_sX_{rs}^*$ จะได้ปัญหา (8.60) ชุดใหม่ หาค่าของ $\hat{B}^{-1}$, $\hat{\sigma}$, $\hat{\lambda}_B$ ซึ่งเป็นค่าที่ได้ใหม่ของ B^{-1}, σ, λ_B นำค่าที่ได้ไปใช้ในการพิจารณาเซทใหม่ของฟังก์ชันเป้าหมายใน (8.64) ทำซ้ำกระบวนการเดิม จนกว่าจะได้คำตอบอุตมะ

หมายเหตุ การหาคำตอบอุตมะของแต่ละปัญหาย่อย หรือของปัญหาเดิม จะใช้วิธีการซิมเพลกซ์ หรือวิธีการซิมเพลกซ์ปรับปรุงก็ได้ แต่ทั่วไปจะใช้วิธีหลัง ซึ่งถือว่ามีประสิทธิภาพมาก สำหรับการหาคำตอบที่เป็นไปได้ขั้นฐานชุดแรก เราใช้วิธีการแบบเดียวกัน นั่นก็คือ พยายามจัดให้ได้เมทริคซ์ฐานเริ่มแรก เป็นเมทริคซ์เอกลักษณ์ และเช่นเดียวกัน หากจำเป็นต้องใช้ตัวแปรเทียม เราจะใช้วิธีการ Two-Phase ในการแก้ปัญหา ซึ่งพอจะสรุปขั้นตอนในการแก้ปัญหา โดยการใช้หลักการแยกปัญหาการโปรแกรม ได้ดังต่อไปนี้

สรุปเทคนิคสำหรับขั้นตอนวิธีการแยก

เริ่มต้นคำตอบชุดแรกของปัญหาย่อยที่ j ใน (8.53) ด้วยการหาจุดปลายสุดจุดแรกที่ประกอบด้วยตัวแปรควบคุมได้ของแต่ละปัญหาย่อยเป็น 0 แปลงตัวแบบให้อยู่ในรูป (8.60) สร้างตารางแรก จะมี $B = I$ (อย่าลืมว่า B จะต้องมีขนาด $m_0 + r + 1$) $\lambda_B = \underline{b}$ และ $\sigma = C_B$ ต่อไปพิจารณาเวคเตอร์ที่จะเข้ามาในฐาน ทำต่อขั้นที่ 1 (ในที่นี้ เราใช้วิธีการซิมเพลกซ์ปรับปรุงในการแก้ปัญหา)

ขั้นที่ 1

คำนวณหา σ_1A_j จัดตัวแบบของปัญหาย่อย j ในรูป (8.64) หาคำตอบอุตมะของแต่ละ

ปัญหา สมมติได้

$$P_j^* = \underset{j}{\text{ค่าต่ำสุด}}\ P_j$$

ขั้นที่ 2

คำนวณหา $P_j^* + \sigma_{2j}, j = 1, \ldots, r$ พิจารณาผลที่ได้

2.1 ถ้า $P_j^* + \sigma_{2j} \geq 0$ ทุก ๆ j

ทำต่อขั้นที่ 4

2.2 ถ้ามี $P_j^* + \sigma_{2j} < 0$ เลือกค่าต่ำสุด สมมติได้

$$P_s^* + \sigma_{2s} = \text{ค่าต่ำสุด}\ (P_j^* + \sigma_{2j})$$

ทำต่อขั้นที่ 3

ขั้นที่ 3

หากเรามี X_{ts} เป็นคำตอบอุตมะของปัญหาย่อยที่ s อาศัยผลที่ได้นี้ในการแปลงค่า ซึ่งจะได้

$$d_{ts} = A_s X_{ts},\ f_{ts} = C_s X_{ts} \ \text{และ}\ q_{ts} = (-f_{ts}, d_{ts}, e_s)$$

นิยาม $Y_{ts} = [y_{ts}^0, y_{ts}^1, \ldots, y_{ts}^{m_0+r+1}]$ เป็นคอลัมน์เวคเตอร์ และจะหาค่าได้จาก

$$Y_{ts} = B^{-1} q_{ts}$$

เอาค่าที่ได้นี้ ใส่ลงในคอลัมน์สุดท้ายของตาราง ขั้นต่อไป ดำเนินการหาเวคเตอร์ที่จะเลือกออกจากฐาน เปลี่ยนตารางใหม่ ซึ่งจะได้คำตอบฐานชุดใหม่ต่อปัญหา (8.60) การเปลี่ยนแปลงจะทำได้โดยวิธีการเดียวกัน กับที่ได้กล่าวมาแล้วในวิธีการซิมเพลกซ์ หรือวิธีการซิมเพลกซ์ปรับปรุง แล้วแต่ว่าเราเลือกใช้วิธีการใด ต่อจากนั้นกลับไปทำขั้นที่ 1 ใหม่

ขั้นที่ 4

ตารางที่ได้จะเป็นตารางสุดท้ายของปัญหาเดิม ค่า λ_{00} ที่ได้จะเป็นค่าสูงสุด แปลงคำตอบที่ได้จากตารางสุดท้ายนี้ ไปเป็นคำตอบของตัวแปรเดิม โดยใช้สูตร (8.55)

กระบวนการคำนวณดังกล่าว แสดงให้เห็นได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 8.3

จงหาคำตอบอุตมะต่อปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นข้างล่างนี้ โดยใช้หลักการแยกปัญหา

หาค่าสูงสุดของ $P = x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4$

โดยมีข้อจำกัด

$$
\begin{aligned}
x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 &\leq 6 \\
x_2 + 3x_3 - x_4 &\leq 4 \\
3x_1 + 2x_2 &\leq 12 \\
-x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\
3x_3 + x_4 &\leq 12 \\
x_3 + 2x_4 &\geq 8 \\
x_j \; (j = 1,2,3,4) &\geq 0
\end{aligned}
$$

วิธีทำ

เปลี่ยนข้อจำกัดที่ 3 ถึง 6 ให้อยู่ในรูปสมการ โดยบวกด้วย x_5, x_6, x_7, x_8 แยกตัวแบบเป็น หาค่าสูงสุดของ $P = \underline{C}_1\underline{X}_1 + \underline{C}_2\underline{X}_2$

โดยมีข้อจำกัด

$$
\begin{aligned}
A_1\underline{X}_1 + A_2\underline{X}_2 &= b_0 \\
B_1\underline{X}_1 &= b_1 \\
B_2\underline{X}_2 &= b_2 \\
\underline{X}_1 \;,\; \underline{X}_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

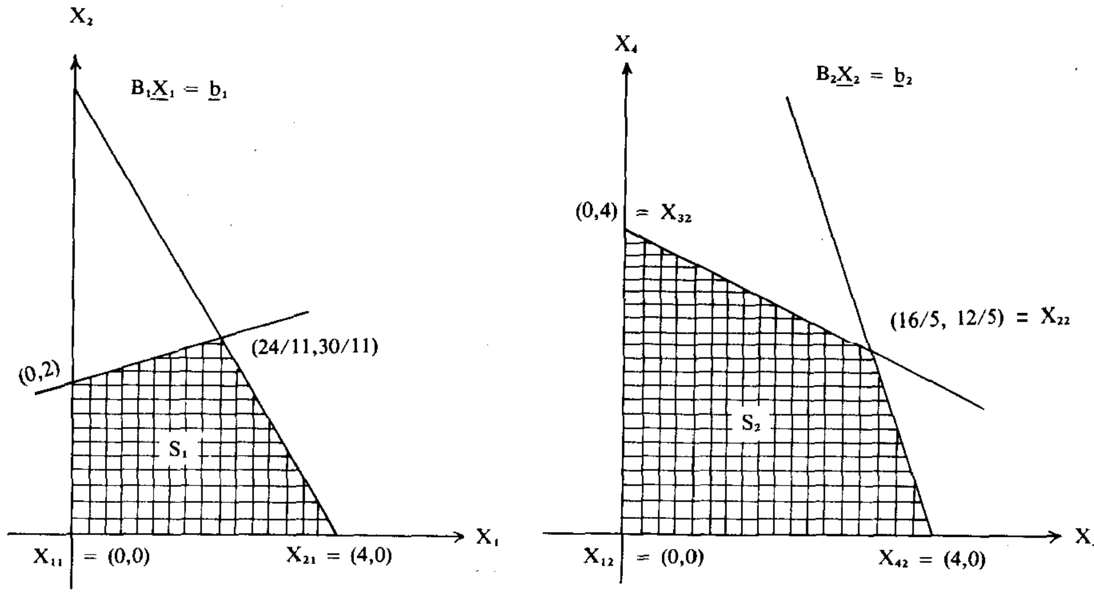
ในเมื่อ $X_1 = (x_1\, x_2\, x_5\, x_6),\; X_2 = (x_3\, x_4\, x_7\, x_8)'$

$$
A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b_0 = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}
$$

$$
A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \end{bmatrix}
$$

$$
C_1 = [1 \;\; -1 \;\; 0 \;\; 0], \quad C_2 = [3 \;\; 2 \;\; 0 \;\; 0], \quad b_2 = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \end{bmatrix}
$$

ด้วยเหตุที่ปัญหาย่อย แต่ละปัญหา มีตัวแปรควบคุมได้ 2 ตัว วิธีที่สะดวกและง่ายที่สุด ในการหาจุดปลายก็คือ การเขียนกราฟ หาบริเวณคำตอบที่เป็นไปได้ ปรากฏผลดังต่อไปนี้



เราเลือกจุดปลายสุดจุดแรกของแต่ละปัญหาเป็นจุดเริ่มต้น นั่นก็คือ เลือกคำตอบชุดแรกจาก

$X_{11} = (0\ 0\ 12\ 6)$ และ $X_{12} = (0\ 0\ 12\ 8)$

แปลงรูปตัวแปร โดยใช้สูตร (8.55) และ (8.59) แล้วจัดตัวแบบของปัญหาเดิม ในรูป (8.60) เปลี่ยนอสมการข้อจำกัดของตัวแบบใหม่ที่ได้นี้ เป็นสมการโดยบวกด้วย λ_{01} และ λ_{02} ตามลำดับ เปลี่ยนฟังก์ชันเป้าหมาย เป็นสมการข้อจำกัดหนึ่ง กำหนด $P = \lambda_{00}$ เราจะได้ระบบสมการต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
\lambda_{00} - \sum_k f_{k1}\lambda_{k1} - \sum_k f_{k2}\lambda_{k2} &= 0 \\
\sum_k d_{k1}\lambda_{k1} + \sum_k d_{k2}\lambda_{k2} &\leqslant \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{..........(8.66)} \\
\sum_k \lambda_{k1} &= 1 \\
\sum_k \lambda_{k2} &= 1 \\
\text{และ} \qquad \lambda_{k1},\ \lambda_{k2} &\geqslant 0
\end{aligned}
$$

เมื่อเราเริ่มต้นคำตอบชุดแรก โดยมี X_{11} และ X_{12} เป็นเวคเตอร์ของตัวแปรฐาน เราจะได้ตารางที่ 1 ของ (8.66) ดังนี้

ตัวแปรฐาน	β_1	β_2	β_3	β_4	λ_B
λ_{00}	0	0	0	0	0
λ_{01}	1	0	0	0	6
λ_{02}	0	1	0	0	4
λ_{11}	0	0	1	0	1
λ_{12}	0	0	0	1	1

ผลที่ได้จากตาราง จะเห็นว่า $\sigma_1 = (0, 0)$ และ $\sigma_2 = (0\ 0)$ ดังนั้นเราจะได้ฟังก์ชันเป้าหมายของปัญหาย่อย 1 และ 2 ตามลำดับ ดังนี้ (ใช้สูตร $P_j = (\sigma_1 A_j - C_j)X_j$)

(1) หาค่าต่ำสุดของ $P_1 \;=\; -x_1 + x_2$ และ

(2) หาค่าต่ำสุดของ $P_2 \;=\; -3x_3 - 2x_4$

จากกราฟ หน้า 425 จะพบว่า จุดอุตมะของ (1) และ (2) ตามลำดับ คือ

$X_{21} = (\ 4 \quad 0 \quad 0 \quad 10)$ มี $P_1^* = -4 = P_1^* + \sigma_{21}$

และ $X_{22} = (\ \frac{16}{5} \quad \frac{12}{5} \quad 0 \quad 0)$ มี $P_2^* = -\frac{72}{5} = P_2^* + \sigma_{22}$

สรุปผลได้ว่า $P_2^* + \sigma_{22} =$ ค่าต่ำสุด $(-4, -72/5) = -72/5$ ขั้นต่อไป เป็นการคำนวณหา f_{22} และ d_{22} จะได้ว่า

$$f_{22} = C_2X_{22} = (3\ 2\ 0\ 0)(\frac{16}{5}\ \ \frac{12}{5}\ \ 0\ 0)' = -\frac{72}{5}$$

$$d_{22} = A_2X_{22} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16/5 \\ 12/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 36/5 \end{pmatrix}$$

นำไปหา $Y_{22} = B^{-1}q_{22}$ ซึ่งในที่นี้ จะเท่ากับ q_{22} เพราะว่า $B^{-1} = I$ ผลที่ได้ ใส่ลงในคอลัมน์สุดท้ายของตารางที่ 1 ดังนั้น เราจะได้ตารางที่ 1

ตารางที่ 1

ตัวแปรฐาน	β_1	β_2	β_3	β_4	λ_B	Y_{22}
λ_{00}	0	0	0	0	0	72/5
λ_{01}	1	0	0	0	6	- 4
λ_{02}	0	1	0	0	4	36/5
λ_{11}	0	0	1	0	1	0
λ_{12}	0	0	0	1	1	1

หาอัตราส่วนระหว่าง λ_{Bi} กับ $y^1_{22}, y^i_{22} > 0, i = 2, 4$

ผลปรากฏว่าได้

$$\lambda_{B2}/y^2_{22} = \text{ค่าต่ำสุด} \left(\frac{4}{36/5}, 1\right) = \frac{5}{9}$$

จึงสรุปได้ว่า จะต้องหาคำตอบชุดใหม่ โดยมี $\lambda_{B2} = \lambda_{22}$

หา B^{-1} และ λ_B ชุดใหม่ โดยใช้สูตร (8.34), (8.35) จะได้

$$\left|B^{-1} \;\vdots\; \lambda_B\right| = \left|\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 5/9 & 0 & 0 & 74/9 \\ 0 & 0 & 5/36 & 0 & 0 & 5/9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5/36 & 0 & 1 & 4/9 \end{array}\right|$$

ผลที่ได้ ยกเว้นคอลัมน์แรกของ B^{-1} เขียนลงในตารางที่ 2 คอลัมน์ที่ 2-6 ตัวแปรฐานแถวที่ 3 ในคอลัมน์แรก เปลี่ยนเป็น λ_{22} นอกนั้นเหมือนเดิม

จากตารางที่ 2 เราจะได้ $\sigma_1 = (0, 2), \sigma_2 = (0, 0)$ ฟังก์ชันเป้าหมายของปัญหาย่อยทั้ง 2 จะเปลี่ยนไปเป็น

$$P_1 = \left[(0 \quad 2)\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - (1 \quad -1) \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \text{-x,+3x*}$$

$$P_2 = \left[(0 \quad 2)\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - (3 \quad 2) \right] \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 3x_3 - 4x_4$$

ในที่นี้ เราไม่ได้พิจารณา 2 คอลัมน์สุดท้ายของ A_1, A_2 และ 2 ตัวสุดท้ายของ C_1, C_2 เนื่องจากมีค่าเป็น 0 จึงไม่มีผลต่อการเปลี่ยนแปลงอันใด

เมื่อมาถึงชั้นนี้ จะเห็นได้ว่า ฟังก์ชันเป้าหมายของปัญหาย่อยทั้งสองเปลี่ยนแปลงไป แต่ข้อจำกัดคงเดิม ดังนั้นบริเวณคำตอบที่เป็นไปได้ของแต่ละปัญหาย่อย (S_1, S_2) ไม่เปลี่ยน ผลสุดท้ายเราจะได้คำตอบอุดมะชุดใหม่ของปัญหาที่ 1 และ 2 ตามลำดับ ดังนี้

$X_{21} = (4 \quad 0 \quad 0 \quad 10)$ มี $P_1^* = -4 \quad = P_1^* + \sigma_{21}$

และ $X_{32} = (0 \quad 4 \quad 8 \quad 0)$ มี $P_2^* = -16 \quad = P_2^* + \sigma_{22}$

เปรียบเทียบค่า $P_j^* + \sigma_{2j}$ จะได้

$P_2^* + \sigma_{22} =$ ค่าต่ำสุด $(-4, \quad 16) = -16$

เราจึงคำนวณหา d_{32}, f_{32} และผลที่ตามมาคือ q_{32} เพื่อนำไปใช้หาเวคเตอร์ที่จะออกจากฐานต่อไป เราได้

$$d_{32} = A_2X_{32} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}, \; f_{32} = C_2X_{32} = (-3 \;\; 2)\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 8$$

$$Y_{32} = B_{32}^{-1} q_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5/9 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5/36 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5/36 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad = \quad \begin{vmatrix} -16 \\ 16/9 \\ -5/9 \\ 0 \\ 14/9 \end{vmatrix}$$

ผลที่ได้ เขียนลงในคอลัมน์สุดท้ายของตารางที่ 2 ดังต่อไปนี้

ตารางที่ 2

ตัวแปรฐาน	β_1	β_2	β_3	β_4	λ_B	Y_{32}
λ_{00}	0	2	0	0	8	-16
λ_{01}	1	5/9	0	0	74/9	16/9
λ_{02}	0	5/36	0	0	5/9	$-5/9$
λ_{11}	0	0	1	0	1	0
λ_{12}	0	$-5/36$	0	1	4/9	14/9

หาอัตราส่วนระหว่าง λ_{Bi} กับ $y^i_{32} y^i_{32} > 0, i = 1, 4$ เปรียบเทียบค่าที่ได้ ปรากฏว่า

$$\lambda_{B4}/y^4_{32} = \text{ค่าต่ำสุด} \left(\frac{74/9}{16/9}, \frac{4/9}{14/9}\right) = \frac{2}{7}$$

หาคำตอบชุดต่อไป โดยมี $\lambda_{B4} = \lambda_{32}$

หา B^{-1} และ λ_B ของคำตอบชุดใหม่ โดยใช้สูตร (8.34), (8.35) จะได้

$$[B^{-1} \mid \lambda_B] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 4/7 & 0 & 72/7 & 88/7 \\ 0 & 1 & 5/7 & 0 & -8/7 & 54/7 \\ 0 & 0 & 5/56 & 0 & 5/14 & 5/7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5/56 & 0 & 9/14 & 2/7 \end{array}\right]$$

นำผลที่ได้ ยกเว้นคอลัมน์แรกของ B^{-1} เขียนลงในตารางที่ 3 เราจะได้

$\sigma_1 = (0, 4/7)$ และ $\sigma_2 = (0, 72/7)$

ดังนั้น ฟังก์ชันเป้าหมายของปัญหาย่อยจะเปลี่ยนไปเป็น

$$(1) \quad P_1 = \left[[0 \quad 4/7] \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [1 \quad 1] \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 + 11/7\, x_2$$

$$(2) \quad P_2 = \left[[0 \quad 4/7] \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad [3 \quad 2] \right] \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = -9/7\, x_3 - 18/7\, x_4$$

อ่านผลจากกราฟ เราจะได้ คำตอบอุตมะของแต่ละปัญหาคือ

(1) คำตอบอยู่ที่จุดเดิม ซึ่งมี $P_1^* = -4$ สำหรับ (2) จะมีคำตอบอุตมะ 2 ชุด คือ ที่จุด X_{22}, X_{32} โดยมี $P_2^* = -72/7$

ML $P_j^* + \sigma_{2j} = (-4 \; -\frac{72}{7}) + (0 \; \frac{72}{7}) = (-4 \;\; 0)$

ได้ $P_1^* + \sigma_{21}$ = ค่าต่ำสุด $(-4, 0) = -4$

ใช้จุด X_{21} ในการหา d_{21}, q_{21} และ Y_{21}

$$d_{21} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \; f_{21} = 4$$

$$Y_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4/7 & 0 & 72/7 \\ 0 & 1 & 5/7 & 0 & -8/7 \\ 0 & 0 & 5/56 & 0 & 5/14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5/56 & 0 & 9/14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ผลที่ได้เขียนลงในคอลัมน์สุดท้ายของตารางที่ 3 ดังต่อไปนี้

ตารางที่ 3

ตัวแปรฐาน	β_1	β_2	β_3	β_4	λ_B	Y_{21}
λ_{00}	0	4/7	0	72/7	88/7	-4
λ_{01}	1	5/7	0	-8/7	54/7	4
λ_{22}	0	5/56	0	5/14	5/7	0
λ_{11}	0	0	1	0	1	1
λ_{32}	0	-5/56	0	9/14	2/7	0

หาอัตราส่วนระหว่าง λ_{Bi} กับ y_{21}^i, $y_{21}^i > 0, i = 1, 3$ เปรียบเทียบค่าที่ได้ ปรากฏว่า

λ_{B3}/y_{21}^3 = ค่าต่ำสุด $(\frac{54/7}{4}, 1) = 1$

หาคำตอบชุดใหม่ต่อไป โดยมี $\lambda_{B3} = \lambda_{21}$

หา B^{-1} และ λ_B ของตารางใหม่ โดยใช้สูตร (8.34), (8.35) จะได้

$$[B^{-1} \mid \lambda_B] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 4/7 & 4 & 72/7 & 116/7 \\ 0 & 1 & 5/7 & -4 & -8/7 & 26/7 \\ 0 & 0 & 5/56 & 0 & 5/14 & 5/7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5/56 & 0 & 9/14 & 2/7 \end{array}\right]$$

นำผลที่ได้ ยกเว้นคอลัมน์แรกของ B^{-1} เขียนลงในตารางที่ 4

เราจะได้ $\sigma_1 = (0, 4/7)$ และ $\sigma_2 = (0, 72/7)$

ฟังก์ชันเป้าหมายของปัญหาย่อย จะเหมือนเดิม ดังนั้น คำตอบอุตมะของแต่ละปัญหาย่อย จะเป็นคำตอบชุดเดิม แต่ค่าของ $P_j^* + \sigma_{2j}$ จะเปลี่ยนเป็น

$$P_1^* + \sigma_{21} = -4 + 4 = 0 \quad \text{และ} \quad P_2^* + \sigma_{22} = -\frac{44}{7} + \frac{72}{7} = 4$$

ไม่มีค่าใดเป็นลบ แสดงว่า ตารางที่ 4 เป็นตารางที่ให้คำตอบอุตมะแล้ว เราแปลงผลที่ได้ให้เป็นคำตอบของปัญหาเดิม โดยใช้สูตร (8.55) จะได้ว่า

$$X_1 = \lambda_{21}X_{21} = (4\ 0\ 0\ 1\ 0)$$

$$X_2 = \lambda_{22}X_{22} + \lambda_{32}X_{32} = \frac{5}{7}\left(\frac{16}{5}\ \frac{12}{5}\ 0\ 0\right) + \frac{2}{7}(0\ 4\ 8\ 0)$$

$$= \left(\frac{16}{7}\ \frac{20}{7}\ \frac{16}{7}\ 0\right)$$

สรุปได้ว่า เราจะได้ค่า $P_{\text{สูงสุด}} = \frac{116}{7}$ โดยมี $x_1 = 4$, $x_3 = 16/7$, $x_4 = 20/7$

8.3 การวิเคราะห์ความไว (Sensitivity Analysis)

การวิเคราะห์ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น เท่าที่กล่าวมาแล้ว เราถือว่า เรารู้รายละเอียดต่าง ๆ ของข้อมูลดีอยู่แล้ว เช่นรายละเอียดเกี่ยวกับ ส.ป.ส. c_j, a_{ij} และค่าคงที่ b_i แต่มีปัญหาเป็นจำนวนมาก ที่ค่าดังกล่าวเหล่านี้ ได้มาจากการประมาณค่าที่ดีที่สุด หรืออาจเป็นค่าจริง แต่มีการ

เปลี่ยนแปลงในค่าตัวเลขอยู่ตลอดเวลา ทั้งนี้แล้วแต่ลักษณะของข้อมูลนั้น ตัวอย่างที่จะเห็นได้ชัด เช่นในปัญหาการโภชนาการ ตัวอย่างของปัญหาที่เกี่ยวกับเรื่องอาหารไก่ ราคาของอาหารมักจะมีการเปลี่ยนแปลงไปในแต่ละเดือน เป็นต้น นอกจากนี้เราอาจจะพบว่า ภายหลังการตัดสินใจได้ทางเลือกที่เหมาะสมแล้ว เกิดมีค่า c_i หนึ่งตัวหรือมากกว่า ไม่ถูกต้อง หรืออาจจะตรวจพบว่าค่าคงที่ของข้อจำกัดบางข้อผิดพลาด อาจจะเกิดความผิดพลาดในค่า a_{ij} เช่นจุดทศนิยมผิดที่ เป็นต้น ในบางครั้งอาจจะพบว่า ตัวแปรบางตัวของปัญหาที่ต้องการศึกษา หรือข้อจำกัดในบางกรณีขาดหายไป หรือไม่ได้นำเข้ามาในปัญหา ด้วยเหตุดังกล่าวมานี้ เราจึงต้องใช้การวิเคราะห์ความไวเพื่อสืบสวนถึงสิ่งที่เกี่ยวข้องกับการเปลี่ยนแปลงในคำตอบที่เหมาะสม อันเนื่องมาจากการเปลี่ยนแปลงของตัวเลขข้อมูล ซึ่งเราจะได้ศึกษาถึงการวิเคราะห์ ที่จะนำไปตัดสินว่า ค่าของ ส.ป.ส.ที่กำหนดให้ ควรจะมีค่าในช่วงใด จึงจะทำให้คำตอบอุตมะที่ได้แต่เดิม ยังคงเดิม

8.3.1 การเปลี่ยนแปลงในเวคเตอร์

สมมติเราได้คำตอบอุตมะ

$$\underline{X}_B = B^{-1}\underline{b}\,,\ P = \underline{C}_B'\underline{X}_B$$

ต่อปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น

$$A\underline{X} = \underline{b}\,,\ \underline{X} \geqslant 0,\ \text{ค่าสูงสุด } P = \underline{C}'\underline{X}$$

เมื่อเกิดมีค่า c_j บางค่าในเวคเตอร์ $\underline{C}$ เปลี่ยนแปรไปเป็น

$$\underline{C}^+ = \underline{C} + \varnothing\underline{f} \qquad \text{...........(8.67)}$$

เมื่อ f เป็นรายละเอียดในรูปเวคเตอร์ใด ๆ และ $\varnothing$ เป็นพารามีเตอร์เชิงสกาลาร์ ที่ไม่เป็นลบ เราต้องการหาค่า $\varnothing$ ที่โตที่สุด ที่ทำให้คำตอบอุตมะที่ได้แต่เดิม ยังคงเป็นคำตอบที่เหมาะสมเช่นเดิม เราใช้ $c_j^+ - s_j^+$ แทนค่า $c_j - s_j$ เมื่อ C เปลี่ยนเป็น C^+ ดังนั้นค่าวิกฤติของ $\varnothing$ ที่ทำให้การเพิ่มขึ้นในค่า $\varnothing$ ใด ๆ เป็นผลให้ $c_j^+ - s_j^+$ ตั้งแต่ 1 ตัวขึ้นไป มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ 0 เรามี

$$\begin{aligned} c_j^+ - s_j^+ &= c_j + \varnothing f_j - (C_B + \varnothing f_B)\,\underline{X}_j \\ &= c_j - s_j + \varnothing(f_j - f_B X_j) \leqslant 0 \end{aligned}$$

ในเมื่อ f_B เป็นเวคเตอร์ที่มีส่วนประกอบของ f ที่สมนัยกับส่วนประกอบของ $\underline{C}$ ใน $\underline{C}_B$ ถ้าทุกค่าของ $f_j - f_B\underline{X}_j$ ไม่เป็นลบ แสดงว่า เราจะกำหนด $\varnothing$ โตเท่าใดก็ได้ โดยไม่ทำให้เสียความเหมาะสมไป อย่างไรก็ตาม หากมี $f_j - f_B\underline{X}_j$ 1 ค่าหรือมากกว่าเป็นบวก และ $\varnothing \geqslant 0$ โตพอสมควร ค่าวิกฤติ $\varnothing_c \geqslant 0$ จะถูกกำหนดโดย

$$\varnothing_c^+ = \frac{s_k - c_k}{f_k - f_B X_k} = \text{ค่าต่ำสุด } \frac{s_j - c_j}{f_j - f_B \underline{X}_j}, \; f_j - f_B \underline{X}_j > 0 \qquad \text{..........(8.68)}$$

หาก $\varnothing > \varnothing_c^+$ คำตอบปัจจุบันจะไม่เป็นคำตอบอุตมะ (คำตอบที่เหมาะสม) เวคเตอร์แรกที่จะใส่เข้าไปในฐานเพื่อรักษาความเหมาะสม เมื่อค่า $\varnothing$ คือ $\varnothing_c$ ก็คือ $\underline{a}_k$ ที่ได้จาก (8.68) หรือเป็นเวคเตอร์หนึ่งของ $\underline{a}_k$ ถ้ามีหลายเวคเตอร์ ซึ่งทำให้คำตอบอุตมะมีจริง เมื่อ $\varnothing > \varnothing_c$

ถ้าทุกค่าของ $f_j - f_B x_j$ เป็นลบ แสดงว่า เราจะลดค่า c_j บางค่าในเวคเตอร์ $\underline{C}$ ให้มากที่สุดเท่าใดก็ได้ โดยไม่ทำให้คำตอบที่ได้เปลี่ยนไป นั่นคือ $\varnothing \leqslant 0$ ค่าวิกฤติ $\varnothing_c^- \leqslant 0$ จะถูกกำหนดโดย

$$\varnothing_c^- = \text{ค่าสูงสุด } \frac{s_j - c_j}{f_j - f_B X_j}, \; f_j - f_B X_j < 0 \qquad \text{..........(8.86)}$$

หาก $\varnothing < \varnothing_c^-$ คำตอบที่ได้จะไม่เป็นคำตอบที่เหมาะสม เราต้องปรับคำตอบเสียใหม่

ถ้าค่าของ $f_j - f_B X_j = 0$ ค่าของ $\varnothing_c^- = \infty$ ชี้ให้เห็นว่า หาก c_j ที่เปลี่ยนค่า เป็น ส.ป.ส. ของตัวแปรนอกฐาน x_j ค่าที่จะเปลี่ยนแปรได้จะอยู่ในช่วง $\leqslant s_j - c_j$ ของตัวแปรนอกฐาน x_j นั้น นั่นเอง กล่าวโดยสรุป ค่าของ c_j จะเปลี่ยนแปรไปเป็น

$$c_j + \varnothing_c^- \leqslant c_j \leqslant c_j + \varnothing_c^+ \quad \text{เมื่อ } x_j \text{ เป็นตัวแปรฐาน}$$

$$c_j \leqslant s_j - c_j \quad \text{เมื่อ } x_j \text{ เป็นตัวแปรนอกฐาน}$$

ตัวอย่างที่ 8.4

ค่าสูงสุด $P = 25x_1 + 35x_2 + 40x_3$ (กำไร : บาท)

โดยมีข้อจำกัด

$$x_1 + 3x_2 + x_3 \leqslant 1000 \quad \text{(เวลาใช้งานได้ของเครื่องจักร A)}$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leqslant 1200 \quad \text{(เวลาใช้งานได้ของเครื่องจักร B)}$$

$$\frac{5}{2}x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 2400 \quad \text{(ปริมาณที่มีอยู่ของวัตถุดิบ)}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$$

ในเมื่อ x_1, x_2, x_3 เป็นปริมาณสินค้าชนิดที่ 1, 2 และ 3 ตามลำดับ จงหาแผนการผลิตที่ดีที่สุด และจงพิจารณาว่า กำไรต่อหน่วยของสินค้าชนิดที่ 3 จะเปลี่ยนแปรได้แค่ไหน โดยไม่ทำให้แผนการผลิตเปลี่ยนแปลง

วิธีทำ

เปลี่ยนตัวแบบเป็นรูปมาตรฐาน โดยใช้ x_4, x_5 และ x_6 เป็น slack variables หาคำตอบโดยใช้วิธีการ simplex ได้ตารางสุดท้าย :-

ตัวแปรฐาน		c_j	25	35	40	0	0	0
x_i	c_i	คำตอบฐาน	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
x_1	25	800		4	0	2		0
x_3	40	200	0					0
x_6	0	200	0	−7	0	−4	3/2	1
P = 28000		s_j	25	60	40	10	15	0
		$c_j - s_j$	0	−25	0	−10	−15	0

แผนการผลิตที่ดีที่สุดคือ ผลิตสินค้าชนิดที่ 1 800 หน่วย ชนิดที่ 3 200 หน่วย ใช้เวลาเครื่องจักร A และ B หมดพอดี แต่มีวัตถุดิบเหลืออยู่ 200 ได้กำไร = 28,000 บาท

ต้องการพิจารณาการเปลี่ยนแปลงของ c_3 ที่ไม่มีผลกระทบต่อแผนการผลิต (เปลี่ยนแปลงเฉพาะค่าของกำไรเท่านั้น)

ในที่นี้ $f = (0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0)$ และ $f_B = (0\ 1\ 0)$

$$f_2 - f_B X_2 = 0 - (0\ 1\ 0)(4\ \ -1\ \ -7)' = 1$$

$$f_4 - f_B X_4 = 0 - (0\ 1\ 0)(2\ \ -1\ \ -4)' = 1$$

$$f_5 - f_B X_5 = 0 - (0\ 1\ 0)(-1\ \ 1\ \ \tfrac{3}{2})' = -1$$

ดังนั้น $\varnothing_c^+ =$ ค่าต่ำสุด $\left(\frac{25}{1}, \frac{10}{1}\right) = 10$

$$\varnothing_c^- = \frac{15}{-1} = -15$$

แสดงว่า แผนการผลิตจะคงเดิม ถ้ากำไรต่อหน่วยของสินค้า ชนิดที่ 3 อยู่ในช่วง 40-15 ถึง 40 + 10

นั่นคือ $25 \leqslant c_3 \leqslant 50$

ข้อสังเกต

พิจารณาค่าของ $f_j - f_B X_j$ จะเห็นว่า

$$f_j - f_B X_j = -x_{rj}$$

เมื่อ x_{rj} เป็น ส.ป.ส. ของตัวแปรนอกฐาน x_j ในแถว r ของตัวแปรฐาน x_i ซึ่งเรากำลังพิจารณาช่วงของ c_i ที่เป็นไปได้

ดังนั้น วิธีการพิจารณา การเปลี่ยนแปรค่าของ c_i เราอาจทำได้โดยการหาค่า $\varnothing_c^+$ และ $\varnothing_c^-$ จากตารางสุดท้าย ได้ดังนี้

$$\varnothing_c^+ = \text{ค่าต่ำสุด } \frac{c_j - s_j}{x_{rj}}, \; x_{rj} < 0$$

$$\varnothing_c^- = \text{ค่าสูงสุด } \frac{c_j - s_j}{x_{rj}}, \; x_{rj} > 0$$

2. เราอาจพิจารณาค่า $c_j - s_j$ (หรือ x_{oj}) ของตารางสุดท้าย เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงในค่า c_j ได้ดังนี้

(2.1) ถ้า c_t ของตัวแปรนอกฐาน x_t เปลี่ยนเป็น $c_t + \theta$ ค่าของ $c_t - s_t$ จะเปลี่ยนเป็น $c_t - s_t + \theta$ (หรือ $x_{ot} - \theta$) ถ้าค่านี้มีเครื่องหมายเหมือนเดิม แสดงว่า คำตอบไม่เปลี่ยนแปลง นอกเหนือจากนี้ ต้องหาคำตอบชุดใหม่ นั่นคือ ทำตารางต่อไป ใช้ x_t เป็นตัวแปรฐานใหม่

ตัวอย่างเช่น ถ้ากำไรของสินค้าชนิดที่ 2 เปลี่ยนเป็น 50 บาท/หน่วย นั่นคือ c_2 เปลี่ยนเป็น $c_2 + 15$ เราจะได้ $c_2 - s_2 = -25 + 15 = -10$ แสดงว่าแผนการผลิตไม่เปลี่ยนแปลง

(2.2) ถ้า c_r ของตัวแปรฐาน x_r เปลี่ยนเป็น $c_r + \theta$ ค่าของ $c_j - s_j$ จะเปลี่ยนเป็น $c_j - s_j - \theta x_{rj}$ (หรือ $x_{oj} + \theta x_{rj}$) ถ้าทุกค่ามีเครื่องหมายเหมือนเดิม แสดงว่า แผนการผลิตคงเดิม เปลี่ยนเฉพาะค่า P เท่านั้น ถ้าค่าใดมีเครื่องหมายตรงข้าม แสดงว่าแผนการผลิตเปลี่ยนแปลง ต้องทำตารางใหม่ต่อไป

ตัวอย่างเช่น ถ้ากำไรต่อหน่วยของสินค้าชนิดที่ 1 เปลี่ยนเป็น 20 บาท นั่นคือ c_1 เปลี่ยนเป็น $c_1 - 5$ เราจะได้ $c_j - s_j$, $j = 1, 2, \ldots, 6$ ตามลำดับ ดังนี้

$$0 \quad -25-(-5)4 \quad 0 \quad -10-(-5)2 \quad -15-(-5)(-1) \quad 0$$

ทุกค่า จะมีเครื่องหมายเหมือนเดิม แต่ $c_4 - s_4 = 0$ ซึ่งแสดงว่า มีคำตอบที่ดีที่สุดมากกว่า 1 ชุด นั่นเอง

ให้นักศึกษากลับไปพิจารณาการเปลี่ยนแปรของกำไรต่อหน่วยของสินค้าชนิดที่ 1 และของสินค้าชนิดที่ 3 ดูบ้าง ว่าจะมีค่าในช่วงใด จึงจะไม่มีผลกระทบต่อแผนการผลิตเดิม

ถ้านำผลที่ได้นี้ไปใช้ในปัญหาการขนส่ง จะพบว่า การพิจารณาการเปลี่ยนแปลงในค่าของ c_{ij} ตัวใด ก็คือ การพิจารณาค่า $c_{ij} - s_{ij}$ ของตารางสุดท้ายนั่นเอง ด้วยเหตุนี้ การพิจารณาการเปลี่ยนแปลงของ c_{ij} ในช่องใด เราใช้ $c_{ij} + \varnothing$ แล้วตรวจสอบค่า $c_{ij} - s_{ij}$ ในตารางสุดท้ายใหม่ ดูว่า $\varnothing$ ควรจะมีค่าได้มากที่สุดแค่ไหน จึงจะไม่มีผลกระทบต่อสายการผลิตเดิม

ตัวอย่างที่ 8.5

กำหนดตารางจัดสายขนส่งที่ดีที่สุด ดังนี้

โรงงาน \ ลูกค้า	ก		ข		ค		# ผลิตได้
1	5	400	6	100	12	1	500
2	8	10	10	11	4	600	600
3	7	5	3	500	8	400	900
# ที่ต้องการ		400		600		1000	

จงหาว่า อัตราค่าขนส่งจากโรงงาน 1 ไปให้ลูกค้า ก จะเปลี่ยนแปลงได้มากที่สุดเท่าใด โดยไม่ทำให้แผนการจัดส่งเปลี่ยนแปลง

วิธีทำ

เปลี่ยนค่า $c_{1ก}$ จาก 5 เป็น $5 + \varnothing$ หาค่า $c_{ij} - s_{ij}$ ของสายที่ไม่ได้ใช้ที่เกี่ยวข้องกับสาย (1, ก) จากตารางคือสาย (2, ก) และ (3, ก) จะได้ว่า

$$c_{2ก} - c_{1ก} + c_{1ข} - c_{3ข} + c_{3ค} - c_{2ค} \quad = \quad 10 - \varnothing \geqslant 0 \Rightarrow \varnothing \leqslant 10$$

$$c_{3ก} - c_{1ก} + c_{1ข} - c_{3ข} \quad = \quad 5 - \varnothing \geqslant 0 \Rightarrow \varnothing \leqslant 5$$

แสดงว่า ค่าของ $c_{1ก} \leqslant 5 + 5$

อัตราค่าขนส่งจากโรงงาน 1 ไปให้ลูกค้า ก ต้องมีค่าไม่เกิน 10 แผนการจัดส่งจึงจะคงเดิม

8.3.2 การเปลี่ยนแปลงในเวคเตอร์ $\underline{b}$

ในที่นี้ เราจะมาวิเคราะห์ว่า หากมีการเปลี่ยนแปลงค่าของ b ตามรายละเอียดที่ระบุไว้ จะมีการเปลี่ยนแปลงได้มากแค่ไหน ก่อนที่คำตอบที่เหมาะสมจะไม่เป็นคำตอบที่เป็นไปได้อีกต่อไป เรากำหนด

$$b^* = b + \theta r \qquad \text{..........(8.69)}$$

เมื่อ r เป็นรายละเอียดกำหนดในรูปเวคเตอร์ใด ๆ และ θ เป็นปริมาณสเกลาร์ เราต้องการหาค่าที่โตที่สุดของ θ ที่ทำให้เมทริคซ์ฐาน B ที่ได้ ยังคงให้คำตอบที่เป็นไปได้ ให้เรามาพิจารณา

$$\underline{X}_B^* = B^{-1}\underline{b}^* = B^{-1}\underline{b} + \theta B^{-1}\underline{r} = \underline{X}_B + \theta\underline{X} \quad , \quad \underline{X} = B^{-1}\underline{r} \qquad \text{..........(8.70)}$$

ในเมื่อ X_B เป็นคำตอบที่เป็นไปได้ขั้นฐานที่เหมาะสม หาก $x_{ij} \geq 0$ ทุกค่า i ค่าของ θ จะเพิ่มขึ้นเท่าใดก็ได้ และ X_B^* จะเป็นไปได้และเหมาะสม แต่ถ้ามี $x_{ij} < 0$ หนึ่งค่าหรือมากกว่า เราหาค่าวิกฤติ θ_c^+ (เมื่อ x_{Bi}^* ตัวแรกเข้าใกล้ 0) โดย

$$\theta_c^+ = \frac{x_{Bv}}{x_{ij}} = \text{ค่าต่ำสุด}_{i} - \frac{x_{Bi}}{x_{ij}}, \quad x_{,,} < o \qquad \text{..........(8.71)}$$

หาก $\theta > \theta_c$ เราต้องเปลี่ยนฐานใหม่เพื่อคงความเป็นไปได้

หาก $x_{ij} \leq 0$ ค่าของ θ ที่มากที่สุด ที่ทำให้ค่า $\underline{b}$ ลดลง โดยไม่มีผลกระทบต่อตัวแปรฐานเดิม จะกำหนดได้จาก

$$\theta_c^- = \text{ค่าต่ำสุด}_{i} \frac{x_{Bi}}{x_{ij}}, \qquad x_{ij} > 0 \qquad . \qquad (8.71)$$

ตัวอย่างที่ 8.6

จากปัญหาในตัวอย่างที่ 8.4 จงหาว่า เวลาใช้งานได้ของเครื่องจักร A จะเปลี่ยนแปรได้แค่ไหน โดยไม่ทำให้แผนการผลิตเปลี่ยนแปลง (เปลี่ยนเฉพาะค่าตัวเลข แต่การตัดสินใจยังเหมือนเดิม)

วิธีทำ

พิจารณาค่า x_{Bi} (คำตอบฐานในแถวที่ i) และ x_{i4} ในตารางสุดท้ายของตัวอย่างที่ 8.4 จะได้ว่า

$$\theta_c^+ = \text{ค่าต่ำสุด} \left(-\frac{200}{-1}, -\frac{200}{-4}\right) = 50$$

$$\theta_c^- = \frac{800}{2} = 400$$

$$\Rightarrow 1000 - 400 \leq b_1 \leq 1000 + 50$$

เรายังคงผลิตสินค้าชนิดที่ 1 และชนิดที่ 3 โดยใช้เครื่องจักรทั้ง 2 อย่างเต็มที่ แต่มีวัตถุดิบเหลืออยู่ ถ้าเวลาใช้งานได้ของเครื่องจักร A อยู่ในช่วง 600 ถึง 1050

หมายเหตุ เราตรวจสอบคำตอบของเราได้ ดังต่อไปนี้

พิจารณาค่าในคอลัมน์ x_4 บอกให้รู้ว่า ถ้าเวลาของเครื่องจักร A เพิ่มขึ้น 1 หน่วย เราสามารถผลิตสินค้าชนิดที่ 1 เพิ่มอีก 2 หน่วย แต่ลดจำนวนผลิตสินค้าชนิดที่ 3 ไป 1 หน่วย ปริมาณวัตถุดิบจะถูกนำมาใช้เพิ่มขึ้นอีก 4 หน่วย และจะเป็นผลให้เราได้กำไรเพิ่มขึ้นอีก 10 บาท เวลาของเครื่องจักร A จะเพิ่มขึ้นได้สูงสุด 50 ซึ่งพอดีกับการใช้วัตถุดิบนั่นเอง พิจารณาได้ดังนี้

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_3 \\ x_6 \\ p \end{array} \begin{array}{c} \textbf{คำตอบเดิม} \\ \begin{pmatrix} 800 \\ 200 \\ 200 \\ 28{,}000 \end{pmatrix} \end{array} + (50) \begin{array}{c} \textbf{คอลัมน์ที่เปลี่ยน} \\ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \textbf{คำตอบที่ปรับแล้ว} \\ \begin{pmatrix} 900 \\ 150 \\ 0 \\ 28{,}500 \end{pmatrix} \end{array}$$

จะเห็นว่า ถ้าเวลาของเครื่องจักร A เพิ่มเต็มที่ 50 หน่วย วัตถุดิบจะถูกนำไปใช้หมดพอดี ไม่อาจจะผลิตต่อได้อีก

ในทางตรงกันข้าม ถ้าเวลาของเครื่องจักร A ลดลง 1 หน่วย เราจะลดการผลิตสินค้าชนิดที่ 1 2 หน่วย เพิ่มการผลิตสินค้าชนิดที่ 3 อีก 1 หน่วย มีวัตถุดิบเหลือเพิ่มขึ้นอีก 4 หน่วย และกำไรจะลดลง 10 บาท ถ้าเราลดเวลาของเครื่องจักร A ลงเต็มที่ 400 จะปรากฏผล :-

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_3 \\ x_6 \\ p \end{array} \begin{array}{c} \textbf{คำตอบเดิม} \\ \begin{pmatrix} 800 \\ 200 \\ 200 \\ 28{,}000 \end{pmatrix} \end{array} - (400) \begin{array}{c} \textbf{คอลัมน์ที่เปลี่ยน} \\ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \textbf{คำตอบที่ปรับแล้ว} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 600 \\ 1{,}800 \\ 24{,}000 \end{pmatrix} \end{array}$$

เราจะผลิตสินค้าชนิดที่ 3 เพียงอย่างเดียว และจะมีวัตถุดิบเหลืออยู่ 1,800 ได้กำไรเพียง 24,000

สรุปได้ว่า ถ้าเวลาของเครื่องจักร A อยู่ในช่วง 650-1,050 แผนการผลิตจะคงเดิม เปลี่ยนเฉพาะจำนวนเท่านั้น

ให้นักศึกษาลองพิจารณาว่า เวลาของเครื่องจักร B ปริมาณของวัตถุดิบ จะเปลี่ยนแปลงได้มากน้อยแค่ไหน โดยไม่มีผลกระทบต่อแผนการผลิตเดิม

8.3.3 การเพิ่มตัวแปรหรือข้อจำกัด

ในหัวข้อนี้ เราจะมาพิจารณาว่า เราจะเพิ่มตัวแปร (เวคเตอร์) อื่นเข้ามาได้อย่างไร หรือเราจะใส่ข้อจำกัดเพิ่มเข้ามา ในระบบได้อย่างไร โดยคำตอบที่ได้แต่เดิมยังคงเป็นคำตอบที่เหมาะสม การเพิ่มตัวแปรเข้ามาใหม่ กระทำได้ดังต่อไปนี้ หากเราได้ตัวแปร x_{n+1} พร้อมด้วยเวคเตอร์กิจกรรม a_{n+1} และกำไรต่อหน่วย c_{n+1} รวมเข้ามาอยู่ในระบบ เราคำนวณ

$$\underline{X}_{n+1} = B^{-1}\underline{a}_{n+1}, \; c_{n+1} - s_{n+1} = \underline{C}_B\underline{X}_{n+1} - c_{n+1} \qquad \text{..........(8.72)}$$

ในเมื่อ B เป็นเมทริคซ์ฐานในคำตอบที่เหมาะสมต่อปัญหาเดิม

หากเราได้ $c_{n+1} - s_{n+1} \leqslant 0$ แสดงว่าคำตอบเดิมที่ได้ยังคงเป็นคำตอบที่เหมาะสม แต่ถ้าเราได้ $c_{n+1} - s_{n+1} > 0$ เราดำเนินการตามวิธีการซิมเพลกซ์ต่อไป และใส่ a_{n+1} เข้ามาในฐาน ในขั้นต่อไป

สำหรับปัญหาที่เกี่ยวกับการเพิ่มข้อจำกัดใหม่เข้ามา ภายหลังการหาคำตอบที่เหมาะสมได้แล้ว มีข้อสังเกตอย่างหนึ่งว่า การเพิ่มเข้ามาของข้อจำกัดใหม่ จะเป็นสาเหตุให้ค่าของ P ลดลง หรืออาจจะไม่เปลี่ยนแปลงเลยก็ได้ เราถือว่าข้อจำกัดใหม่ จะต้องไม่เพิ่มตัวแปรที่มีกำไรต่อหน่วยไม่เป็น 0 นี่ก็หมายความว่า เรายังคงหาค่าสูงสุดของฟังก์ชัน P เดิม ก่อนที่จะเพิ่มข้อจำกัดเข้ามาใหม่ในระบบ สมมติว่า P จะมีค่าเพิ่มขึ้น จากการเพิ่มข้อจำกัดใหม่เข้ามา และถือว่า คำตอบที่เหมาะสมที่ได้ใหม่ จะสอดคล้องกับ m ข้อจำกัดแรก กับข้อจำกัดที่เพิ่มเข้ามาใหม่ และเป็นคำตอบต่อปัญหาเดิม ซึ่งขัดแย้งกับข้อเท็จจริงว่า เรามีคำตอบที่เหมาะสมต่อปัญหาเดิม เพราะฉะนั้น

$$\max P_{m+1} \leqslant \max P_m \qquad \text{..........(8.73)}$$

ในที่นี้ ดัชนีล่างแสดงถึงจำนวนของข้อจำกัด การวิเคราะห์นี้แสดงให้เห็นว่า หากคำตอบที่เหมาะสมต่อปัญหาเดิม สอดคล้องกับข้อจำกัดใหม่ คำตอบดังกล่าวนั้นก็จะเป็นคำตอบที่เหมาะสมต่อปัญหาใหม่ด้วย อย่างไรก็ดี หากคำตอบนั้นไม่สอดคล้องกับข้อจำกัดใหม่ เราจะต้องหาคำตอบที่เหมาะสมต่อไป

เมทริคซ์ฐานเริ่มต้นของระบบใหม่ (รวมข้อจำกัดใหม่เข้าไปแล้ว) คือ

$$B_1 = \begin{bmatrix} B & 0 \\ \nu & \pm 1 \end{bmatrix}, \; B_1^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ \mp \nu B^{-1} & \pm 1 \end{bmatrix} \qquad \text{..........(8.76)}$$

ในเมื่อ B เป็นเมทริคซ์ฐานที่เหมาะสมของปัญหาเดิม B_1 จะเป็น (m + 1) x (m + 1) เมทริคซ์ คอลัมน์สุดท้ายอาจเป็นเวคเตอร์ของ slack, surplus หรือ artificial ที่เกี่ยวข้องกับข้อจำกัดใหม่ และ ν เป็น row vector ประกอบด้วย ส.ป.ส. (ในข้อจำกัดใหม่) ของตัวแปรที่อยู่ในเมทริคซ์ฐาน การตรวจสอบอื่น ๆ เราใช้หลักเกณฑ์เดิมที่เคยกล่าวมาแล้ว อย่างไรก็ตาม หากการเพิ่มข้อจำกัดใหม่เข้ามาในระบบ และผลจากการตรวจสอบ พบว่าไม่สอดคล้องกับคำตอบที่เหมาะสมเดิม วิธีที่ดีที่สุดก็คือ การเริ่มต้นหาคำตอบแรกของระบบใหม่ แล้วดำเนินต่อไปจนกว่าจะได้คำตอบที่เหมาะสม

จากตัวอย่างที่ 8.4 สมมติว่าการผลิตครั้งนี้ ต้องการให้ได้ปริมาณสินค้าทั้ง 3 ชนิดรวมกันอย่างน้อยที่สุด 1,000 หน่วย นั่นคือ เรามีข้อจำกัดที่ 4

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_7 = 1000$$

ในเมื่อ x_7 เป็นตัวแปร slack ของข้อจำกัดที่ 4 นี้ เราแทนค่า x_1, x_3 จากตารางสุดท้าย (ตารางในหน้า 429) จะได้ผลลัพธ์ ดังนี้

$$(-4x_2 - 2x_4 + x_5) + x_2 + (x_2 + x_4 - x_5) - x_7 = 1000 - 800 - 200$$

$$\text{หรือ} \quad -2x_2 - x_4 - x_7 = 0$$

จะได้ตารางสุดท้าย ดังนี้

ตัวแปรฐาน		c_j	25	35	40	0	0	0	0
x_i	c_i	คำตอบฐาน	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
x_1	25	800	1	4	0	2	-1	0	0
x_3	40	200	0	−1	1	-1	1	0	0
x_6	0	200	0	−7	0	4	3/2	1	0
x_7	0	0	0	2	0	1	0	0	1
P = 28000		s_j	25	60	40	10	15	0	0
		$c_j - s_j$	0	−25	0	10	−15	0	0

สรุปได้ว่า แผนการผลิตเหมือนเดิม