บทที่ 6
ปัญหาการขนส่ง

ปัญหาการขนส่งเป็นปัญหาที่มีลักษณะพิเศษประเภทหนึ่ง ในจำพวกปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น จัดเป็นปัญหาที่ถูกนำไปประยุกต์ใช้ในทางปฏิบัติจริง อย่างแพร่หลายในปัจจุบันนี้ วิธีการของปัญหาการขนส่งสามารถนำไปใช้ประโยชน์ ในการแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น ที่มีข้อจำกัดดังต่อไปนี้

(1) ผลรวมของทรัพยากรที่จะนำมาใช้ทุกชนิด จะต้องเท่ากับ ผลรวมของปริมาณความต้องการทุกประเภท

(2) ข้อจำกัดมักจะอยู่ในรูปของสมการ และ ส.ป.ส. a_{ij} ในสมการข้อจำกัด จะมีค่าเป็น 0 หรือ 1

ปัญหาการขนส่งเริ่มเป็นที่รู้จักกันในปี 1941 โดย F.L. Hitchcock เป็นผู้ค้นคว้าวิธีการขึ้นมา และได้มีการอภิปรายในรายละเอียดโดย T.C. Koopman ในปี 1947 ต่อมา D.T. Dantzig ได้นำเอาการสร้างตัวแบบ และแก้ปัญหาโดยใช้วิธีการซิมเพลกซ์ มาประยุกต์ใช้กับปัญหาการขนส่ง

เนื้อหาที่เราจะศึกษาในบทนี้ จะเป็นเรื่องของปัญหาการขนส่งทั่ว ๆ ไป การเขียนตัวแบบในรูปของการโปรแกรมเชิงเส้น การเขียนในรูปตารางการขนส่ง วิธีการต่าง ๆ ที่จะนำไปใช้ในการหาคำตอบที่เป็นไปได้ขั้นฐานชุดแรก นั่นก็คือ การจัดสายขนส่งที่เป็นไปได้ ควรจะเป็นอย่างไร วิธีการที่จะใช้พิจารณาคำตอบหรือสายขนส่งที่จัดไว้ ว่าควรจะมีการปรับปรุง เปลี่ยนแปลงอย่างไรหรือไม่ คำตอบที่ได้จัดเป็นสายขนส่งที่ดีที่สุดหรือยัง กรณีพิเศษของปัญหาการขนส่งที่เกี่ยวกับเรื่องการจัดคน จัดเครื่องจักร ให้เหมาะสมกับงาน และเกิดผลประโยชน์ต่อส่วนรวม ที่เรียกว่าปัญหาการมอบหมายงาน (Assignment) นอกจากนี้ยังมีการศึกษาเกี่ยวกับการจัดสายขนส่งหรือการมอบหมายงาน กรณีที่มีอุปสรรคบางอย่างเกิดขึ้น

6.1 ลักษณะของปัญหาการขนส่ง

ในบทที่ 1 เราได้พูดถึงลักษณะของปัญหาการขนส่งไว้ว่า เป็นปัญหาเกี่ยวกับการจัดการขนส่งสินค้าหรือผลิตภัณฑ์ชนิดเดียวกัน จากจุดต้นทาง (โรงงาน คลังสินค้า ตัวแทนจำหน่าย เป็นต้น) m แห่ง ไปยังจุดปลายทาง (คลังสินค้า เขตการค้า ลูกค้า เป็นต้น) n แห่ง ให้เสียค่าใช้จ่ายรวมกันน้อยที่สุด แต่ให้จุดปลายทางแต่ละแห่ง ได้รับสินค้าหรือผลิตภัณฑ์ครบตามที่ต้องการ และสินค้าหรือผลิตภัณฑ์ที่ส่งไปจากจุดต้นทางแต่ละจุด จะมีจำนวนไม่เกินที่จุดต้นทางนั้นมีอยู่ เราสรุปตัวแบบของปัญหาการขนส่ง ได้ดังนี้

หาค่าต่ำสุดของ $P = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$

โดยมีข้อจำกัด

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \ (=, \leqslant) \ a_i \ , \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ (=, \geqslant) \ b_j \ , \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

และ $x_{ij} \geqslant 0$

ในเมื่อ a_i เป็นจำนวนสินค้าหรือผลิตภัณฑ์ที่ต้นทาง i มีอยู่

b_j เป็นจำนวนสินค้าหรือผลิตภัณฑ์ที่ปลายทาง j ต้องการ

c_{ij} เป็นอัตราค่าขนส่งต่อหน่วยจากจุดต้นทาง i ไปยังจุดปลายทาง j

x_{ij} เป็นจำนวนหน่วยสินค้าหรือผลิตภัณฑ์ ที่ส่งจากต้นทาง i ไปยังปลายทาง j

ในบทนี้ เราจะพูดถึงปัญหาการขนส่งมาตรฐาน standard transportation problem ซึ่งเป็นปัญหาที่มีข้อจำกัดเป็นสมการหมด กล่าวได้ว่า ปัญหาการขนส่งมาตรฐานจะอยู่ภายใต้เกณฑ์สมมติต่อไปนี้

(1) ผลรวมของผลิตภัณฑ์หรือสินค้าที่ส่งไปจากจุดต้นทาง i จะต้องเท่ากับ จำนวนผลิตภัณฑ์หรือสินค้าที่จุดต้นทาง i มีอยู่ นั่นก็คือ

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ , \quad a_i > 0 \ , \quad i = 1, 2, \ldots, m \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (6.1)$$

(2) ผลรวมของผลิตภัณฑ์หรือสินค้าที่จุดปลายทาง j ได้รับ จะต้องเท่ากับ จำนวนผลิตภัณฑ์หรือสินค้าที่จุดปลายทาง j ต้องการ นั่นก็คือ

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j , b_j > 0 , j = 1, 2, ..., n \qquad \text{..........(6.2)}$$

(3) ผลรวมของผลิตภัณฑ์หรือสินค้าที่จุดต้นทางทุกจุดมีอยู่ จะต้องเท่ากับ ผลรวมของจำนวนผลิตภัณฑ์หรือสินค้าที่จุดปลายทางทุกจุดต้องการ นั่นก็คือ

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_i \qquad \text{..........(6.3)}$$

ปัญหาของเราก็คือ เราต้องการหาจำนวนผลิตภัณฑ์หรือสินค้า ที่จะส่งจากจุดต้นทาง i ไปยังจุดปลายทาง j ว่าควรจะเป็นเท่าใด จึงจะเกิดผลดีต่อส่วนรวมมากที่สุด ในที่นี้ ก็คือต้องการหาค่า $x_{ij} \geqslant 0$ ที่สอดคล้องกับข้อจำกัด (6.2) และ (6.3) $m+n$ ข้อ เพื่อให้มีค่าใช้จ่ายในการจัดส่งรวมกัน น้อยที่สุด นั่นคือ

$$\text{หาค่าต่ำสุดของ } P = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \qquad \text{..........(6.4)}$$

ในทางปฏิบัติ ข้อจำกัดในแต่ละชุด ไม่จำเป็นต้องอยู่ในรูปสมการ ผลรวมของจำนวนสินค้าจากทุกจุดต้นทางอาจมากกว่าหรือน้อยกว่า ผลรวมของจำนวนสินค้าที่ทุกจุดปลายทางต้องการก็ได้ ดังเช่นในปัญหาการขนส่งสินค้าที่ผลิตได้จากโรงงาน i ซึ่งมีความสามารถในการผลิต a_i หน่วย ส่งไปจำหน่ายที่เขตการค้า j จำนวนอุปสงค์ของสินค้าในเขต j เท่ากับ b_j หน่วย ผลรวมของจำนวนสินค้าที่ผลิตจากทุกโรงงาน ไม่เท่ากับ ผลรวมของจำนวนอุปสงค์สินค้าที่ทุกเขตการค้าต้องการ นั่นก็หมายความว่า ข้อจำกัด (6.2) หรือ (6.3) จะอยู่ในรูปอสมการ แล้วแต่ว่า ผลรวมของจำนวนที่ผลิตได้ กับผลรวมของจำนวนที่ต้องการ อันไหนจะมากกว่ากันให้เรามาพิจารณากรณีต่อไปนี้

หากเรามีโรงงานผลิต m โรงงาน มีเขตการค้า $n-1$ เขต ผลรวมของจำนวนสินค้าที่ทุกโรงงานผลิตได้ มากกว่า ผลรวมของจำนวนอุปสงค์สินค้าที่ทุกเขตการค้าต้องการและเขียนตัวแบบได้ดังนี้

$$\text{หาค่าต่ำสุดของ} \quad P = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n-1} c_{ij}x_{ij}$$

โดยมีข้อจำกัด

$$\sum_{j=1}^{n-1} x_{ij} \leqslant a_i \quad , \quad i = 1, 2 \ , \ldots, \ m \qquad \text{..........} (6.5)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad , \quad j = 1, 2, \ldots n$$

และ $x_{ij} \geqslant 0$ ทุก ๆ i และ j

เราเปลี่ยนอสมการข้อจำกัดที่ i ทุก ๆ i ให้เป็นสมการ โดยการบวกด้วย slack variables x_{in}, $i = 1, 2, \ldots, m$ (จำนวน slack variables จะมีทั้งหมด m ตัว) จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$\sum_{j=1}^{n-1} x_{ij} + x_{in} = a_i \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

หรือ

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$$

เราจะได้สมการข้อจำกัด m สมการ ซึ่งสอดคล้องกับเกณฑ์สมมติ (6.1) เราบวกสมการข้อจำกัด m สมการนี้เข้าด้วยกัน จะได้ว่า

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n-1} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} x_{in} = \sum_{i=1}^{m} a_i \qquad \text{..........} (6.6)$$

ขณะเดียวกัน เราบวกสมการข้อจำกัด $n-1$ สมการที่เหลือ เข้าด้วยกัน จะได้ว่า

$$\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n-1} b_i$$

หรือ

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n-1} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n-1} b_j$$

แทนค่าที่ได้นี้ใน (6.6) จะได้ว่า

$$\sum_{j=1}^{n-1} b_j + \sum_{i=1}^{m} x_{in} = \sum_{i=1}^{m} a_i$$

หรือ

$$\sum_{i=1}^{m} x_{in} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n-1} b_j = b_n \qquad \text{..........} (6.7)$$

ในเมื่อ b_n เป็นจำนวนสินค้าที่เหลืออยู่ ภายหลังการจัดส่งเรียบร้อยแล้ว หรืออีกนัยหนึ่งก็คือ จำนวนสินค้าในส่วนที่จำนวนผลิตได้ทั้งหมด เกินจำนวนอุปสงค์สินค้าทั้งหมด นั่นเอง สมการ (6.7) แสดงให้เห็นข้อเท็จจริงว่า คำตอบของ slack variable x_{in} ที่หาได้จากแผนการจัดส่งต่าง ๆ รวมกันแล้ว จะเท่ากับ จำนวนสินค้าที่เหลือจากการจัดส่ง b_n นี่ก็หมายความว่า หากผลรวมของจำนวนสินค้าที่ผลิตได้จากทุกโรงงาน มากกว่า ผลรวมของจำนวนอุปสงค์สินค้าทุกเขตการค้า เราจะสร้างเขตการค้าหุ่น ในที่นี้เขตการค้าที่ n จะเป็นเขตการค้าหุ่น x_{in} จะเป็นจำนวนสินค้าที่ส่งจากโรงงาน i ไปยังเขตการค้าหุ่น n ซึ่งมีความหมายว่า เป็นจำนวนสินค้าที่เหลืออยู่ในโรงงาน i นั้น ภายหลังการจัดส่งสินค้าเรียบร้อยแล้ว ด้วยเหตุที่ x_{in} เป็นจำนวนสินค้าที่เหลือ นั่นก็คือ เป็นจำนวนสินค้าในส่วนที่โรงงาน i ไม่ได้ส่งออกไป ก็ย่อมไม่มีค่าใช้จ่ายในการขนส่งสำหรับสินค้าในส่วนนี้ ดังนั้น อัตราค่าขนส่งต่อหน่วย c_{in} จะต้องมีค่าเป็น 0 สรุปได้ว่า เราจะได้ตัวแบบมาตรฐานของปัญหาการขนส่งที่มี ผลรวมของจำนวนสินค้าที่ผลิตได้ มากกว่า ผลรวมของจำนวนอุปสงค์สินค้า ดังนี้

หาค่าต่ำสุดของ $P = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$

โดยมีข้อจำกัด

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n \qquad \ldots\ldots(6.8)$$

และ $x_{ij} \geqslant 0$ ทุก ๆ i และ j

ในเมื่อ $c_{in} = 0, i = 1, 2, \ldots, m$

อย่างไรก็ตาม ในทางปฏิบัติ หากมีสินค้าเหลืออยู่ในโรงงาน ซึ่งก็คือ สินค้าค้างจำหน่าย โรงงานอาจจะต้องพิจารณาค่าเก็บรักษาต่อหน่วยด้วย และสำหรับสินค้าบางประเภท อาจจะมีการคิดค่ารักษาคุณภาพด้วย กรณีเช่นนี้ ตัวแบบยังคงเหมือนเดิม เพียงแต่เปลี่ยนค่าของ slack cost c_{in} เท่านั้น

เป็นปัญหาการขนส่งมาตรฐาน ที่มี m+n ข้อจำกัด (สมการ) และ mn ตัวแปร ปัญหาต่อไปก็คือว่า เราจะมีวิธีการจัดสายขนส่งอย่างไร จึงจะได้สายขนส่งที่ดีที่สุด และจะรู้ได้อย่างไรว่า สายขนส่งที่จัดวางไว้นั้นเหมาะสมที่สุดแล้ว หากสายขนส่งที่ได้ยังไม่ดีพอ จะมีวิธีปรับปรุงอย่างไรต่อไป ก่อนที่จะตอบปัญหาเหล่านี้ ให้เรามาศึกษาคุณสมบัติของปัญหาการขนส่ง จากทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎีที่ 6.1 ปัญหาการขนส่งจะมีคำตอบที่เป็นไปได้เสมอ นั่นก็คือจะมีคำตอบอุตมะ อันหมายถึงการจัดการขนส่งที่ดีที่สุด

พิสูจน์

กำหนดให้ $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = T$

หากเรามีคำตอบของ $x_{ij} = (a_ib_j)/T$ ทุก ๆ ค่า i และ j

x_{ij} แต่ละตัวจะไม่มีค่าเป็นลบ นั่นก็คือ $x_{ij} \geqslant 0$

รวมค่าของ x_{ij} ทุก ๆ j = 1, 2, ..., n เข้าด้วยกัน จะได้ว่า

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_ib_j}{T} = \frac{a_i \sum_{j=1}^{n} b_j}{T} = a_i \quad , \quad i = 1, 2, \ldots m$$

รวมค่าของ x_{ij} ทุก ๆ i = 1, 2, ..., m เข้าด้วยกัน จะได้ว่า

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_ib_j}{T} = \frac{b_j \sum_{i=1}^{m} a_i}{T} = b_j \quad , \quad j = 1, 2, \ldots n$$

จะเห็นได้ว่า คำตอบของ $x_{ij} \geqslant 0$ จะสอดคล้องกับสมการข้อจำกัด (6.1) และ (6.2) แสดงว่า ปัญหาการขนส่งจะมีคำตอบที่เป็นไปได้เสมอ

และด้วยเหตุที่ x_{ij} ไม่มีค่าเป็นลบ ค่าของตัวแปรแต่ละตัวจะมีขีดจำกัดบนและขีดจำกัดล่างดังนี้

$0 \leqslant x_{ij} \leqslant$ ค่าต่ำสุด (a_i, b_j) ทุก ๆ ค่า i และ j

เพราะฉะนั้น ปัญหานี้จะไม่มี unbounded solution นั่นก็คือ จะต้องมีคำตอบอุตมะ

จากทฤษฎีนี้ ชี้ให้เห็นว่า ปัญหาการขนส่งจะมีคำตอบต่อ (6.1) และ (6.2) ก็ต่อเมื่อมีเงื่อนไข (6.3)

ทฤษฎีที่ 6.2 คำตอบที่เป็นไปได้ ต่อปัญหาการขนส่งที่มีจุดต้นทาง m แห่ง จุดปลายทาง n แห่ง จะประกอบด้วย $x_{ij} > 0$ ไม่เกิน $m+n-1$ ตัว นั่นก็คือ การจัดสายขนส่งจะมีไม่เกิน $m+n-1$ สาย

พิสูจน์

เราบวกสมการข้อจำกัด (6.1) m สมการเข้าด้วยกัน จะได้ว่า

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (6.10)$$

บวกสมการข้อจำกัด (6.2) n สมการ เข้าด้วยกัน จะได้ว่า

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (6.11)$$

เอา (6.10) ลบด้วย (6.11) และอาศัยผลจาก (6.3) จะได้ว่า

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j = 0$$

แสดงว่า ปัญหาการขนส่งมีข้อจำกัด $m+n$ สมการ ที่ไม่เป็นอิสระเชิงเส้นกัน เราอาจจะเขียนสมการข้อจำกัดใด ๆ สมการหนึ่ง ในรูปผลบวกและผลต่างของ $m+n-1$ สมการที่เหลือได้

เพราะฉะนั้น ปัญหาการขนส่งจะมีคำตอบที่เป็นไปได้ ประกอบด้วยค่าของ x_{ij} ที่มากกว่า 0 ไม่เกิน $m+n-1$ ตัว นั่นก็คือ จัดสายขนส่งได้มากที่สุด $m+n-1$ สาย

6.2 การหาคำตอบที่เป็นไปได้ขั้นฐานชุดแรก

ดังได้กล่าวมาแล้วว่า ปัญหาการขนส่งเป็นปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นประเภทหนึ่ง การหาคำตอบที่เป็นไปได้ต่อปัญหาการขนส่ง อาจจะใช้วิธีการซิมเพลกซ์ก็ได้ แต่ในทางปฏิบัติปัญหาทั่วไปมีขนาดใหญ่ การใช้วิธีการซิมเพลกซ์ในการแก้ปัญหา ไม่ใช่เรื่องธรรมดาเลย บางปัญหาอาจจะทำไม่ได้ หรือหากจะแก้ได้ก็ต้องใช้เวลามาก และต้องทำหลาย iteration จึงจะได้คำตอบอุตมะ ดังนั้นการหาคำตอบต่อปัญหาการขนส่งจะต้องมีวิธีการแก้ปัญหาที่มีประสิทธิภาพมากกว่าการแก้ปัญหาโดยใช้วิธีการซิมเพลกซ์โดยตรง ได้มีการพัฒนาและปรับปรุงวิธีการต่าง ๆ

ขึ้นมาใช้ โดยอาศัยแนวทางของวิธีการซิมเพลกซ์ วิธีการหนึ่งที่ใช้ได้ผลดีและเป็นที่นิยมใช้กันมาก เรียกว่าวิธีการขนส่ง (transportation method)

วิธีการขนส่งเป็นวิธีการแก้ปัญหาแบบเดียวกับวิธีการซิมเพลกซ์ เริ่มต้นจากการหาคำตอบที่เป็นไปได้ขั้นฐานชุดแรก แล้วมาตรวจสอบประเมินผลดูว่า ควรจะมีการปรับปรุงคำตอบต่อไปอย่างไรหรือไม่ วิธีการขนส่งเป็นกระบวนการที่มีเหตุผล และดำเนินการเป็นระบบทีละขั้นตอนในการพัฒนาปรับปรุงคำตอบ จนกว่าจะได้คำตอบที่ดีที่สุด นั่นก็คือคำตอบที่ทำให้ค่าใช้จ่ายในการจัดส่งต่ำสุด

หากเราพิจารณาปัญหาการขนส่งมาตรฐาน ที่มีสมการข้อจำกัด $m+n$ สมการ และมี mn ตัวแปรการหาคำตอบด้วยวิธีการขนส่ง เราจะต้องเปลี่ยนตัวแบบมาตรฐานของปัญหาการขนส่งให้อยู่ในรูปตาราง ที่เรียกว่าตารางการขนส่ง (transportation tableau) (ตารางที่ 6.1)

ตารางขนส่งที่ 6.1 (Tableau for Transportation Problem)

ปลายทาง / ต้นทาง	1	2	.....	j	.....	n	a_i
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	.....	c_{1j} x_{1j}	.....	c_{1n} x_{1n}	a_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	.....	c_{2j} x_{2j}	.....	c_{2n} x_{2n}	a_2
. .	. .	. .	....		....		
i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	.....	c_{ij} x_{ij}	.....	c_{in} x_{in}	a_i
. .	. .	. .	....	. .	....	. .	: .
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	.....	c_{mj} x_{mj}	.....	c_{mn} x_{mn}	a_m
b_j	b_1	b_2	. . ...		.....	b_n	$\Sigma a_i = \Sigma b_j$

จากตารางที่ 6.1 จะมี m แถว n คอลัมน์ ช่อง (i, j) แต่ละช่องจะแสดงถึงสายขนส่งจาก i ไปยัง j จำนวนสินค้าหรือผลิตภัณฑ์ที่จะส่ง จะเท่ากับ x_{ij} หน่วย อัตราค่าขนส่งต่อหน่วย c_{ij}

แสดงไว้ที่มุมบนด้านซ้ายของช่อง (i, j) สมการข้อจำกัด i แสดงด้วยผลบวกของจำนวน x_{ij} ในแถวที่ i จะเท่ากับ a_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ และสมการข้อจำกัด j แสดงด้วยผลบวกของจำนวน x_{ij} เท่ากับ b_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ ดังนั้น หากเราต้องการตรวจสอบว่า x_{ij} ที่ได้เป็นคำตอบที่เป็นไปได้ขั้นฐานหรือไม่ ก็สามารถตรวจสอบได้ง่าย ๆ โดยเพียงแต่บวกค่าของ x_{ij} ทุก ๆ ค่าที่อยู่ในแถว i และทุก ๆ ค่าที่อยู่ในคอลัมน์ j จำนวน $x_{ij} > 0$ ในตารางจะมีไม่เกิน $m+n-1$ นั่นก็คือ สามารถจัดสายขนส่งได้ อย่างมากที่สุด $m+n-1$ สาย สำหรับค่าที่เป็น 0 ของ nonbasic variables x_{ij} จะไม่แสดงไว้ในตารางนี้นี่ก็หมายความว่า หากมีช่องใดไม่แสดงจำนวนสินค้า แสดงว่าไม่มีการจัดส่งที่สายนั้น อย่างไรก็ตาม อาจจะมีตัวแปรฐาน x_{ij} บางตัวมีค่าเป็น 0 จะต้องแสดงค่านี้ในตารางด้วย เพื่อให้เห็นว่ามีการจัดส่งที่สายนั้นซึ่งเราเรียกกรณีเช่นนี้ว่า ปัญหาการขนส่งมี degenerate basic feasible solution

เมื่อเรามีตารางการขนส่งแล้ว ขั้นต่อไปคือการหาคำตอบที่เป็นไปได้ขั้นฐานชุดแรก มีหลายวิธี สำหรับการหาคำตอบชุดแรก คำตอบที่ได้จะเป็นสายขนส่งที่ดีที่สุด หรือจะต้องปรับปรุงคำตอบใหม่ และการปรับปรุงจะใช้หลายตารางหรือไม่ ย่อมขึ้นอยู่กับการหาคำตอบชุดแรก วิธีหาคำตอบที่เป็นไปได้ขั้นฐานชุดแรกมีดังต่อไปนี้

6.2.1 การหาคำตอบขั้นฐานชุดแรกด้วยวิธีการ North - West Corner Rule

การหาคำตอบขั้นฐานชุดแรกด้วยวิธีการนี้ เริ่มต้นคำตอบแรกที่ช่องแรก นั่นก็คือ เริ่มจากจุดต้นทางที่ 1 ไปยังจุดปลายทางที่ 1 และหาคำตอบต่อไปตามแนวเส้นทแยงมุม วิธีการจะมีดังนี้

1. เลือกช่องแรกตรงมุมบนด้านซ้ายของตาราง พิจารณาจำนวนสินค้าที่จะส่งได้ ให้มีจำนวนมากที่สุดแต่ต้องไม่เกินจำนวนที่มีอยู่ในแถวนั้น (S) และไม่เกินจำนวนที่มีอยู่ในคอลัมน์นั้น (D) จำนวนสินค้าในช่องนี้จะเท่ากับ

ค่าต่ำสุด (S, D)

2. (สำหรับกรณีที่ปัญหาการขนส่งมี nondegenerate basic feasible solutions)

ก) ถ้า $S < D$ แสดงว่า จำนวนสินค้าในช่องนี้ เท่ากับ S เราขีดแถวแรกของตารางออก ในคอลัมน์แรกของตาราง จะมีจำนวนที่ต้องการอีก $D - S$ กลับไปทำขั้นที่ 1 โดยถือว่าแถวถัดไปเป็นแถวแรก

ข) ถ้า $S > D$ แสดงว่า จำนวนสินค้าในช่องนี้ เท่ากับ D เราขีดคอลัมน์แรกของตาราง ออก ในแถวแรกของตาราง จะมีจำนวนเหลืออยู่ $S - D$

ทำขั้นที่ 1 ซ้ำแถวเดิม โดยถือว่าคอลัมน์ถัดไปเป็นคอลัมน์แรก

ทำซ้ำวิธีการเดิม จนถึงแถวสุดท้าย ใส่ค่าในช่องที่เหลือตามจำนวนที่มีอยู่ในคอลัมน์นั้น ๆ เราจะได้คำตอบขั้นฐานชุดแรก ซึ่งก็คือสายขนส่งชุดแรก จะมีจำนวน $m + n - 1$ สาย

หมายเหตุ

เมื่อเริ่มต้นหาคำตอบในช่องแรก เราจะมี $S = a_1$ และ $D = b_1$

ดังนั้น x_{11} = ค่าต่ำสุด (a_1, b_1)

หากเป็นกรณี 2ก เราจะได้ $x_{11} = a_1$ ทำต่อแถวที่ 2 ซึ่งจะมี $S = a_2$ และ $D = b_1 - a_1$

หากเป็นกรณี 2ข เราจะได้ $x_{11} = b_1$ ยังคงทำในแถวเดิม แต่พิจารณาในคอลัมน์ที่ 2 โดยมี $S = a_1 - b_1$ และ $D = b_2$

แสดงให้เห็นได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 6.1

บริษัทราชามีโรงงานผลิตสินค้าที่เขตเอ เขตบี เขตซีและเขตดี โรงงานในแต่ละเขตสามารถผลิตสินค้าในแต่ละงวดได้ เป็นจำนวน 400, 500, 500 และ 600 หน่วย ตามลำดับ สินค้าที่ผลิตได้ในแต่ละงวดจะส่งไปจำหน่ายที่เขตการค้า 5 เขต จำนวนอุปสงค์ของสินค้าในแต่ละเขตการค้าเท่ากับ 300, 400, 400, 400 และ 500 หน่วยตามลำดับ อัตราค่าขนส่งสินค้าจากแต่ละโรงงานไปยังเขตการค้า กำหนดไว้ดังนี้

อัตราค่าขนส่ง (บาทต่อหน่วย)

โรงงาน	เขตการค้า 1	เขตการค้า 2	เขตการค้า 3	เขตการค้า 4	เขตการค้า 5
เขตเอ	5	7	6	8	4
เขตบี	9	6	3	10	7
เขตซี	12	10	8	6	11
เขตดี	7	5	6	2	9

จงจัดสายขนส่งโดยใช้วิธีการ North - West Corner Rule

วิธีทำ

เขียนตารางขนส่ง เริ่มต้นจัดสายขนส่งจากโรงงานในเขตเอไปยังเขตการค้า 1 นั่นก็คือหาค่า x_{11}

c \ r	1	2	3	4	5	
1	5 (300)	7	6	8	4	~~400~~ 100
2	9	6	3	10	7	500
3	12	10	8	6	11	500
4	7	5	6	2	9	600
	300	400	400	400	500	

1. ค่าต่ำสุด (400, 300) = 300
   ดังนั้น x_{11} = 300
2. ขีดคอลัมน์ 1 ออก จำนวนสินค้าในแถว 1 จะมี 100 หน่วย

c \ r	2	3	4	5	
1	7 (100)	6	8	4	100
2	6	3	10	7	500
3	10	8	6	11	500
4	5	6	2	9	600
	300	400	400	500	

1. ค่าต่ำสุด (100, 400) = 100
   ดังนั้น x_{12} = 100
2. ขีดแถว 1 ออก จำนวนสินค้าในคอลัมน์ 2 เท่ากับ 300

c \ r	2	3	4	5	
2	6 (300)	3	10	7	~~500~~ 200
3	10	8	6	11	500
4	5	6	2	9	600
	300	400	400	500	

1. ค่าต่ำสุด (500, 300) = 300
   ดังนั้น x_{22} = 300
2. ขีดคอลัมน์ 2 ออก จำนวนสินค้าในแถว 2 จะเท่ากับ 200

r \ c	3	4	5	
2	3 (200)	10	7	200
3	8	6	11	500
4	6	2	9	600
	~~400~~ 200	400	500	

1. ค่าต่ำสุด (200, 400) = 200
   ดังนั้น x_{23} = 200
2. ขีดแถว 2 ออก จำนวนสินค้าใน คอลัมน์ 3 จะเท่ากับ 200

r \ c	3	4	5	
3	8 (200)	6	11	~~500~~ 300
4	6	2	9	600
	200	400	500	

1. ค่าต่ำสุด (500, 200) = 200
   ดังนั้น x_{33} = 200
2. ขีดคอลัมน์ 3 ออก จำนวนสินค้า ในแถว 3 จะเท่ากับ 300

r \ c	4	5	
3	6 (300)	11	300
4	2	9	600
	~~400~~ 100	500	

1. ค่าต่ำสุด (300, 400) = 300
   ดังนั้น x_{34} = 300
2. ขีดแถว 3 ออก จำนวนสินค้าใน คอลัมน์ 4 จะเท่ากับ 100

2 (100)	9 (500)	600
100	500	

แถวนี้เป็นแถวสุดท้ายของตารางการขนส่ง ดังนั้นเรากำหนดค่าใน 2 ช่องสุดท้าย ตามจำนวนสินค้าที่มีอยู่ใน 2 คอลัมน์สุดท้าย

สรุปตารางการขนส่ง จัดสายการขนส่งตามวิธี North - West Corner Rule ได้ดังนี้

เขตการค้า / โรงงาน	1	2	3	4	5	จำนวนสินค้าที่ผลิตได้
เขตเอ	5 (300)	7 (100)	6	8	4	400
เขตบี	9	6 (300)	3 (200)	10	7	500
เขตซี	12	10	8 (200)	6 (300)	11	500
เขตดี	7	5	6	2 (100)	9 (500)	600
จำนวนอุปสงค์สินค้า	300	400	400	400	500	

อ่านผลจากตารางได้ดังต่อไปนี้

โรงงานเขตเอ ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 1 จำนวน 300 หน่วย ค่าขนส่ง (5)(300) = 1500 บาท

ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 2 จำนวน 100 หน่วย ค่าขนส่ง (7)(100) = 700 บาท

โรงงานเขตบี ส่งสินค้าที่เขตการค้า 2 จำนวน 300 หน่วย ค่าขนส่ง (6)(300) = 1800 บาท

ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 3 จำนวน 200 หน่วย ค่าขนส่ง (3)(200) = 600 บาท

โรงงานเขตซี ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 3 จำนวน 200 หน่วย ค่าขนส่ง (8)(200) = 1600 บาท

ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 4 จำนวน 300 หน่วย ค่าขนส่ง (6)(300) = 1800 บาท

โรงงานเขตดี ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 4 จำนวน 100 หน่วย ค่าขนส่ง (2)(100) = 200 บาท

ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 5 จำนวน 500 หน่วย ค่าขนส่ง (9)(500) = 4500 บาท

ค่าใช้จ่ายในการจัดส่งทั้งหมด จะเท่ากับ 12,700 บาท

ข้อสังเกต

จะเห็นได้ว่า จำนวนสายขนส่งทั้งหมดจะเท่ากับ 4 + 5 - 1 = 8 สาย

ผลบวกของจำนวนสินค้าในแต่ละแถว จะเท่ากับ จำนวนที่ผลิตได้ของแถวนั้น

ผลบวกของจำนวนสินค้าในแต่ละคอลัมน์ จะเท่ากับ จำนวนอุปสงค์ของสินค้าในคอลัมน์นั้น

6.2.2 การหาคำตอบขั้นฐานชุดแรกโดยใช้วิธีการ Row Minima

การจัดสายขนส่งด้วยวิธีการนี้ จะทำทีละแถว เริ่มจากแถวที่ 1 เรียงลำดับเรื่อยไปจนถึงแถวสุดท้าย โดยยึดหลักค่าใช้จ่ายต่ำสุด ขั้นตอนการหาคำตอบมีดังต่อไปนี้

1. หาค่าต่ำสุดของอัตราค่าขนส่งต่อหน่วย c_{1j} ในแถวแรก สมมติให้

$$c_{1p} \;=\; \underset{j}{\text{ค่าต่ำสุด}}\; c_{1j}$$

2. หาค่าต่ำสุด (a_1, b_p)

3. ก) ถ้า $a_1 < b_p$ แสดงว่า จำนวนสินค้าในช่องนี้ เท่ากับ a_1
   ขีดแถวที่ 1 ออก กลับไปทำขั้นที่ 1 ใหม่ โดยถือว่าแถวถัดไปเป็นแถวแรกของตาราง และมีสินค้าในคอลัมน์ p เท่ากับ $b_p - a_1$

   ข) ถ้า $a_1 > b_p$ แสดงว่า จำนวนสินค้าในช่องนี้ เท่ากับ b_p
   ขีดคอลัมน์ p ออก ยังคงทำแถวที่ 1 ด้วยวิธีการเดิม แต่จำนวนสินค้าที่มีอยู่ในแถวนี้จะเท่ากับ $a_1 - b_p$

ทำซ้ำวิธีการเดิม จนถึงแถวสุดท้าย เราใส่ค่าที่เหลือในคอลัมน์ลงในช่องว่างของคอลัมน์เดียวกัน จำนวนสายขนส่งที่ได้ จะเท่ากับ $m + n - 1$ สาย

แสดงให้เห็นได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 6.2

จากปัญหาการขนส่งในตัวอย่างที่ 6.1 จงจัดสายขนส่งชุดแรกโดยใช้วิธีการ Row Minima

วิธีทำ

เริ่มต้นจัดสายขนส่งในแถวที่ 1 ดังต่อไปนี้

5	7	6	8	4 400	400
9	6	3	10	7	500
12	10	8	6	11	500
7	5	6	2	9	600
300	400	400	400	~~500~~ 100	

1. ค่าต่ำสุด (5, 7, 6, 8, 4) = 4
2. ค่าต่ำสุด (400, 500) = 400
3. ดังนั้น x_{15} = 400
   ขีดแถวที่ 1 ออก จำนวนสินค้าในคอลัมน์ 5 จะเท่ากับ 100
   ทำแถวที่ 2 ต่อไป

9	6	3 (400)	10	7	~~500~~ 100
12	10	8	6	11	500
7	5	6	2	9	600
300	400	400	400	100	

1. ค่าต่ำสุด (9, 6, 3, 10, 7) = 3
2. ค่าต่ำสุด (500, 400) = 400
3. ดังนั้น x_{23} = 400

ขีดคอลัมน์ 3 ออก จำนวนสินค้าในแถว 2 เท่ากับ 100

ยังคงทำแถวที่ 2

9	6 (100)	10	7	100
12	10	6	11	500
7	5	2	9	600
300	~~400~~ 300	400	loo	

1. ค่าต่ำสุด (9, 6, 10, 7) = 6
2. ค่าต่ำสุด (100, 400) = 100
3. ดังนั้น x_{22} = 100

ขีดแถว 2 ออก จำนวนสินค้าในคอลัมน์ 2 จะเท่ากับ 300

ทำแถวที่ 3 ต่อไป

12	10	6 (400)	11	~~500~~ 100
7	5	2	9	600
300	300	400	100	

1. ค่าต่ำสุด (12, 10, 6, 11) = 6
2. ค่าต่ำสุด (400, 500) = 400
3. ดังนั้น x_{34} = 400

ขีดคอลัมน์ 4 ออก จำนวนสินค้าในแถว 3 จะเท่ากับ 100 ทำแถว 3 do

12 100	10 (100)	11
600	5	9
300	~~300~~ 200	100

1. ค่าต่ำสุด (12, 10, 11) = 10
2. ค่าต่ำสุด (100, 300) = 100
3. ดังนั้น x_{32} = 100

ขีดแถวที่ 3 ออก จำนวนสินค้าในคอลัมน์ 2 จะเท่ากับ 200

7 300	5 200	9 100	600
300	200	100	

ทำแถวที่ 4 ซึ่งเป็นแถวสุดท้ายต่อไป จะได้ว่า x_{41} = 300, x_{42} = 200, x_{45} = .100

สรุปตารางการขนส่ง จัดสายขนส่งชุดแรกด้วยวิธีการ Row Minima ดังต่อไปนี้

เขตการค้า / โรงงาน	1	2	3	4	5	จำนวนที่ผลิตได้
เขตเอ	5	7	6	8	4 (400)	400
เขตบี	9	6 (100)	3 (400)	10	7	500
เขตซี	12	10 (100)	8	6 (400)	11	500
เขตดี	7 (300)	5 (200)	6	2	9 (100)	600
จำนวนอุปสงค์	300	400	400	400	500	

อ่านผลจากตารางได้ดังต่อไปนี้

โรงงานเขตเอ ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 5 จำนวน 400 หน่วย ค่าขนส่ง (4)(400) = 1600 บาท

โรงงานเขตบี ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 2 จำนวน 100 หน่วย ค่าขนส่ง (6)(100) = 600 บาท

ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 3 จำนวน 400 หน่วย ค่าขนส่ง (3)(400) = 1200 บาท

โรงงานเขตซี ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 2 จำนวน 100 หน่วย ค่าขนส่ง (10)(100) = 1000 บาท

ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 4 จำนวน 400 หน่วย ค่าขนส่ง (6)(400) = 2400 บาท

โรงงานเขตดี ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 1 จำนวน 300 หน่วย ค่าขนส่ง (7)(300) = 2100 บาท

ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 2 จำนวน 200 หน่วย ค่าขนส่ง (5)(200) = 1000 บาท

ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 5 จำนวน 100 หน่วย ค่าขนส่ง (9)(100) = 900 บาท

ค่าใช้จ่ายในการจัดส่งทั้งหมด จะเท่ากับ 10,800 บาท

การใช้วิธีการ Row Minima จะถือหลักค่าใช้จ่ายต่ำสุดของแถวแรก ๆ เรียงลำดับไปเรื่อย ๆ จนถึงแถวสุดท้าย ในบางกรณี หากมีอัตราค่าขนส่งต่ำสุดปรากฏในคอลัมน์แรก ๆ เราจะใช้วิธีการหาคำตอบจากคอลัมน์ที่ละคอลัมน์ โดยเริ่มจากคอลัมน์แรก เสร็จแล้วทำต่อคอลัมน์ 2 เรื่อย ๆ ไปจนถึงคอลัมน์สุดท้าย

6.2.3 การหาคำตอบขั้นฐานชุดแรกโดยวิธีการ Matrix Minima หรือ Short - Cut

การหาคำตอบหรือการจัดสายขนส่งชุดแรกด้วยวิธีการนี้ ยึดหลักค่าใช้จ่ายต่ำสุด โดยจะพิจารณาจากช่องที่มีอัตราค่าขนส่งน้อยที่สุด ในบรรดาค่าต่าง ๆ ที่กำหนดไว้ในตาราง ขั้นตอนการหาคำตอบมีดังต่อไปนี้

1. พิจารณาอัตราค่าขนส่ง c_{ij} ในตารางทั้งหมด หาค่าที่ต่ำที่สุด สมมติได้

$$c_{pq} \quad = \quad \underset{i,\,j}{\text{ค่าต่ำสุด}}\ c_{ij}$$

2. หาค่าต่ำสุดของ (a_p, b_q)
3. (สำหรับกรณีที่ปัญหาการขนส่งมี nondegenerate basic feasible solution)
   ก) ถ้า $a_p < b_q$ แสดงว่า จำนวนสินค้าในช่องนี้ เท่ากับ a_p
   ขีดแถว p ออก กลับไปทำขั้นที่ 1 ใหม่ โดยพิจารณาจากตารางที่เหลือ ซึ่งจะมีจำนวนสินค้าในคอลัมน์ q เท่ากับ $b_q - a_p$
   ข) ถ้า $a_p > b_q$ แสดงว่า จำนวนสินค้าในช่องนี้ เท่ากับ b_q
   ขีดคอลัมน์ q ออก จำนวนสินค้าในแถว p เหลืออยู่เท่ากับ $a_p - b_q$ กลับไปทำขั้นที่ 1 ใหม่ โดยพิจารณาจากช่องที่เหลือในตาราง

ทำซ้ำวิธีการเดิม จนกระทั่งเหลือ เพียงแถวเดียวหรือคอลัมน์เดียว จำนวนสินค้าในช่องที่เหลือ จะเท่ากับจำนวนที่เหลืออยู่ในคอลัมน์หรือแถวของช่องนั้น ๆ จำนวนสายขนส่งที่ได้ จะเท่ากับ $m + n - 1$ สาย

แสดงให้เห็นได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 6.3

จากปัญหาการขนส่งในตัวอย่างที่ 6.1 จงหาคำตอบชุดแรก นั่นก็คือ จัดสายขนส่งชุดแรกด้วยวิธีการ Matrix Minima หรือที่เรียกว่า Short - Cut

วิธีทำ

เริ่มต้นจากการหาค่าของอัตราค่าขนส่ง c_{ij} ที่น้อยที่สุด อยู่ที่ช่องใด เราจะกำหนดสายขนส่งที่ช่องนั้นเป็นอันดับแรก ขั้นตอนการหาคำตอบขั้นฐานชุดแรก มีดังต่อไปนี้

5	7	6	8	4	400
9	6	3	10	7	500
12	10	8	6	11	500
7	5	6	2 (400)	9	~~600~~ 200
300	400	400	400	500	

1. c_{44} = ค่าต่ำสุด c,, = 2
2. ค่าต่ำสุด (600, 400) = 400
3. จะได้ว่า x_{44} = 400
   ขีดคอลัมน์ 4 ออกจำนวนสินค้าทีเหลือในแถว 4 เท่ากับ 200

5	7	6	4	400
9	6	3 (400)	7	~~500~~ 100
12	10	8	11	500
7	5	6	9	200
300	400	400	500	

1. c_{23} = ค่าต่ำสุด c_{ij} = 3
2. ค่าต่ำสุด (500, 400) = 400
3. จะได้ว่า x_{23} = 400
   ขีดคอลัมน์ 3 ออก จำนวนสินค้าที่เหลือใน
   แถว 2 เท่ากับ 100

5	7	4 (400)	400
9	6	7	100
12	10	11	500
7	5	9	200
300	400	~~500~~ 100	

1. c_{15} = ค่าต่ำสุด c,, = 4
2. ค่าต่ำสุด (400, 500) = 400
3. จะได้ว่า x_{15} = 400
   ขีดแถว 1 ออก จำนวนสินค้าทีเหลือใน
   คอลัมน์ 5 เท่ากับ 100

9	6	7	100
12	10	11	500
7	5 (200)	9	200
300	~~400~~ 200	100	

1. c_{42} = ค่าต่ำสุด c,, = 5
2. ค่าต่ำสุด (200, 400) = 200
3. จะได้ว่า x_{42} = 200
   ขีดแถว 4 ออก จำนวนสินค้าในคอลัมน์ 2
   จะเหลือเท่ากับ 200

9	6 (100)	7	100
12	10	11	500
300	~~200~~ 100	100	

1. c_{22} = ค่าต่ำสุด c_{ij} = 6
2. ค่าต่ำสุด (100, 200) = 100
3. จะได้ว่า x_{22} = 100
   ขีดแถว 2 ออก จำนวนสินค้าในคอลัมน์ 2
   จะเหลือเท่ากับ 100

12 300	10 100	11 100	500
300	100	100	

เหลือแถว 4 เป็นแถวสุดท้าย ใส่ค่าตามที่
ปรากฏในคอลัมน์ จะได้ว่า

x_{31} = 300, x_{32} = 100, x_{35} = 100

การหาคำตอบขั้นฐานหรือการจัดสายขนส่งชุดแรก ด้วยวิธีการ Short Cut จะได้ผลดังตารางต่อไปนี้

เขตการค้า	1	2	3	4	5	จำนวนที่ผลิตได้
โรงงาน : เขตเอ	5	7	6	8	4 (400)	400
เขตบี	9	6 (100)	3 (400)	10	7	500
เขตซี	12 (300)	10 (100)	8	6	11 (100)	500
เขตดี	7	5 (200)	6	2 (400)	9	600
จำนวนอุปสงค์	300	400	400	400	500	

อ่านผลจากตารางได้ดังต่อไปนี้

โรงงานเขตเอ ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 5 จำนวน 400 หน่วย ค่าขนส่ง (4)(400) = 1600 บาท

โรงงานเขตบี ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 2 จำนวน 100 หน่วย ค่าขนส่ง (6)(100) = 600 บาท

ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 3 จำนวน 400 หน่วย ค่าขนส่ง (3)(400) = 1200 บาท

โรงงานเขตซี ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 1 จำนวน 300 หน่วย ค่าขนส่ง (12)(300) = 3600 บาท

ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 2 จำนวน 100 หน่วย ค่าขนส่ง (10)(100) = 1000 บาท

ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 5 จำนวน 100 หน่วย ค่าขนส่ง (11)(100) = 1100 บาท

โรงงานเขตดี ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 2 จำนวน 200 หน่วย ค่าขนส่ง (5)(200) = 1000 บาท

ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 4 จำนวน 400 หน่วย ค่าขนส่ง (2)(400) = 800 บาท

ค่าใช้จ่ายในการขนส่งทั้งหมด เท่ากับ 10,900 บาท

จะเห็นว่าจำนวนสายขนส่งที่ได้ เท่ากับ 8 สาย

6.2.4 การหาคำตอบขั้นฐานชุดแรกโดยใช้ Vogel's Method

วิธีการนี้จัดได้ว่า เป็นวิธีการที่มีประสิทธิภาพวิธีหนึ่ง มีลำดับขั้นการหาคำตอบดังต่อไปนี้

1. หาค่าผลต่างระหว่างอัตราค่าขนส่งต่ำสุดในแถว i กับค่าต่ำสุดถัดไปในแถวเดียวกัน ทุก ๆ แถว และหาค่าผลต่างระหว่าง อัตราค่าขนส่งต่ำสุดในคอลัมน์ j กับค่าต่ำสุดถัดไปในคอลัมน์เดียวกัน ทุก ๆ คอลัมน์

2. เปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จาก (1) เลือกค่าสูงสุด ดูว่าอยู่ในแถวหรือคอลัมน์ใด จัดจำนวนขนส่งในแถวหรือคอลัมน์นั้น ตรงช่องที่มีอัตราค่าขนส่งต่ำสุด สมมติเราได้

$$c_{lk} = \text{ค่าต่ำสุด } c_{ij}$$

เป็นอัตราค่าขนส่งในแถวหรือคอลัมน์ที่มีค่าสูงสุดของผลต่างนั้น

3. หาค่าต่ำสุด (a_l, b_k)

4. (สำหรับกรณีที่ปัญหาการขนส่งมี nondegenerate basic feasible solution)

ก) ถ้า $a_l < b_k$ แสดงว่า จำนวนสินค้าในช่องนี้ เท่ากับ a_l

ขีดแถว 1 ออก จำนวนสินค้าในคอลัมน์ k จะเท่ากับ $b_k - a_l$ กลับไปทำขั้นที่ 1 ใหม่

ข) ถ้า $a_l > b_k$ แสดงว่า จำนวนสินค้าในช่องนี้ เท่ากับ b_k

ขีดคอลัมน์ k ออก จำนวนสินค้าในแถว l จะเท่ากับ $a_l - b_k$ กลับไปทำขั้นที่ 1 ใหม่

ทำซ้ำวิธีการเดิม จนกระทั่งเหลือแถวเดียวหรือคอลัมน์เดียว ใส่จำนวนในช่องที่เหลือตามจำนวนที่มีในคอลัมน์หรือแถวที่ช่องนั้นอยู่ จำนวนคำตอบหรือสายขนส่งที่ได้ จะเท่ากับ $m + n - 1$

ให้เรามาพิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 6.4

จากปัญหาการขนส่งในตัวอย่างที่ 6.1 จงหาคำตอบขั้นฐานชุดแรก นั่นก็คือ จัดสายขนส่งชุดแรก ด้วยวิธีการ Vogel's Method

วิธีทำ

ในแต่ละแถว หาค่าผลต่างระหว่าง ค่าต่ำสุด c_{ij} กับค่าต่ำสุดถัดไปในแถว i เดียวกันทุก ๆ i และในแต่ละคอลัมน์ หาค่าผลต่างระหว่าง ค่าต่ำสุด c_{ij} ในคอลัมน์ j กับค่าต่ำสุดถัดไปในคอลัมน์เดียวกัน ปรากฏผลดังต่อไปนี้

							ผลต่างในแถว
	5	7	6	8	4	400	5 − 4 = 1
	9	6	3	10	7	500	6 − 3 = 3
	12	10	8	6	11	500	8 − 6 = 2
	7	5	6	2 (400)	9	~~600~~ 200	5 − 2 = 3
	300	400	400	400	500		
ผลต่างในคอลัมน์	7−5=2	6−5=1	6−3=3	6−2=4	7−4=3		

พิจารณาผลต่างทั้งหมด จะเห็นว่า 4 มีค่ามากที่สุด และเป็นค่าในคอลัมน์ 4 ซึ่งมี

c_{44} = ค่าต่ำสุด (8, 10, 6, 2) = 2

ด้วยเหตุที่ ค่าต่ำสุด (600, 400) = 400 เพราะฉะนั้น c_{44} = 400 ขีดคอลัมน์ 4 ออก แถวที่ 4 จะมีจำนวนเหลืออยู่ 600 − 400 = 200 ทำขั้นที่ 1 ใหม่

						ผลต่างในแถว
	5	7	6	4	400	5 − 4 = 1
	9	6	3 (400)	7	~~500~~ 100	6 − 3 = 3
	12	10	8	11	500	10 − 8 = 2
	7	5	6	9	200	6 − 5 = 1
	300	400	400	500		
ผลต่างในคอลัมน์	2	1	3	3		

ในตอนแรกเราขีดคอลัมน์ออก เพราะฉะนั้น ค่าต่ำสุด 2 ค่าติดกันในแถวใด ๆ จะเปลี่ยนไป จึงต้องหาผลต่างใหม่ แต่ในคอลัมน์ยังคงค่าเดิม เราจึงไม่ต้องหาผลต่างใหม่ เปรียบเทียบผลต่างที่ได้ จะเห็นว่า 3 เป็นค่าสูงสุดมีหลายกลุ่ม แต่เมื่อเปรียบเทียบค่าของ c_{ij} ที่ได้จากแต่ละกลุ่ม จะเห็นว่า

c_{23} = ค่าต่ำสุด {ค่าต่ำสุด (6,3,8,6), ค่าต่ำสุด (4,7,11,9), ค่าต่ำสุด (9,6,3,7)} = 3

ดังนั้น เราจะได้ x_{23} = ค่าต่ำสุด (500, 400) = 400 ขีดคอลัมน์ 3 ออก แถวที่ 2 จะมีเหลือ 100 กลับไปทำขั้นที่ 1 ใหม่ นั่นก็คือหาผลต่างในแถวใหม่ สำหรับผลต่างในคอลัมน์ยังคงเดิม ดังต่อไปนี้

					ผลต่างในแถว
	5	7	4 (400)	400	5 − 4 = 1
	9	6	7	100	7 − 6 = 1
	12	10	11	500	11 − 10 = 1
	7	5	9	200	7 − 5 = 2
	300	400	~~500~~ 100		
ผลต่างในคอลัมน์	2	1	3		

จะเห็นว่า ผลต่างที่มีค่ามากที่สุดคือ 3 เป็นค่าในคอลัมน์ 5 ซึ่งมี c_{15} = ค่าต่ำสุด (4, 7, 11, 9) = 4 เราจึงได้ x_{15} = ค่าต่ำสุด (400, 500) = 400 ขีดแถว 1 ออก ในคอลัมน์ 5 ต้องการอีก 100 กลับไปทำ

ข้อ 1 ในที่นี้ เราขีดแถว ดังนั้น ผลต่างของค่าต่ำสุดในแต่ละแถวคงเดิม แต่ค่าต่ำสุดของคอลัมน์จะเปลี่ยนไป จึงต้องคำนวณผลต่างใหม่ ดังต่อไปนี้

					ผลต่างในแถว
	9	6	7	loo	7 − 6 = 1
	12	10	11	500	11 − 10 = 1
	7	5 (200)	9	200	7 − 5 = 2
	300	~~400~~ 200	loo		
ผลต่างในคอลัมน์	9 − 7 = 2	6 − 5 = 1	9 − 7 = 2		

ผลต่างที่มีค่ามากที่สุดคือ 2 เลือกช่องที่มีอัตราค่าขนส่งต่ำที่สุด ในที่นี้คือ 5 ดังนั้น x_{42} = ค่าต่ำสุดระหว่าง 200 กับ 400 สรุปได้ว่า x_{42} = 200 ขีดแถว 4 ออก ในคอลัมน์ 2 ยังต้องการอีก 200 ทำต่อไปดังนี้

					ผลต่างในแถว
	r	6 (100)	7	100	7 − 6 = 1
	12	10	11	500	11 − 10 = 1
	300	~~200~~ 100	loo		
ผลต่างในคอลัมน์	12 − 9 = 3	10 − 6 = 4	11 − 7 = 4		

ในขั้นนี้เราจะได้ x_{22} = ค่าต่ำสุด (100, 200) = 100 ขีดแถว 2 ออก คอลัมน์ 2 ยังต้องการอีก 100 เมื่อถึงขั้นนี้ จะเห็นว่า เหลือแถว 3 เพียงแถวเดียว เราจึงใส่ตามค่าที่มีอยู่ในคอลัมน์ ดังนี้

12 (300)	10 (100)	11 (100)	500
300	100	100	

สรุปการจัดสายขนส่งตามวิธีการของ Vogel

เขตการค้า โรงงาน	1	2	3	4	5	จำนวนที่ผลิตได้	ผลต่าง
เขตเอ	5	7	6	8	4 (400)	400	1 1 1
เขตบี	9	6 (100)	3 (400)	10	7	500	3 3 1
เขตซี	12 (300)	10 (100)	8	6	11 (100)	500	2 2 1
เขตดี	7	5 (200)	6	2 (400)	9	600	3 1 2
จำนวนอุปสงค์	300	400	400	400	500		
ผลต่าง	2 2 3	1 1 4	3	4	3 2 4		

จะเห็นว่า คำตอบหรือสายขนส่งที่ได้ เป็นคำตอบชุดเดียวกันกับการหาคำตอบด้วยวิธีการ Short Cut

นอกเหนือจากวิธีการดังกล่าวมาแล้ว ยังมีวิธีการหาคำตอบขั้นฐานชุดแรก อื่น ๆ อีก เช่นวิธีการตรวจสอบ วิธีการประมาณของ Russel เป็นต้น นักศึกษาสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากหนังสืออ้างอิงท้ายเล่ม วิธีการหาคำตอบขั้นฐานแต่ละวิธี เหมาะสมสำหรับลักษณะของปัญหาหนึ่ง ๆ วิธีการ North - West Corner Rule ยึดหลักการหาคำตอบตามแนวเส้นแทยงมุม โดยมีจุดเริ่มต้นที่ช่องบนมุมซ้ายสุดของตารางขนส่ง และไม่คำนึงถึงค่าใช้จ่ายแต่อย่างใด วิธีนี้จึงเหมาะที่จะใช้ในกรณีที่ค่าที่เราต้องการเลือก เช่นค่าใช้จ่ายต่ำ ๆ อยู่ในแนวเส้นแทยงมุมของตาราง และใช้ได้เสมอไม่ว่าจะมีเป้าหมาย ต้องการค่าสูงสุดหรือต้องการค่าต่ำสุด สำหรับวิธีการอื่น ๆ ยึดหลักค่าใช้จ่ายต่ำสุด เราจึงต้องพิจารณาดูว่า อัตราค่าขนส่ง c_{ij} ที่มีค่าต่ำ ๆ อยู่กระจัดกระจายอย่างไร ควรจะใช้วิธีใด จึงจะสามารถนำช่องที่มีค่า c_{ij} ต่ำ ๆ มาใช้ได้ กรณีที่ตัวเลือกปรากฏมากกว่า 1 เราเลือกโดยอิสระ แต่ทั่วไปก็ต้องคำนึงถึงค่าใช้จ่ายเป็นหลัก หากเป้าหมายต้องการค่าสูงสุด เกณฑ์การพิจารณาก็ต้องเปลี่ยนเป็นยึดช่องที่มีอัตราค่าต่อหน่วยสูง ๆ

การหาคำตอบขั้นฐานชุดแรกในที่นี้ เราถือว่า ปัญหาการขนส่งมี basic nondegenerate feasible solution อย่างไรก็ตาม อาจจะมีบางปัญหาที่ได้คำตอบหรือจำนวนสายขนส่ง น้อยกว่า $m + n - 1$ นั่นก็หมายความว่า มีตัวแปรฐาน x_{ij} บางตัวมีค่าเป็น 0 ซึ่งเราเรียกว่า ปัญหาการขนส่งมี basic degenerate feasible solution การเกิดขึ้นของปัญหาประเภทนี้ อาจเกิดตั้งแต่การหาคำตอบขั้นฐานชุดแรก หรือเกิดขึ้นในบาง iteration ขณะที่เราปรับปรุงคำตอบใหม่ เพื่อให้ได้คำตอบที่ดีที่สุด ก็ได้ degeneracy ที่เกิดขึ้นในปัญหาการขนส่ง ไม่ยุ่งยากเท่ากับที่เกิดขึ้นในวิธีการซิมเพลกซ์ ในวิธีการซิมเพลกซ์การขจัด degeneracy problem ทำได้โดยใช้วิธีการ perturbation ในวิธีการขนส่งก็เช่นเดียวกัน เราต้องใช้วิธีการ perturbation แต่เป็นวิธีการที่ง่ายกว่ากันมาก

ถ้าเกิดมีตัวแปรฐาน x_{ij} ตัวใด มีค่าเป็น 0 ก็หมายความว่า มี degeneracy เกิดขึ้นในขั้นตอนหนึ่ง ซึ่งมีเซทย่อย I ของ a_i อย่างน้อยที่สุด 1 เซท และเซทย่อย J ของ b_j อย่างน้อยที่สุด 1 เซท ที่มีคุณสมบัติว่า

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J} b_j$$

เมื่อถึงขั้นนี้ เราจะพบว่า คำตอบที่จะได้ ณ ช่องนี้ เป็นค่าต่ำสุดที่เลือกมาระหว่าง 2 ค่าที่เท่ากัน ตัวอย่างเช่น เราได้

$$x_{pq} = \text{ค่าต่ำสุด } (a^p, b^q)$$

ในเมื่อ $a^p = a_p$, $b^q = \sum_{j\in J} b_j - (\sum_{i\in I} a_i - a_p)$

(หรืออาจจะเป็นกรณีที่ $b^q = b_q$, $a^p = \sum_{i\in I} a_i - (\sum_{j\in J} b_j - b_q)$)

สมมติว่า เราขีดแถว p แล้วเอา a^p ลบออกจาก b^q ดังนั้น จำนวนที่เหลือในคอลัมน์ q จะเท่ากับ

$$\left(\sum_{j\in J} b_j - (\sum_{i\in I} a_i - a_p)\right) - a_p = 0$$

หากเราได้ x_{lq} เป็นตัวแปรฐานที่อยู่ในคอลัมน์ q ก็แสดงว่า $x_{lq} = 0$ นั่นก็คือ ไม่มีการขนส่งที่ช่อง (l, q) ทำให้สายขนส่งหายไป 1 สาย จำนวนสายขนส่งจะมีน้อยกว่า $m + n - 1$ เราแก้ไขปัญหานี้ได้โดยการเปลี่ยนแปลงค่าเล็กน้อย กล่าวคือ ให้ $a_i' = a_i + \varepsilon, i = 1, \ldots, m$ และ $b_j' = b_j$, $j = 1, \ldots, n-1$, $b_n' = b_n + m\varepsilon$ จะได้ว่า

$$\sum_{i=1}^{m} (a_i + \varepsilon) = \sum_{j=1}^{n-1} b_j + b_n + m\varepsilon$$

เมื่อ ε เป็นค่าบวกที่เล็กที่สุด

เพราะฉะนั้น เราจะได้ $x_{lq} = \varepsilon_0$ เมื่อ $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ สรุปได้ว่า degeneracy จะไม่เกิดขึ้นในปัญหาการขนส่ง

ในทางปฏิบัติ สำหรับการแก้ปัญหาด้วยมือ เราไม่จำเป็นต้องเปลี่ยนค่า a_i และ b_j เราเพียงแต่ใส่ค่า 0 ในช่องที่จะได้ตัวแปรฐานมีค่าเป็น 0 เพื่อแสดงว่ามีคำตอบหรือมีการขนส่งที่ช่องหรือสายนี้ (แต่ในทางปฏิบัติจริง ๆ ไม่มีการขนส่งที่ช่องหรือสายนี้) ทั้งนี้เพื่อแก้ไขกรณีที่เกิด degeneracy ทำให้ปัญหามีคำตอบที่มีค่ามากกว่า 0 หรือมีจำนวนสายขนส่ง เท่ากับ $m + n - 1$ สาย

กล่าวโดยสรุป ไม่ว่าจะเป็นการหาคำตอบขั้นฐานชุดแรกด้วยวิธีการใดก็ตาม หากเกิดกรณีที่เราจะเลือกค่าต่ำสุดของจำนวนจัดส่ง จากจำนวนที่เท่ากัน เช่น เราจะได้

x_{pq} = ค่าต่ำสุด (a^p, b^q) โดยที่ $a^p = b^q$

เราเลือกขีดแถว p หรือคอลัมน์ q อย่างใดอย่างหนึ่ง เพียงอย่างเดียว แต่ถือว่าแถว p หรือคอลัมน์ q ที่ไม่ได้ขีดออกยังมีจำนวนเหลืออยู่ (ในที่นี้คือ 0) ซึ่งจะต้องนำไปพิจารณาหาคำตอบในแถวหรือคอลัมน์นี้ต่อไป เพื่อความเข้าใจในปัญหาประเภทนี้ ให้เรามาศึกษาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 6.5

กำหนดตารางขนส่ง แสดง จำนวนที่โรงงานผลิตได้ (a_i) จำนวนที่คลังสินค้าเก็บ (b_j) อัตราค่าขนส่งจากโรงงานไปเก็บที่คลังสินค้า ในอัตราบาทต่อหน่วย ดังต่อไปนี้

คลังสินค้า	ก	ข	ค	ง	จ	a_i
โรงงาน : 1	5	10	15	8	9	50
2	14	13	10	9	20	80
3	11	19	8	12	6	70
b_j	30	30	50	50	40	

จงจัดสายขนส่งชุดแรกโดยใช้ Row Minima

วิธีทำ

จัดสายขนส่งตามจำนวนที่โรงงานมี ให้เสร็จทีละแถว โดยเริ่มต้นจากแถว 1 ปรากฏผลดังนี้

คลังสินค้า / โรงงาน	ก	ข	ค	ง	จ	a_i
1	5 (30)	10	15	8 (20)	9	50
2	14	13	10 (50)	9 (30)	20	80
3	11	19 (30)	8 (0)	12	6 (40)	70
b_j	30	30	50	50	40	

อ่านผลจากตารางได้ ดังต่อไปนี้

โรงงาน 1 ส่งสินค้าไปเก็บที่คลังสินค้า ก จำนวน 30 หน่วย ค่าใช้จ่าย (5)(30) = 150 บาท

ส่งสินค้าไปเก็บที่คลังสินค้า ง จำนวน 20 หน่วย ค่าใช้จ่าย (8)(20) = 160 บาท

โรงงาน ๒ ส่งสินค้าไปเก็บที่คลังสินค้า ค จำนวน 50 หน่วย ค่าใช้จ่าย (10)(50) = 500 บาท

ส่งสินค้าไปเก็บที่คลังสินค้า ง จำนวน 30 หน่วย ค่าใช้จ่าย (9)(30) = 270 บาท

โรงงาน 3 ส่งสินค้าไปเก็บที่คลังสินค้า ข จำนวน 30 หน่วย ค่าใช้จ่าย (19)(30) = 570 บาท

ส่งสินค้าไปเก็บที่คลังสินค้า จ จำนวน 40 หน่วย ค่าใช้จ่าย (6)(40) = 240 บาท

ค่าใช้จ่ายทั้งหมด จะเท่ากับ 1,890 บาท

หมายเหตุ

จะเห็นว่า $a_1 + a_2 = b_1 + b_4 + b_3 = 130$

เป็นผลให้ $x_{2ค}$ = ค่าต่ำสุด (50, 50) = 50

เราขีดแถว 2 ด้วยเหตุที่ว่า $c_{2ข} = 13$ มีค่ามากกว่า $c_{3ค} = 8$ เพราะฉะนั้นคอลัมน์ 3 ยังต้องการอีกเท่ากับ 0 ซึ่งเราถือว่ายังมีคำตอบในคอลัมน์นี้อีก และคำตอบที่จะได้คือ $x_{3ค} = 0$ ดังนั้น $x_{3ค}$ เป็นตัวแปรฐานที่มีค่าเป็น 0 เรานับช่อง (3, ค) เป็นสายขนส่งสายหนึ่ง แสดงด้วยค่า 0 ในวงกลม ด้วยเหตุนี้เราจะได้จำนวนสายขนส่งทั้งหมด เท่ากับ $m + n - 1$ สาย (7 สาย)

อย่างไรก็ตาม หากเราหาคำตอบชุดแรกด้วยวิธีการอื่น เช่น Column Minima จะไม่มีกรณีของ degeneracy เกิดขึ้น นั่นก็คือ เราจะได้จำนวนสายขนส่งครบ 7 สาย ดังต่อไปนี้

คลังสินค้า / โรงงาน	ก	ข	ค	ง	จ	a_i
1	5 (30)	10 (20)	15	8	9	50
2	14	13 (10)	10	9 (50)	20 (20)	80
3	11	19	8 (50)	12	6 (20)	70
b_j	30	30	50	50	40	

สรุปได้ว่าการเกิด degeneracy ในปัญหาการขนส่ง แก้ไขได้ง่ายกว่าวิธีการซิมเพลกซ์มาก

6.3 วิธีการตรวจสอบว่าคำตอบที่ได้เป็นสายขนส่งที่ดีที่สุด

เมื่อเราได้คำตอบที่เป็นไปได้ขั้นฐาน จะด้วยวิธีใดก็ตาม ปัญหาที่ตามมาก็คือ จะรู้ได้อย่างไรว่าคำตอบที่ได้นั้น เป็นคำตอบอุตมะ นั่นคือเป็นสายขนส่งที่ดีที่สุด หรือไม่ ในวิธีการซิมเพลกซ์ เราตรวจสอบโดยพิจารณาจากอัตราการเพิ่มขึ้นของกำไรต่อหน่วย $c_j - s_j$ ของ nonbasic variable x_j ถ้าเป็นค่าบวก ก็หมายความว่า ค่าของกำไร P ยังเพิ่มขึ้นได้อีก ต้องปรับปรุงคำตอบใหม่ จนกว่าจะไม่มี $c_j - s_j$ ของ nonbasic variable x_j ตัวใดมีค่าเป็นบวก นั่นก็คือ $c_j - s_j \leqslant 0$ หมดทุกตัว จึงจะสรุปว่า ได้คำตอบอุตมะแล้ว และหากเราต้องการหาค่าใช้จ่ายต่ำสุด เราก็พิจารณาอัตราการลดลงของค่าใช้จ่ายต่อหน่วย $c_j - s_j$ ของ nonbasic variable x_j ว่า เป็นลบหรือไม่ ถ้าทุก ๆ ค่าของ $c_j - s_j \geqslant 0$ หมด ก็แสดงว่าเราได้คำตอบอุตมะแล้ว การตรวจสอบคำตอบในวิธีการขนส่งก็ใช้หลักเกณฑ์แบบเดียวกัน กล่าวคือ เมื่อเราต้องการหาค่าใช้จ่ายในการขนส่งต่ำสุด เราต้องตรวจสอบอัตราการลดลงต่อหน่วย $c_{ij} - s_{ij}$ ของ nonbasic variable x_{ij} ว่าเป็นลบหรือไม่ หากทุก ๆ ค่าของ $c_{ij} - s_{ij} > 0$ หมด ก็แสดงว่าคำตอบที่ได้เป็นคำตอบอุตมะแล้ว นั่นก็คือ เราได้สายขนส่งที่ดีที่สุดแล้ว แต่ถ้าหากมี $c_{ij} - s_{ij}$ ตัวใดมีค่าเป็นลบ แสดงว่าคำตอบที่ได้ยังไม่เป็นคำตอบอุตมะ เราต้องปรับคำตอบใหม่ ให้เรามาพิจารณาการคำนวณค่าของ $c_{ij} - s_{ij}$ และการปรับคำตอบใหม่ จากปัญหาการขนส่ง ที่มี $m = 2, n = 3$ ดังต่อไปนี้

หาค่าต่ำสุดของ P =

$$c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23}$$

โดยมีข้อจำกัด

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = a_1 \qquad \text{..........} (1)$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = a_2 \qquad \text{..........} (2)$$

$$x_{11} + x_{21} = b_1 \qquad \text{..........} (3)$$

$$x_{12} + x_{22} = b_2 \qquad \text{..........} (4)$$

$$x_{13} + x_{23} = b_3 \qquad \text{..........} (5)$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1, 2, ; j = 1, 2, 3$$

เราใช้วิธีการแก้สมการอย่างเป็นระบบ ตามแบบ Gaussian reduction ขณะเดียวกันก็อาศัยวิธีการ North - West Corner Rule เราจะได้คำตอบ ดังต่อไปนี้

เริ่มต้นจากการหาค่าของ x_{11} สมมติว่า $a_1 > b_1$ ดังนั้น จากสมการข้อจำกัด (3) เรากำหนด $x_{21} = 0$ จะได้ว่า

$$x_{11} + x_{21} = b_1 \qquad \text{..........} (3')$$

เพราะฉะนั้น $x_{11} = b_1 - x_{21}$ แทนค่า x_{11} ที่ได้นี้ในสมการข้อจำกัด (1) นั่นก็คือ

$$(1) - (3) \quad x_{12} + x_{13} - x_{21} = a_1 - b_1 \qquad \text{..........} (1')$$

สมมติ $a_1 - b_1 < b_2$ และเรากำหนดให้ $x_{13} = 0$

จะได้ค่า $x_{12} = a_1 - b_1 + x_{21} - x_{13}$ แทนค่าที่ได้นี้ในสมการข้อจำกัด (4) นั่นก็คือ

$$(4) - (1') \quad x_{22} - x_{13} + x_{21} = b_2 - a_1 + b_1 \qquad \text{..........} (4')$$

เพราะฉะนั้น $x_{22} = b_2 - a_1 + b_1 + x_{13} - x_{21}$ แทนค่านี้ในสมการข้อจำกัด (2)

$$(2) - (4') \quad x_{23} + x_{13} = a_2 - b_2 + a_1 - b_1 \qquad \text{..........} (2')$$

ซึ่งก็คือสมการข้อจำกัดที่ (5) ทั้งนี้เนื่องจากเรามี $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 + b_3$

เราจึงได้ว่า $x_{23} = b_3 - x_{13}$

แทนค่า x_{11}, x_{12}, x_{22} และ x_{23} ในฟังก์ชันเป้าหมาย P จะได้ว่า

$$\begin{aligned} P &= c_{11}(b_1 - x_{21}) + c_{12}(a_1 - b_1 + x_{21} - x_{13}) + c_{13}x_{13} + c_{21}x_{21} + \\ &\quad c_{22}(b_2 - a_1 + b_1 + x_{13} - x_{21}) + c_{23}(b_3 - x_{13}) \\ &= c_{11}b_1 + c_{12}(a_1 - b_1) + c_{22}(b_2 - a_1 + b_1) + c_{23}b_3 + \\ &\quad (c_{21} - c_{22} + c_{12} - c_{11})x_{21} + (c_{13} - c_{12} + c_{22} - c_{23})x_{13} \end{aligned}$$

j / i	1	2	3	a_i
1	$\boxed{c_{11}}$ b_1	$\boxed{c_{12}}$ $a_1 - b_1$	$\boxed{c_{13}}$ $c_{13} - s_{13}$	a_1
2	$\boxed{c_{21}}$ $c_{21} - s_{21}$	$\boxed{c_{22}}$ $b_2 - a_1 + b_1$	$\boxed{c_{23}}$ b_3	a_2
b_j	b_1	b_2	b_3	$a_1 + a_2 = b_1 + b_2 + b_3$

พิจารณาจากตารางขนส่ง มีอัตราค่าขนส่งต่อหน่วย c_{ij} แสดงไว้ตรงมุมบนซ้ายของแต่ละช่อง ช่องที่มีตัวแปรฐาน x_{ij}^B แสดงด้วยตัวเลขที่มีเส้นล้อมรอบ โดยที่ตัวเลขนั้นหมายถึงคำตอบของตัวแปรฐาน x_{ij}^B สำหรับช่องที่มี nonbasic variable x_{ij} แสดงด้วยตัวเลขที่ไม่มีเส้นล้อมรอบ และตัวเลขนั้นหมายถึงอัตราค่าใช้จ่ายที่ลดลงต่อหน่วย $c_{ij} - s_{ij}$ ซึ่งในที่นี้ เรามี x_{21} และ x_{13} เป็น nonbasic variables

และ

$$c_{21} - s_{21} = c_{21} - c_{22} + c_{12} \quad c_{11}$$

$$c_{13} - s_{13} = c_{13} - c_{12} + c_{22} - c_{23}$$

เป็นอัตราค่าใช้จ่ายที่ลดลงต่อหน่วยของ x_{21} และ x_{13} ตามลำดับ

จะเห็นได้ว่า การคำนวณค่าของ $c_{ij} - s_{ij}$ ใช้วิธีการเดียวกันกับการคำนวณค่าของ $c_j - s_j$ ในตารางซิมเพลกซ์ แตกต่างกันตรงที่ ส.ป.ส.ของ x_{ij} ในสมการข้อจำกัด i และ j ของแต่ละ iteration หรือแต่ละตาราง มีค่าเป็น 1 และ 0 เท่านั้น กล่าวคือ

$$s_{ij} = \Sigma(\pm)\, c_{ik}^B \qquad \ldots\ldots\ldots(6.12)$$

ในเมื่อ c_{ik}^B เป็นอัตราค่าขนส่งต่อหน่วย ที่อยู่ในลำดับเดียวกันกับ สายขนส่งที่มี x_{ik}^B เป็นตัวแปรฐาน สำหรับการปรับคำตอบใหม่ เพื่อให้ได้ค่าของ P น้อยลง เราทำโดยวิธีการเดียวกันกับวิธีการซิมเพลกซ์

สมมติเราได้ $c_{21} - s_{21} < 0$ และเราจะปรับคำตอบใหม่ โดยให้ x_{21} เป็นตัวแปรฐาน

เราก็ต้องพิจารณาว่า x_{21} ควรจะมีค่าเท่าใด จึงจะเหมาะสมที่สุด นั่นก็คือ ควรจะแทนที่ตัวแปรฐานตัวใด พิจารณาจากคำตอบชุดเดิมที่ได้ จะเห็นว่า

จาก (1′) x_{21} แทนที่ x_{12} ไม่ได้ เนื่องจากจะได้ค่าเป็นลบ

จาก (3′) หากเราให้ x_{21} แทนที่ x_{11} จะได้ $x_{21} = b_1$

จาก (4′) หากเราให้ x_{21} แทนที่ x_{22} จะได้ $x_{21} = b_2 - a_1 + b_1$

ค่าของ x_{21} ที่จะเป็นไปได้ จะเป็นค่าต่ำสุด สมมติ $b_1 < b_2 - a_1 + b_1$ ดังนั้น $x_{21} = b_1$ นั่นก็คือ เราจะได้ $x_{11} = x_{13} = 0$ และจะได้คำตอบของตัวแปรอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง ดังต่อไปนี้

จาก (3′) $\quad x_{21} + x_{11} = b_1 \quad$ ....(3″)

(1′) + (3″) $\quad x_{12} + x_{13} + x_{11} = a_1 \quad$ ....(1″)

(4′) − (3″) $\quad x_{22} - x_{13} - x_{11} = b_2 - a_1 \quad$ ....(4″)

นอกนั้นคงเดิม

สรุปได้ว่า เราเลือกค่าของ x_{21} จาก

ค่าต่ำสุดของ $(b_1, b_2 - a_1 + b_1)$

เมื่อได้ค่า $x_{21} = b_1$ ก็แสดงว่า $x_{11} = b_1 - b_1 = 0$ นอกจากนั้น เราจะได้ค่าของตัวแปรฐานอื่นที่เกี่ยวข้อง ดังนี้คือ

$$x_{12} = (a_1 - b_1) - b_1 = a_1$$

และ $$x_{22} = (b_2 - a_1 + b_1) - b_1 = b_2 - a_1$$

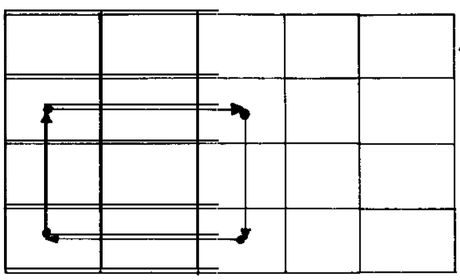
แสดงให้เห็นได้ในตารางขนส่ง ดังนี้

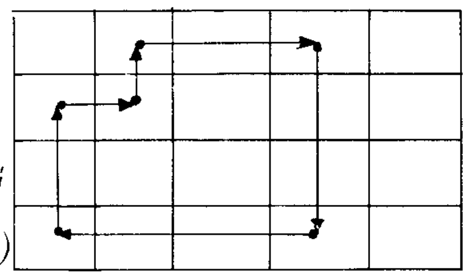
j / i	1	2	3	a_i
1	c_{11}	c_{12} a_1	c_{13}	a_1
2	c_{21} b_1	c_{22} $b_2 - a_1$	c_{23} b_3	a_2
b	b_1	b_2	b_3	

เราจะเรียกช่องที่แสดงตัวแปรฐาน (basic variables) ว่าเป็นสายขนส่งที่ใช้ แสดงจำนวนที่จะจัดส่งด้วยตัวเลขในวงกลม และเรียกช่องที่แสดง nonbasic variables ว่าเป็นสายขนส่งที่ไม่ได้ใช้ ตัวเลขที่อยู่ในช่องนี้ ไม่มีวงกลมล้อมรอบ แสดงถึงอัตราค่าใช้จ่ายที่ลดลงต่อหน่วย $(c_{ij} - s_{ij})$

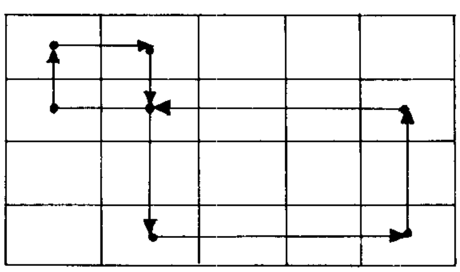
เราเรียกเซทที่เรียงลำดับกันของช่อง (2, 1), (2, 2), (1, 2), (1, 1) และ (1, 3), (1, 2), (2, 2), (2, 3) ว่าเป็น loop นี่ก็หมายความว่า การคำนวณค่าของ $c_{ij} - s_{ij}$ ของ nonbasic variable x_{ij} หรือการพิจารณาการเพิ่มขึ้นของ nonbasic variable x_{ij} จะต้องพิจารณาตาม loop ของมัน โดยมีช่อง (i, j) ที่ไม่ได้ใช้ เป็นจุดเริ่มต้นของ loop ส่วนช่องอื่น ๆ ที่อยู่ใน loop เดียวกัน จะต้องเป็นช่องที่ใช้แล้ว นั่นคือ จัดเป็นสายขนส่ง ดังนั้น เราจึงควรจะมาทำความเข้าใจเกี่ยวกับเรื่องของ loop ก่อน

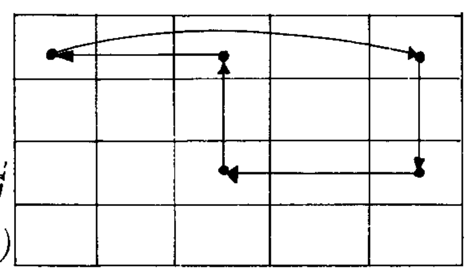
หากเรามีเซทที่เรียงลำดับกันของช่องในตารางขนส่ง ประกอบด้วยสายขนส่งที่ไม่ได้ใช้ 1 สายและสายที่มีการขนส่งอย่างน้อยที่สุด 3 สาย ในลักษณะที่มี 2 สายติดกันใด ๆ ในเซทที่เรียงลำดับกันนี้ อยู่ในแถวเดียวกัน หรืออยู่ในคอลัมน์เดียวกัน และจะต้องไม่มี 3 สายที่ติดกันใด ๆ ในเซทนี้ อยู่ในแถวเดียวกัน หรือในคอลัมน์เดียวกัน แต่ละสายจะต้องปรากฏในเซทนี้เพียงครั้งเดียวเท่านั้น เมื่อเราลากเส้นตรงเชื่อมต่อระหว่าง 2 สายใด ๆ ในเซทที่เรียงลำดับกันนี้ แสดงทิศทางโดยเขียนลูกศรบนเส้นตรงนั้น ตามลำดับกันไป ปลายลูกศรของเส้นตรงแต่ละเส้น จะเป็นจุดเริ่มต้นของเส้นถัดไป และเส้นตรงทุก ๆ คู่ที่ถัดกันไปจะตั้งฉากซึ่งกันและกัน เราจะเรียกเซทที่เรียงลำดับกันของช่องในตารางขนส่ง ว่าเป็น loop ถ้าหากสายเริ่มต้น (สายขนส่งที่ไม่ได้ใช้) กับสายสุดท้าย (สายขนส่งที่ใช้แล้ว) อยู่ในแถวเดียวกันหรืออยู่ในคอลัมน์เดียวกัน นั่นก็คือ เส้นตรงเส้นแรกกับเส้นสุดท้ายจะต้องตั้งฉากกัน ตัวอย่างของ loop แสดงให้เห็นได้ดังรูปที่ (6.2)


รูปที่ (6.2ก)


รูปที่ (6.2ข)

สำหรับ loop ตามรูปที่ 6.3 ไม่ถือว่าเป็น loop ตามนิยามของเรา


รูปที่ (6.3ก)


รูปที่ (6.3ข)

ในรูปที่ (6.3ก) ช่อง (2, 2) ปรากฏ 2 ครั้งใน loop จึงไม่ถือว่าเป็น loop ถ้าเราตัดช่อง (2, 2) ออกรูปที่ (6.3ก) ก็จัดว่าเป็น loop ตามนิยามของเรา ส่วนรูปที่ (6.3ข) ไม่ถือว่าเป็น loop ทั้งนี้ เนื่องจาก หากเราให้ช่อง (1, 1) เป็นจุดเริ่มต้น จะพบว่า ในแถวที่ 1 มี 3 สายติดกันและเส้นแรกกับเส้นสุดท้ายไม่ตั้งฉากกัน หรือหากเราจะกำหนดช่องอื่น ๆ เป็นจุดเริ่มต้น จะพบว่า มีเส้นตรงที่ติดกันบางคู่ ไม่ตั้งฉากกัน เว้นเสียแต่เราจะไม่นับช่อง (1, 1) ว่าเป็นสายหนึ่งในเซทนี้ จึงจะเรียกว่าเป็น loop ได้

อาศัยหลักเกณฑ์และคุณสมบัติของ loop ดังที่ได้กล่าวมาแล้ว นำมาใช้ในการตรวจสอบว่าเป็นคำตอบอุตมะ หรือไม่ และการปรับคำตอบใหม่เพื่อให้ได้คำตอบอุตมะ ซึ่งแยกพิจารณาเป็น 2 วิธีการ ดังนี้

6.3.1 วิธีการ Stepping stone

อาศัยหลักเกณฑ์ของ loop โดยตรง แต่ละ loop จะประกอบด้วย สายขนส่งที่ไม่ได้ใช้ 1 สาย เป็นจุดเริ่มต้น กับสายขนส่งที่ใช้แล้วอย่างน้อยที่สุด 3 สาย นั่นก็คือ หากมีเซทที่เรียงลำดับกันของสายที่ไม่ได้ใช้ (i, j) กับสายที่ใช้แล้ว (l, j), (l, k), (p, k), ..., (i, q) ประกอบกันเป็น loop หนึ่ง เราจะได้

$$c_{ij} - s_{ij} = c_{ij} - c^B_{lj} + c^B_{lk} - c^B_{pk} + \ldots - c^B_{iq}$$

ถ้าผลสรุปว่า จะต้องเปลี่ยนสายขนส่งมาที่ (i, j) จำนวนที่สาย (i, j) จะรับได้มากที่สุดเท่ากับ

ค่าต่ำสุด $(x^o_{lj}, x^o_{pk}, \ldots, x^o_{iq})$

สมมติ ค่าต่ำสุดที่ได้คือ x^o_{pk} คำตอบชุดใหม่ จะได้จาก

$$x^B_{ij} = x^o_{pk},\ x^B_{lj} = x^o_{lj} - x^o_{pk},\ x^B_{lk} = x^o_{lk} + x^o_{pk},\ x_{pk} = 0, \ldots\ x^B_{iq} = x^o_{iq} - x^o_{pk}$$

คำตอบอื่น ๆ ที่ไม่ได้อยู่ใน loop นี้ จะมีค่าคงเดิม

ขั้นตอนในการใช้วิธีการ Stepping Stone มีดังต่อไปนี้

(1) ตรวจสอบสายขนส่งที่ใช้แล้ว ในตารางขนส่ง จะต้องมีจำนวน m + n − 1 สาย

(2) พิจารณาสายขนส่งที่ไม่ได้ใช้แต่ละสาย คำนวณอัตราค่าใช้จ่ายที่ลดลง $(c_{ij} - s_{ij})$ ของสาย (i, j) ที่ไม่ได้ใช้ เปรียบเทียบกับสายที่ใช้แล้ว ใน loop หนึ่ง ๆ นั่นก็คือ เริ่มต้นจากสาย (i, j) ที่ไม่ได้ใช้ เคลื่อนไปตาม loop สลับเครื่องหมาย + และ − ของ

อัตราค่าขนส่ง c_{ij} ใน loop การเคลื่อนที่ตาม loop จะตามแถวก่อน หรือตามคอลัมน์ก่อนก็ได้

(3) ตรวจสอบผลที่ได้จาก (2)

3.1 ถ้าอัตราค่าใช้จ่ายที่ลดลงต่อหน่วยของสาย (i, j) ที่ไม่ได้ใช้ มีค่าเป็นบวกหมดทุก ๆ สาย แสดงว่า ได้คำตอบอุตมะแล้ว อ่านผลที่ได้จากตารางขนส่ง จะได้สายขนส่งที่ดีที่สุด

3.2 ถ้ามีอัตราค่าใช้จ่ายที่ลดลงต่อหน่วย ของบางสายที่ไม่ได้ใช้ มีค่าเป็นลบ ให้ทำต่อข้อ (4)

(4) หาค่าต่ำสุดของอัตราค่าใช้จ่ายที่ลดลงต่อหน่วย $c_{ij} - s_{ij}$ สมมติได้

$$c_{rk} - s_{rk} = \text{ค่าต่ำสุด } (c_{ij} - s_{ij}) = c_{rk} - c_{rt} + c_{pt} - c_{pq} + \ldots - c_{tk}$$

(5) หาค่าต่ำสุด $(x^o_{rt}, x^o_{pq}, \ldots, x^o_{tk}) = x^o_{pq}$

เมื่อ x^o_{ij} เป็นคำตอบของ x^B_{ij} สายขนส่งที่ใช้ (i, j)

(6) เขียนตารางต่อไป จากการปรับคำตอบใหม่ โดยให้ (r, k) เป็นสายขนส่งที่ใช้ แทนที่สายขนส่งเดิม (p, q) และเปลี่ยนคำตอบของสายขนส่งที่เกี่ยวข้องกับสาย (r, k) นี้ โดยยึดหลักว่า หากมีการบวกค่าคงที่ใด ให้กับช่องในตารางขนส่งแถวใด จะต้องเอาค่าคงที่นั้น ลบออกจากช่องที่อยู่ในแถวเดียวกัน ขณะเดียวกันต้องพิจารณาคอลัมน์ควบคู่กันไปด้วย หากในช่องของคอลัมน์ใดมีค่าคงที่นี้บวกเข้าไป จะต้องลบค่าคงที่นี้ออกจากช่องในคอลัมน์เดียวกัน สรุปได้ว่า การเปลี่ยนแปลงใด ๆ จะต้องอยู่ภายใต้เกณฑ์สมมติ (6.1) และ (6.2) นั่นก็คือ ใช้หลักการบวกและการลบ x^o_{pq} สลับกันไปตาม loop โดยเริ่มต้นที่ช่อง (r, k) สำหรับสายขนส่งอื่น ๆ ที่ไม่ได้อยู่ใน loop นี้ มีคำตอบคงเดิม กลับไปทำข้อ (1)

ให้เรามาศึกษาการหาคำตอบอุตมะ หรือการจัดสายขนส่งที่ดีที่สุด จากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 6.6

สายขนส่งที่ดีที่สุดควรจะเป็นอย่างไร ถ้าเรามีตารางขนส่งแสดง จำนวนที่โรงงานผลิตได้ จำนวนอุปสงค์และอัตราค่าขนส่ง (บาทต่อหน่วย) ดังต่อไปนี้

เขตการค้า / โรงงาน	1	2	3	4	จำนวนที่ผลิตได้
ก	10	a	12	19	2500
ข	10	5	11	15	2500
ค	6	13	9	17	3000
ง	12	11	5	a	3000
จำนวนอุปสงค์	2000	2000	3000	4000	11,000

วิธีทำ

หาคำตอบชุดแรกด้วยวิธีการ Vogel จะได้ตารางที่ 1 ดังนี้

เขตการค้า / โรงงาน	1	2	3	4	จำนวนที่ผลิตได้	ผลต่าง
ก	10	8	12 (2000)	19 0 500	2500	2 2 7
ข	10	5 0 (2000)	11	15 (500) 500	2500	5 1 4
ค	6 (2000)	13	9 (1000)	17	**3000**	3 3 8
ง	12	11	5	8 (3000)	**3000**	3
านวนอุปสงค์	2000	**2000**	**3000**	**4000**		
ผลต่าง	4	3	4	7		
	4	3	2	2		
			1	4		

ค่าใช้จ่ายในการขนส่งทั้งหมด เท่ากับ 96,000

ตรวจสอบคำตอบที่ได้นี้ ด้วยวิธีการ Stepping Stone

ในที่นี้ช่องที่มีวงกลมอยู่ หมายถึง สายขนส่งที่ใช้แล้ว คำนวณค่าของ $c_{ij} - s_{ij}$ ของสายที่ไม่ได้ใช้ตาม loop ของมัน ดังต่อไปนี้

คำนวณค่าของ $c_{11} - s_{11}$ ซึ่งมีความหมายว่า หากมีการเปลี่ยนสายขนส่งที่ไม่ได้ใช้ (1, 1) มาเป็นสายขนส่งที่ใช้แล้ว นั่นก็คือ ถ้าเราให้โรงงาน ก ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 1 จำนวน 1 หน่วย จะต้องลดจำนวนจากที่ส่งไปให้เขตการค้า 3 ลง 1 หน่วย ดังนั้นเขตการค้า 3 จะได้รับสินค้าขาดไป 1 หน่วย ในขณะที่เขตการค้า 1 ได้รับเกินมา 1 หน่วย เมื่อเป็นเช่นนี้ โรงงาน ค จึงต้องลดการส่งให้เขต 1 ลง 1 หน่วย และไปเพิ่มให้กับเขต 3 อีก 1 หน่วย ค่าใช้จ่ายที่เปลี่ยนไปต่อหน่วย จะเท่ากับ

$$10 - 12 + 9 - 6 = 1$$

	1	2	3	4
ก	10	8	12 −1	19
ข	10		1	[illegible]
ค	6 −1 1	13 5	11 9 +1	15 17
ง	12	11	5	8

แสดงว่า การเปลี่ยนแปลงสายขนส่งดังกล่าว จะทำให้ค่าใช้จ่ายเพิ่มขึ้นอีก 1 บาทต่อหน่วย

คำนวณค่าของ $c_{12} - s_{12}$ ซึ่งมีความหมายว่า หากเราเปลี่ยนให้โรงงาน ก ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 2 จำนวน 1 หน่วย จะต้องลดจำนวนจากที่ส่งไปเขต 4 ลง 1 หน่วย ดังนั้น เขต 4 จะได้รับสินค้าขาดไป 1 หน่วย ในขณะที่เขต 2 ได้รับเกินมา 1 หน่วยโรงงาน ข จึงต้องลดการส่งให้เขต 2 ลง 1 หน่วยแล้วไปเพิ่มให้กับเขต 4 อีก 1 หน่วย ค่าใช้จ่ายที่เปลี่ยนไปต่อหน่วย จะเท่ากับ

$$8 - 19 + 15 - 5 = -1$$

	1	2	3	4
ก	10	8 +1	12	19 −1
ข	10	5 −1	11	15 +1
ค	6	13	9	17
ง		11	5	8

แสดงว่า ถ้าเปลี่ยนสายขนส่ง โดยให้โรงงาน ก ส่งไปที่เขตการค้า 2 ค่าใช้จ่ายจะลดลง 1 บาทต่อหน่วย

คำนวณค่าของ $c_{21} - s_{21}$ ซึ่งมีความหมายว่า หากเราเปลี่ยนให้โรงงาน ข ส่งสินค้าไปที่เขต 1 1 หน่วย จะต้องลดจำนวนจากที่ส่งไปเขต 4 ลง 1 หน่วย และโรงงาน ก จะเพิ่มจำนวนที่ส่งไปเขต 4 อีก 1 หน่วย ลดจำนวนที่ส่งไปเขต 3 ลง 1 หน่วย ดังนั้น โรงงาน ค จึงต้องเพิ่มจำนวนให้กับเขต 3 อีก 1 หน่วย พร้อมกับลดจำนวนที่ส่งให้เขต 1 ลง 1 หน่วย ค่าใช้จ่ายที่เปลี่ยนไปต่อหน่วยจะเท่ากับ

$$10 - 15 + 19 - 12 + 9 - 6 = 5$$

	1	2	3	4
ก	10	8	12 −1	19 +1
ข	10 +1	5	11	15 −1
ค	6 −1	13	9 +1	17
ง	12	11	5	8

แสดงว่า ถ้าเปลี่ยนสายขนส่ง โดยให้โรงงาน ข ส่งไปที่เขต 1 ค่าใช้จ่ายจะเพิ่มขึ้น 5 บาทต่อหน่วย

คำนวณค่าของ $c_{23} - s_{23}$ ซึ่งมีความหมายว่า หากเราเปลี่ยนให้โรงงาน ข ส่งสินค้าไปที่เขต 3 1 หน่วย จะต้องลดจำนวนจากที่เคยส่งให้เขต 4 ลง 1 หน่วย แล้วโรงงาน ก จะต้องเพิ่ม

จำนวนให้เขต 4 อีก 1 หน่วย และลดจำนวนจากที่เคยส่งให้เขต 3 ลง 1 หน่วย ค่าใช้จ่ายที่เปลี่ยนไปต่อหน่วย จะเท่ากับ 11 − 15 + 19 − 12 = 3 บาท

	1	2	3	4
ก	10	8	12 −1	19 +1
ข	10	5	11 +1	15 −1
ค	6	13	9	17
ง	12	11	5	8

แสดงว่า ถ้าเปลี่ยนสายขนส่ง โดยให้โรงงาน ข ส่งสินค้าไปที่เขต 3 ค่าใช้จ่ายจะเพิ่มขึ้นอีก 3 บาท/หน่วย

คำนวณค่าของ $c_{32} - s_{32}$ ซึ่งมีความหมายว่า หากเราเปลี่ยนให้โรงงาน ค ส่งไปที่เขต 2 1 หน่วย จะต้องลดจำนวนจากที่เคยส่งให้เขต 3 ลง 1 หน่วย เป็นผลให้โรงงาน ก ต้องเพิ่มจำนวนให้กับเขต 3 อีก 1 หน่วย ลดจำนวนจากที่เคยส่งให้เขต 4 ลง 1 หน่วย และโรงงาน ข ต้องเพิ่มจำนวนให้กับเขต 4 อีก 1 หน่วย จ่ายที่เปลี่ยนไปต่อหน่วย จะเท่ากับ 13 − 9 + 12 − 19 + 15 − 5 = 7

	1	2	3	4
ก	10	8	12 +1	19 −1
ข	10	5 −1	11	15 +1
ค	6	13 +1	9 −1	17
ง	12	11	5	8

แสดงว่า ถ้าเปลี่ยนสายขนส่ง โดยให้โรงงาน ค ส่งสินค้าไปที่เขต 2 ค่าใช้จ่ายจะเพิ่มขึ้นอีก 7 บาท/หน่วย

คำนวณค่าของ $c_{34} - s_{34}$ ซึ่งมีความหมายว่า หากเราเปลี่ยนให้โรงงาน ค ส่งสินค้าไปที่เขต 4 1 หน่วย จะต้องลดจำนวนที่เคยส่งให้เขต 3 ลง 1 หน่วย เป็นผลให้ โรงงาน ก ต้องเพิ่มจำนวนที่ส่งให้เขต 3 ลง 1 หน่วย และลดจำนวนที่เคยส่งให้เขต 4 ลง 1 หน่วย ค่าใช้จ่ายที่เปลี่ยนไปต่อหน่วย

17 − 19 + 12 − 9 = 1

	1	2	3	4
ก	10	ล	12 +1	19 −1
ข	10	5	11	15
ค	6	13	9 −1	17 +1
ง	12	11	5	8

แสดงว่า ถ้าเปลี่ยนสายขนส่งโดยให้ โรงงาน ค ส่งสินค้าไปที่เขต 4 ค่าใช้จ่ายจะเพิ่มขึ้นอีก 1 บาท/หน่วย

คำนวณค่าของ $c_{41} - s_{41}$ ซึ่งมีความหมายว่า หากเราเปลี่ยนให้โรงงาน ง ส่งสินค้าไปที่เขต 1 1 หน่วย จะต้องลดจำนวนที่เคยส่งให้เขต 4 ลง 1 หน่วย เป็นผลให้ โรงงาน ก ต้องเพิ่มจำนวนที่ส่งให้เขต 4 อีก 1 หน่วย ลดจำนวนจากที่เคยส่งให้เขต 3 ลง 1 หน่วย และโรงงาน ค ต้องเพิ่มจำนวนให้เขต 3 อีก 1 หน่วย ลดจำนวนที่เคยส่งให้เขต 1 ลง 1 หน่วย ค่าใช้จ่ายที่เปลี่ยนไปต่อหน่วยจะเท่ากับ 12 − 8 + 19 − 12 + 9 − 6 = 14 บาท

	1	2	3	4
n	**10**	**a**	**12** −1	19 +1
ข	**IO**	**5**	**11**	**15**
ค	**6** −1	**13**	**9** +1	**17**
ง	**12** +1	11	5	8 −1

แสดงว่า ถ้าเปลี่ยนสายขนส่งโดยให้ โรงงาน ง ส่งสินค้าไปที่เขต 1 ค่าใช้จ่ายจะเพิ่มขึ้นอีก 14 บาท/หน่วย

คำนวณค่าของ $c_{42} - s_{42}$ ซึ่งมีความหมายว่า หากเราเปลี่ยนให้โรงงาน ง ส่งสินค้าไปที่เขต 2 1 หน่วย จะต้องลดจำนวนที่เคยส่งให้เขต 4 ลง 1 หน่วย เป็นผลให้ โรงงาน ข ต้องเพิ่มจำนวนให้เขต 4 อีก 1 หน่วย และลดจำนวนที่เคยส่งให้เขต 2 ลง 1 หน่วย ค่าใช้จ่ายที่เปลี่ยนไปต่อหน่วย

$= 11 - 8 + 15 - 5 = 13$

	1	2	3	4
ก	10	8	12	19
ข	0	5 −1	11	15 +1
ค	6	13	9	17
ง	2	+	5	8 −1

แสดงว่า ถ้าเปลี่ยนสายขนส่ง โดยให้โรงงาน ง ส่งสินค้าไปที่เขต 2 ค่าใช้จ่ายจะเพิ่มขึ้นอีก 13 บาท/หน่วย

คำนวณค่าของ $c_{43} - s_{43}$ ซึ่งมีความหมายว่า หากเราเปลี่ยนให้โรงงาน ง ส่งสินค้าไปที่เขต 3 1 หน่วย จะต้องลดจำนวนที่เคยส่งให้เขต 4 ลง 1 หน่วย เป็นผลให้โรงงาน ก ต้องเพิ่มจำนวนให้เขต 4 อีก 1 หน่วย และลดจำนวนที่ส่งให้เขต 3 ลง 1 หน่วย ค่าใช้จ่ายที่เปลี่ยนไปต่อหน่วย

$= 5 - 8 + 19 - 12 = 4$

	1	2	3	4
ก	0	8	2 −1	19 +1
ข	10	5	11	15
ค	6	13	9	17
ง	12	11	5 +1	8 −1

แสดงว่า ถ้าเปลี่ยนสายขนส่ง โดยให้โรงงาน ง ส่งสินค้าไปที่เขต 3 ค่าใช้จ่ายจะเพิ่มขึ้นอีก 4 บาท/หน่วย

สรุปผลการทดสอบโดยวิธีการ Stepping Stone ได้ดังต่อไปนี้

เขตการค้า / โรงงาน	1	2	3	4	จำนวนที่ผลิตได้
ก	[10] 1	[8] −1	[12] 2000	[19] 500	2500
ข	[10] 5	[5] 2000	[11] 3	[15] 500	2500
ค	[6] 2000	[13] 7	[9] 1000	[17] 1	3000
ง	[12] 14	[11] 13	[5] 4	[8] 3000	3000
จำนวนอุปสงค์	2000	2000	3000	4000	

ผลที่ได้จากตารางนี้ แสดงให้เห็นว่า ค่าใช้จ่ายในการขนส่งยังลดลงได้อีก หากเราเปลี่ยนสายขนส่งเสียใหม่ โดยให้โรงงาน ก ส่งสินค้าไปที่เขต 2 ซึ่งจากการพิจารณาอัตราค่าใช้จ่ายที่ลดลงต่อหน่วยของสายนี้ จะพบว่า หากให้โรงงาน ก ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 2 โรงงาน ก ต้องลดจำนวนที่ส่งไปให้เขตการค้า 4 เป็นผลให้เขตการค้า 4 ได้รับสินค้าขาดไป ด้วยเหตุนี้ เขตการค้า 4 จึงต้องรับสินค้าจากโรงงาน ข เพิ่มขึ้น ซึ่งโรงงาน ข ต้องลดจำนวนที่ส่งให้เขตการค้า 2 ลง เมื่อเราพิจารณาจำนวนที่โรงงาน ก จะส่งให้เขต 2 ได้โดยไม่เสียสมดุลย์ จะได้ว่า จำนวนที่โรงงาน ก จะส่งไปให้เขต 2 มากที่สุด จะเท่ากับ

ค่าต่ำสุด (500, 2000) = 500

ซึ่งก็คือจำนวนที่โรงงาน ก ส่งไปให้เขต 4 นั่นเอง สรุปได้ว่า คำตอบชุดใหม่จะได้จากการเปลี่ยนสายขนส่ง โดยให้โรงงาน ก ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 2 จำนวน 500 หน่วย แทนที่จะส่งไปที่เขต 4 และโรงงาน ข จะลดจำนวนที่ส่งไปให้เขต 2 ลง 500 หน่วย ดังนั้นเขต 2 จะได้รับสินค้าจากโรงงาน ข เท่ากับ 2,000 − 500 หรือ 1,500 หน่วย ในขณะเดียวกัน โรงงาน ข จะเพิ่มจำนวนสินค้าให้เขต 4 อีก 500 หน่วย รวมเป็น 1,000 หน่วย ส่วนสายขนส่งอื่น ๆ ไม่มีการเปลี่ยนแปลง ค่าใช้จ่ายในการขนส่ง จะเท่ากับ 96,000 − 500 หรือ 95,500 บาท เราตรวจสอบสายขนส่งที่ได้ใหม่นี้ ด้วยวิธีการ Stepping Stone ปรากฏผลดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 2

เขตการค้า / โรงงาน	1	2	3	4	จำนวนที่ผลิตได้
ก	10 / 1	8 / 500	12 / 2000	19 / 1	2,500
ข	10 / 4	5 / 1500	11 / 2	15 / 1000	2,500
ค	6 / 2000	13 / 8	9 / 1000	17 / 2	3,000
ง	12 / 13	11 / 13	5 / 3	8 / 3000	3,000
จำนวนอุปสงค์	2,000	2,000	3,000	4,000	

ผลที่ได้จากตารางที่ 2 นี้ แสดงว่าเราได้คำตอบอุตมะแล้ว เพราะฉะนั้น เราจะได้สายขนส่งที่ดีที่สุดดังนี้

โรงงาน ก ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 2 จำนวน 500 หน่วย ค่าใช้จ่าย (8)(500) = 4,000 บาท

ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 3 จำนวน 2000 หน่วย ค่าใช้จ่าย (12)(2000) = 24,000 บาท

โรงงาน ข ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 2 จำนวน 1500 หน่วย ค่าใช้จ่าย (5)(1500) = 7,500 บาท

ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 4 จำนวน 1000 หน่วย ค่าใช้จ่าย (15)(1000) = 15,000 บาท

โรงงาน ค ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 1 จำนวน 2000 หน่วย ค่าใช้จ่าย (6)(2000) = 12,000 บาท

ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 3 จำนวน 1000 หน่วย ค่าใช้จ่าย (9)(1000) = 9,000 บาท

โรงงาน ง ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 4 จำนวน 3000 หน่วย ค่าใช้จ่าย (8)(3000) = 24,000 บาท

ค่าใช้จ่ายในการขนส่งทั้งหมด จะเท่ากับ 95,500 บาท

อย่าลืม การทดสอบว่าคำตอบที่ได้ จะเป็นคำตอบอุตมะหรือไม่ ขั้นต้นจะต้องตรวจสอบว่ามีสายขนส่งครบจำนวน $m + n - 1$ สายหรือไม่ ถ้ายังไม่ครบจำนวน จะต้องทำให้ครบจำนวนที่กำหนดนี้เสียก่อนเสมอ นั่นก็คือ สร้างสายขนส่งหุ่น แสดงด้วยเลข 0 ในวงกลม

6.3.2 **วิธีการ** MODI (Modified Distribution Method) **หรือ** u - v Method

Dantzig ได้เสนอวิธีการคำนวณค่าอัตราส่วนที่ลดลงของค่าใช้จ่ายต่อหน่วย $c_{ij} - s_{ij}$ ซึ่งง่ายกว่าวิธีการ Stepping Stone โดยอาศัยหลักการของปัญหาคู่ (Dual Problem) เราถือว่าปัญหาการขนส่งมาตรฐาน (6.1) ถึง (6.4) เป็นปัญหาเดิม (Primal Problem) ที่มีตัวแปร mn ตัว m+n ข้อจำกัด จะได้ปัญหาคู่ (Dual Problem) ของปัญหาการขนส่งมาตรฐาน ที่มีตัวแปร m+n ตัว mn ข้อจำกัด ดังต่อไปนี้

หาค่าสูงสุดของ $\quad P' = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$

โดยมีข้อจำกัด

$$u_i + v_j \leqslant c_{ij} \ , \ i = 1, 2, \ldots, m \ ; \ j = 1, 2, \ldots, n$$

ไม่จำกัดเครื่องหมายของ u_i และ v_j

ในเมื่อ u_i และ v_j เป็นตัวแปรควบคุมได้ของปัญหาคู่

ถ้าในปัญหาเดิมเรามี $x^B_{ir}, x^B_{qr}, x^B_{qt}, \ldots, x^B_{ws}, x^B_{wj}$ เป็นตัวแปรฐาน m + n − 1 ตัว ที่มีคำตอบเป็น $x^\circ_{ir}, x^\circ_{qr}, x^\circ_{qt}, \ldots, x^\circ_{ws}, x^\circ_{wj}$ (เป็นค่าตัวเลขที่อยู่ในวงกลม) และมี $c^B_{ir}, c^B_{qr}, c^B_{qt}, \ldots, c^B_{ws}, c^B_{wj}$ เป็นอัตราค่าขนส่งต่อหน่วย ที่อยู่ในลำดับเดียวกัน อาศัยทฤษฎีและคุณสมบัติของปัญหาคู่ เราจะได้สมการข้อจำกัดในปัญหาคู่ m + n − 1 สมการ ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
u_i + v_r &= c^B_{ir} \\
u_q + v_r &= c^B_{qr} \\
u_q + v_t &= c^B_{qt} \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
u_w + v_s &= c^B_{ws} \\
u_w + v_j &= c^B_{wj}
\end{aligned}$$

ด้วยเหตุที่ค่าอุตมะ (optimal value) ของ P และ P′ เป็นค่าเดียวกัน เพราะฉะนั้น การตรวจสอบคำตอบที่ได้ว่า เป็นคำตอบอุตมะหรือไม่ จึงพิจารณาจากอัตราส่วนค่าใช้จ่ายที่ลดลงต่อหน่วย $c_{ij} - s_{ij}$ เหมือนเดิม นั่นก็หมายความว่า สำหรับทุก ๆ nonbasic variables x_{ij} หากมี $c_{ij} - s_{ij} \geqslant 0$ หมด เราจึงสรุปว่า เป็นคำตอบอุตมะ เมื่อไรที่ยังมี $c_{ij} - s_{ij}$ ของ nonbasic variables x_{ij} บางตัวมีค่าน้อยกว่า 0 แสดงว่า เราต้องปรับคำตอบใหม่ต่อไป

ปัญหาจึงอยู่ที่ว่า เราจะคำนวณค่า $c_{ij} - s_{ij}$ ของ nonbasic variable x_{ij} จากค่าของ u_i และ v_j ได้อย่างไร ดังที่ได้กล่าวมาแล้วว่า การคำนวณค่าของ $c_{ij} - s_{ij}$ จะต้องคำนวณตาม loop ของมัน โดยเริ่มต้นจากช่องที่มี nonbasic variable x_{ij} เคลื่อนที่ไปตามช่องที่มี basic variable x_{ij} นั่นก็คือ บวกและลบค่าของ c_{ij} สลับกันไป จากสายที่ไม่ได้ใช้ 1 สาย ไปตามสายที่ใช้แล้ว อย่างน้อยที่สุด 3 สาย ที่ประกอบกันเป็น loop เดียวกัน สมมติว่า เราจะพิจารณาค่าของ $c_{ij} - s_{ij}$ ของ nonbasic variable x_{ij} โดยที่ x_{ij} นี้อยู่ใน loop เดียวกันกับ basic variables $x^B_{ir}, x^B_{qr}, \ldots, x^B_{ws}, x^B_{wj}$ เพราะฉะนั้น

$$c_{ij} - s_{ij} = c_{ij} - c^B_{ir} + c^B_{qr} - \ldots + c^B_{ws} - c^B_{wj}$$

อาศัยผลที่ได้จาก (6.13) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} c_{ij} - s_{ij} &= c_{ij} - (u_i - v_r) + (u_q - v_r) - \ldots + (u_w - v_s) - (u_w - v_j) \\ &= c_{ij} - u_i - v_j \end{aligned}$$

เราจึงกล่าวได้ว่า หาก

$$c_{ij} - s_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j \geqslant 0$$

ทุก ๆ i และ j

แสดงว่า เราได้คำตอบอุตมะแล้ว ผลที่อ่านได้จากตารางจะเป็น สายขนส่งที่ดีที่สุด แต่ถ้ามี

$$c_{ij} - s_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j < 0$$

แสดงว่า เราต้องปรับคำตอบเสียใหม่

เราสรุปขั้นตอนของการตรวจสอบคำตอบอุตมะ โดยวิธีการ MODI หรือ u - v method ได้ดังต่อไปนี้

1. ตรวจสอบสายขนส่งที่ใช้แล้ว จะต้องมี $m + n - 1$ สาย
2. เขียนสมการ

   $$u_i + v_j = c_{ij}$$

   ทุก ๆ ช่อง (i, j) ที่มีการขนส่ง
3. จากระบบของสมการในข้อ (2) กำหนดค่าของ u_i หรือ v_j ตัวใดตัวหนึ่งเพียงตัวเดียว ให้มีค่าคงที่ โดยทั่ว ๆ ไปนิยมให้เท่ากับ 0 แล้วคำนวณค่าของ u_i, v_j ที่เหลือ ในที่นี้ ค่าของ u_i หรือ v_j อาจจะเป็นบวกหรือลบก็ได้

4. อาศัยค่าของ u_i และ v_j ทุกค่าที่คำนวณได้จาก (3) แทนค่าที่ได้นี้ใน

$$c_{ij} - u_i - v_j$$

ทุกช่อง (i, j) ที่ไม่มีการขนส่ง

5. เปรียบเทียบค่าของ $c_{ij} - u_i - v_j$ ที่ได้จาก (4)

   5.1 หากทุกค่าของ $c_{ij} - u_i - v_j \geqslant 0$ แสดงว่าได้คำตอบอุตมะแล้ว

   5.2 หากมีบางค่าของ $c_{ij} - u_i - v_j < 0$ ให้ทำต่อข้อ (6)

6. หาค่าต่ำสุดของ $(c_{ij} - u_i - v_j)$ สมมติได้

$$c_{qs} - u_q - v_s = \underset{i,\,j}{\text{ค่าต่ำสุด}}\,(c_{ij} - u_i - v_j)$$

7. สมมติว่าช่อง (q, s) อยู่ใน loop เดียวกันกับช่องที่มีการขนส่ง (q, t), (p, t), ..., (w, s) หาค่าต่ำสุดของ $x^{\circ}_{qt}, \ldots, x^{\circ}_{ws}$ สมมติได้

$$x^{\circ}_{qr} \;=\; \text{ค่าต่ำสุด}\;(x^{\circ}_{qt}, \ldots, x^{\circ}_{ws})$$

8. เอาค่า x°_{qr} ไปบวกและลบกับค่าที่อยู่ในช่องซึ่งอยู่ใน loop ดังกล่าว สลับกันไป โดยเริ่มต้นด้วยการบวกที่ช่อง (q, s) สำหรับคำตอบอื่น ๆ ที่ไม่ได้อยู่ใน loop นี้ จะมีค่าคงเดิม เขียนตารางใหม่ กลับไปทำข้อ (1)

ตัวอย่างที่ 6.7

จากปัญหาขนส่งในตัวอย่างที่ 6.6 จงตรวจสอบคำตอบที่ได้จากตัวอย่างนี้ ว่าเป็นคำตอบอุตมะหรือไม่ โดยใช้ u – v method

วิธีทำ

ตรวจสอบคำตอบที่ได้จากตารางที่ 1 เขียนสมการ $u_i + v_j = c_{ij}$ ทุก ๆ สาย (i, j) ที่ใช้ จะได้ (ในที่นี้ ช่องที่มี ◯ หมายถึงสายขนส่งที่ใช้)

	1	2	3	4
ก	10	8	12 ◯	19 ◯
ข	10	5 ◯	11	15 ◯
ค	6 ◯	13	9 ◯	17
ง	12	11	5	8 ◯

$u_1 + v_3 = 12$ .... (1)

$u_1 + v_4 = 19$ .... (2)

$u_2 + v_2 = 5$ .... (3)

$u_2 + v_4 = 15$ .... (4)

$u_3 + v_1 = 6$ .... (5)

$u_3 + v_3 = 9$ .... (6)

$u_4 + v_4 = 8$ .... (7)

เรากำหนด $v_4 = 0$ ดังนั้น จาก (2), (4) และ (7) จะได้ว่า $u_1 = 19, u_2 = 15$ และ $u_4 = 8$ ตามลำดับ เมื่อ $u_1 = 19$ จาก (1) เราจะได้ $v_3 = -7$ แทนใน (6) จะได้ $u_3 = 16$ แทนค่านี้ใน (5) จะได้ $v_1 = -10$ แทนค่า $u_2 = 15$ ใน (3) จะได้ $v_2 = -10$ แทนค่า u_i และ v_j ที่ได้เหล่านี้ใน

$$c_{ij} - u_i - v_j$$

ทุก ๆ (i, j) ที่ไม่ได้ใช้ จะได้ว่า

$$c_{11} - u_1 - v_1 = 10 - 19 - (-10) = 1$$

$$c_{12} - u_1 - v_2 = 8 - 19 - (-10) = -1$$

$$c_{21} - u_2 - v_1 = 10 - 15 - (-10) = 5$$

$$c_{23} - u_2 - v_3 = 11 - 15 - (-7) = 3$$

$$c_{32} - u_3 - v_2 = 13 - 16 - (-10) = 7$$

$$c_{34} - u_3 - v_4 = 17 - 16 - 0 = 1$$

$$c_{41} - u_4 - v_1 = 2 - 8 - \quad - 0) = 14$$

$$c_{42} - u_4 - v_2 = 11 - 8 - (-10) = 13$$

$$c_{43} - u_4 - v_3 = 5 - 8 - (-7) = 4$$

แสดงว่า หากมีการเปลี่ยนสายขนส่งโดยให้ โรงงาน ก ส่งไปให้เขต 2 ค่าใช้จ่ายจะลดลง 1 บาทต่อหน่วย เราเปลี่ยนแปลงสายขนส่งเสียใหม่ ซึ่งจะเป็นกรณีเดียวกันกับผลที่ได้ในตัวอย่างที่ 6.6 เพราะฉะนั้น ตารางต่อไปก็คือ ตารางที่ 2 ของตัวอย่าง 6.6 เราตรวจสอบคำตอบของตารางดังกล่าว ปรากฏผลดังนี้

เขียนสมการของสายขนส่งที่ใช้แต่ละสาย จะได้ว่า

	1	2	3	4
ก	10	8	12	19
ข	10	5	11	15
ค	6	13	9	17
ง	12	11	5	8

$u_1 + v_2 = 8$ ....(1)

$u_1 + v_3 = 12$ ....(2)

$u_2 + v_2 = 5$ ....(3)

$u_2 + v_4 = 15$ ....(4)

$u_3 + v_1 = 6$ ....(5)

$u_3 + v_3 = 9$ ....(6)

$u_4 + v_4 = 8$ ....(7)

เรากำหนดให้ $u_1 = 0$ ดังนั้น จาก (1) และ (2) จะได้ $v_2 = 8, v_3 = 12$ ตามลำดับ แทนค่า v_2 ใน (3) ได้ $u_2 = -3$ แทนค่าใน (4) จะได้ $v_4 = 18$ แทนค่าที่ได้นี้ใน (7) ได้ $u_4 = -10$ แทนค่า v_3 ใน (6) จะได้ $u_3 = -3$ แทนค่านี้ใน (5) ได้ $v_1 = 9$

ตรวจสอบอัตราค่าใช้จ่ายที่ลดลง โดยอาศัยค่าที่คำนวณได้เหล่านี้ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
c_{11} - u_1 - v_1 &= 10 - 0 - 9 &&= 1 \\
c_{14} - u_1 - v_4 &= 19 - 0 - 18 &&= 1 \\
c_{21} - u_2 - v_1 &= 10 - (-3) - 9 &&= 4 \\
c_{23} - u_2 - v_3 &= 11 - (-3) - 12 &&= 2 \\
c_{32} - u_3 - v_2 &= 13 - (-3) - 8 &&= 8 \\
c_{34} - u_3 - v_4 &= 17 - (-3) - 18 &&= 2 \\
c_{41} - u_4 - v_1 &= 12 - (-10) - 9 &&= 13 \\
c_{42} - u_4 - v_2 &= 11 - (-10) - 8 &&= 13 \\
c_{43} - u_4 - v_3 &= 5 - (10) - 12 &&= 3
\end{aligned}
$$

ปรากฏผลว่า ไม่มีค่าใดเป็นลบ แสดงว่า คำตอบที่ได้เป็นคำตอบอุตมะแล้ว

ถ้าเราพิจารณาผลที่ได้ จะเห็นว่า เป็นผลลัพธ์เดียวกันกับกับการคิดคำนวณด้วยวิธีการ Stepping Stone แต่วิธีการนี้สะดวกและดูง่ายกว่า และด้วยเหตุที่เราแก้ปัญหาด้วยมือ ในการคำนวณจริง ๆ เราอาจจะละการเขียนสมการของสายที่ใช้แล้ว ในฐานะที่เข้าใจก็ได้ แล้วกำหนดค่าตัวแปรหนึ่งตัว นำค่าที่ได้นี้ไปหาค่าอื่น ๆ ที่เหลือ โดยการเขียนในรูปของตาราง ดังเช่นในตารางที่ 2 เรากำหนดค่า u_1 เป็น 0 ดังนั้นเราพิจารณาช่องที่อยู่ในแถว 1 ที่มีการขนส่งว่าตรงกับคอลัมน์ใด ในที่นี้คือคอลัมน์ 2 และ 3 ดังนั้น เราจะได้ค่า $v_2 = 8$ และ $v_3 = 12$ ผลปรากฏดังตาราง

	1	2	3	4	u_i
ก	10	8	12	19	0
ข	10	5	11	15	
ค	6	13	9	17	
ง	12	11	5	8	
v_j		8	12		

นำค่าที่ได้ในคอลัมน์ 2 ลบออกจากค่าของอัตราค่าขนส่งในช่องที่มีการขนส่ง ในที่นี้คือช่อง (2, 2) จะได้ 5 − 8 เท่ากับ −3 เป็นค่าในแถวที่ 2 แต่ในแถวที่ 2 นี้ยังมีสายขนส่งใช้แล้วอื่นอีกคือสาย (2, 4) ดังนั้น เราเอา −3 ไปลบออกจาก 15 จะได้ค่าในคอลัมน์ 4 ซึ่งก็คือ u_4 เท่ากับ 18 และในคอลัมน์ 4 นี้ก็มีสายที่ใช้แล้ว คือสาย (4, 4) เราจึงเอาค่าที่ได้นี้ไปลบออกจาก 8 จะได้ −10 เป็นค่าในแถว 4 ซึ่งก็คือค่า u_4 แสดงให้เห็นได้ ดังต่อไปนี้

	2	u_i
ก	8	
ข	5	5−8
v_j	8	

	2	4	u_i
ข	5	15	−3
v_j		15+3	

		4	u_i
ข		15	
ง		8	8−18
v_j		18	

ในทำนองเดียวกัน เมื่อเราได้ค่าในคอลัมน์ 3 $v_3 = 12$ จะได้ค่า u_i ในแถว 3 คือ $u_3 = 9 - 12 = -3$ เป็นผลให้ได้ค่าในคอลัมน์ 1 คือ v_1 เท่ากับ $6 - (-3) = 9$ ดังต่อไปนี้

	3	u_i
ก	12	
ค	9	**9-12**
v_j	12	

	1	3	u_i
ค	6	9	**-3**
v_j	$6-(-3)$		

สรุปค่าของ u_i และ v_j ที่ได้ในตารางต่อไปนี้ พร้อมทั้งคำนวณค่าของ $c_{ij} - u_i - v_j$ ทุกสายที่ไม่ได้ใช้ นั่นก็คือ เอาค่า c_{ij} ในช่องที่ไม่มีการขนส่ง (i, j) ลบด้วยค่าในแถว i และลบด้วยค่าที่อยู่ในคอลัมน์ j

	1	2	3	4	u_i
ก	10 1	8 (500)	12 (2000)	19 1	0
ข	10 4	5 (1500)	11 2	15 (1000)	−3
ค	6 (2000)	13 8	9 (1000)	17 2	- 3
ง	12 13	11 13	5 3	8 3000	− 10
v_j	9	8	12	18	

กล่าวโดยสรุป เมื่อเราได้ค่า u หรือ v ในแถวใดหรือคอลัมน์ใดก็ตาม ให้นำค่าที่ได้นั้นลบออกจากค่า c_{ij} ในช่องที่มีการขนส่ง ที่อยู่ในคอลัมน์หรืออยู่ในแถวเดียวกัน เมื่อได้ค่า u และ v ครบทุกค่า ขั้นต่อไปเป็นการคำนวณหาอัตราค่าใช้จ่ายที่ลดลงต่อหน่วยของสายที่ไม่ได้ใช้ โดยการเอาค่าอัตราค่าขนส่งต่อหน่วยของสายที่ไม่ใช้นั้น ลบด้วยค่า u ในแถวของสายขนส่งนั้น และลบด้วยค่า v ในคอลัมน์ของสายขนส่งนั้น

หมายเหตุ

(1) การหาคำตอบของช่องที่ไม่มีการขนส่ง แต่เราได้พิจารณาแล้วว่า ควรจะมีการขนส่งที่ช่องนี้ คำตอบจะได้มาจากค่าต่ำสุดของบรรดาคำตอบที่อยู่ในช่องซึ่งถูกพิจารณาว่าจะต้องลดค่าลง

(2) หากค่าต่ำสุดที่ได้เป็นคำตอบของตัวแปรฐานมากกว่า 1 ตัว เมื่อมีการปรับคำตอบใหม่ เราจะได้จำนวนคำตอบที่มีค่ามากกว่า 0 น้อยกว่า $m + n - 1$ นั่นคือเกิดมี degeneracy ขึ้น เราแก้ปัญหานี้ได้โดยใช้สายขนส่งหุ่น แสดงในช่องขนส่งด้วยเลข 0 ที่อยู่ในวงกลม สำหรับการเลือกว่าช่องใดจะเป็นสายขนส่งหุ่น เราเลือกได้โดยอิสระ แต่ทั่วไปแล้วนิยมเลือกช่องที่มีอัตราค่าขนส่ง c_{ij} ต่ำ ๆ ทั้งนี้เพื่อเราจะได้คำตอบที่เข้าใกล้คำตอบอุตมะเร็วขึ้น

(3) ตามเกณฑ์ที่ใช้ในการตัดสิน เรากล่าวว่า เราจะได้คำตอบอุตมะ ก็ต่อเมื่อ เราได้ค่าของ $c_{ij} - s_{ij} \geqslant 0$ หมดทุก ๆ ช่อง หากมีบางค่าของ $c_{ij} - s_{ij}$ เท่ากับ 0 ก็แสดงว่าการเปลี่ยนสายขนส่งใดมาที่ช่องนี้ จะไม่ทำให้ค่าของ P เปลี่ยนแปลง นั่นก็หมายความ

ว่า เราจะได้สายขนส่งที่ดีที่สุดมากกว่า 1 ชุด เรียกว่าปัญหาขนส่งนี้มี alternative optimal solutions

ให้เรามาพิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 6.8

บริษัทพีเคต้องการวางแผนในการจัดส่งสินค้า จากคลังสินค้า 4 แห่ง ไปให้ลูกค้าซึ่งอยู่ในเขตต่าง ๆ กัน 6 คน แผนการจัดส่งควรจะเป็นอย่างไรจึงจะทำให้บริษัทได้รับผลประโยชน์มากที่สุด กำหนดตารางขนส่งดังนี้

ลูกค้า	n	ข	ค	ง	บ	ต	จำนวนสินค้าที่มีอยู่
คลังสินค้า : 1	5	10	15	a	9	7	30
2	14	13	10	9	20	21	40
3	15	11	13	25	a	12	10
4	9	19	12	a	6	13	100
จำนวนที่ต้องการ	50	20	10	20	30	50	180

วิธีทำ

หาคำตอบชุดแรกด้วยวิธีการ Short Cut แล้วตรวจสอบคำตอบที่ได้ด้วยวิธีการ u - v method

ตารางที่ 1 (ค่าใช้จ่ายในการขนส่งทั้งหมด เท่ากับ 1,820 บาท)

ลูกค้า	ก	ข	ค	ง	บ	ต	จำนวนที่มีอยู่	u_i
คลังสินค้า : 1	$\boxed{5}$ 30	$\boxed{10}$ 9	15 17	a 4	9 7	$\boxed{7}$ - 2	30	- 4
2	$\boxed{14}$ −3	$\boxed{13}$ 10	$\boxed{10}$ 10	$\boxed{9}$ −7	$\boxed{20}$ 6	$\boxed{21}$ 20	40	8
3	$\boxed{15}$ 0	$\boxed{11}$ 10	$\boxed{13}$ 5	$\boxed{25}$ 11	$\boxed{8}$ −4	$\boxed{12}$ −7	10	6
4	$\boxed{9}$ 20	$\boxed{19}$ 14	$\boxed{12}$ 10	$\boxed{8}$ 20	$\boxed{6}$ 30	$\boxed{13}$ 30	100	0
จำนวนที่ต้องการ	50	20	10	20	30	50		
v_j	9	5	2	8	6	13		

ผลที่ได้จากตารางนี้ แสดงให้เห็นว่า ยังไม่เป็นแผนการจัดส่งที่ดี เราสามารถปรับปรุงสายขนส่งที่ทำให้ค่าใช้จ่ายลดลงได้อีก เราเลือกค่าที่ลดลงได้มากที่สุด คือ 7 บาทต่อหน่วย เปรียบเทียบระหว่างสาย (2, 4) กับสาย (3, 6) หากเลือกสาย (2, 4) ค่าใช้จ่ายจะลดลง (7)(20) เท่ากับ 140 บาท ในขณะที่สาย (3, 6) จะทำให้ค่าใช้จ่ายลดลง (7)(10) เราจึงเลือกสาย (2, 4)

เมื่อเราเปลี่ยนสายขนส่ง โดยส่งสินค้าจากคลังที่ 2 ไปให้ ง จำนวน 20 หน่วย แทนการส่งให้ ต ดังนั้น ต จึงต้องรับสินค้าเพิ่มจากคลังที่ 4 รวมเป็น 30 + 20 เท่ากับ 50 หน่วย และสินค้าที่ส่งจากคลังที่ 4 ไปให้ ง จะลดลง 20 − 20 เท่ากับ 0 ในที่นี้ เราถือว่าสาย (4, 4) เป็นสายขนส่งที่ใช้ ซึ่งเท่ากับว่าไม่มีกรณีของ degeneracy เกิดขึ้น สำหรับสายอื่น ๆ ที่ไม่กล่าวถึงในที่นี้ มีคำตอบคงเดิม เขียนตารางที่ 2 แล้วตรวจสอบคำตอบที่ได้ต่อไป ปรากฏผลว่า ยังลดค่าลงได้อีก จึงต้องปรับคำตอบใหม่ โดยเปลี่ยนการส่งสินค้าจากคลังที่ 1 ใหม่ แทนการส่งให้ ก เปลี่ยนเป็นส่งให้ ต จำนวน 30 หน่วย ดังนั้น คลังที่ 4 จึงต้องส่งสินค้าให้ ก เพิ่มขึ้นอีก 30 หน่วย รวมเป็น 20 + 30 เท่ากับ 50 หน่วย และลดจำนวนที่ส่งให้ ต ลง เหลือเพียง 50 − 30 เท่ากับ 20 หน่วย สำหรับสายขนส่งอื่น ๆ ไม่มีการเปลี่ยนแปลง แสดงตารางที่ 2 และ 3 ได้ดังนี้

ลูกค้า	ก	ข	ค	ง	บ	ต	จำนวนที่มี	u_i
คลังสินค้า : 1	5 / 30	10 / 2	15 / 10	8 / 4	9 / 7	7 / **-2**	**30**	**-4**
2	14 / 4	13 / 10	10 / 10	9 / 20	**20** / **13**	**21** / **7**	**40**	1
3	15 / 7	11 / 10	13 / 5	25 / 18	8 / 3	12 / 0	10	−1
4	9 / 20	19 / 14	12 / 10	8 / 0	6 / 30	13 / 50	100	0
จำนวนที่ต้องการ	50	20	10	20	30	50		
v_j	**9**	**12**	**9**	8	**6**	**13**		