บทที่ 5
ปัญหาควบคู่

วัตถุประสงค์ของการศึกษาในเรื่องนี้ ก็เพื่อให้นักศึกษาได้เรียนรู้ถึงการเขียนตัวแบบและการพิจารณาปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นในอีกความหมายหนึ่ง ซึ่งจะเป็นการพิจารณาถึงการจัดสรรทรัพยากรอย่างมีประสิทธิภาพ จากการกำหนดตัวแปรในการตัดสินใจ หรือตัวแปรที่ควบคุมได้ ในความหมายอีกแง่หนึ่งที่ควบคู่ไปกับค่าต่าง ๆ ที่กำหนดไว้เดิม ตัวอย่างเช่น ในความหมายเดิม เรากล่าวถึงการพิจารณาปริมาณที่ดีที่สุดของผลิตภัณฑ์หรือสินค้า ที่เราต้องการผลิต โดยอาศัยการจัดสรรทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัด ให้เกิดผลประโยชน์ที่ดีที่สุด ในความหมายใหม่ เรากลับไปสนใจทางด้านราคาที่เหมาะสมที่สุด จากการใช้ทรัพยากรที่มีจำกัดอย่างมีประสิทธิภาพที่สุด เป็นต้น เราเรียกปัญหาที่มีรูปแบบในความหมายเดิมว่า ปัญหาเดิม (primal problem) และเรียกปัญหาในความใหม่ว่า ปัญหาคู่ (dual problem) คำตอบอุตมะของปัญหาใดปัญหาหนึ่ง จะแสดงให้เห็นถึงสาระสำคัญต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับคำตอบอุตมะอีกปัญหาหนึ่ง นั่นก็หมายความว่า เราสามารถบอกลักษณะของปัญหาเดิมหรือแปรความหมาย สรุปผลที่ได้ ของปัญหาเดิม โดยอาศัยคำตอบที่ได้จากปัญหาคู่ ซึ่งจะแสดงให้เห็นได้จากคุณสมบัติและทฤษฎีที่แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างกัน ของปัญหาทั้งสองนี้ จากคุณสมบัติและทฤษฎีเหล่านี้จะแสดงให้เห็นจริงได้ว่า หากปัญหาใดปัญหาหนึ่งมีคำตอบอุตมะ แล้วปัญหาคู่ของมันจะมีคำตอบอุตมะด้วย ตลอดจนแสดงให้เห็นว่า เราจะหาคำตอบอุตมะของปัญหาคู่ เพื่อให้ได้คำตอบอุตมะของปัญหาเดิม ด้วยวิธีการซิมเพลกซ์ได้อย่างไร และปัญหาลักษณะใดที่เราจะหาคำตอบโดยวิธีกราฟของปัญหาคู่ และผลประโยชน์ที่สำคัญก็คือ เมื่อใดก็ตามที่ปัญหาใดปัญหาหนึ่ง ใช้เวลาในการคำนวณมาก การหาคำตอบต้องทำหลายตาราง โดยเฉพาะกรณีของปัญหาที่มีตัวแปรเทียม ซึ่งจะก่อให้เกิดความเบื่อหน่ายในการแก้ปัญหา และอาจเป็นผลให้ ผลลัพธ์ที่ได้เกิดความคลาดเคลื่อนได้ เราก็จะใช้ปัญหาควบคู่ของมันแทน ซึ่งจะช่วยลดขั้นตอนในการคำนวณ เท่ากับลดเวลาและ

ค่าใช้จ่ายในการแก้ปัญหาลงได้ นักศึกษาสามารถเปรียบเทียบผลที่ได้ จากการศึกษาปัญหาควบคู่ต่อไปนี้

5.1 ลักษณะของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นควบคู่ (Dual Linear Programming Problems)

ถ้าเราพิจารณาการแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น ด้วยวิธีการซิมเพลกซ์ จะเห็นว่าวิธีการที่ง่ายและสะดวกที่สุดก็คือ การเปลี่ยนเซทของสมการหรืออสมการของข้อจำกัด

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ \{\leqslant, =, \geqslant\}\ b_i\ , \quad i = 1, 2, \ldots, r \qquad \ldots\ldots\ldots(5.1)$$

ไปเป็นเซทของสมการเชิงเส้น ความแตกต่างกันเล็กน้อยในการเขียนรูปของข้อจำกัดจะเป็นประโยชน์ต่อการพิจารณาปัญหาควบคู่ แทนที่เราจะเปลี่ยน (5.1) ไปเป็นเซทของสมการเรากลับเปลี่ยน (5.1) ให้อยู่ในรูปแบบที่มีเครื่องหมายอสมการ ในทิศทางเดียวกัน ทุก ๆ ข้อจำกัด

ให้เรามาพิจารณาเฉพาะเซทของสมการ

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ = \ b_i \qquad \ldots\ldots\ldots(5.2)$$

ซึ่งเป็นเซทย่อยในเซทของข้อจำกัด (5.1) เราจะถือว่า เซทของสมการ (5.2) เสมอด้วย 2 อสมการคือ

$$\begin{aligned} \sum_{j=1} a_{ij}x_j &\geqslant b_i \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j &\leqslant b_i \end{aligned} \qquad \ldots\ldots\ldots(5.3)$$

เซทของจุดที่อยู่ใน Hyperplane (5.2) จะเป็นจุดในบริเวณตัดกันของ closed half - spaces ทั้งสองใน (5.3) โดยการใช้ (5.3) แทนที่ (5.2) ข้อจำกัดทุกข้อใน (5.1) จะมีรูปแบบเป็นอสมการทั้งหมด หากเรามีสมการใด ๆ ในเซทของข้อจำกัด (5.1) เราจะเปลี่ยนเป็นเซทที่ประกอบด้วยอสมการทั้งหมด ที่จะมีจำนวนของข้อจำกัดมากกว่า (5.1) ทั้งนี้เนื่องจาก เราใช้ 2 อสมการแทนที่ 1 สมการนั่นเอง

ภายหลังการเปลี่ยนสมการข้อจำกัดทุก ๆ สมการเป็นรูปอสมการแล้ว เราคูณอสมการข้อจำกัดทุกข้อที่มีเครื่องหมาย $\geqslant$ ด้วย -1 ผลที่ได้จะกลายเป็นอสมการข้อจำกัดที่มีเครื่องหมาย $\leqslant$ ทั้งหมด ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_j \leqslant d_i \;, \quad i = 1, 2, \ldots, m \qquad \ldots\ldots\ldots.(5.4)$$

ในเมื่อ

$d_i = b_i$, $d_{ij} = a_{ij}$ สำหรับข้อจำกัด i ทุกข้อที่มีเครื่องหมาย $\leqslant$

$d_i = -b_i$, $d_{ij} = -a_{ij}$ สำหรับข้อจำกัด i ทุกข้อที่มีเครื่องหมาย $\geqslant$

และ p เป็นจำนวนสมการข้อจำกัด, $m = r + p$

ในทำนองเดียวกัน หากเราคูณอสมการข้อจำกัดทุกข้อที่มีเครื่องหมาย $\leqslant$ ด้วย -1 เราก็จะได้อสมการข้อจำกัดที่มีเครื่องหมาย $\geqslant$ ทั้งหมด ซึ่งจะมีรูปแบบดังนี้

$$\sum_{j=1}^{n} g_{ij}x_j \geqslant g_i \;, \quad i = 1, 2, \ldots, m \qquad \ldots\ldots\ldots.(5.5)$$

ในเมื่อ

$g_{ij} = -d_{ij}$ และ $g_i = -d_i$

ผลที่ตามมาก็คือ เราอาจเขียนปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นทั่ว ๆ ไป ใน 2 รูปแบบต่อไปนี้

(1) ต้องการหาค่าของ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ที่เป็นบวก ภายใต้เงื่อนไขข้อจำกัด

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_j \leqslant d_i$$

ที่ทำให้ได้ $P = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$ มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุด

(2) ต้องการหาค่าของ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ที่เป็นบวก ภายใต้เงื่อนไขข้อจำกัด

$$\sum_{j=1}^{n} g_{ij}x_j \geqslant g_i$$

ที่ทำให้ได้ $P = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$ มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุด

ข้อเท็จจริงที่ได้นี้ จะใช้เป็นประโยชน์ในการเขียนปัญหาคู่ต่อไป

หากเรากำหนดปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นใด ๆ มีตัวแบบ

หาค่าสูงสุดของ $P_x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

โดยมีข้อจำกัด $\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_j \leqslant d_i \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m$ ....(5.6)

และ $x_j \geqslant 0$

แล้วจะมีปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นที่มีตัวแบบ

หาค่าต่ำสุดของ $P_w = \sum_{i=1}^{m} d_i w_i$

โดยมีข้อจำกัด $\sum_{i=1}^{m} d_{ij} w_i \geqslant c_j \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n$ ....(5.7)

และ $w_i \geqslant 0$

ซึ่งเรียกว่าเป็นปัญหาคู่ (dual problem) ของ (5.6) และเรียก (5.6) ว่าเป็นปัญหาเดิม *(primal problem)*

เราอาจจะเขียนตัวแบบ (5.7) ในอีกแบบหนึ่งได้ดังนี้

หาค่าสูงสุดของ $P_w^* = \sum_{i=1}^{m} (-d_i) w_i$

โดยมีข้อจำกัด $\sum_{i=1}^{m} (-d_{ij}) w_i \leqslant -c_j \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n$ ....(5.8)

$w_i \geqslant 0$

และ ค่าต่ำสุดของ P_w = $-$ค่าสูงสุดของ P_w^*

เห็นได้ชัดว่า ปัญหาคู่ "จะดูเหมือน" ปัญหาเดิม หากเราสังเกตุให้ดี จะพบว่า เมื่อกำหนดให้ (5.8) (ซึ่งก็คือ (5.7)) เป็นปัญหาเดิม เราจะได้ปัญหาคู่ที่มีตัวแบบ ดังต่อไปนี้

หาค่าต่ำสุดของ $P_x^* = \sum_{j=1}^{n} (-c_j) x_j$

โดยมีข้อจำกัด $\sum_{j=1}^{n} (-d_{ij}) x_j \geqslant -d_i \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m$

$x_j \geqslant 0$

หรือ

หาค่าสูงสุดของ $P_x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

โดยมีข้อจำกัด $\sum_{i=1}^{n} d_{ij}x_j \leqslant d_i$, $i = 1, 2, ..., m$

$x_j \geqslant 0$

ในเมื่อ ค่าต่ำสุดของ $P_x^* = -$ค่าสูงสุดของ P_x

ซึ่งเห็นได้ชัดว่า เป็นตัวแบบของปัญหาเดิม (5.6) นั่นเอง

ผลที่ตามมาจากนิยามนี้ เราจะได้ว่า

"ปัญหาควบคู่ของปัญหาคู่ก็คือปัญหาเดิม"

อาศัยข้อเท็จจริงที่ได้นี้ แทนที่เราจะเขียนตัวแบบของปัญหาเดิม (primal problem) ในแบบ (5.6) เราสามารถเขียนตัวแบบที่มีความหมายเหมือนกันคือ

หาค่าต่ำสุดของ $P_x = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$

โดยมีข้อจำกัด $\sum_{j=1}^{n} g_{ij}x_j \geqslant g_i$, $i = 1, 2, ..., m$ ....(5.9)

และ $x_j \geqslant 0$

แล้วปัญหาคู่ของ (5.9) ก็คือ

หาค่าสูงสุดของ $P_w = \sum_{i=1}^{m} g_iw_i$

โดยมีข้อจำกัด $\sum_{i=1}^{m} g_{ij}w_i \leqslant c_j$, $j = 1, 2, ..., n$ ....(5.10)

และ $w_i \geqslant 0$

จากการตรวจสอบปัญหาแต่ละคู่ คือ (5.6) กับ (5.7) และ (5.9) กับ (5.10) จะพบว่ามันสมมาตรกัน หากปัญหาใดปัญหาหนึ่งใน (5.6) กับ (5.7) หรือ (5.9) กับ (5.10) ทำหน้าที่เป็นปัญหาเดิม แล้วปัญหาที่เหลือก็จะทำหน้าที่เป็นปัญหาคู่

ตัวอย่างที่ 5.1

จงเขียนตัวแบบของปัญหาคู่ (dual problem) เมื่อกำหนดปัญหาเดิม (primal problem) ของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นต่อไปนี้

(1) หาค่าสูงสุดของ $P_x = 7x_1 + 8x_2 + 15x_3 + 17x_4$

โดยมีข้อจำกัด

$$3x_1 + 4x2 + x_3 + 2x_4 \leqslant 1200$$
$$3x_1 + 2x, + 2x_3 + 5x_4 \leqslant 2ooo$$
$$x_1 + 3x2 + 4x_3 + 10x_4 \leqslant 2400$$
$$5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 7x_4 \leqslant 1800$$
และ x_j (j = 1, 2, 3, 4) $\geqslant 0$

(2) หาค่าต่ำสุดของ $P_x = 12x_1 + 9x_2 + 18x_3 + 20x_4 + 13x_5$

โดยมีข้อจำกัด

$$x_1 + 3x2 + 5x_3 + 2x_4 + 2x_5 \geqslant 1500$$
$$2x1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 3x_5 \leqslant 2500$$
$$7x_1 + 3x2 + 4x_3 + 5x_4 + 2x_5 \geqslant 3800$$
$$2x1 + 2x2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 \geqslant 2400$$
และ x_j (j = 1, 2, 3, 4, 5) $\geqslant 0$

(3) หาค่าสูงสุดของ $P_x = 24x, + 19x_2 + 25x,$

โดยมีข้อจำกัด

$$x_1 + x_2 + x_3 = loo0$$
$$2x, + 4x_2 + 2x_3 \leqslant 900$$
$$3x_1 + x_2 + 5x_3 \leqslant 850$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \geqslant 350$$
$$5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geqslant 600$$
และ $x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$

วิธีทำ

เขียนตัวแบบปัญหาคู่ของแต่ละปัญหาได้ดังต่อไปนี้

(I) หาค่าต่ำสุดของ $P_w = 1200w_1 + 2000w_2 + 2400w_3 + 1800w_4$

โดยมีข้อจำกัด

$$3w_1 + 3w_2 + w_3 + 5w_4 \geqslant 7$$
$$4w_1 + 2w_2 + 3w_3 + 3w_4 \geqslant 8$$

$$w_1 + 2w_2 + 4w_3 + 3w_4 \geqslant 15$$
$$2w_1 + 5w_2 + 10w_3 + 7w_4 \geqslant 17$$
และ $w_i \ (i = 1, 2, 3, 4) \geqslant 0$

(2) เราเปลี่ยนข้อจำกัดที่ 2 ให้มีเครื่องหมาย $\geqslant$ โดยเอา -1 คูณตลอด เขียนตัวแบบปัญหาคู่ได้ดังนี้

หาค่าสูงสุดของ $P_w = 1500w_1 - 2500w_2 + 3800w_3 + 2400w_4$

โดยมีข้อจำกัด

$$w_1 - 2w_2 + 7w_3 + 2w_4 \leqslant 12$$
$$3w_1 - 2w_2 + 3w_3 + 2w_4 \leqslant 9$$
$$5w_1 - 4w_2 + 4w_3 + 2w_4 \leqslant 18$$
$$2w_1 - w_2 + 5w_3 + 3w_4 \leqslant 20$$
$$2w_1 - 3w_2 + 2w_3 + 5w_4 \leqslant 13$$
และ $w_i \ (i = 1, 2, 3, 4) \geqslant 0$

(3) เปลี่ยนสมการข้อจำกัดที่ 1 ให้เป็นรูปอสมการ แล้วเปลี่ยนรูปอสมการทั้งหมดให้มีเครื่องหมายในทิศทางเดียวกัน กล่าวคือ $\leqslant$ ทั้งหมดหรือ $\geqslant$ ทั้งหมด กรณีปัญหานี้เราอาจเขียนตัวแบบได้ 2 แบบ ขึ้นอยู่กับว่า เราเปลี่ยนเครื่องหมายอสมการอย่างไร ดังต่อไปนี้

แบบที่ 1 จะได้ว่า

หาค่าต่ำสุดของ $P_w = 1000w_1' - 1000w_1'' + 900w_2 + 850w_3 - 350w_4 - 600w_5$

โดยมีข้อจำกัด

$$w_1' - w_1'' + 2w_2 + 3w_3 - 3w_4 - 5w_5 \geqslant 24$$
$$w_1' - w_1'' + 4w_2 + w_3 - 2w_4 - 2w_5 \geqslant 19$$
$$w_1' - w_1'' + 2w_2 + 5w_3 - w_4 - 4w_5 \geqslant 25$$
และ $w_i \ (i = 1, 2, 3, 4, 5) \geqslant 0$

แบบที่ 2 จะได้ว่า

หาค่าต่ำสุดของ $P_w = -1000w_1' + 1000w_1'' - 900w_2 - 850w_3 + 350w_4 + 600w_5$

โดยมีข้อจำกัด

$$-w_1' + w_1'' - 2w_2 - 3w_3 + 3w_4 + 5w_5 \leqslant 24$$

$$-w_1' + w_1'' - 4w_2 - w_3 + 2w_4 + 2w_5 \leqslant 19$$

$$-w_1' + w_1'' - 2w_2 - 5w_3 + w_4 + 4w_5 \leqslant 25$$

และ $w_i \ (i = 1, 2, 3, 4, 5) \geqslant 0$

ถ้าเรามาพิจารณาปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นที่มีตัวแบบ

หาค่าสูงสุดของ $P_x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

โดยมีข้อจำกัด

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i \quad , \quad i = k+1, k+2, \ldots, m$$

$$x_j \geqslant 0 \qquad \text{ทุก ๆ } j$$

จะเห็นว่า เมื่อเราเปลี่ยนรูปอสมการให้มีเครื่องหมายแบบเดียวกัน โดยการเอา -1 คูณตลอด อสมการข้อจำกัด $k + 1, \ldots, m$ แล้วเขียนตัวแบบของปัญหาคู่ จะได้ตัวแบบดังนี้

หาค่าต่ำสุดของ $P_w = \sum_{i=1}^{k} b_i w_i' - \sum_{i=k+1}^{m} b_i w_i'$

โดยมีข้อจำกัด

$$\sum_{i=1}^{k} a_{ij}w_i' - \sum_{i=k+1}^{m} a_{ij}w_i' \geqslant c_j \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$w_i' \geqslant 0 \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

หากเรากำหนดให้ $w_i = w_i', i = 1, \ldots, k$ และ $w_i = -w_i', i = k + 1, \ldots, m$

เขียนตัวแบบปัญหาคู่เสียใหม่ จะได้ว่า

หาค่าต่ำสุดของ $P_w = \sum_{i=1}^{m} b_i w_i$

โดยมีข้อจำกัด

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}w_i \geqslant c_j \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$w_i \geqslant 0, \ i = 1, \ldots, k; \quad w_i \leqslant 0, \ i = k + 1, \ldots, m$$

เราจะใช้วิธีการนี้กับกรณีของข้อจำกัดที่อยู่ในรูปสมการ ถ้าเราหวนกลับไปพิจารณาปัญหาที่มีข้อจำกัดอยู่ในรูปสมการ อย่างน้อยที่สุด 1 สมการ เราจะเห็นว่า ก่อนการเปลี่ยนรูปไปเป็นปัญหาคู่ เราต้องแยกสมการข้อจำกัดนั้น ออกเป็น 2 อสมการข้อจำกัด เมื่อเขียนปัญหาคู่ เราจะพบว่า ตัวแปรคู่ที่เกี่ยวกับสมการข้อจำกัดนั้นจะมี 2 ตัวแปร โดยที่จะมี ส.ป.ส. a_{ij} และ b_i ของตัวแปรคู่ตัวหนึ่ง มีค่าเป็น $-a_{ij}$ และ $-b_i$ ของตัวแปรคู่อีกตัวหนึ่ง ถ้าหากเราใช้กรณีของตัวแปรคู่ที่ไม่กำหนดเครื่องหมาย ดังที่กล่าวไว้แล้วข้างต้น นั่นก็คือ เราจะแทนที่ตัวแปรคู่ทั้งสองตัวนี้ด้วยตัวแปรคู่ 1 ตัวที่ไม่กำหนดเครื่องหมาย ส.ป.ส. a_{ij} และ b_i ของตัวแปรที่ไม่กำหนดเครื่องหมายตัวนี้ จะได้มาจากสมการข้อจำกัดของปัญหาเดิม โดยที่เราไม่ต้องแยกสมการข้อจำกัดนั้นเป็น 2 อสมการ ดังนั้น เราจึงกล่าวได้ว่า

หากข้อจำกัดที่ i ของปัญหาเดิมเป็นสมการ แล้วตัวแปรคู่ตัวที่ i ก็จะเป็นตัวแปรที่ไม่กำหนดเครื่องหมาย นี่ก็หมายความว่า ถ้าปัญหาเดิมมีตัวแบบเป็น

หาค่าสูงสุดของ $P_x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

โดยมีข้อจำกัด

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i \ , \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \ , \quad i = k+1, \ldots, m$$

$$x_j \geqslant 0 \ , \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

แล้วตัวแบบของปัญหาคู่ ก็คือ

หาค่าต่ำสุดของ $P_w = \sum_{i=1}^{m} b_i w_i$

โดยมีข้อจำกัด $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \geqslant c_j \ , \quad j = 1, 2, \ldots, n$

$w_i \geqslant 0, i = 1, \ldots, k$ ไม่กำหนดเครื่องหมาย $w_i, i = k+1, \ldots, m$

ตัวแปร k ตัวแรกจะต้องไม่เป็นลบ ส่วนตัวแปรคู่ที่เหลือจะมีเครื่องหมายอย่างไรก็ได้

เพราะฉะนั้น ปัญหาคู่ของปัญหาที่ 3 ในตัวอย่างที่ 5.1 จะมีตัวแบบดังนี้

หาค่าต่ำสุดของ $P_w = 1000w_1 + 900w_2 + 850w_3 - 350w_4 - 600w_5$

โดยมีข้อจำกัด

$$w_1 + 2w_2 + 3w_3 - 3w_4 \quad 5w_5 \geqslant 24$$

$$w_1 + 4w_2 + w_3 - 2w_4 - 2w_5 \geqslant 19$$

$$w_1 + 2w_2 + 5w_3 - w_4 - 4w_5 \geqslant 25$$

w_1 ไม่กำหนดเครื่องหมาย สำหรับ w_2, w_3, w_4, w_5 ต้องไม่มีค่าเป็นลบ

สรุปได้ว่า ก่อนจะเขียนปัญหาคู่ เราต้องจัดการให้ข้อจำกัดทุกข้อมีเครื่องหมายอสมการแบบเดียวกันเสียก่อน แล้วจึงเขียนตัวแบบดังต่อไปนี้

(1) เปลี่ยนวัตถุประสงค์ของฟังก์ชันเป้าหมายเป็นตรงกันข้าม เช่น
จากเดิม ต้องการหาค่าสูงสุด เปลี่ยนเป็น หาค่าต่ำสุด หรือ
จากเดิม ต้องการหาค่าต่ำสุด เปลี่ยนเป็น หาค่าสูงสุด

(2) เปลี่ยนค่าคงที่ d_i ของอสมการข้อจำกัด i ในปัญหาเดิม ไปเป็น ส.ป.ส. ของ w_i ในฟังก์ชันเป้าหมายของปัญหาคู่

(3) เปลี่ยนเครื่องหมายอสมการของข้อจำกัดเป็นตรงกันข้าม เช่น จากเดิมมีเครื่องหมาย $\geqslant$ ทั้งหมด เปลี่ยนเป็น $\leqslant$ ทั้งหมด หรือจากเดิมมีเครื่องหมาย $\leqslant$ ทั้งหมด เปลี่ยนเป็น $\geqslant$ ทั้งหมด

(4) เขียนเงื่อนไขข้อจำกัด (อสมการ) โดย

4.1 เปลี่ยน ส.ป.ส. c_j ของ x_j ในฟังก์ชันเป้าหมายปัญหาเดิม มาเป็นค่าคงที่ของข้อจำกัด j ในปัญหาคู่

4.2 เปลี่ยน ส.ป.ส. ของ x_j ในอสมการข้อจำกัด i ปัญหาเดิม เป็น ส.ป.ส. ของ w_i ในอสมการข้อจำกัด j ปัญหาคู่ นั่นก็คือ เปลี่ยน ส.ป.ส. d_{ij} ในแถว i คอลัมน์ j เป็น d_{ij} ในแถว j คอลัมน์ i พูดง่าย ๆ ว่า เปลี่ยน ส.ป.ส. จากแถว i เป็น ส.ป.ส. คอลัมน์ i และเปลี่ยนจากของคอลัมน์ j เป็นของแถว j

(5) ตัวแปร w_i ทุกตัวในปัญหาคู่ จะต้องมีค่าเป็นบวก

หมายเหตุ สำหรับกรณีของข้อจำกัดที่เป็นสมการ เราอาจพิจารณาว่าเป็นอสมการที่มีเครื่องหมาย $\geqslant$ หรือมีเครื่องหมาย $\leqslant$ ก็ได้ ตามความเหมาะสม แต่ตัวแปรคู่ที่อยู่ในลำดับเดียวกันกับสมการข้อจำกัดนี้ จะไม่กำหนดเครื่องหมาย

ความสัมพันธ์ของปัญหาเดิมและปัญหาคู่ แสดงให้เห็นได้ด้วยตารางดังนี้

$(\geqslant 0)$	x_1	$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_n	$\leqslant$
w_1	d_{11}	$\cdots$	d_{1j}	$\cdots$	d_{1n}	d_1
		$\cdots$	.	$\cdots$	.	
		$\cdots$	.	$\cdots$	.	
w_i	d_{i1}	$\cdots$	d_{ij}	$\cdots$	d_{in}	d_i
		$\cdots$	.	$\cdots$	.	
		$\cdots$	.	$\cdots$	.	
w_m	d_{m1}	$\cdots$	d_{mj}	$\cdots$	d_{mn}	d_m
$\geqslant$	c_1	$\cdots$	c_j	$\cdots$	c_n	ค่าต่ำสุด / ค่าสูงสุด

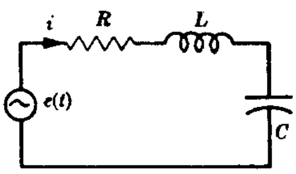
..........(5.11)

5.2 ความหมายของปัญหาควบคู่

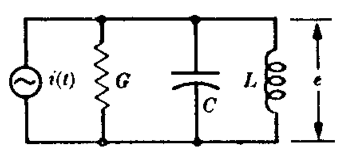
หากเราพิจารณาความหมายตรงตัวของคำ dual จะมีความหมายว่า double เช่นที่นำไปใช้ในปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น เราให้ความหมายของ duality เป็นฝาแฝด (double meaning) ของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นทุก ๆ ปัญหา เราอาจกำหนดปัญหาใดปัญหาหนึ่งเป็นปัญหาเดิม (primal problem) หรือเป็นปัญหาคู่ (dual problem) ของอีกปัญหาหนึ่งก็ได้

duality ไม่ได้มีความหมายเฉพาะในปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นเท่านั้น แต่เราจะพบได้ทั่ว ๆ ไปในปัญหาทางด้านคณิตศาสตร์ เศรษฐศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ ทางด้านฟิสิกซ์หรือสาขาอื่น ๆ ดังเช่นปัญหาควบคู่ที่มีความหมายในแง่วิศวกรรมไฟฟ้า

ให้เรามาพิจารณาอนุกรม RCL - network (รูป 5.1) ต่อไปนี้



รูปที่ 5.1



รูปที่ 5.2

เรากำหนดว่า e เป็นแรงเคลื่อนไฟฟ้าในวงจร i เป็นกระแสไฟฟ้า และ R, L, C เป็นความต้านทาน ตัวเหนี่ยวนำไฟฟ้า และประจุไฟฟ้า ตามลำดับ สมการที่แสดงถึงความสัมพันธ์ของกระแสไฟฟ้าต่อปริมาณแรงเคลื่อนไฟฟ้าในเวลา t ก็คือ

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = e(t). \qquad \text{.........(5.12)}$$

ถ้าเราสับเปลี่ยน (e, i) และ (L, C) เสียใหม่ และแทนที่ R ด้วย G = 1/R เราจะได้ว่า

$$C\frac{de}{dt} + Ge + \frac{1}{L}\int e\,dt = i(t). \qquad \text{..........(5.13)}$$

ซึ่งจะเป็นสมการที่แสดงถึง ปริมาณของแรงเคลื่อนไฟฟ้าในเทอมของกระแสไฟฟ้าที่ไหลในวงจรที่ต่อแบบขนานตามรูปที่ (5.2) นั่นก็คือ แทนที่เราจะกล่าวถึงการกำเนิดของแรงเคลื่อนไฟฟ้า เรากลับมากล่าวถึงการเกิดขึ้นของกระแสไฟฟ้า

สมการที่มีรูปแบบเป็น

$$a\frac{dx}{dt} + bx + c\int x\,dt = y(t) \qquad \text{..........(5.14)}$$

จะอธิบายถึง network ตามแบบที่แสดงในรูป (5.1) หรือตามแบบที่แสดงในรูป (5.2) ก็ได้ ขึ้นอยู่กับว่า เราจะสนใจวงจรแบบใด นั่นก็หมายความว่า สมการ (5.14) มีความหมายควบคู่หรือเป็นฝาแฝด วงจรตามรูปที่ (5.1) อาจจะถูกพิจารณาว่าเป็นวงจรคู่ของรูป (5.2) ก็ได้ หรือในทางกลับกัน เราอาจพิจารณาวงจรตามรูปที่ (5.2) ว่าเป็นวงจรคู่ของรูป (5.1)

ดังนั้นในทฤษฎีของวงจรไฟฟ้า duality จะอยู่ระหว่างวงจรแบบอนุกรมและวงจรแบบขนาน ซึ่งแสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างตัวมันเองกับตัวควบคู่ ได้ดังนี้

วงจรแบบอนุกรม	e	R	L	C
วงจรแบบขนาน	i	G	C	L

ตัวอย่างของการควบคู่ ที่มีความหมายทางด้านการโปรแกรมเชิงเส้นมากที่สุด ก็คือ ตัวอย่างของปัญหาคู่ในแง่เศรษฐศาสตร์ ที่เกี่ยวกับเรื่องการผลิตสินค้า n ชนิด ภายใต้เงื่อนไขของการใช้ทรัพยากรที่มีอยู่จำกัด m ประเภท เพื่อที่จะได้กำไรรวมมากที่สุด นั่นก็คือ

หาค่าสูงสุดของ $P_x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

โดยมีข้อจำกัด $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ ....(5.15)

และ $x_j \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$

แล้วเราจะได้ตัวแบบของปัญหาคู่มือ

หาค่าต่ำสุดของ $P_w = \sum_{i=1}^{m} b_i w_i$

โดยมีข้อจำกัด $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}w_i \geqslant c_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$ ....(5.16)

และ $w_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$

ในเมื่อ c_j หมายถึง กำไร (value) ต่อหน่วยของสินค้า j

a_{ij} หมายถึง ปริมาณทรัพยากร i ที่ใช้ในการผลิตสินค้า j หนึ่งหน่วย

b_i หมายถึง ปริมาณของทรัพยากรประเภทที่ i (input i) ที่จะมีให้ใช้ได้

x_j หมายถึง จำนวนหน่วยของสินค้า (output) j ที่ต้องการจะผลิต

โดยเหตุที่ P_x แสดงถึงปริมาณของกำไร (value) ทั้งหมดที่เราจะได้จากการดำเนินการนี้ และกำไรที่ได้นี้มีหน่วยเป็นบาท ดังนั้น เมื่อเรามาพิจารณาปัญาที่คู่กัน ค่าของ P_w ย่อมมีหน่วยเป็นบาทด้วย แต่เมื่อ P_w เป็นฟังก์ชันของ b_i กับ w_i และ b_i เป็นปริมาณของทรัพยากร i ซึ่งอาจมีหน่วยเป็น หน่วยของเวลา หน่วยน้ำหนัก หน่วยปริมาณ เป็นต้น แต่โดยทั่ว ๆ ไปแล้ว b_i ไม่มีหน่วยเป็นบาท ดังนั้น หากเราจะกำหนดให้ P_w มีหน่วยเป็นบาท แล้ว w_i จะต้องมีหน่วยเป็นบาทด้วย ซึ่งก็หมายถึงหน่วยของบาทต่อหนึ่งหน่วยของทรัพยากร i (value/input i) สำหรับ $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}w_i$ ถือได้ว่าเป็นค่าเสียโอกาส (opportunity cost) รวมของการผลิตสินค้า j เราจึงกล่าวได้ว่า เงื่อนไขของข้อจำกัดในปัญหาคู่ ก็คือ ค่าเสียโอกาสรวมของการผลิต จะต้องมากกว่าหรือเท่ากับ กำไรต่อหน่วยของสินค้านั้น เราสามารถแสดงให้เห็นความหมายของตัวแปรควบคู่ ได้ดังต่อไปนี้

ปัญหาเดิม (primal problem)	**ปัญหาคู่** (dual problem)
หาค่าสูงสุดของ	หาค่าต่ำสุดของ
$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\text{value}}{\text{output j}}\right)(\text{output j}) = \text{value}$	$\sum_{i=1}^{m} (\text{input i})\left(\frac{\text{value}}{\text{input i}}\right) = \text{value}$
โดยมีข้อจำกัด	โดยมีข้อจำกัด

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\text{input } i}{\text{output } j}\right)(\text{output } j) \leq (\text{input } i) \qquad \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\text{input } i}{\text{output } j}\right)\left(\frac{\text{value}}{\text{input } i}\right) \geq \left(\frac{\text{value}}{\text{output } j}\right)$$

$$(\text{output } j) \geq 0 \qquad \left(\frac{\text{value}}{\text{output } j}\right) \geq 0$$

$$i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n$$

กล่าวโดยสรุป

ปัญหาเดิม (primal problem) หมายถึง ปัญหาที่ต้องการหาระดับการผลิตที่เหมาะสมที่สุด (optimal output level) x_j^* โดยอาศัยค่าที่กำหนดให้ต่อหน่วย (value/output j) c_j และขีดจำกัดสูงสุดของทรัพยากรแต่ละประเภทที่จะนำมาใช้ (input) b_i เพื่อที่จะทำให้ได้กำไร (value) จากการผลิตทั้งหมด มากที่สุด

ปัญหาคู่ (dual problem) เป็นการหาค่าที่คิดขึ้นของทรัพยากร i (value/input i) w_i โดยกำหนดว่า ค่าเสียโอกาสรวมของสินค้าแต่ละชนิด จะต้องไม่ต่ำกว่า กำไรต่อหน่วยของสินค้านั้น เพื่อให้เกิดค่าเสียโอกาสของทรัพยากรรวมกัน น้อยที่สุด

ค่าที่คิดขึ้น w เป็นตัวแปรควบคุมได้ของปัญหาคู่ อาจจะเรียกว่าเป็นราคาทางบัญชี (accounting price) หรือราคาติดตัว (shadow price) หรือราคาประกัน ก็ได้ และค่าของ w_i จะต้องไม่เป็นลบ

ในทางกลับกัน หากเรามี (5.16) เป็นปัญหาเดิม แล้วเราจะได้ปัญหาคู่ของ (5.16) เป็นปัญหาที่มีตัวแบบดัง (5.15) นั่นเอง ตัวอย่างของปัญหาดังกล่าวนี้ ก็คือ ปัญหาทางด้านโภชนาการนั่นเอง ในปัญหาเดิมจะมีความหมายถึงการหาค่าใช้จ่ายต่ำสุด โดยให้ได้คุณค่าของอาหารแต่ละประเภทอย่างน้อยที่สุด เท่ากับขีดจำกัดของคุณค่าอาหารขั้นต่ำสุด เมื่อพิจารณาความหมายในปัญหาคู่ก็จะเป็นการหาค่าสูงสุดของค่าที่คิดขึ้น ของคุณค่าอาหารขั้นต่ำสุดที่เราจำเป็นต้องมี โดยคำนึงว่าคุณค่าอาหารที่คิดขึ้นในหน่วยของอาหารแต่ละชนิด จะมีไม่เกิน ราคาของอาหารนั้น

5.3 คุณสมบัติและสิ่งควรรู้เกี่ยวกับปัญหาควบคู่

เมื่อเราทราบถึงคุณลักษณะและความหมายของปัญหาควบคู่แล้ว เราสามารถนำปัญหาควบคู่นี้ไปใช้ให้เป็นประโยชน์ต่อการหาคำตอบที่ดีที่สุดได้ โดยเฉพาะ ถ้าหากเราหาคำตอบจากปัญหาคู่ได้ง่ายกว่า หรือสะดวกกว่าการหาคำตอบจากปัญหาเดิม ปัญหามีอยู่ว่า เมื่อเราได้

คำตอบอุตมะจากปัญหาคู่แล้ว เราจะเปลี่ยนคำตอบที่ได้เหล่านี้ เป็นคำตอบอุตมะของปัญหาเดิมได้อย่างไร นั่นก็คือ เราจะต้องมาศึกษาดูว่า ปัญหาคู่มีคุณสมบัติที่สำคัญอย่างไรบ้าง

คุณสมบัติที่น่าสนใจอันแรก ซึ่งจัดเป็นทฤษฎีของปัญหาควบคู่ ที่สามารถเข้าใจได้ชัดจากการเรียนรู้ลักษณะของปัญหาควบคู่ โดยไม่ต้องพิสูจน์ ก็คือ

ทฤษฎีที่ 5.1 ปัญหาควบคู่ของปัญหาคู่ก็คือปัญหาเดิม

คุณสมบัติที่สำคัญอื่น ๆ ที่จะเป็นประโยชน์ต่อการนำไปใช้ในการแก้ปัญหา มีดังต่อไปนี้

ทฤษฎีที่ 5.2 ถ้า

$$X_o = (x_{1o}, \ldots, x_{jo}, \ldots, x_{no})$$

เป็นคำตอบที่เป็นไปได้ ของปัญหา (5.15) และ

$$W_o = (w_{1o}, \ldots, w_{io}, \ldots, w_{mo})$$

เป็นคำตอบที่เป็นไปได้ ของปัญหา (5.16) แล้วเราจะได้ว่า

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_{jo} \leqslant \sum_{i=1}^{m} b_i w_{io} \quad \text{นั่นก็คือ } P_x \leqslant P_w \qquad \ldots\ldots\ldots(5.17)$$

พิสูจน์

จากปัญหา (5.15) เรามี X_o เป็นคำตอบที่เป็นไปได้ ดังนั้น

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{jo} \leqslant b_i \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

เอา $w_{io} \geqslant 0$ คูณทั้งสองข้างตามค่าของ $i = 1, 2, \ldots, m$ แล้วบวกทุก ๆ ค่าของ i จะได้ว่า

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{jo} w_{io} \leqslant \sum_{i=1}^{m} b_i w_{io}$$

หรือ

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_{io} \right) x_{jo} \leqslant \sum_{i=1}^{m} b_i w_{io}$$

แต่ W_o เป็นคำตอบที่เป็นไปได้ของปัญหา (5.16) ดังนั้น

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_{io} \geqslant c_j$$

และโดยเหตุที่ $x_{jo} \geqslant 0$ ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_{jo} \ 6 \ \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_{io} \right) x_{jo} \leqslant \sum_{i=1}^{m} b_i w_{io}$$

นั่นก็คือ $P_x \leqslant P_w$

ทฤษฎีที่ 5.3 ถ้า

$$X_o^* = (x_{1o}^*, \ldots, x_{jo}^*, \ldots, x_{no}^*)$$

เป็นคำตอบที่เป็นไปได้ของปัญหา (5.15)

และ $W_o^* = (w_{1o}^*, \ldots, w_{io}^*, \ldots, w_{mo}^*)$

เป็นคำตอบที่เป็นไปได้ของปัญหา (5.16) ที่มีคุณสมบัติว่า

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_{jo}^* = \sum_{i=1}^{m} b_i w_{io}^* \qquad \text{..........(5.18)}$$

แล้ว X_o^* และ W_o^* จะเป็นคำตอบอุตมะต่อปัญหา (5.15) และ (5.16) ตามลำดับ

พิสูจน์

โดยเกณฑ์สมมติที่ว่า

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_{jo}^* = \sum_{i=1}^{m} b_i w_{io}^*$$

ดังนั้น สำหรับคำตอบที่เป็นไปได้ X_o ชุดใด ๆ ผลที่ได้จาก (5.17) จะเป็นจริงเสมอ นั่นก็คือ เราจะได้

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_{jo} \leqslant \sum_{i=1}^{m} b_i w_{io}^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_{jo}^*$$

แสดงว่า X_o^* เป็นคำตอบอุตมะของปัญหา (5.15)

ในทำนองเดียวกัน สำหรับคำตอบที่เป็นไปได้ W_o ชุดใด ๆ จะได้ว่า

$$\sum_{i=1}^{m} b_i w_{io}^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_{jo}^* \leqslant \sum_{i=1}^{m} b_i w_{io}$$

ซึ่งแสดงว่า W_o^* เป็นคำตอบอุตมะด้วย

คุณสมบัติต่อไปของปัญหาควบคู่ จะบอกให้เราทราบว่าเราจะหาคำตอบอุตมะของปัญหาหนึ่ง โดยอาศัยการแก้ปัญหาอีกปัญหาหนึ่งที่ควบคู่กัน ด้วยวิธีการซิมเพลกซ์ ได้อย่างไร

เมื่อพูดถึงการหาคำตอบอุตมะด้วยวิธีการซิมเพลกซ์ คงจะจำกันได้ว่า จุดสำคัญแรกที่จะต้องทำก็คือ เปลี่ยนรูปตัวแบบให้อยู่ในรูปมาตรฐาน เช่นเมื่อเราต้องการหาคำตอบของปัญหา (5.15) ด้วยวิธีการซิมเพลกซ์ เราเปลี่ยนตัวแบบ (5.15) เป็นรูปมาตรฐาน จะได้ว่า

หาค่าสูงสุดของ $P_x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

โดยมีข้อจำกัด $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i$ ....(5.19)

และ $x_j, x_{n+i} \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n$

เราจะสรุปว่า

$X_o^* = (x_{1o}^*, \ldots, x_{io}^*, \ldots, x_{mo}^*)$

เป็นคำตอบอุตมะ ก็ต่อเมื่อ $c_j - s_j^*$ (ซึ่งเป็น ส.ป.ส. ของ x_j^* ในฟังก์ชันเป้าหมาย) มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ 0 ทุก ๆ ตัว และผลที่ตามมาก็คือ เราจะได้ว่า

$$P_x^* = \sum_{\substack{i=j \\ j \in B}} c_j x_{io} = \sum_{i=1}^{m} s_{n+i}^* b_i = \text{ค่าสูงสุดของ } P_x$$

และ $s_j^* = \sum_{i=1}^{m} s_{n+i}^* a_{ij}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ ....(5.20)

ซึ่งเราจะใช้ key facts ทั้งสองนี้ เป็นกุญแจที่จะช่วยในการวิเคราะห์เรื่องต่อไป

ทฤษฎีที่ 5.4 ถ้าปัญหาใดปัญหาหนึ่งใน (5.15) และ (5.16) มีคำตอบอุตมะ แล้วอีกปัญหาหนึ่งก็จะมีคำตอบอุตมะด้วย

พิสูจน์

เปลี่ยนตัวแบบปัญหา (5.15) เป็นรูปมาตรฐาน (5.19) แก้ปัญหาด้วยวิธีการซิมเพลกซ์แล้วได้

$X_o^* = (x_{1o}^*, \ldots . x_{io}^*, \ldots . x_{mo}^*)$

เป็นคำตอบอุตมะ (optimal solution) ดังนั้น

$c_j - s_j^* \leqslant 0$ ทุก ๆ $j = 1, 2, \ldots . n+m$

โดยเหตุที่ $c_j = 0$ ทุก ๆ $j = n+1, n+2, \ldots. n+m$ ซึ่งก็คือ $c_{n+i} = 0$ ทุก ๆ $i = 1, 2, \ldots, m$ เราจึงได้ว่า

$$s_j^* \geqslant c_j \quad \text{ทุก ๆ } j = 1, 2, \ldots, n \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (5.21)$$

และ $\quad s_j^* \geqslant 0 \quad$ ทุก ๆ $j = n+1, n+2, \ldots. n+m$

หรือ $\quad s_{n+i}^* \geqslant 0 \quad$ ทุก ๆ $i = 1, 2, \ldots m \qquad \ldots\ldots\ldots (5.22)$

ผลที่ได้จาก (5.20) และ (5.21) รวมกันก็คือ

$$\sum_{i=1}^{m} s_{n+i}^* a_{ij} \geqslant c_j \quad , \quad j = 1, 2, \ldots. n \qquad \ldots\ldots\ldots (5.23)$$

จากปัญหา (5.16) เราเขียนอสมการข้อจำกัดเสียใหม่เป็น

$$\sum_{i=1}^{m} w_i a_{ij} \geqslant c_j \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n \qquad \ldots\ldots\ldots (5.24)$$

ผลที่ได้จาก (5.23), (5.24) และ (5.22) รวมกัน ก็คือ

$$w_i = s_{n+i}^* \geqslant 0 \ , \ i = 1, 2, \ldots, m \qquad \ldots\ldots\ldots (5.25)$$

พิจารณาค่าของ P_w และผลที่ได้จาก (5.25), (5.20) จะได้ว่า

$$P_w = \sum_{i=1}^{m} b_i w_i = \sum_{i=1}^{m} b_i s_{n+i}^* = \sum_{\substack{i=j \\ j \in B}} c_j x_{io} = P_x^*$$

$$= \text{ค่าสูงสุดของ } P_x$$

อาศัยผลจากทฤษฎีที่ 5.3 เราจะได้

$s_{n+1}^*, s_{n+2}^*, \ldots, s_{n+m}^*$

เป็นคำตอบอุตมะต่อปัญหา (5.16) ด้วย ซึ่งเป็นการสรุปผลตามทฤษฎี

ผลลัพธ์ที่น่าสนใจมากจากทฤษฎีนี้ ก็คือ ถ้ามีคำตอบอุตมะต่อปัญหา (5.15) เราเปลี่ยนเป็นคำตอบต่อปัญหา (5.16) ได้ นั่นก็คือ จากตารางสุดท้าย ที่ให้คำตอบอุตมะ เราได้ค่าของ

$$s_j^* = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}^* \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n+m$$

ในเมื่อ c_i เป็นกำไรต่อหน่วยของตัวแปรฐาน x_i และ (a_{ij}^*) เป็น ส.ป.ส. ของ x_j ในข้อจำกัด i ที่เกี่ยวข้องกับคำตอบอุตมะนี้

คำตอบอุตมะของปัญหา (5.16) ก็คือ

$$w_i^* = s_{n+i}^* \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

โดยมี ค่าสูงสุด $P_x \leqslant$ ค่าต่ำสุด P_w

หากเราเปลี่ยนตัวแบบ (5.16) เป็นรูปมาตรฐาน จะได้ว่า

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}w_i - w_{m+j} = c_j \quad , \quad j = 1, 2, \ldots n \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (5.26)$$

อาศัยผลที่ได้จาก (5.25) เราจะได้

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}s_{n+i}^* - w_{m+j} = c_j \quad , \quad j = 1, 2, \ldots n$$

หรือ

$$w_{m+j} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}s_{n+i}^* - c_j \quad , \quad j = 1, 2, \ldots n \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (5.27)$$

โดยเหตุที่

$$s_j^* = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}s_{n+i}^* \text{ และ } c_j - s_j^* \leqslant 0 \quad , \quad j = 1, 2 \ldots n+m$$

เพราะฉะนั้น

$$w_{m+j} = s_j^* - c_j \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

จากข้อเท็จจริงนี้ เราสรุปได้ว่า ถ้าเราหาคำตอบของปัญหาหนึ่งที่มีตัวแบบ (5.15) ด้วยวิธีการซิมเพลกซ์ แล้วได้คำตอบอุตมะคือ

$$= X_o^* = (x_{1o}^*, x_{2o}^*, \ldots, x_{no}^*)$$

โดยมี P_x^* = ค่าสูงสุดของ P_x เป็นค่าอุตมะของฟังก์ชันเป้าหมาย

เราจะได้คำตอบอุตมะของปัญหาคู่ (ปัญหา (5.16)) เป็น

$$w_i^* = s_{n+i}^* \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$w_{m+j}^* = s_j^* - c_j \quad , \quad j \;\; 1, 2, \ldots, n \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (5.28)$$

โดยมี P_w^* = ค่าต่ำสุดของ P_w

ในทางกลับกัน ถ้าปัญหาเดิมมีตัวแบบ (5.16) และปัญหาคู่มีตัวแบบ (5.15) เมื่อเปลี่ยนตัวแบบทั้งสองเป็นรูปมาตรฐาน จะปรากฏผลดังนี้

ปัญหาเดิม	**ปัญหาคู่**
หาค่าต่ำสุดของ $P_x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$	หาค่าสูงสุดของ $P_w = \sum_{i=1}^{m} b_i w_i$
โดยมีข้อจำกัด	โดยมีข้อจำกัด
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}w_i + w_{m+j} = c_j$
และ $x_j \ , \ x_{n+i} \geqslant 0$	และ $w_i \ , \ w_{m+j} \geqslant 0$

$$i = 1, 2, \ldots . m \quad ; \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

กรณีเช่นนี้ เรามักจะหาคำตอบจากปัญหาคู่ ด้วยวิธีการซิมเพลกซ์มากกว่า เนื่องจากง่ายและสะดวกกว่ามาก หากเราได้ $W_o^* = (w_{1o}^*, w_{2o}^*, \ldots, w_{mo}^*)$ เป็นคำตอบอุตมะของปัญหาคู่ โดยมี P_w^* เป็นค่าอุตมะของฟังก์ชันเป้าหมาย (ค่าสูงสุดของ P_w) แล้วเราจะได้

$$b_i - s_i^* \leqslant 0 \qquad \text{ทุก ๆ} = 1, 2, \ldots, m + n$$

คำตอบอุตมะของปัญหาเดิมจะอ่านค่าได้ดังนี้

$$x_j^* = s_{m+j}^* \ , \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_{n+i}^* = s_i^* - b_i \ , \quad i = 1, 2, \ldots, m \qquad \ldots\ldots\ldots(5.29)$$

โดยมี $P_x^* = P_w^* =$ ค่าต่ำสุดของ P_x

สรุปได้ว่า ไม่ว่าเราจะกำหนดปัญหาใด ๆ เป็นปัญหาเดิมและปัญหาคู่ก็ตาม เมื่อเราได้คำตอบอุตมะของปัญหาหนึ่ง ด้วยวิธีการซิมเพลกซ์ ซึ่งจะอ่านผลได้จากตารางสุดท้าย เราก็จะได้คำตอบอุตมะของอีกปัญหาหนึ่งที่ควบคู่กัน โดยอ่านผลที่ได้จากตารางนี้เช่นกัน ค่าอุตมะของฟังก์ชันเป้าหมายในปัญหาทั้งสองจะเท่ากันเสมอ ความจริงที่ได้นี้ เป็นประโยชน์ต่อเราในการแก้ปัญหาอย่างยิ่ง ปัญหาใดก็ตามที่มีจำนวนตัวแปรมาก หรือมีข้อจำกัดมาก ต้องใช้เวลาในการแก้ปัญหาทำหลายตารางจึงจะได้คำตอบอุตมะ เราก็ควรจะแก้ปัญหาที่ควบคู่กัน ที่สามารถแก้ปัญหาได้ง่ายกว่า สะดวกกว่า ซึ่งก็จะได้คำตอบอุตมะของอีกปัญหาหนึ่งด้วย

Dantzig และ Orden ได้เขียนทฤษฎี กำหนดในรูปของเงื่อนไขที่จำเป็นและพอเพียงของคำตอบที่เป็นไปได้ต่อปัญหาเดิมและต่อปัญหาคู่ ที่จะเป็นคำตอบอุตมะ ไว้ดังต่อไปนี้

ทฤษฎี 5.5 (Complementary slackness theorem)

สำหรับคำตอบอุตมะของปัญหาเดิมและปัญหาคู่ระบบใดก็ตาม

ถ้าหากมีอสมการเกิดขึ้นในข้อจำกัดที่ k นั่นก็คือ slack variable x_{n+k} (หรือ w_{m+k}) มีค่ามากกว่า 0 แล้วคำตอบของตัวแปร (decision or controlled variable) ตัวที่ k ของปัญหาที่ควบคู่กันจะมีค่าเป็น 0

ถ้าหากตัวแปรตัวที่ k ในระบบใด ๆ มีค่ามากกว่า 0 ข้อจำกัดที่ k ของปัญหาที่ควบคู่กันจะเป็นสมการ (มีเครื่องหมาย =) นั่นก็คือ slack variable ของข้อจำกัดที่ k จะมีค่าเป็น 0

พิสูจน์

หากเรามีตัวแบบมาตรฐานของปัญหาเดิม กำหนดไว้ดังนี้

หาค่าต่ำสุดของ $P_x = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$

โดยมีข้อจำกัด

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \qquad - x_{n+m} = b_m \end{array} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (5.30)$$

แล้วตัวแบบมาตรฐานของปัญหาคู่ จะกำหนดได้ดังนี้

หาค่าสูงสุดของ $P_w = b_1w_1 + \ldots + b_mw_m$

โดยมีข้อจำกัด

$$\begin{array}{l} a_{11}w_1 + \ldots + a_{m1}w_m + w_{m+1} \qquad c_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}w_1 + \ldots + a_{mn}w_m \qquad + w_{m+n} = c_n \end{array} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (5.31)$$

ตัวแปรทุก ๆ ตัวในปัญหาทั้งสองจะต้องไม่เป็นลบ

เราคูณสมการข้อจำกัดที่ i ของ (5.30) ด้วยตัวแปรคู่ (ที่อยู่ในลำดับเดียวกัน)

หาผลบวกของทุก ๆ สมการ แล้วนำผลที่ได้ไปลบออกจากสมการของฟังก์ชันเป้าหมายในปัญหาเดียวกัน จะได้

$$(c_1 - \sum_{i=1}^{m} a_{i1}w_i)x_1 + \ldots + (c_n - \sum_{i=1}^{m} a_{in}w_i)x_n$$

$$+ w_1x_{n+1} + \ldots + w_mx_{n+m} = P_x - \sum_{i=1}^{m} w_ib_i$$

โดยเหตุที่

$$w_{m+j} = c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}w_i \quad , \quad P_w = \sum_{i=1}^{m} w_ib_i$$

ดังนั้นเราจะได้

$$w_{m+1}x_1 + \ldots + w_{m+n}x_n + w_1x_{n+1} + \ldots + w_mx_{n+m} = P_x - P_w \qquad \ldots\ldots\ldots(5.32)$$

จากทฤษฎีที่ 5.3 เรามี $X_o^* = (x_{1o}^*, x_{2o}^*, \ldots, x_{no}^*)$ และ $W_o^* = (w_{1o}^*, w_{2o}^*, \ldots, w_{mo}^*)$ เป็นคำตอบอุตมะของปัญหาเดิมและของปัญหาคู่ ตามลำดับ โดยมี

$$P_x^* = P_w^* \text{ หรือ } P_x^* - P_w^* = 0$$

อาศัยคำตอบอุตมะที่ได้และคำตอบของ slack variable ในชุดเดียวกัน $x_{n+i,o}^* > 0$ และ $w_{m+j,o}^* > 0$ สมการ (5.32) จะเปลี่ยนเป็น

$$w_{m+1,o}^*x_{1o}^* + \ldots + w_{m+n,o}^*x_{no}^* + w_{1o}^*x_{n+1,o}^* + \ldots + w_{mo}^*x_{n+m,o}^* = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots(5.33)$$

จะเห็นได้ว่า แต่ละเทอมของ $w_{(m+j)o}^*x_{no}^*$ เป็นผลคูณระหว่าง คำตอบของ slack variable ในข้อจำกัด j ของปัญหาคู่ กับ คำตอบของ decision (controlled) variable ตัวที่ j ของปัยหาเดิม และแต่ละเทอมของ $w_{io}^*x_{(n+i)o}^*$ เป็นผลคูณระหว่าง คำตอบของ decision variable ตัวที่ i ของปัญหาคู่ กับ คำตอบของ slack variable ในข้อจำกัด i ของปัญหาเดิม

โดยเหตุที่ ตัวแปรทุก ๆ ตัวไม่มีค่าเป็นลบ และผลบวกของทุกเทอม มีค่าเป็น 0 เพราะฉะนั้น แต่ละเทอมจะต้องมีค่าเป็น 0 นั่นก็คือ

$$w_{(m+j)o}^*x_{jo}^* = 0 \qquad \text{ทุก ๆ } j$$

และ $$w_{io}^*x_{(n+i)o}^* = 0 \qquad \text{ทุก ๆ } i \qquad \ldots\ldots\ldots(5.34)$$

ถ้า $w_{(m+k),o}^* > 0$ เราจะได้ $x_{ko}^* = 0$

และถ้าหาก $x_{(n+k),o}^* > 0$ เราจะได้ $w_{ko}^* = 0$

ซึ่งก็หมายความว่า หากคำตอบอุตมะของปัญหาใดปัญหาหนึ่ง สอดคล้องกับสมการของข้อจำกัดที่ k แล้วตัวแปรที่ควบคุมได้ตัวที่ k ของปัญหาที่ควบคู่กัน จะมีค่าเป็น 0

ในทำนองเดียวกัน

$$\text{ถ้า } x^*_{ko} > 0 \quad \text{เราจะได้ } w^*_{(m+k)o} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots(5.35)$$

$$\text{และถ้าหาก } w^*_{ko} > 0 \quad \text{เราจะได้ } x^*_{(n+k)o} = 0$$

ซึ่งก็หมายความว่า หากคำตอบอุตมะของปัญหาใดปัญหาหนึ่ง มีคำตอบของตัวแปรควบคุมได้ตัวที่ k มีค่ามากกว่า 0 แล้วข้อจำกัดที่ k ของปัญหาที่ควบคู่กัน จะต้องเป็นสมการ

เราสรุปคุณสมบัติที่น่าสนใจของปัญหาควบคู่กัน ได้ดังต่อไปนี้

(1) ถ้า $x_k > 0$ เราจะได้

$$a_{1k}w_1 + a_{2k}w_2 + \ldots + a_{mk}w_m = c_k$$

หรือถ้า $w_k > 0$ เราจะได้

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k$$

(2) ถ้า

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n > b_k$$

เราจะได้ $w_k = 0$

หรือถ้าหาก

$$a_{1k}w_1 + a_{2k}w_2 + \ldots + a_{mk}w_n < c_k$$

เราจะได้ $x_k = 0$

ซึ่งเราจะใช้เป็นประโยชน์ต่อการแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นต่อไป

นอกจากคุณสมบัติดังที่ได้กล่าวมาแล้ว เรายังมีทฤษฎีที่แสดงถึงความสัมพันธ์ ระหว่างปัญหาเดิมกับปัญหาคู่ที่น่าสนใจ ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีที่ 5.6 ถ้าปัญหาเดิมมี unbounded solutions แล้วปัญหาคู่จะไม่มีคำตอบที่เป็นไปได้ (infeasible solutions)

พิสูจน์

จากทฤษฎีที่ 5.2 เราทราบว่า

$$\text{ค่าสูงสุดของ } P_x = \text{ค่าสูงสุดของ } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leqslant \sum_{i=1}^{m} b_i w_i$$

แต่ปัญหาเดิมมี unbounded solutions นั่นก็คือ ค่าสูงสุดของ $P_x \rightarrow \infty$
เพราะฉะนั้น

$$\sum_{i=1}^{m} b_i w_i > \infty$$

ซึ่งแสดงว่า ไม่มีคำตอบที่เป็นไปได้ ชุดใดที่ประกอบด้วยตัวแปรมีค่าจำกัดทุกตัว นั่นก็คือ ปัญหาคู่ไม่มีคำตอบที่เป็นไปได้ (infeasible solution)

ตัวอย่างของปัญหาที่มี unbounded solutions แล้วปัญหาคู่ของมันจะมี infeasible solutions ให้เรามาพิจารณาปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นที่มีตัวแบบดังต่อไปนี้

หาค่าสูงสุดของ $P_x = x_1 + x_2$
โดยมีข้อจำกัด

$$x_1 - x_2 \leqslant 1$$
$$3x_1 - x_2 \leqslant 10$$
และ $$x_1 , x_2 \geqslant 0$$

จะเห็นได้ว่า เราสามารถเพิ่มค่าของ x_2 ได้โดยไม่มีเขตจำกัด ซึ่งจะเป็นผลให้ค่าของ P_x สูงขึ้นโดยไม่มีขีดจำกัดเช่นกัน แสดงว่าปัญหานี้มี unbounded solutions

เมื่อเรามาพิจารณาปัญหาคู่ของมัน นั่นก็คือ
หาค่าต่ำสุดของ $P_w = w_1 + 10w_2$
โดยมีข้อจำกัด

$$w_1 + 3w_2 \geqslant 1$$
$$-w_1 - w_2 \geqslant 1$$
และ $$w_1 , w_2 \geqslant 0$$

หากเราพิจารณาข้อจำกัดที่ 2 จะเห็นว่า ไม่มีค่าของ w_1 และ w_2 ตัวใดที่มีค่าเป็นบวก ที่จะสอดคล้องกับข้อจำกัดนี้ นั่นย่อมแสดงว่า ปัญหานี้ไม่มีคำตอบที่เป็นไปได้ (infeasible solutions)

ข้อที่ควรระวัง ถ้าเรารู้ว่าปัญหาหนึ่งมี infeasible solutions อย่าเพิ่งด่วนสรุปว่า ปัญหาคู่จะมี unbounded solutions เพราะอาจจะเป็นไปได้ว่า ปัญหาทั้งสองแบบมี infeasible solutions ก็ได้ ดังเช่นตัวอย่างต่อไปนี้

กำหนดปัญหาเดิมดังนี้

หาค่าสูงสุดของ $P_x = x_1 + 2x_2$

โดยมีข้อจำกัด

$$x_1 - x_2 \leqslant 0$$

$$-x_1 + x_2 \leqslant -1$$

และ $x_1, \; x_2 \geqslant 0$

แล้วปัญหาคู่จะกำหนดได้ดังนี้

หาค่าต่ำสุดของ $P_w = -w_2$

โดยมีข้อจำกัด

$$w_1 - w_2 \geqslant 1$$

$$-w_1 + w_2 \geqslant 2$$

และ $w_1, \; w_2 \geqslant 0$

ปัญหาควบคู่ทั้งสองปัญหานี้ ต่างก็มี infeasible solutions

ให้นักศึกษาตรวจสอบโดยการเขียนกราฟของปัญหาทั้งสอง

ทฤษฎีที่ 5.7 ถ้าปัญหาใดปัญหาหนึ่งมีคำตอบอุตมะมากกว่า 1 ชุด (alternative optimal solutions) แล้วปัญหาที่ควบคู่กันจะมีคำตอบอุตมะ ที่มีตัวแปรฐานบางตัวมีค่าเป็น 0 นั่นก็คือ มี degenerate optimal solution

พิสูจน์

ถ้าปัญหาเดิมมีคำตอบอุตมะมากกว่า 1 ชุด ก็แสดงว่า ในตารางซิมเพลกซ์สุดท้าย จะมี $c_i - s_i$ ของ nonbasic variable x_i มีค่าเป็น 0

อาศัยผลจาก (5.28) เราจะได้ว่า คำตอบอุตมะของปัญหาคู่ จะมีตัวแปรฐาน w_{m+i} มีค่าเป็น 0 นั่นก็คือ ปัญหาคู่มี degenerate optimal solution

ในทางกลับกัน ถ้าเรารู้ว่า ปัญหาหนึ่งมีคำตอบอุตมะที่มีตัวแปรฐานบางตัวมีค่าเป็น 0 แล้วปัญหาที่คู่กันก็จะมีคำตอบอุตมะมากกว่า 1 ชุด (เป็นการบ้านให้นักศึกษาไปพิสูจน์)

ตัวอย่างของปัญหาเดิมที่มี degenerate solution และปัญหาควบคู่ของมันมี alternative solutions

ปัญหาเดิม

หาค่าต่ำสุดของ $P_x = 144x_1 + 240x_2$

โดยมีข้อจำกัด

$$6x, + 15x_2 \geqslant 48$$

$$8x_1 + 10x_2 \geqslant 32$$

และ $x_1 , x_2 \geqslant 0$

ปัญหาคู่

หาค่าสูงสุดของ $P_w = 48w_1 + 32w_2$

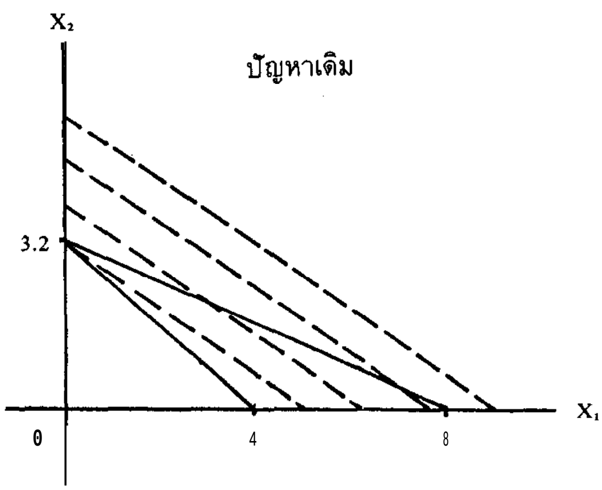
โดยมีข้อจำกัด

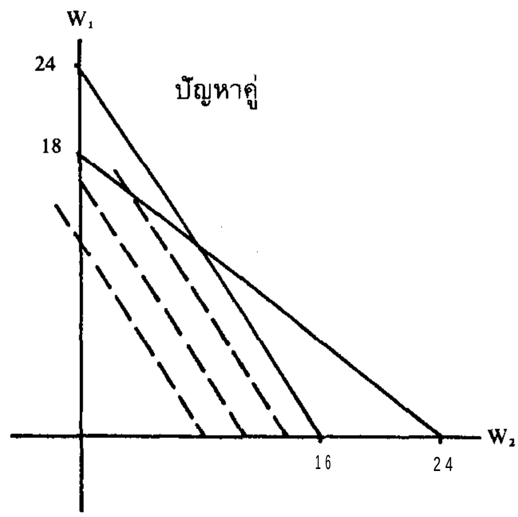
$$6w_1 + 8w_2 \leqslant 144$$

$$15w_1 + 10w_2 \; 6 \; 240$$

และ $w_1 , w_2 \geqslant 0$

ซึ่งแสดงให้เห็นจริงได้ด้วยกราฟ ดังต่อไปนี้





อ่านผลที่ได้จากกราฟ จะได้ว่า

ปัญหาเดิมมี $x_2 = 3.2 , x_1 = x_3 = x_4 = 0$

และ $P_x^* = P_{\text{ต่ำสุด}} = 768$

ปัญหาคู่มี $w_1 = 16, w_3 = 48, w_2 = w_4 = 0$

หรือ $w_1 = 8, w_2 = 12, w_3 = w_4 = 0$

และ $P^* = P_{\text{สูงสุด}} = 768$

แสดงว่า ปัญหาเดิมมี degenerate optimal solution ส่วนปัญหาคู่มี alternative optimal solutions

เราจะสรุปการหาคำตอบอุตมะต่อปัญหาเดิมจากปัญหาคู่ โดยอาศัยคุณสมบัติและทฤษฎีเกี่ยวกับปัญหาคู่ ดังที่ได้กล่าวมาแล้ว ดังต่อไปนี้

5.4 การหาคำตอบอุตมะของปัญหาเดิมจากปัญหาคู่

อาศัยคุณสมบัติและทฤษฎีเกี่ยวกับปัญหาคู่ เราจะนำมาใช้ในการหาคำตอบอุตมะต่อปัญหาเดิมโดยเฉพาะกรณีที่ การหาคำตอบจากปัญหาเดิมต้องใช้เวลามาก หรือการหาคำตอบยุ่งยาก เยิ่นเย้อเกินไป อย่างไรก็ตาม หากปัญหาเดิมสามารถหาคำตอบได้โดยง่าย ก็ไม่มีความจำเป็นที่จะต้องใช้ปัญหาคู่ เราจะพิจารณาการหาคำตอบอุตมะโดยอาศัยปัญหาคู่ 2 วิธีการ ดังต่อไปนี้

5.4.1 การหาคำตอบจากปัญหาคู่ด้วยวิธีกราฟ

ตัวอย่างแรกของการใช้ปัญหาคู่มาช่วยหาคำตอบต่อปัญหาเดิม เราจะพูดถึงในกรณีที่ปัญหาเดิมมีตัวแปรหลายตัว ภายใต้ข้อจำกัด 2 ข้อ กรณีของปัญหานี้ เมื่อเราหาปัญหาคู่ จะพบว่าปัญหาคู่มีตัวแปรควบคุมได้ 2 ตัว ซึ่งเราสามารถหาคำตอบด้วยวิธีกราฟได้ ทำให้การแก้ปัญหาง่ายและสะดวกยิ่งขึ้น จากนั้นเราใช้คุณสมบัติและทฤษฎีเกี่ยวกับปัญหาคู่ มาสรุปผลของปัญหาเดิมต่อไป นั่นก็คือ หากปัญหาเดิมมีตัวแปรควบคุมได้ n ตัว ภายใต้เงื่อนไขของ 2 ข้อจำกัด เราจะทราบได้ทันทีว่า คำตอบอุตมะของปัญหาเดิมจะมีตัวแปร (decision และ/หรือ slack variables) ที่มีค่ามากกว่า 0 ไม่เกิน 2 ตัว เมื่อหาปัญหาคู่ ปัญหาคู่จะมีตัวแปรควบคุมได้ 2 ตัว ภายใต้เงื่อนไขของ n ข้อจำกัด และเราจะได้คำตอบอุตมะของปัญหาคู่มีตัวแปรที่มีค่ามากกว่า 0 ไม่เกิน n ตัว จากข้อเท็จจริงที่ได้นี้ และคุณสมบัติของปัญหาคู่ สรุปผลได้ว่า เมื่อเราหาคำตอบต่อปัญหาคู่ด้วยวิธีกราฟ และรู้ว่าจุดอุตมะ (optimal point) เป็นจุดตัดของข้อจำกัดใด ก็เท่ากับเรารู้ว่า slack variable ตัวใดมีค่าเป็น 0 นั่นก็คือ เราจะรู้ว่า ตัวแปรในปัญหาเดิมตัวใดบ้างที่มีค่ามากกว่า 0 ซึ่งจะต้องมีไม่เกิน 2 ตัว ดังนั้น หากเรามีปัญหาเดิม

หาค่าสูงสุด (หรือหาค่าต่ำสุด) ของ P_x

$$= \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j$$

โดยมีข้อจำกัด

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ \{\leq, \ \geq\} \ b_i, \quad i = 1, 2, \ldots m$$

และ

$$x_j \ \geq \ 0 \ , \quad j = 1, 2, \ldots n$$

เราจะได้ปัญหาคู่

หาค่าต่ำสุด (หรือหาค่าสูงสุด) ของ P_w

$$= \sum_{i=1}^{m} b_i w_i$$

โดยมีข้อจำกัด

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \ \{\geqslant, \leqslant\} \ c_j \ , \quad j = 1, 2, \ldots . n$$

และ $\qquad w_i \geqslant 0 \ , \quad i = 1, 2, \ldots . m$

เขียนกราฟของปัญหาคู่ สมมติได้จุดอุตมะ (optimal point) เป็นจุดตัดของข้อจำกัด p และ q ซึ่งแสดงว่า w_{2+p} และ w_{2+q} ต่างมีค่าเป็น 0 นั่นก็หมายความว่า x_p และ x_q ต่างมีค่ามากกว่า 0 ส่วน x_j ตัวอื่น ๆ จะมีค่าเป็น 0 หมด เราจึงได้ว่า

$$a_{1p}x_p + a_{1q}x_q = b_1$$

$$a_{2p}x_p + a_{2q}x_q = b_2$$

แก้สมการทั้ง 2 หาคำตอบของ x_p และ x_q นำค่าที่ได้ไปแทนในฟังก์ชันเป้าหมาย จะได้

$$P_{\text{สูงสุด (หรือต่ำสุด)}} = c_p x_p + c_q x_q$$

ให้เรามาพิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 5.2

จงหาคำตอบอุตมะของปัญหาต่อไปนี้ โดยใช้ปัญหาคู่

หาค่าสูงสุดของ $P = 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 12x_4 + 9x_5$

โดยมีข้อจำกัด

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 \ 6 \ 120$$

$$x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 \leqslant 160$$

และ $\qquad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0$

94

วิธีทำ

หาปัญหาคู่ จะได้

หาค่าต่ำสุดของ $P = 120w_1 + 160w_2$

โดยมีข้อจำกัด

$$w_1 \geqslant 5 \quad \text{.......... (1)}$$

$$2w_1 + w_2 \geqslant 7 \quad \text{.......... (2)}$$

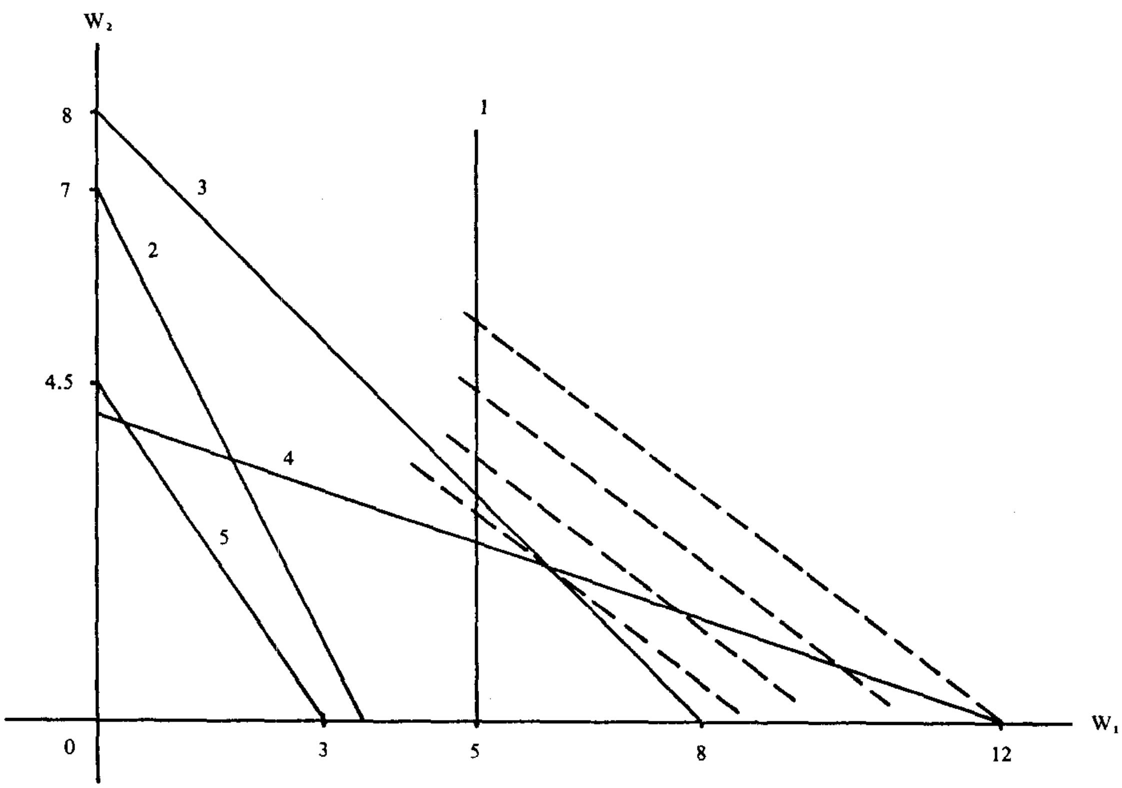
$$w_1 + w_2 \geqslant 8 \quad \text{.......... (3)}$$

$$w_1 + 3w_2 \geqslant 12 \quad \text{.......... (4)}$$

$$3w_1 + 2w_2 \geqslant 9 \quad \text{.......... (5)}$$

และ $w_1, w_2 \geqslant 0$

เขียนกราฟของปัญหาคู่ได้ดังนี้



จะเห็นว่า จุดอุตมะคือจุด (6, 2) ซึ่งเป็นจุดตัดของข้อจำกัดที่ 3 กับข้อจำกัดที่ 4 แสดงว่าคำตอบอุตมะของปัญหาเดิม จะมี x_3 และ x_4 ที่มีค่ามากกว่า 0 ค่า x นอกนั้นจะเป็น 0 ซึ่งเราจะหาค่า x_3 และ x_4 ได้ดังต่อไปนี้

$$x_3 + x_4 = 120$$

และ $x_3 + 3x_4 = 160$

จะได้ว่า $2x_4 = 40$ หรือ $x_4 = 40/2 = 20$ ดังนั้น

$x_3 + 20 = 120$ หรือ $x_3 = 120 - 20 = 100$

$$P_{\text{สูงสุด}} = (8)(100) + (12)(20) = 1{,}040$$

(ซึ่งจะเห็นได้ว่า เป็นค่าเดียวกันกับค่า $P_{\text{ต่ำสุด}} = (120)(6) + (160)(2) = 1{,}040$ นั่นเอง)

สรุปได้ว่า เราจะได้คำตอบอุตมะของปัญหาเดิมมี $x_3 = 100, x_4 = 20$ นอกนั้นเป็น 0 โดยมีค่า $P_{\text{สูงสุด}} = 1{,}040$

หมายเหตุ ถ้าจุดอุตมะ (optimal point) เป็นจุดบนแกน W_1 หรือแกน W_2 ซึ่งก็หมายความว่าจะได้ x_{n+2} หรือ x_{n+1} มีค่ามากกว่า 0 ตามลำดับ ตัวอย่างเช่น

ถ้าจุดอุตมะเป็นจุดตัดของข้อจำกัด p กับแกน W_1 ก็แสดงว่า x_p และ x_{n+2} ต่างมีค่ามากกว่า 0 นอกนั้นเป็น 0 เราจึงได้

$$a_{1p}x_p = b_1$$

และ $$a_{2p}x_p + x_{n+2} = b_2$$

หรือ $x_p = b_1/a_{1p}$ และ $x_{n+2} = b_2 - (a_{2p})(b_1)/a_{1p}$

โดยมี $P_x^* = c_p b_1/a_{1p}$

สำหรับกรณีที่จุดอุตมะอยู่บนแกน W_2 ก็หาได้ด้วยวิธีการเดียวกัน

ถ้าจุดอุตมะเป็นจุดตัดของข้อจำกัด p ข้อจำกัด q และแกน W_2 ก็หมายความว่า เราจะได้

$$w_{2+p} = w_{2+q} = w_1 = 0$$

แสดงว่า มีตัวแปรฐานบางตัว มีค่าเป็น 0 ซึ่งมีความหมายว่า ปัญหาคู่มี degenerate optimal solution และตามทฤษฎีที่ 5.6 เราจะได้ว่า ปัญหาเดิมมีคำตอบอุตมะมากกว่า 1 ชุด นั่นก็คือมี alternative optimal solutions แสดงให้เห็นจริงได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 5.3

จงแสดงให้เห็นจริงว่า ปัญหาเดิม

หาค่าต่ำสุดของ P_x

$$= 360x_1 + 300x_2 + 350x_3 + 320x_4 + 360x_5 + 280x_6$$

โดยมีข้อจำกัด

$$9x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 12x_5 + 5x_6 \geqslant 1836$$

$$8x, + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 5x5 + 7x_6 \geqslant 3192$$

และ x_j (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6) $\geqslant 0$

มี alternative optimal solutions และปัญหาคู่จะมี degenerate optimal solution

วิธีทำ

จากปัญหาเดิม เราเปลี่ยนให้เป็นรูปมาตรฐาน แล้วหาคำตอบโดยใช้วิธีการ Two - Phase ดังต่อไปนี้

Phase I

ตารางที่	ตัวแปรฐาน x_i	c_i	c_j / คำตอบฐาน	a_1 (0)	a_2 (0)	a, (0)	a_4 (0)	a_5 (0)	a_6 (0)	a, (0)	a, (0)	a_9 (1)	a_{10} (1)	ค่าที่เป็นไปได้ θ_i
1	x_9	1	1836	9	5	7	4	12	5-l		0	1	0	204
	x_{10}	1	3192	8	6	7	8	5	7		O-l	0	1	399
P = 5028			s_j	17	11	14	12	17	12	-1	-1	1	1	
			$c_j - s_j$	17-11		-14	-12	-17	-12	1	1	0	0	
2	x_1	0	204	1	$\frac{5}{9}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{9}$	$-\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{9}$	0	459
	x_{10}	1	1560	0	$\frac{14}{9}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{40}{9}$	$-\frac{17}{3}$	$\frac{23}{9}$	$\frac{8}{9}$	-1	$-\frac{8}{9}$	1	351
P = 1560			s_j	0	$\frac{14}{9}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{40}{9}$	$\frac{17}{3}$	$\frac{23}{9}$	$\frac{8}{9}$	-1	$-\frac{8}{9}$	,	
			$c_j - s_j$	0	$-\frac{14}{9}$	$\frac{-1}{9}$	$-\frac{40}{9}$	17	23 5-9	$\frac{8}{9}$	,	$\frac{17}{9}$	0	

ผลที่ได้จากตารางต่อไป จะเป็นตารางสุดท้ายของ Phase I เราจึงเปลี่ยนเป็นตารางที่ 1 ของ Phase II และเปลี่ยนแปลงคำตอบที่ได้ต่อไป จนกว่าจะได้คำตอบอุตมะ ดังต่อไปนี้

Phase II

ตารางที่	ตัวแปรฐาน x_i	c_i	c_j / คำตอบฐาน	a_1 (360)	a_2 (300)	a_3 (350)	a_4 (320)	a_5 (360)	a_6 (280)	a_7 (0)	a_8 (0)	ค่าที่เป็นไปได้ θ_i
1	x_1	360	48	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{7}{10}$	0	$\frac{19}{10}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	160
	x_4	320	351	0	$\frac{7}{20}$	$\frac{7}{40}$	1	$-\frac{51}{40}$	$\frac{23}{40}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{9}{40}$	610.4
P = 129,600			s_j	360	256	308	320	276	292	-8	-36	
			$c_j - s_j$	0	44	42	0	84	-12	8	36	
2	x_6	280	160	$\frac{10}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{3}$	0	$\frac{19}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	
	x_4	320	259	$-\frac{23}{12}$	$-\frac{5}{12}$	$-\frac{7}{6}$	1	$-\frac{59}{12}$	0	$\frac{7}{12}$	$-\frac{5}{12}$	444
P = 127,680			s_j	20	240	280	320	200	280	0	-40	
			$c_j - s_j$	40	60	70	0	160	0	0	40	

ผลที่ได้จากตารางนี้ให้คำตอบอุตมะแล้ว แต่เรายังสามารถหาคำตอบอุตมะชุดอื่นได้อีก ทั้งนี้เนื่องจากเรามีค่า $c_7 - s_7$ ของ nonbasic x_7 เป็น 0 นั่นก็คือ

ตารางที่	ตัวแปรฐาน xi	c_i	c_j / คำตอบฐาน	a, (360)	a_2 (300)	a, (350)	a_4 (320)	a, (360)	a, (280)	a, (0)	a_8 (0)
3	x_6	280	456	$\frac{8}{7}$	$\frac{6}{7}$	1	$\frac{8}{7}$	$\frac{5}{7}$	1	0	$-\frac{1}{7}$
	x_7	0	444	$-\frac{23}{7}$	$-\frac{5}{7}$	-2	$\frac{12}{7}$	$-\frac{59}{7}$	0	1	$-\frac{5}{7}$
P = 127,680			s_j	320	240	280	320	200	280	0	-40
			$c_j - s_j$	40	60	70	0	160	0	0	40

สรุปผลได้ว่า เราจะได้คำตอบอุตมะดังนี้

x_6 = 456, x, = 444 หรือ x_6 = 160, x_4 = 259 โดยมี $P_{\text{ต่ำสุด}}$ = 127,680

(ค่าของ x_j ที่ไม่ได้กล่าวถึง แสดงว่ามีค่าเป็น 0)

แสดงว่า ปัญหาเดิมมี alternative optimal solutions

ต่อไป เราหาปัญหาคู่แล้วเขียนกราฟของปัญหาคู่ ปรากฏผลดังต่อไปนี้

ปัญหาคู่

ค่าสูงสุดของ $P_w = 1836w_1 + 3192w_2$

โดยมีข้อจำกัด

$$9w_1 + 8w_2 \leqslant 360$$

$$5w_1 + 6w_2 \leqslant 300$$

$$7w_1 + 7w_2 \leqslant 350$$

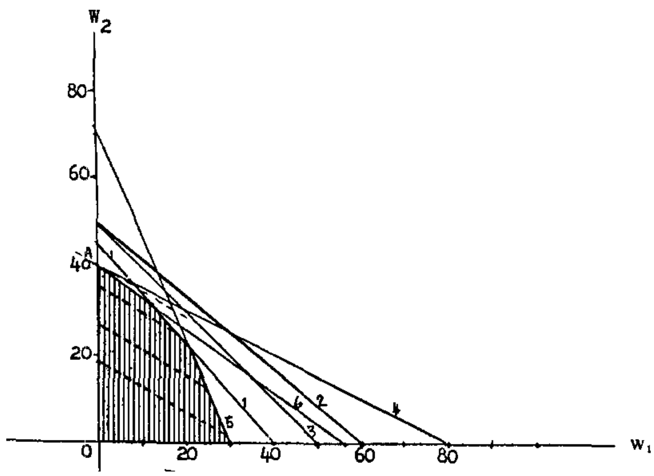
$$4w_1 + 8w_2 \leqslant 320$$

$$12w_1 + 5w_2 \leqslant 360$$

$$5w_1 + 7w_2 \leqslant 280$$

และ $w_1 \ , \ w_2 \geqslant 0$

แสดงให้เห็นด้วยกราฟดังนี้



อ่านผลที่ได้จากกราฟ จะได้ว่า จุดอุตมะเป็นจุด A(0, 40) นั่นก็คือ เราได้คำตอบอุตมะดังนี้

$$w_2 = 40,\ w_3 = 40,\ w_4 = 60,\ w_5 = 70,\ w_7 = 160,\ w_1 = w_6 = w_8 = 0$$

โดยมี $P_{\text{สูงสุด}} = (3192)(40) = 127{,}680$

แสดงว่า ปัญหาคู่มี degenerate optimal solution

หมายเหตุ

1. จากกราฟ เราได้ A(0, 40) เป็นจุดอุตมะ (optimal point) ดังนั้น คำตอบอุตมะจะได้มาจากการแทนค่า $w_1 = 0$, $w_2 = 40$ ในตัวแบบมาตรฐานของปัญหาคู่

   ค่าสูงสุดของ $P_w = 1836w_1 + 3192w_2$

   โดยมีข้อจำกัด

$$\begin{aligned}
9w_1 + 8w_2 + w_3 &= 360 \\
5w_1 + 6w_2 + w_4 &= 300 \\
7w_1 + 7w_2 + w_5 &= 350 \\
4w_1 + 8w_2 + w_6 &= 320 \\
12w_1 + 5w_2 + w_7 &= 360 \\
5w_1 + 7w_2 + w_8 &= 280
\end{aligned}$$

   และ w_i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) $\geqslant 0$

2. ในทางปฏิบัติ เราไม่จำเป็นต้องหาคำตอบต่อปัญหาเดิมด้วยวิธีการซิมเพลกซ์ แต่จะหาคำตอบโดยอาศัยคุณสมบัติและทฤษฎีเกี่ยวกับปัญหาคู่ นั่นก็คือ เมื่อเราหาคำตอบต่อปัญหาคู่ด้วยวิธีกราฟ อ่านผลที่ได้จากกราฟ จะได้ว่า จุดอุตมะเป็นจุดตัดของข้อจำกัดที่ 4 ข้อจำกัดที่ 6 บนแกน W_2 แสดงว่า เราได้

$$w_{2+4} = w_{2+6} = w_1 = 0 \text{ หรือ } c_4 \quad s_4 = c_6 - s_6 = c, - s_7 = 0$$

   มีความหมายว่า ปัญหาเดิม มีค่า $c_j - s_j$ ของ nonbasic variable x_j บางตัวมีค่า 0 นั่นก็คือ ปัญหาเดิมมี alternative optimal solutions

สำหรับการหาคำตอบอุตมะแต่ละชุด ว่ามีค่าของตัวแปรใดมากกว่า 0 (ไม่เกิน 2 ตัว) บ้าง เราพิจารณาจุดอุตมะจากกราฟ นั่นก็คือพิจารณาที่จุด A ว่าเกี่ยวข้องกับข้อจำกัดใด ผลที่จะอ่านได้จากกราฟ สรุปผลได้ว่า

คำตอบชุดแรก จะได้จากการพิจารณาว่า A เป็นจุดตัดของข้อจำกัดที่ 4 และที่ 6 นั่นก็คือ เราได้

$$4x, + 5x_6 = 1836$$

$$8x, + lx, = 3192$$

แก้สมการทั้งสอง จะได้ว่า $x_6 = 160$, $x_4 = 259$

คำตอบชุดที่ 2 ได้จากการพิจารณาว่า เป็นจุดตัดของข้อจำกัดที่ 6 บนแกน W_2 นั่นก็คือ เราได้

$$5x_6 - x_7 = 1836$$

$$7x_6 = 3192$$

แก้สมการทั้งสอง จะได้ว่า $x_6 = 456$, $x, = 444$

ค่าต่ำสุดของ P_x จะคำนวณได้จาก

$$P^*_w = P_{\text{สูงสุด}} = (3192)(40)$$

หรือ $$P^*_x = (320)(259) + (280)(160)$$

หรือ $$P^*_x = (280)(456)$$

ซึ่งจะได้ $$P_{\text{ต่ำสุด}} = 127,680$$

5.4.2 การหาคำตอบจากปัญหาคู่ด้วยวิธีการซิมเพลกซ์

เมื่อปัญหาเดิมมีตัวแปรควบคุมได้ n ตัว ภายใต้เงื่อนไขข้อจำกัด m ข้อ หากการหาคำตอบยุ่งยาก เยิ่นเย้อ เสียเวลา เราจะอาศัยปัญหาคู่ซึ่งมีตัวแปรควบคุมได้ m ตัว ภายใต้ข้อจำกัด n ข้อ อย่างไรก็ตาม หากปัญหาเดิมไม่จำเป็นต้องใช้ตัวแปรเทียมเข้ามาช่วยในการหาคำตอบที่เป็นไปได้ขั้นฐานชุดแรกเราก็ไม่จำเป็นต้องใช้ปัญหาคู่ นั่นก็หมายความว่า หากปัญหาเดิมมีตัวแบบดัง (5.16) เราจะใช้ปัญหาคู่ แล้วหาคำตอบจากปัญหาคู่ด้วยวิธีการซิมเพลกซ์ อ่านคำตอบและสรุปผลที่ได้ของปัญหาเดิม จากตารางสุดท้ายของปัญหาคู่ โดยอาศัย (5.29)

ถ้าเราหวนกลับไปพิจารณาการหาคำตอบของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น ในตัวอย่างที่ 3.4 จะเห็นว่า การแก้ปัญหาเสียเวลาและยุ่งยากมาก เมื่อเป็นเช่นนี้ เราควรจะมาพิจารณาการแก้ปัญหาโดยใช้ปัญหาคู่ ดังต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 5.4

จงหาคำตอบอุตมะของปัญหาเดิมในตัวอย่างที่ 3.5 โดยอาศัยการหาคำตอบต่อปัญหาคู่ด้วยวิธีการซิมเพลกซ์

วิธีทำ

หาตัวแบบของปัญหาคู่ แล้วเปลี่ยนเป็นรูปมาตรฐาน

หาค่าสูงสุดของ $P_w = 120w_1 + 480w_2 + 350w_3 + 420w_4$

โดยมีข้อจำกัด

$$w_1 + w_2 + w_3 + 2w_4 + w_5 = 11$$

$$w_1 + 6w_2 + 2w_3 + 2w_4 + w_6 = 26$$

$$w_3 + w_4 + w_7 = 1$$

และ $w_i \ (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) \geqslant 0$

หาคำตอบด้วยวิธีการซิมเพลกซ์ ปรากฏผลดังต่อไปนี้

ตารา	ตัวแปรฐาน		b_i	120	480	350	420	0	0	0	ค่าที่เป็นไปได้
ที่	w_j	b_j	คำตอบฐาน	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	θ_j
	w_5	0	11	1	1	1	2	1	0	0	11
	w_6	0	26	1	6	2	2	0	1	0	13/3
	w_7	0	1	0	0	1	1	0	0	1	
	P = 0		s_i	0	0	0	0	0	0	0	
			$b_i - s_i$	120	480	350	420	0	0	0	
	w_5	0	$\frac{20}{3}$	$\overline{6}$	0	$\overline{3}$	$\overline{3}$	1	$-\frac{1}{6}$	0	4
2	w_2	480	$\frac{13}{3}$	$\overline{6}$	1	$\overline{3}$	$\overline{3}$	0	$\overline{6}$	0	13
	w_7	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1
	P = 2080		s_i	80	480	160	160	0	80	0	
			$b_i - s_i$	40	0	190	260	0	-80	0	

	w_5	0	5	$\frac{5}{6}$	O-l		0	1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{5}{3}$	6
3	w_2	480	4	$\frac{1}{6}$	1	0	0	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	24
	w_4	420	1	0	0	1	1	0	0	1	—
	P = 2340		s_i	80	480	420	420	0	80	260	
			$b_i - s_i$	40	0	-70	0	0	-80	-260	
	w_1	120	6	1	0	$-\frac{6}{5}$	0	$\frac{6}{5}$	$-\frac{1}{5}$	-2	
4	w_2	480	3	0	1	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	
	w_4	420	1	0	0	1	1	0	0	1	
	P = 2580		s_i	120	480	372	420	48	72	180	
			$b_i - s_i$	0	0	-22	0	-48	-72	-180	

จะเห็นว่า ตารางที่ 4 นี้เป็นตารางสุดท้ายที่ให้คำตอบอุตมะต่อปัญหาคู่ เราจึงสรุปผลที่ได้จากตารางนี้ เป็นคำตอบอุตมะต่อปัญหาเดิมได้ว่ามี

$$P_{\text{ต่ำสุด}} = 2,580 \quad \text{โดยมี } x_1 = 48, x_2 = 72, x_3 = 180, x_6 = 22 \quad \text{นอกนั้นเป็น } 0$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า เป็นคำตอบอุตมะชุดเดียวกันกับที่ได้จากตารางที่ 2 ใน Phase - II แสดงว่า การใช้ปัญหาคู่ในการหาคำตอบต่อปัญหาเดิมนี้ จะสามารถลดขั้นตอนในการทำงานได้ ซึ่งจากตัวอย่างนี้ จะเห็นว่า สามารถลดจำนวนตารางจาก 6 ตาราง เหลือเพียง 4 ตาราง

อย่างไรก็ตาม หากเราพิจารณาผลลัพธ์ที่ได้จากแต่ละตารางของปัญหาคู่ จะเห็นได้ว่า ใน 3 ตารางแรก จะให้คำตอบต่อปัญหาเดิมที่เป็น infeasible solutions มีเฉพาะคำตอบในตารางที่ 4 เท่านั้น ที่ให้คำตอบต่อปัญหาเดิม เป็นคำตอบที่เป็นไปได้ขั้นฐาน และเป็นคำตอบอุตมะด้วย เราจึงอาจจะกล่าวได้ว่า หากเรารู้ว่าปัญหาเดิมมีคำตอบอุตมะ และการหาคำตอบที่เป็นไปได้ชุดแรกไม่อาจจะกำหนดได้ว่า มีตัวแปรฐานตัวใดที่มีค่ามากกว่า 0 บ้าง อย่างไรก็ตามหากเราเริ่มต้นคำตอบชุดแรกจากคำตอบที่เป็น infeasible solutions จะให้ผลใกล้เคียงกับคำตอบอุตมะ มากกว่าคำตอบที่เป็นไปได้ขั้นฐาน เมื่อเป็นเช่นนี้ เราจะเริ่มคำตอบชุดแรกจาก infeasible solutions

แล้วใช้วิธีการเปลี่ยนหาคำตอบชุดใหม่อย่างมีระบบ โดยยึดหลักของการเพิ่มค่าให้น้อยที่สุด วิธีการเช่นนี้จะให้ผลเช่นเดียวกันกับการใช้แก้จากปัญหาคู่ แสดงการเปรียบเทียบให้เห็นได้จากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 5.5

จงหาคำตอบอุตมะของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น

หาค่าต่ำสุดของ $P_x = 4x_1 + 10x_2 + 3x_3$

โดยมีข้อจำกัด

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 \geqslant 500$$

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geqslant 250$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \geqslant 300$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant 200$$

และ $x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$

วิธีทำ

วิธีแรก แก้ปัญหาเดิม โดยเริ่มต้นคำตอบชุดแรก จากคำตอบที่เป็น infeasible solution นั่นก็คือ เริ่มต้นคำตอบชุดแรกที่มีตัวแปรควบคุมได้ $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

ในที่นี้ เราทำตัวแบบของปัญหาเดิม ให้เป็นตัวแบบมาตรฐาน หาค่าของ slack variables โดยการเอา -1 คูณสมการข้อจำกัดทุกข้อ จะได้ว่า

หาค่าต่ำสุดของ $P_x = 4x_1 + 10x_2 + 3x_3$

โดยมีข้อจำกัด

$$-2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = 500$$

$$-2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_5 = 250$$

$$-x_1 - 2x_2 - x_3 + x_6 = 300$$

$$-3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_7 = 200$$

และ $x_j\ (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) \geqslant 0$

เขียนตารางซิมเพลกซ์ที่ 1 จะเห็นว่าคำตอบชุดแรกที่ได้มีค่าของตัวแปรเป็นลบหมดทุกตัว นั่นคือเป็นคำตอบพวก infeasible solutions กรณีเช่นนี้เราจะใช้การพิจารณาจากค่าของ $c_j - s_j$

ไม่ได้ แต่จะต้องดูว่าจะทำอย่างไร จึงจะทำให้คำตอบที่ได้เป็นคำตอบที่เป็นไปได้ขั้นฐาน และต้องมีค่าของฟังก์ชันเป้าหมายต่ำสุด เมื่อพิจารณาผลที่ได้จากตารางที่ 1 จะเห็นว่า มี x_4 เป็นตัวแปรที่มีค่าลบต่ำสุด เราจึงควรขจัดตัวแปรนี้ ปัญหาอยู่ที่ว่า เราจะทำอย่างไรจึงจะขจัดตัวแปรนี้ออกไป และควรจะนำตัวแปรใดเข้ามาแทนที่ วิธีการที่ดีที่สุดก็คือการพิจารณาจากการเปลี่ยนแปลงของค่า P นั่นก็คือ ดูว่าการเพิ่มค่าตัวแปร (จาค่าเดิมที่เป็น 0) ใดจะมีผลให้ค่าของ P เพิ่มขึ้นในปริมาณเท่าใด แล้วเราเลือกตัวแปรที่ทำให้ค่าของ P เพิ่มขึ้นน้อยที่สุด

ให้เรามาพิจารณาผลที่ได้จากตารางที่ 1 จะเห็นว่า เราต้องการหาตัวแปรที่จะมาแทนที่ x_4 จากการพิจารณาค่าของ P พบว่า

หากเราเพิ่มค่าของ x_1 ค่าของ P จะเพิ่มขึ้นอีก $(4)(-500)/(-2) = 1{,}000$

หากเราเพิ่มค่าของ x_2 ค่าของ P จะเพิ่มขึ้นอีก $(10)(-500)/(-4) = 1{,}250$

หากเราเพิ่มค่าของ x_3 ค่าของ P จะเพิ่มขึ้นอีก $(3)(-500)/(-1) = 1{,}500$

สรุปได้ว่า เราจะได้คำตอบชุดที่ 2 โดยการแทนที่ x_4 ด้วย x_1 ดังต่อไปนี้

ตารางที่	ตัวแปรฐาน		c_j	4	10	3	0	0	0	0
	x_i	c_i	คำตอบฐาน	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
1	x_4	0	-500	-2	-4	-1	1	0	0	0
	x_5	0	-250	-2	-3	-2	0	1	0	0
	x_6	0	-300	-1	-2	-1	0	0	1	0
	x_7	0	-200	-3	-1	-2	0	0	0	1
	P = 0		s_j	0	0	0	0	0	0	0
			$c_j - s_j$	**4**	**10**	**3**	**0**	**0**	**0**	**0**

2	x_1	4	250	1	2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0
	x_5	0	250	0	1	-1	-1	1	0	0
	x_6	0	-50	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	0
	x_7	0	550	0	5	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	0	1
	P = 1000		s_j	4	8	2	-2	0	0	0
			$c_j - s_j$	0	2	1	2	0	0	0

พิจารณาจากตารางที่ 2 จะเห็นว่าคำตอบที่ได้ยังคงเป็น infeasible solution ทั้งนี้เนื่องจากมีค่าของตัวแปร x_6 เป็นลบ เราจึงหาคำตอบชุดต่อไป โดยหาตัวแปรที่จะมาแทนที่ x_6 แล้วทำให้ค่าของ P เพิ่มขึ้นน้อยที่สุด ซึ่งในที่นี้ก็คือ x_3 หรือ x_4 เมื่อพิจารณาเปรียบเทียบผลที่ได้จากตัวแปรทั้ง 2 จะเห็นว่า

หากเราเพิ่มค่าของ x_3 ค่าของ P จะเพิ่มขึ้นอีก $(1)(-50)/(-1/2) = 100$

หากเราเพิ่มค่าของ x_4 ค่าของ P จะเพิ่มขึ้นอีก $(2)(-50)/(-1/2) = 200$

จึงสรุปได้ว่า เราจะเพิ่มค่าของ x_3 โดยให้แทนที่ x_6 จะเห็นว่าผลที่ได้จากตารางนี้ เป็นคำตอบอุตมะ ทั้งนี้เนื่องจากคำตอบที่ได้ เป็นคำตอบฐานที่มีค่าเป็นบวก และไม่มี $c_j - s_j$ ตัวใดเป็นลบ

ตัวแปรฐาน		c_j	4	10	3	0	0	0	0
Xi	c_i	คำตอบฐาน	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
x_1	4	200	1	2	0	-1	0	1	0
x_5	0	350	0	1	0	0	1	-2	0
x_3	3	100	0	0	1	1	0	-2	0
x_7	0	600	0	5	0	-1	0	-1	1
P = 1100		s_j	4	8	3	-1	0	-2	0
		$c_j - s_j$	0	2	0	1	0	2	0

อ่านผลที่ได้จากตาราง สรุปว่าเราได้คำตอบอุตมะดังนี้

$P_{\text{ต่ำสุด}}$ = 1,100 มี $x_1 = 200, x_3 = 100, x_5 = 350, x_7 = 600$ นอกนั้นเป็น 0

วิธีการอีกแบบหนึ่งที่จะหาคำตอบได้ก็โดยอาศัยปัญหาคู่ ดังต่อไปนี้

เขียนตัวแบบของปัญหาคู่ แล้วเปลี่ยนให้เป็นตัวแบบมาตรฐาน จะได้ว่า

หาค่าสูงสุดของ $P_w = 500w_1 + 250w_2 + 300w_3 + 200w_4$

โดยมีข้อจำกัด

$$2w_1 + 2w_2 + w_3 + 3w_4 + w_5 = 4$$
$$4w_1 + 3w_2 + 2w_3 + w_4 + w_6 = 10$$
$$w_1 + 2w_2 + w_3 + 2w_4 + w_7 = 3$$

และ w_i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) $\geqslant 0$

หาคำตอบด้วยวิธีการซิมเพลกซ์ ปรากฏผลดังต่อไปนี้

ตารางที่	ตัวแปรฐาน		b_i	500	250	300	200	0	0	0	ค่าที่เป็นไปได้
	w_j	b_j	คำตอบฐาน	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	θ_j
1	w_5	0	4	2	2	1	3	1	0	0	3
	w_6	0	10	4	3	2	1	0	1	0	2.5
	w_7	0	3	1	2	1	2	0	0	1	3
	P = 0		s_i	0	0	0	0	0	0	0	
			$b_i - s_i$	500	250	300	200	0	0	0	
2	w_1	500	2	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	4
	w_6	0	2	0	−1	0	−5	−2	1	0	−
	w_7	0	1	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	2
	P = 1000		s_i	500	500	250	750	250	0	0	
			$b_i - s_i$	0	-250	50	-550	-250	0	0	

3	w_1 500	1	1	0	0	1	1	0	-1
	w_6 0	2	0	-1	0	-5	-2	1	0
	w_3 300	2	0	2	1	1	-1	0	2
	P = 1100	s_i	500	600	300	800	200	0	100
		$b_i - s_i$	0	-350	0	-600	-200	0	-100,

จะเห็นว่า ตารางที่ 3 เป็นตารางสุดท้าย เราจึงสรุปคำตอบอุตมะของปัญหาเดิมได้ว่าจะมี

$P_{\text{ต่ำสุด}} = 1,100$ โดยมี $x_1 = 200$, $x_3 = 100$, $x_5 = 350$, $x_7 = 600$ นอกนั้นเป็น c

สรุปได้ว่า ผลที่ได้จากวิธีการทั้งสองเหมือนกัน จำนวนขั้นตอนในการดำเนินงานเท่ากัน ผิดแผกกันตรงหลักเกณฑ์ในการปรับคำตอบใหม่ เพื่อให้ได้คำตอบอุตมะเท่านั้น หากเราพิจารณาผลในแต่ละตารางของทั้ง 2 วิธีการ ตารางต่อตาราง จะเห็นว่า เป็นผลลัพธ์เดียวกัน เพื่อให้มองเห็นชัดให้เรามาเปรียบเทียบผลในแต่ละตาราง แสดงเฉพาะตัวแปรฐานและส.ป.ส.ของ nonbasic variables ดังต่อไปนี้

		x_1	x_2	x_3
P.	0	-4	-10	-3
x_4	-500	-2	-4	-1
x_5	-250	-2	-3	-2
x_6	-300	-1	-2	-1
X7	-200	-3	-1	-2
x_{0j}/x_{4j}		2	2.5	3

		w_1	w_2	w_3	w_4	θ's
P_w	0	-500	-250	-300	-200	
w_5	4	2	2	1	3	2
w_6	10	4	3	2	1	2.5
w_7	31		2		1	23

		x_4	x_2	x_3
P_x	1000	-2	-2	-1
x_1	250	$-\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$
x_5	250	-1	1	-1
x_6	-50	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
x_7	550	$-\frac{3}{2}$	5	$-\frac{1}{2}$
x_{0j}/x_{6j}		4	—	2

		w_5	w_2	w_3	w_4	θ's
P_w	1000	250	250	-50	550	
w_1	2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	4
w_6	2	-2	-1	0	-5	—
w_7	1	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2

		x_4	x_2	x_6
P_x	1100	-1	-2	-2
x_1	200	-1	2	1
x_5	350	0	1	-2
x_3	100	1	0	-2
x_7	600	-1	5	-1

		w_5	w_2	w_7	w_4
P_w	1100	200	350	100	600
w_1	1	1	0	-1	1
w_6	2	-2	-1	0	-5
w_3	3	-1	2	2	1

สรุปผลได้ว่า ค่าของ x_j $(j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ จะเท่ากับค่าของ w_{0i} หรือ $s_i - b_i$ $(i = 5, 6, 7, 1, 2, 3, 4)$ หากเราจัด x_j ในแต่ละคอลัมน์ให้อยู่ในลำดับเดียวกันกับ w_j ในแต่ละแถว และจัด x_i ในแต่ละแถวให้อยู่ในลำดับเดียวกันกับ w_i ในแต่ละคอลัมน์ ในเมื่อ x_j $(j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ อยู่ในลำดับเดียวกันกับ w_i $(i = 5, 6, 7, 1, 2, 3, 4)$ ตามลำดับ ดังที่ปรากฏในตารางทั้งคู่ ตารางต่อตาราง จะพบว่า

ส.ป.ส. ในแถว j ของปัญหาเดิม เท่ากับ – ส.ป.ส.ในคอลัมน์ j ของปัญหาคู่

และ ส.ป.ส. ในคอลัมน์ i ของปัญหาเดิม เท่ากับ – ส.ป.ส.ในแถว i ของปัญหาคู่

อย่างไรก็ตาม หากเราพิจารณาการหาคำตอบ จะเห็นว่า โดยการใช้ปัญหาคู่ เป็นวิธีการที่นักศึกษาคุ้นเคยอยู่แล้ว และดูจะเป็นวิธีการที่สมเหตุสมผลดีกว่า นั่นก็คือ เราใช้หลักการพิจารณาตามค่าของ $b_i - s_i$ และค่าที่เป็นไปได้ θ_i

หมายเหตุ

1. จากตารางสุดท้ายของปัญหาควบคู่ เราอ่านค่า ได้คำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาเดิม คือ

$$P_v^* = P_w^*$$

$$x_j = | w_m, m+j | , j = 1,2, \ldots, n$$

$$x_{n+i} = w_{mi} , i = 1, 2, \ldots, m$$

2. ผลสรุปที่ได้จากปัญหาควบคู่ สามารถนำไปใช้กับปัญหาเดิมที่มีอสมการข้อจำกัดอยู่ในรูป ≥ โดยไม่จำเป็นต้องใช้ตัวแปรเทียมช่วย นั่นคือ เราจะได้คำตอบของตัวแปรฐาน (ตัวแปร slack) ของข้อจำกัดนี้เป็น ลบ เช่น เรามี

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$$

เมื่อจัดในรูปสมการข้อจำกัด และให้ x_{n+i} เป็นตัวแปรฐาน จะได้

$$\sum_{j=1}^{n} (-a_{ij}) x_j + x_{n+i} = -b_i$$

กรณีเช่นนี้ ให้เราใช้แถวของ x_{n+i} เป็น key row และหา key column (คอลัมน์ของตัวแปรฐานใหม่ x_k) จาก

$$| x_{mk} / x_{ik} < 0 | = \underset{j}{\text{ค่าต่ำสุด}} \; | x_{mj} / x_{ij} < 0 |$$

ในที่นี้ x_{ij} ก็คือ $-a_{ij}$ ที่มีค่าน้อยกว่า 0

ถ้าไม่มี ส.ป.ส. ตัวใดในแถวนี้ มีค่าน้อยกว่า 0 แสดงว่าปัญหานี้ไม่มีคำตอบ

ตัวอย่างที่ 5.6

ในแต่ละเดือนโรงงานจะผลิตกล่องอลูมิเนียมแบบ เอ และแบบ บี อย่างน้อยที่สุด 2880 และ 3400 กล่องตามลำดับ โรงงานมีหน่วยงานที่ทำการผลิต 3 หน่วยงาน หน่วยงานแรกจะผลิตเฉพาะกล่องที่ใช้อลูมิเนียมบริสุทธิ์เท่านั้น ส่วนหน่วยงานที่ 2 และที่ 3 อาจจะเอาของเก่าวนกลับมาทำใหม่ ซึ่งในแต่ละเดือนจะมีอลูมิเนียมใช้แล้ววนกลับมาทำใหม่ ไม่ต่ำกว่า 600 ปอนด์ รายละเอียดเกี่ยวกับการทำงานของแต่ละหน่วยงานมีดังนี้

หน่วยงาน	อลูมิเนียมเก่ามาทำใหม่ (ปอนด์/ชั่วโมง)	ผลผลิต (กล่อง/ชั่วโมง) แบบ เอ	แบบ บี	ค่าใช้จ่าย (บาท/ชั่วโมง)
1	0	6	8	104
2	2	10	12	240
3	3	13	15	324

โรงงานควรจัดการดำเนินงานของแต่ละหน่วยงานอย่างไร จึงจะเกิดผลดีที่สุด

วิธีทำ

โรงงานจัดการทำงาน โดยให้

หน่วยงานที่ 1 ทำงาน x_1 ชั่วโมง
หน่วยงานที่ 2 ทำงาน x_2 ชั่วโมง
หน่วยงานที่ 3 ทำงาน x_3 ชั่วโมง

ตัวแบบ :-

ค่าต่ำสุด $P_x = 104x_1 + 240x_2 + 324x_3$

โดยมีข้อจำกัด

$$6x_1 + 10x_2 + 13x_3 \geq 2880$$
$$8x_1 + 12x_2 + 15x_3 \geq 3400$$
$$2x_2 + 3x_3 \geq 600$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

จะได้ตัวแบบจำลองควบคู่

ค่าสูงสุด $P_w = 2880w_1 + 3400w_2 + 600w_3$

โดยมีข้อจำกัด

$$6w_1 + 8w_2 \leq 104$$
$$10w_1 + 12w_2 + 2w_3 \leq 240$$
$$13w_1 + 15w_2 + 3w_3 \leq 324$$
$$w_1, w_2, w_3 \geq 0$$

เปลี่ยนตัวแบบปัญหาควบคู่ เป็นสมการข้อจำกัด โดยใช้ตัวแปร slack w_4, w_5 และ w_6 ตามลำดับ หาคำตอบด้วยวิธีซิมเพลกซ์ จะได้

ตารางที่ 1

		w_1	w_2	w_3	
P_w	0	2880	3400	-600	ค่าของ θ_i
w_4	104	6	8	0	13
w_5	240	10	12	2	20
w_6	324	13	15	3	$21\frac{14}{15}$

ตารางที่ 2

		w_1	w_4	w_3	
P_w	44200	-330	425	-600	ค่าของ θ
w_2	13	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$	0	–
w_5	84	1	$-\frac{3}{2}$	2	42
w_6	129	$\frac{7}{4}$	$-\frac{15}{8}$	3	43

ตารางที่ 3

		w_1	w_4	w_5	
P_w	69400	-30	-25	300	ค่าของ θ_i
w_2	13	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$	0	$17\frac{1}{3}$
w_3	42	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	84
w_6	3	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{2}$	12

ตารางที่ 4

		w_6	w_4	w_5
P	69760	120	20	120
w_2	4	-3	-1	$\frac{9}{2}$
w_3	36	-2	$-\frac{3}{2}$	$\frac{7}{2}$
w_1	12	4	$\frac{3}{2}$	-6

แผนงานที่ดีที่สุดก็คือ

โรงงานควรจัดให้หน่วยงานที่ 1 ทำงาน 20 ชั่วโมง หน่วยงานที่ 2 ทำงาน 120 ชั่วโมง หน่วยงานที่ 3 ทำงาน 120 ชั่วโมง จะเสียค่าใช้จ่ายทั้งหมด 69,760 บาท

อาจจะมีปัญหาว่า หากปัญหาเดิมมี alternative optimal solutions แล้วเราหาคำตอบโดยใช้ปัญหาคู่ เราจะหาคำตอบอุตมะแต่ละชุดของปัญหาเดิมได้อย่างไร โดยไม่ต้องเปลี่ยนกลับไปเป็นตารางสุดท้ายของปัญหาเดิม ปัญหานี้แก้ได้ง่าย ก่อนอื่นเรารู้จากทฤษฎีที่ 5.7 ว่า หากปัญหาคู่มี degenerate optimal solution ก็แสดงว่าปัญหาเดิมมี alternative optimal solutions จากนั้นอาศัยคุณสมบัติและทฤษฎีของปัญหาคู่ เราทราบว่า ค่าที่เป็นไปได้ของ nonbasic variable ที่จะเข้ามาแทนที่ basic variable แต่ละตัว จะหาได้จากการเปรียบเทียบอัตราส่วนระหว่าง $b_i - s_i$ ของ nonbasic variable w_i กับ x'_{ri} ส.ป.ส.ในแถวที่มีค่าตัวแปรฐานเป็น 0 ขั้นตอนในการหาคำตอบอุตมะชุดอื่นของปัญหาเดิมโดยใช้ตารางซิมเพลกซ์สุดท้ายของปัญหาคู่ มีดังต่อไปนี้

1. จากตารางสุดท้ายของปัญหาคู่ ($b_i - s_i \leq 0$ ทุกตัว) เราพบว่ามีคำตอบของตัวแปรฐาน w_t เป็น 0 ซึ่งมีความหมายว่า ปัญหาเดิมมีคำตอบอุตมะมากกว่า 1 ชุด

2. หาคำตอบอุตมะชุดอื่น

หาก w_t เป็นตัวแปรฐานที่มีคำตอบเป็น 0 ปรากฏในแถว r ให้คำนวณค่าของ

$$\frac{b_i - s_i}{x'_{ri}} \quad , \quad x'_{ri} < 0$$

ทุก ๆ $b_i - s_i$ ของ nonbasic variables w_i

3. หากเราได้

$$\frac{b_k - s_k}{x'_{rk}} = \text{ค่าต่ำสุด}\left(\frac{b_i - s_i}{x'_{ri}}\right) \quad , \quad x'_{ri} < 0$$

เราจะได้คำตอบชุดใหม่ที่มี w_k เป็นตัวแปรฐาน แทนที่ w_t เปลี่ยนแปลงตารางโดยมี x'_{ri} เป็น pivot element

เพื่อแสดงให้เห็นจริง ให้นักศึกษาย้อนกลับไปดูตัวอย่างที่ 5.5 หากฟังก์ชันเป้าหมายของปัญหาเดิม เปลี่ยนเป็น

หาค่าต่ำสุดของ $P_x = 4x_1 + 8x_2 + 3x_3$

ปัญหานี้จะมีคำตอบอุตมะมากกว่า 1 ชุด (alternative optimal solutions)

หากเราใช้วิธีหาคำตอบจากปัญหาคู่ จะพบว่า ตารางซิมเพลกซ์ที่ 3 ของปัญหาคู่ มี $w_6 = 0$ ซึ่งชี้ให้เห็นว่า ปัญหาเดิมจะมีคำตอบอุตมะมากกว่า 1 ชุด เราหาคำตอบอุตมะชุดอื่นได้โดย

เปรียบเทียบค่า $(b_i - s_i)/x'_{ri}$, $x'_{ri} < 0$ ของ nonbasic variables w_i หาค่าต่ำสุด จะได้ว่า

$$(b_5 - s_5)/x'_{25} = \underset{i}{\text{ค่าต่ำสุด}} \left(\frac{-350}{-1}, \frac{-600}{-5}, \frac{-200}{-2}\right) = 100$$

สรุปได้ว่า มี $a_{25} = -2$ เป็น pivot element คำตอบอุตมะชุดอื่น จะได้จากการนำ w_5 เป็นตัวแปรฐานแทน w_6 ผลที่ได้ดังกล่าวแสดงให้เห็นดังต่อไปนี้

ตารางที่	ตัวแปรฐาน w_j	b_j	b_i คำตอบฐาน	500 a,	250 a,	300 a,	200 a_4	0 a,	0 a_6	0 a,
	w_1	500	1	1	0	0	1	1	0	-1
3	w_6	0	0	0	-1	0	-5	-2	1	0
	w_3	300	2	0	2	1	1	-1	0	2
	P = 1100		s_i	500	600	300	800	200	0	100
			$b_i - s_i$	0	-350	0	-600	-200	0	-100
ตารางที่	ตัวแปรฐาน w_j	b_j	b_i คำตอบฐาน	500 a,	250 a_2	300 a,	200 a,	0 a,	0 a_6	0 a,
	w_1	500	1	1	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	-1
4	w_5	0	0	0	$\frac{1}{1}$	0	$\frac{5}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0
	w_3	300	2	0	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{7}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	2
	P = 1100		s_i	500	500	300	300	0	100	100
			$b_i - s_i$	0	-250	0	-100	0	-100	-100

สรุปได้ว่า คำตอบอุตมะของปัญหาเดิมก็คือ

$x_1 = 200$, $x_3 = 100$, $x_5 = 350$, $x_7 = 600$, $x_2 = x_4 = x_6 = 0$

หรือ $x_2 = 100$, $x_3 = 100$, $x_5 = 250$, x, $= 100$, $x_1 = x_4 = x_6 = 0$

โดยมี $P_{\text{ต่ำสุด}} = 1100$

ให้นักศึกษาตรวจสอบคำตอบที่ได้นี้ โดยการพิจารณาจากตารางซิมเพลกซ์ที่ 3 ของปัญหาเดิม

5.5 บทสรุป

เราสรุปความสัมพันธ์ระหว่างปัญหาเดิมกับปัญหาคู่ และการหาคำตอบต่อปัญหาเดิมโดยใช้การหาคำตอบต่อปัญหาคู่ด้วยวิธีการซิมเพลกซ์ ดังต่อไปนี้

(1) จากปัญหาเดิม เราเปลี่ยนเครื่องหมายอสมการข้อจำกัดทุกข้อ ให้มีเครื่องหมายแบบเดียวกันหมด

(2) เขียนตัวแบบของปัญหาคู่ ซึ่งเราจะสรุปความสัมพันธ์ของปัญหาทั้งสองได้ดังนี้

ปัญหาเดิม	**ปัญหาคู่**
หาค่าต่ำสุด P_x	หาค่าสูงสุด P_w
ข้อจำกัด $\geq$	ตัวแปร $w_i \geq 0$
ข้อจำกัด $=$	ตัวแปรไม่กำหนดเครื่องหมาย
ตัวแปร $x_j \geq 0$	ข้อจำกัด $\leq$

(3) หาคำตอบต่อปัญหาคู่ด้วยวิธีการซิมเพลกซ์ พิจารณาจากค่าของ $b_i - s_i$

3.1 ถ้ามี $b_i - s_i > 0$ และได้

$$b_k - s_k \quad = \quad \text{ค่าสูงสุด}\,(b_i - s_i)$$

แต่มี $x'_{jk} \leq 0$ ทุก ๆ $j = 1, 2, \ldots, n$

แสดงว่า ปัญหาคู่มี unbounded solution ซึ่งมีความหมายว่า ปัญหาเดิมมี infeasible solution

3.2 ถ้ามี $b_i - s_i \leq 0$ หมดทุกตัว และได้ค่าของ $P = P^*$ แสดงว่าได้คำตอบอุตมะ ให้ทำต่อข้อ (4)

3.3 ถ้ามี $b_i - s_i \leq 0$ หมดทุกตัว แต่คำตอบที่ได้มีตัวแปรฐานบางตัวมีค่าเป็น 0 แสดงว่าปัญหาเดิมมีคำตอบอุตมะมากกว่า 1 ชุด ให้ทำต่อข้อ (4) พร้อมกับหาคำตอบอุตมะชุดอื่นด้วย

(4) อ่านค่าและสรุปผลของปัญหาเดิม ซึ่งจะได้

ค่าอุตมะของฟังก์ชันเป้าหมาย ($P_{ต่ำสุด}$) = P^*

และ x_j (j = 1, 2, ... n, n + 1, ... n+m) = $s_i - b_i$ (i = m + 1, m + 2, ... m+n, 1, ... m)

ข้อสังเกต

เปรียบเทียบค่าของ x_j (j = 1, 2 , ..., n, n + 1, ..., n+m) กับ w_i (i = m + 1, m + 2 , ..., m + n, 1, 2, ... m) จะเห็นว่า

ถ้า $x_j = 0$ เราจะได้ $w_i > 0$

ถ้า $x_j > 0$ เราจะได้ $w_i = 0$

แบบฝึกหัดที่ 5

1. จงเขียนตัวแบบของปัญหาคู่ เมื่อมีปัญหาเดิม

หาค่าต่ำสุดของ $P = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$

โดยมีข้อจำกัด

$$3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \geqslant 70$$
$$6x_1 + x_2 + 3x_3 \geqslant 40$$
$$7x_1 - 2x_2 - x_3 \leqslant 100$$
$$x_1 - 2x_2 + 5x_3 \geqslant 30$$
$$4x_1 + 7x_2 - 2x_3 \geqslant 20$$

และ $x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$

2. จงใช้ปัญหาเดิม

หาค่าสูงสุดของ P

$$= 200x_1 + 50x_2 + 25x_3 + 50x_4$$

โดยมีข้อจำกัด

$$50x_1 + 10x_2 + 4x_3 + 6x_4 \leqslant 2000$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 160$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 240$$
$$2x_1 + 2x_4 \leqslant 80$$

และ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0$

ในการแสดงให้เห็นจริงว่า ปัญหาคู่ของปัญหาคู่ก็คือปัญหาเดิมนี้

3. ถ้า $x_1 = x_3 = 0, x_2 = 104, x_4 = 4$ เป็นคำตอบอุตมะของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น

หาค่าสูงสุดของ $P = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4$

โดยมีข้อจำกัด

$$3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 \leqslant 120$$

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leqslant 70$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \leqslant 100$$

และ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0$

จงใช้ข้อมูลที่ได้นี้ หาคำตอบอุตมะของปัญหาคู่ (10, 0, 30)

4. กำหนดตารางที่ 1 ของปัญหาคู่ ดังต่อไปนี้

ตัวแปรฐาน		b_i	-20	40	20	0	0	0	0	$-M$
w_j	b_j	คำตอบฐาน	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
w_8	$-M$	8	1	-1	-2	-1	0	0	0	1
w_5	0	8	-2	-1	-1	0	1	0	0	0
w_6	0	4	-1	1	1	0	0	1	0	0
w_7	0	4	-1	5	0	0	0	0	1	0

ญหาเดิม

ที่ 3 ของปัญหาคู่ กำหนดไว้ดังนี้

w_1	-20	1[illegible]								
w_5	0	3[illegible]								
[illegible]			[illegible]	0	[illegible]	[illegible]	1	0	[illegible]	[illegible]
w_6	0	12	0	0	-1	-1	0	1	0	1
w_2	40	3	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

จงใช้ข้อมูลที่ได้นี้ หาคำตอบอุตมะของปัญหาเดิม

5. จงแสดงให้เห็นจริงว่า ปัญหาเดิม

หาค่าสูงสุดของ $P = -4x_1 + 4x_2 + 3x_3$

โดยมีข้อจำกัด

$$x_1 + x_2 \geq 1$$
$$x_1 \geq 3$$
$$-2x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$$

และ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

มี unbounded solution โดยใช้วิธีการ Two - Phase

และแสดงให้เห็นจริงโดยใช้วิธีการ Big - M ว่า ปัญหาคู่มี infeasible solution

6. จากปัญหาในแบบฝึกหัดที่ 3 ข้อ 7 จงหาปัญหาคู่แล้วหาคำตอบด้วยวิธีกราฟ

7. องค์การพีทีวาย มีงานที่จะต้องทำอยู่โครงการหนึ่ง โดยมอบหมายให้แผนกต่าง ๆ ในองค์การทำ แต่ละแผนกมีแรงงานที่จะทำได้วันละ 120, 168, 80, 240 และ 300 ชั่วโมง องค์การตั้งเป้าหมายไว้ว่า จะต้องได้กำไรอย่างน้อยที่สุด 8,400 พันบาท และคาดคะเนไว้ว่า กำไรที่จะได้โดยเฉลี่ยจากแต่ละแผนก จะเท่ากับ 2, 1, 1, 3 และ 2 พันบาทต่อวัน ตามลำดับ องค์การมีวัสดุอุปกรณ์ที่จะนำมาใช้ได้ อย่างน้อยที่สุด 11,200 หน่วย ในการทำงานแต่ละวัน แต่ละแผนกจะต้องใช้วัสดุอุปกรณ์ เท่ากับ 1, 3, 1, 2 และ 5 หน่วย ตามลำดับ ถ้าท่านเป็นผู้จัดการองค์การนี้ ท่านจะจ่ายงานทำอย่างไร จึงจะทำให้องค์การของท่านได้กำไรตามเป้าหมาย แต่ใช้แรงงานน้อยที่สุด

8. บริษัทผลิตอาหารสำเร็จรูป วางแผนในการใช้อาหาร ก ข และ ค กำหนดว่าจะเลือกมาเป็นวัตถุดิบอย่างน้อยที่สุด 1 ชนิด ให้เสียค่าใช้จ่ายในการซื้ออาหารน้อยที่สุด แต่ในการผลิตจะต้องได้อาหารที่มีคุณค่าตรงตามเกณฑ์กำหนด นั่นคือ ให้มีคุณค่าของอาหารแต่ละประเภทอย่างน้อยที่สุด 600, 450, 750 และ 150 กรัม ตามลำดับ คุณค่าอาหารที่มีอยู่ในอาหารแต่ละประเภท และราคาของอาหารเหล่านี้ กำหนดไว้ในตารางต่อไปนี้

ประเภทอาหาร	คุณค่าของอาหาร (กรัม/หน่วย)				ราคาอาหาร
	สารเอ	สารบี	สารซี	สารดี	บาท/หน่วย
อาหาร ก	5	2	2	3	16
อาหาร ข	4	3	1	1	7.50
อาหาร ค	3	1	2	4	18

ถ้าท่านเป็นผู้จัดการ ท่านจะตัดสินใจอย่างไร จึงจะเกิดผลดีที่สุด

9. โรงงานอุตสาหกรรมแห่งหนึ่งได้กำหนดแผนการผลิตในเดือนหน้าว่า จะต้องผลิตสินค้า 3 ชนิด ให้ได้ปริมาณรวมกัน อย่างน้อยที่สุด 3,900 กล่อง โรงงานมีวัตถุดิบที่จะนำมาใช้ในการผลิตเดือนหน้า 3,950 กก. ขั้นตอนในการผลิตสินค้าแต่ละชนิด จะต้องใช้เครื่องจักร 4 ประเภท ในแต่ละเดือน เครื่องจักรแต่ละประเภทจะทำงานได้ อย่างน้อยที่สุด 3,000 3,600 2,400 และ 4,200 ชั่วโมง ตามลำดับ รายละเอียดเกี่ยวกับการผลิต และต้นทุนการผลิต กำหนดในตารางต่อไปนี้

	สินค้าเอ	สินค้าบี	สินค้าซี
วัตถุดิบ (กก./กล่อง)	1	1	2
เครื่องจักร (ชม./กล่อง) : ก	3	1	2
ข	1	3	1
ค	1	2	2
ง	2	1	4
ต้นทุนการผลิต (บาท/กล่อง)	160	110	200

แผนการผลิตที่ดีที่สุด ควรจะเป็นอย่างไร (150, 3,700, 50)

10. คนเลี้ยงหมูต้องการอาหารผสมสำหรับหมู กำหนดว่า ในอาหารผสมแต่ละวัน จะต้องให้มีโปรตีน คาร์โบไฮเดรท วิตามินเอ วิตามินบี อย่างน้อยที่สุด 180, 200, 150 และ 70 หน่วยสากล ตามลำดับ อาหารที่นำมาผสมกันประกอบด้วยอาหาร 3 ประเภท แต่ละประเภท ในแต่ละกิโลกรัมจะมีคุณค่าอาหาร และราคาดังตาราง

	คาร์โบไฮเดรท	โปรตีน	วิตามินเอ	วิตามินบี	ราคา (บาท/กิโลกรัม)
อาหาร ก	9	3	1	1	14
อาหาร ข	2	8	2	1	12
อาหาร ค	4	6	6	0	10

คนเลี้ยงหมูควรเลือกซื้ออาหารมาผสมอย่างไร จึงจะเกิดผลดีที่สุด

11. บริษัทมีผู้ตรวจสอบ 3 ระดับ ซึ่งจะเป็นผู้ตรวจสอบคุณภาพสินค้าที่ผลิตในแต่ละวัน กำหนดว่าจะต้องทำการตรวจวันละ 8 ชั่วโมง ให้ได้จำนวนสินค้าที่ตรวจแล้ว อย่างน้อยที่สุด 3,000 ชิ้น ผู้ตรวจสอบระดับหนึ่ง สามารถตรวจสินค้าได้ชั่วโมงละ 25 ชิ้น มีความถูกต้อง 98% ผู้ตรวจสอบระดับสองตรวจได้ชั่วโมงละ 15 ชิ้น มีความถูกต้อง 95% ส่วนผู้ตรวจสอบระดับสาม สามารถตรวจสอบได้ชั่วโมงละ 10 ชิ้น มีความถูกต้อง 90% อัตราค่าตรวจสอบคิดเป็นชั่วโมงละ 20, 15 และ 10 บาท ตามลำดับ กรณีที่เกิดการตรวจสอบผิดพลาด บริษัทตีเป็นราคาค่าเสียหายชิ้นละ 10 บาท บริษัทต้องการให้มีผู้ตรวจสอบระดับหนึ่งและระดับสาม รวมกันมีจำนวนมากกว่าหรือเท่ากับ ผู้ตรวจสอบระดับสอง แผนกตรวจสอบมีผู้ตรวจสอบแต่ละระดับเป็นจำนวน 12, 15 และ 15 คน ตามลำดับ บริษัทควรจ้างผู้ตรวจสอบแต่ละระดับกี่คน จึงจะทำให้เสียค่าใช้จ่ายต่ำสุด