บทที่ 4
ปัญหาที่สำคัญบางประเภท

วัตถุประสงค์ของการศึกษาเกี่ยวกับปัญหาที่สำคัญ ก็เพื่อที่เราจะได้เข้าใจถึงลักษณะและข้อจำกัดต่าง ๆ ของปัญหาเหล่านี้ ตลอดจนเรียนรู้เทคนิคในการตรวจสอบว่าเป็นปัญหาประเภทใด มีจริงหรือไม่ และการใช้เทคนิคอื่น ๆ มาช่วยในการพิจารณาหรือหาคำตอบต่อปัญหานั้น การตัดสินใจโดยอาศัยเทคนิคการโปรแกรมเชิงเส้นนั้น จำเป็นที่เราจะต้องมีตัวแบบของปัญหา ซึ่งไม่มีหลักประกันใด ๆ ที่จะบอกได้ว่าตัวแบบของเราถูกต้อง เที่ยงตรงแค่ไหน คำตอบที่ได้ในบางครั้งเป็นคำตอบที่เป็นไปไม่ได้ หรือเป็นคำตอบที่เกิดขึ้นไม่ได้ในปัญหาจริง เนื่องจากการจำกัดของการใช้ทรัพยากร หากปัญหาใดมีคำตอบในลักษณะดังกล่าว เราต้องตรวจค้นหาสาเหตุที่เกิดความผิดพลาดอันนี้ ปัญหาบางประเภทเป็นปัญหาที่เกิดขึ้นได้ทั่ว ๆ ไป แต่การใช้วิธีการซิมเพลกซ์ในการหาคำตอบเพียงอย่างเดียว อาจจะทำให้เกิดความยุ่งยากหรือใช้เวลาในการคำนวณมาก เช่นกรณีของปัญหาที่มีคำตอบฐานที่มีค่ามากกว่า 0 น้อยกว่าจำนวนของอสมการหรือสมการข้อจำกัด หรือในปัญหาที่กำหนดค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของตัวแปรควบคุมได้ ปัญหาดังกล่าวนี้ต้องมีเทคนิคบางอย่างมาช่วยในการหาคำตอบ ซึ่งจะช่วยให้การหาคำตอบต่อปัญหาง่ายและสะดวกขึ้น ช่วยลดเวลาในการคำนวณ

4.1 ปัญหาที่มี Unbounded solutions

ในการหาคำตอบอุตมะที่กล่าวมาแล้วข้างต้น เราสมมติว่า หากเราใส่ a_k เข้าไปในฐานแทนที่บางเวคเตอร์ เพื่อประกอบกันเป็นฐาน (basis) ใหม่ นั้น จะต้องมี $x_{ik} > 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$ อย่างน้อยที่สุด 1 ตัว ในหัวข้อนี้เราจะมาพิจารณากันว่า จะมีอะไรเกิดขึ้น ถ้าหากค่าของ $x_{ik} \leq 0$ หมดทุก ๆ $i = 1, 2, \ldots, m$

ในขั้นตอนหรือ iteration ใดก็ตาม ถ้าเรามี $c_j - s_j > 0$ สำหรับบางค่า j และ

$$c_k - s_k = \text{ค่าสูงสุด}(c_j - s_j) \quad , \quad c_j - s_j > 0$$

แต่ $x_{ik} \leqslant 0$ ทุก ๆ i แล้ว θ จะไม่มีขีดจำกัดบน (upper bound) ซึ่งก็หมายความว่า ค่าของ $\theta \rightarrow \infty$ หรือบางค่าของ θ เป็น – และค่าของฟังก์ชันเป้าหมายจะเข้าใกล้ $+\infty$

ให้เรากลับไปพิจารณาสมการ (3.3.5) จะเห็นว่า เมื่อ $\theta > 0$ แล้ว $x_{io} - \theta x_{ij}$ จะมีค่าเป็นบวกหมดทุกตัว แต่โดยเหตุที่ $x_{ik} \leqslant 0, i = 1,2,\ldots, m$ ดังนั้น คำตอบที่ได้จากสมการ (3.3.5) จะเป็นคำตอบที่เป็นไปได้ที่ประกอบด้วยตัวแปรมีค่าเป็นบวก m + 1 ตัว นั่นก็หมายความว่า หากเรากำหนดค่าของ θ โตเพียงพอ เราจะได้ค่าของฟังก์ชันเป้าหมายที่กำหนดไว้ทางด้านขวาของสมการ (3.3.6) นั่นก็คือ $P_o - \theta(s_j - c_j)$ โตเท่าไรก็ได้ตามที่ต้องการ

สรุปได้ว่า จากคำตอบที่เป็นไปได้ขั้นฐานชุดใด ๆ ของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น เกิดมี nonbasic a_j บางคอลัมน์ ที่ทำให้

$$c_j - s_j > 0 \quad \text{และ} \quad x_{ij} \leqslant 0, i = 1,2,\ldots, m$$

ก็หมายความว่า คำตอบที่เป็นไปได้ชุดใหม่ของปัญหานี้ จะประกอบด้วยตัวแปรที่มีค่าเป็นบวก m + 1 ตัว โดยที่ค่าของฟังก์ชันเป้าหมาย P จะถูกเลือกให้โตเท่าใดก็ได้ นั่นก็คือ ค่าของ $P \rightarrow \infty$ ในกรณีเช่นนี้ เรากล่าวว่าปัญหานี้มี unbounded solutions

ให้เรามาพิจารณาลักษณะของปัญหาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4.1

จงแสดงให้เห็นจริงว่าปัญหานี้มี unbounded solution โดยอาศัยวิธีการ simplex

หาค่าสูงสุดของ P

$$= 7x_1 + 9x_2$$

โดยมีข้อจำกัด

$$\begin{aligned} -5x_1 + 8x_2 &\leqslant 2000 \\ 2x_1 - 5x_2 &\leqslant 1000 \\ 3x_1 + 2x_2 &\geqslant 750 \\ x_1 &\geqslant 200 \\ \text{และ} \quad x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

วิธีทำ

เปลี่ยนรูปตัวแบบเป็นรูปมาตรฐาน ดังนี้

หาค่าสูงสุดของ P

$= 7x, + 9x_2 - Mx, - Mx,$

โดยมีข้อจำกัด

$$
\begin{array}{lllllll}
-5x, + 8x_2 + x_3 & & & & & = & 2000 \\
2x, - 5x_2 & + x_4 & & & & = & 1000 \\
3x_1 + 2x_2 & & -x_5 & & +x, & = & 750 \\
x_1 & & & -x_6 & + x_8 & = & 200
\end{array}
$$

และ x_j (j = 1, 2, ... 8) $\geqslant$ 0

Phase I

ตารางที่	ตัวแปรฐาน x_i	c_i	c_j คำตอบฐาน	0 a_1	0 a_2	0 a_3	0	0 a_5	0 a_6	-1 a,	-1 a_8	ค่าที่เป็นไปได้ θ_i
	x_3	0	2000	-5	8	1	0	0	0	0	0	—
	x_4	0	1000	2	- 5	0	10	0	0	0		500
1	x_7	- 1	750	3	2	0	o-1	0	1	0		250
	x_8	- 1	200	1	0	0	0	o-1	0			1200
	P = −950		s_j	- 4	- 2	0	0	1	1	-1	-1	
			$c_j - s_j$	4	2	0	0	-1	-1	0	0	
	x_3	0	3000	0	8	1	0	o-5	0	5		—
	x_4	0	600	o	- 5	0	10	2	o-2			300
2	x_7	- 1	150	0	2	0	0	-1	3	1	-3	50
	XI	0	200	1	0	0	0	o-1	0	1		—
	P = −150		s_j	o	- 2	0	0	1-3-1	3			
			$c_j - s_j$	0	2	0	o-1	3	0	-2		

ตารางต่อไป ตัวแปรเทียมจะถูกขจัดออกไป ค่าของ P เป็น 0 จึงเป็นตารางสุดท้ายของ Phase เมื่อเราเปลี่ยนค่า c_j เป็นค่าใน Phase II และตัดคอลัมน์ที่ 7 และ 8 ออก ผลลัพธ์ที่ได้ ก็คือ คำตอบของตารางที่ 1 ใน Phase II ซึ่งแสดงให้เห็นได้ดังนี้

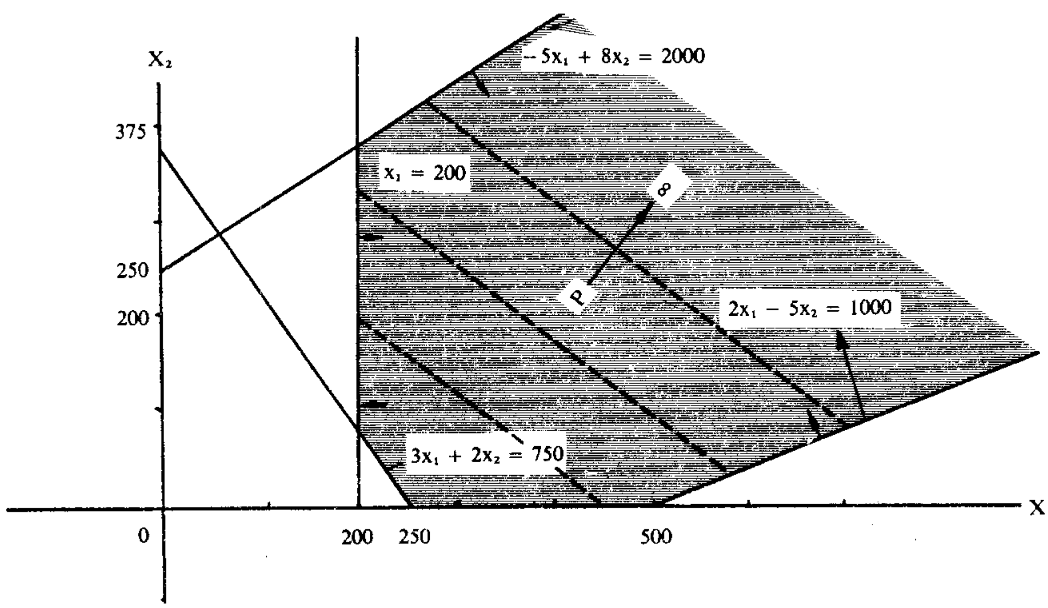
Phase II

ตารางที่	ตัวแปรฐาน x_i	c_i	c_j / คำตอบฐาน	7 a_1	9 a_2	0 a_3	0 a_4	0 a_5	0 a_6	ค่าที่เป็นไปได้ θ_i
1	x_3	0	3250	0	$\frac{34}{5}$	1	0	$-\frac{5}{3}$	0	286.76
	x_4	0	500	0	$-\frac{19}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$	0	—
	x_6	0	SO	0	$\frac{[illegible]}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	75
	x_1	7	250	1	$\frac{[illegible]}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	375
	P = 1,750		s_j	7	$\frac{14}{5}$	0	0	$-\frac{7}{3}$	0	
			$c_j - s_j$	0	$\frac{[illegible]}{3}$	0	0	$\frac{[illegible]}{3}$	0	
2	x_3	0	2400	0	0	1	0	4	-17	600
	x_4	0	975	0	0	0	1	$-\frac{5}{2}$	$\frac{19}{2}$	—
	x_2	9	75	0	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	—
	x_1	7	200	1	0	0	0	0	-1	
	P = 2,075		s_j	7	9	0	0	$-\frac{9}{2}$	$\frac{13}{2}$	
			$c_j - s_j$	0	0	0	0	$\frac{9}{2}$	$-\frac{13}{2}$	

	x_5	0	600	0	0	$\frac{1}{i}$	0	1	$-\frac{17}{4}$
	x_4	0	2475	0	0	$\frac{5}{8}$	1	0	$-\frac{9}{8}$
3	x_2	9	375	0	1	$\frac{1}{8}$	0	0	$-\frac{5}{8}$
	x_1	7	200	1	0	0	0	0	-1
	P = 4,775		s_j	7	9	$\frac{9}{8}$	0	0	$-\frac{101}{8}$
			$c_j - s_j$	0	0	$-\frac{9}{8}$	0	0	$\frac{101}{8}$

จากตารางนี้ จะเห็นว่า ค่าของ P ยังเพิ่มขึ้นได้อีก นั่นก็คือ หากเราเพิ่มค่าของ x_6 ค่าของ P จะเพิ่มขึ้นอีก 101/8 ต่อ 1 หน่วยของ x_6 ซึ่งก็คือค่าของ $c_6 - s_6$ แต่ถ้าเราพิจารณาจำนวนของ P ที่ควรจะเพิ่มขึ้น โดยการพิจารณาจากค่าของ θ จะเห็นว่า เราไม่อาจหาค่าได้ ทั้งนี้เนื่องจากค่าของ x'_{i6} น้อยกว่า 0 ทุก ๆ $i = 1, 2, 3, 4$ นั่นก็หมายความว่า เราจะเลือกให้ P มีค่าเพิ่มขึ้นอีกเท่าใดก็ได้ตามที่ต้องการ โดยการเพิ่มค่าตัวแปรอื่นเข้ามาอีก 1 ตัวในฐานให้เหมาะสม เราเรียกปัญหาที่มีลักษณะเช่นนี้ว่า เป็นปัญหาที่มี unbounded solutions

ตัวอย่างของปัญหานี้ แสดงให้เห็นได้ด้วยกราฟดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่า ค่าของ P เพิ่มขึ้นได้เรื่อย ๆ เราจะเลือกให้ค่าของ P โตเท่าใดก็ได้ตามที่เราต้องการ แสดงให้เห็นว่าปัญหานี้มี unbounded solutions

ตามความเป็นจริง ปัญหาการโปรแกรมมีประโยชน์ เพราะว่ามันมีแฟคเตอร์ที่จำกัดซึ่งจะเป็นเครื่องป้องกัน ทำให้เราไม่อาจเลือกค่า P ได้ตามใจชอบ แสดงให้เห็นชัดว่า ลักษณะของปัญหาประเภทนี้จะไม่มีในปัญหาจริง และจะเป็นเครื่องชี้ให้เห็นว่า เกิดความผิดพลาดในการสร้างตัวแบบของปัญหา ความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นอย่างหนึ่งที่พอจะค้นหาได้ ก็คือ เครื่องหมายของอสมการข้อจำกัด ด้วยเหตุผลดังกล่าวมานี้ จึงเป็นสิ่งจำเป็นยิ่งที่จะต้องมีเทคนิคในการคำนวณที่จะแสดงให้เห็นว่า ปัญหานั้น ๆ จะมี unbounded solution หรือไม่ นั่นก็คือเทคนิคที่กล่าวมาแล้วข้างต้น

อย่างไรก็ตาม ในปัญหาที่มี unbounded solutions ถ้าเราเปลี่ยนเป้าหมายของฟังก์ชันเป็นต้องการ**ค่าต่ำสุดของ** P ปัญหานั้นจะกลายมาเป็นปัญหาที่มีคำตอบอุตมะ ดังเช่นตัวอย่างที่กล่าวมาแล้วข้างต้น หากเราเปลี่ยนฟังก์ชันเป้าหมายไปเป็น ต้องการค่าต่ำสุดของ P เท่ากับ

$$7x_1 + 9x_2$$

พิจารณาจากกราฟ เราจะได้จุดอุตมะอยู่ที่จุด A นั่นก็คือเราได้ค่า $P_{\text{ต่ำสุด}} = (7)(250) + (9)(0) = 1750$ โดยมี $x_1 = 250, x_2 = 0$ แสดงว่าปัญหานี้มีคำตอบอุตมะ (optimal solution)

4.2 ปัญหาที่มี infeasible solutions

ในการเขียนตัวแบบของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นใด ๆ เราไม่อาจรับประกันได้เต็มที่ว่าปัญหานั้นจะมีคำตอบที่เป็นไปได้ และเราจะได้คำตอบอุตมะ อาจจะเป็นไปได้ที่ปัญหานั้นจะไม่มีบริเวณคำตอบที่เป็นไปได้ ซึ่งเราเรียกว่าเป็นปัญหาที่มี infeasible solutions โดยทั่วไปการเกิดขึ้นของปัญหาลักษณะนี้ มักจะเกิดขึ้นจากความผิดพลาดในการเขียนตัวแบบ เช่นเขียนเครื่องหมายอสมการกลับกัน และความผิดพลาดอีกประการหนึ่งที่จะเป็นไปได้ คือความขัดแย้งหรือไม่เข้าใจนโยบายด้านการจัดการ เช่นกำหนดนโยบายไว้ว่า จะผลิตสินค้าชนิดหนึ่งให้ได้อย่างน้อยที่สุดจำนวนหนึ่ง โดยไม่ได้สำรวจว่าจะมีทรัพยากรเพียงพอในการผลิตหรือไม่ ผลก็คือไม่อาจจะผลิตได้ เนื่องจากมีทรัพยากรอย่างน้อยที่สุด 1 ชนิดไม่พอเพียงในการผลิต ตัวอย่างเช่น ในปัญหาการผลิตโต๊ะและเก้าอี้ ถ้ามีนโยบายการผลิตว่า จะต้องให้ได้โต๊ะอย่างน้อยที่สุด 32 ตัว ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก

การผลิตงวดนี้มีไม้ประเภทที่ 1 ที่เพียงพอในการผลิตโต๊ะได้อย่างมากที่สุด 30 ตัว เท่านั้น กรณีของปัญหานี้จึงไม่มีคำตอบที่เป็นไปได้

เราจะตรวจสอบได้ว่า ปัญหาของเราจะมี infeasible solutions หรือไม่ ต้องอาศัยเทคนิคการโปรแกรมเชิงเส้น หากปัญหานั้นมีตัวแปรควบคุมได้ไม่เกิน 2 ตัว วิธีกราฟจะช่วยตัดสินให้อย่างรวดเร็ว นั่นก็คือเราเขียนกราฟเส้นตรงของข้อจำกัดที่มีอยู่ทั้งหมด แล้วพิจารณาจากกราฟว่ามีบริเวณคำตอบที่เป็นไปได้หรือไม่ ถ้าไม่มี แสดงว่าปัญหานี้มี infeasible solutions เราต้องกลับไปตรวจสอบ หาสาเหตุที่เกิดขึ้นต่อไป กรณีที่ตัวแปรควบคุมได้มีมากกว่า 2 ตัวต้องใช้วิธีการซิมเพลกซ์ทั่วไปแล้ว ปัญหาประเภทนี้มักจะเป็นปัญหาที่ต้องอาศัยตัวแปรเทียมในการหาคำตอบฐานชุดแรก ดังที่ได้กล่าวมาแล้วว่า ตัวแปรเทียมเป็นตัวแปรที่ไม่มีความหมาย และไม่ได้มีความเกี่ยวพันใด ๆ กับปัญหาจริง ๆ เราเพียงแต่นำเข้ามาเพื่อช่วยในการตัดสินใจ หาจุดเริ่มต้นเท่านั้นเอง ดังนั้นคำตอบอุตมะจะต้องไม่มีค่าของตัวแปรเหล่านี้ นั่นก็คือ ตัวแปรเทียมจะต้องถูกขจัดออกไปก่อนถึงตารางสุดท้าย หากการแก้ปัญหาด้วยวิธีการซิมเพลกซ์ ปรากฏค่าของตัวแปรเทียมในตารางสุดท้าย กล่าวคือคำตอบอุตมะมีค่าตัวแปรเทียมมากกว่า 0 เรากล่าวว่า ปัญหานี้มี infeasible solutions ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4.2

จงแสดงให้เห็นจริงว่า ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นต่อไปนี้มี infeasible solutions

หาค่าสูงสุดของ P

$$= 11x_1 + 16x_2$$

โดยมีข้อจำกัด

$$\begin{aligned}
6x_1 + 5x_2 &\leq 300 \\
4x_1 + 7x_2 &\leq 280 \\
4x_1 + 2x_2 &\geq 160 \\
x_2 &\geq 50 \\
x_1 &\geq 0
\end{aligned}$$

วิธีทำ

เขียนตัวแบบมาตรฐานของปัญหา จะได้ว่า

หาค่าสูงสุดของ P

$$= 11x_1 + 16x_2 - Mx_7 - Mx_8$$

โดยมีข้อจำกัด

$$6x_1 + 5x_2 + x_3 = 300$$

$$4x_1 + 7x_2 + x_4 = 280$$

$$4x_1 + 2x_2 \quad x_5 \quad + x_7 = 160$$

$$x_2 \quad x_6 + x_8 = 50$$

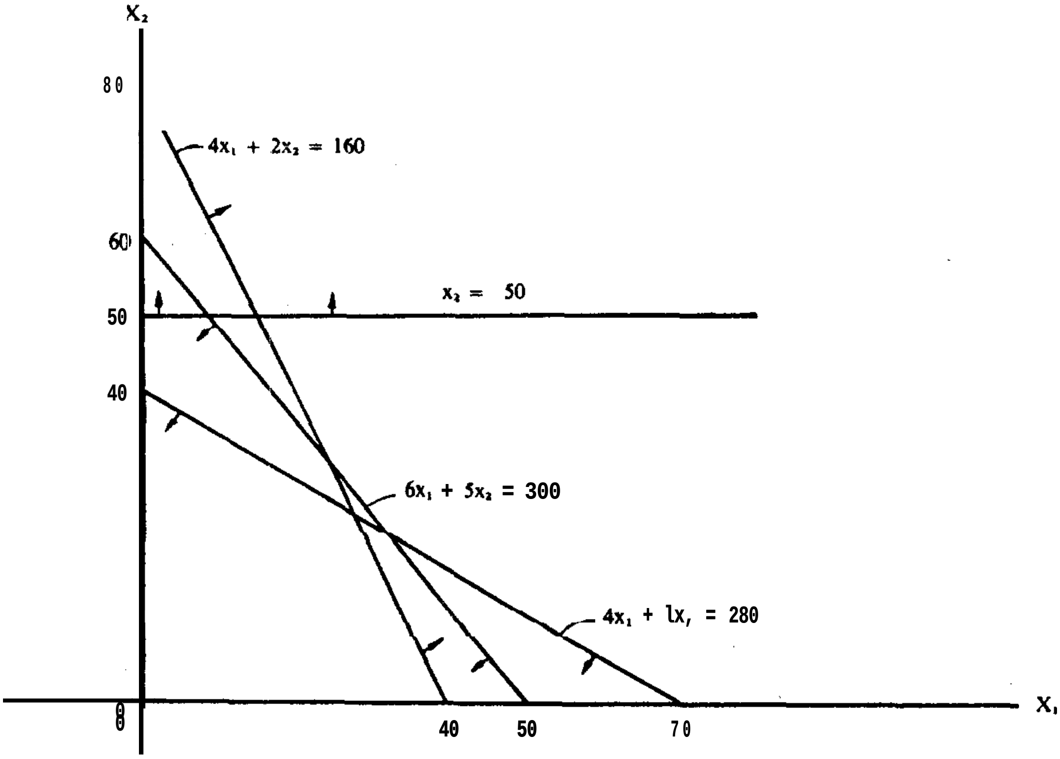
$$x_j \ (j = 1, 2, \ldots, 8) \geq 0$$

ตารางที่	ตัวแปรฐาน x_i	c_i	c_j / คำตอบฐาน	11 a_1	16 a_2	0 a_3	0 a_4	0 a_5	0 a_6	-M a_7	-M a_8	ค่าที่เป็นไปได้ θ_i
1	x_3	0	300	6	5	1	0	0	0	0	0	50
	x_4	0	280	4	7	0	1	0	0	0	0	70
	x_7	-M	160	4	2	0	0	-1	0	1	0	40
	x_8	-M	50	0	1	0	0	0	-1	0	1	-
	P = −210M		s_j	−4M	−3M	0	0	M	M	-M	-M	
			$c_j - s_j$	11 + 4M	16 + 3M	0	0	-M	-M	M	M	
2	x_3	0	60	0	2	1	0	[illegible]	0	$-\frac{3}{2}$	0	30
	x_4	0	120	0	5	0	1	1	0	-1	0	24
	x_1	11	40	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	80
	x_8	−M	50	0	1	0	0	0	-1	0	1	50
	P = 440 − 50M		s_j	11	$\frac{11-2M}{2}$	0	0	$-\frac{11}{4}$	M	$\frac{11}{4}$	−M	
			$c_j - s_j$	0	$\frac{21+2M}{2}$	0	0	$\frac{11-4M}{4}$	−M	[illegible]	0	

	x_3	0	12	0	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{11}{10}$	0	$-\frac{11}{10}$	0	
3	x_2	16	24	0	10		$\bar{5}1$	$\bar{5}$	1	o-f	0	
	x_1	11	28	1	0	0	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{7}{20}$	0	$\frac{7}{20}$	0	
	x_8	- M	26	0	0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$		1	
	P = 692 − 26M		s_j	11	16	0	$\frac{M^*}{5}$	M^*	$M - 3$	$\frac{M^*}{5}$	$-M$	*ค่า
			$c_j - s_j$	0	0	0	$-\frac{M^*}{5}$	$-\frac{M^*}{5}$	$-M$	$-\frac{4M}{5}$	0	ประมาณ

ตารางที่ 3 จะเป็นตารางสุดท้าย เนื่องจากไม่มี $c_j - s_j$ ตัวใดที่มีค่ามากกว่า 0 แสดงว่าคำตอบชุดนี้เป็นคำตอบอุตมะแล้ว แต่คำตอบที่ได้นี้มีค่าของตัวแปรเทียม x_8 อยู่ด้วย เราจึงสรุปว่าปัญหานี้มี infeasible solutions

เราแสดงให้เห็นได้ด้วยกราฟดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่าไม่มีบริเวณร่วมกันของข้อจำกัดทุกข้อ นั่นก็คือปัญหานี้ไม่มีบริเวณคำตอบที่เป็นไปได้ เราจึงไม่อาจหาคำตอบที่สอดคล้องกับข้อจำกัดทุกข้อได้ สรุปได้ว่า ปัญหานี้มี infeasible solutions

4.3 ปัญหาที่มีคำตอบอุตมะมากกว่า 1 ชุด (alternatve optimal solutions)

ในปัญหาจริงคำตอบที่ดีที่สุดหรือคำตอบอุตมะจะมีเพียงชุดเดียว แต่ในบางครั้งอาจจะมีบางกรณีที่การตัดสินใจขั้นสุดท้าย จะมีทางเลือกให้เรามากกว่า 1 ทาง นั่นก็คือ ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นบางปัญหาจะให้คำตอบอุตมะมากกว่า 1 ชุด แต่ละชุดจะมีค่าฟังก์ชันเป้าหมายสูงสุดหรือมีค่าต่ำสุด ค่าเดียวกัน โดยอาศัยเทคนิคของการโปรแกรมเชิงเส้น จะบอกให้เราทราบได้ว่าคำตอบที่ดีที่สุดของปัญหานั้น มีมากกว่า 1 ชุดหรือไม่ เรามีทฤษฎีเกี่ยวกับคำตอบอุตมะมากกว่า 1 ชุดดังนี้

ทฤษฎี หากเรามี

$$X_o^N = (x_{1o}^N, \ldots, x_{lo}^N, \ldots, x_{mo}^N)$$

เป็นคำตอบอุตมะของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น และมี a_j บางคอลัมน์ที่ไม่อยู่ในฐาน (basis) แต่ค่าของ $c_j - s_j$ ในคอลัมน์นั้นเป็น 0 และ $x_{ij}^N \geqslant 0$ ทุก ๆ ค่า i เราจะได้คำตอบอุตมะชุดใหม่ที่มีค่า P คงเดิม เรียกได้ว่า ปัญหานี้มีคำตอบอุตมะมากกว่า 1 ชุด (alternative optimal solutions)

พิสูจน์

เรามี $x_o^N = (x_{1o}^N, \ldots, x_{lo}^N, \ldots, x_{mo}^N)$

เป็นคำตอบอุตมะ (optimal solution) และมีค่าฟังก์ชันเป้าหมายสูงสุด $= P^N$

ดังนั้น

$$P^N = x_{1o}^N c_1 + \ldots + x_{lo}^N c_l + \ldots + x_{mo}^N c_m \qquad \text{..........(4.1)}$$

และ

$$c_j - s_j^N \leqslant 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, m + n$$

ในเมื่อ $s_j^N = x_{1j}^N c_1 + \ldots + x_{lj}^N e_l + \ldots + x_{mj}^N c_m \qquad j = 1, 2, \ldots, m + n$ ....(4.2)

สมมติ a_k เป็นเวคเตอร์ที่ไม่อยู่ในฐาน (basis) แต่มีค่าของ $c_k - s_k^N = 0$ อาศัยผลจาก (4.2) จะได้ว่า

$$c_k = s_k^N = x_{1k}^N c_1 + \ldots + x_{lk}^N c_l + \ldots + x_{mk}^N c_m \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (4.3)$$

หากเรามี

$$\theta_o = \frac{x_{1o}^N}{x_{1k}^N} = \text{ค่าต่ำสุด } \frac{x_{io}^N}{x_{ik}^N} \quad , x_{ik}^N > 0$$

เราหาคำตอบชุดใหม่ โดยให้ x_k แทนที่ x_l นั่นก็คือ นำเวคเตอร์ a_k เข้าประกอบเป็นฐาน แทนที่เวคเตอร์ a_l จะได้ว่า

$$x_{ko}^{N+1} = \frac{x_{lo}^N}{x_{lk}^N} \text{ และ } x_{io}^{N+1} = x_{io}^N - \frac{x_{lo}^N}{x_{lk}^N} \cdot x_{ik}^N \ , \quad i \neq k \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (4.4)$$

$$x_{kj}^{N+1} = \frac{x_{lj}^N}{x_{lk}^N} \text{ และ } x_{ij}^{N+1} = x_{ij}^N - \frac{x_{lj}^N}{x_{lk}^N} \cdot x_{ik}^N \ , \quad i \neq k \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

คำตอบชุดใหม่ จะกำหนดได้ดังนี้

$$X_o^{N+1} = (x_{1o}^{N+1}, \ldots, x_{ko}^{N+1}, \ldots\ldots x_{mo}^{N+1})$$

จะได้ว่า

$$P^{N+1} = x_{1o}^{N+1}c_1 + \ldots + x_{ko}^{N+1}c_k + \ldots + x_{mo}^{N+1}c_m \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (4.6)$$

$$s_j^{N+1} = x_{1j}^{N+1}c_1 + \ldots + x_{kj}^{N+1}c_k + \ldots + x_{mj}^{N+1}c_m \quad j = 1, 2, \ldots\ldots m + n \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (4.7)$$

ผลจาก (4.3), (4.4) และ (4.6) สรุปได้ว่า

$$P^{N+1} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k \neq l}}^{m} \left(x_{io}^N - \frac{x_{1o}^N}{x_{lk}^N} \cdot x_{ik}\right)c_i + \frac{x_{1o}^N}{x_{lk}^N} \cdot \sum_{\substack{i=1 \\ i = l \neq k}}^{m} x_{ik}^N c_i$$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k \neq l}}^{m} x_{io}^N c_i + \frac{x_{1o}^N}{x_{lk}^N} \ , x_{1k}^N c_1 = P^N$$

ผลจาก (4.3), (4.5) และ (4.7) สรุปได้ว่า

$$s_j^{N+1} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k \neq l}}^{m} \left(x_{ij}^N - \frac{x_{1j}^N}{x_{lk}^N} \cdot x_{ik}^N\right)c_i + \frac{x_{1j}^N}{x_{lk}^N} \cdot \sum_{\substack{i=1 \\ i = l \neq k}}^{m} x_{ik}^N c_i$$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k \neq l}}^{m} x_{ij}^N c_i + \frac{x_{1j}^N}{x_{lk}^N} \cdot x_{lk}^N c_l = s_j^N$$

ดังนั้น

$$c_j - s_j^{N+1} = c_j - s_j^N \leqslant 0 \quad \text{ทุก ๆ } j = 1, 2, \ldots, m + n$$

จะเห็นได้ว่า คำตอบชุดใหม่ เป็นคำตอบอุตมะ มีค่า $P_{\text{สูงสุด}}$ ค่าเดียวกัน และมีค่า $c_j - s_j$ เป็นแบบเดียวกันกับที่ได้จากชุดเดิม

ผลที่ตามมาจากทฤษฎีนี้ก็คือ ในตารางสุดท้ายที่ให้คำตอบอุตมะแล้ว หากมี $c_j - s_j^N = 0$ และ $x_{ij}^N > 0$ ทุก ๆ คอลัมน์ j ที่ไม่อยู่ในฐาน เรากล่าวว่า ปัญหานี้มีคำตอบอุตมะมากกว่า 1 ชุด ให้เรามาศึกษาเพิ่มเติมจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4.3

จงแสดงให้เห็นจริงว่า ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นต่อไปนี้ มีคำตอบอุตมะมากกว่า 1 ชุด

ค่าสูงสุดของ P

$$= 15x_1 + 9x_2$$

โดยมีข้อจำกัด

$$5x_1 + 7x_2 \leqslant 700$$

$$5x_1 + 3x_2 \leqslant 600$$

$$4x_1 + 8x_2 \leqslant 720$$

และ $x_1, x_2 \geqslant 0$

วิธีทำ

เปลี่ยนตัวแบบให้อยู่ในรูปมาตรฐาน แล้วหาคำตอบโดยวิธีการซิมเพลกซ์

ค่าสูงสุดของ P

$$= 15x_1 + 9x_2$$

โดยมีข้อจำกัด

$$5x_1 + 7x_2 + x_3 = 700$$

$$5x_1 + 3x_2 + x_4 = 600$$

$$4x_1 + 8x_2 + x_5 = 720$$

และ $x_j \; (j = 1, 2, 3, 4, 5) \geqslant 0$

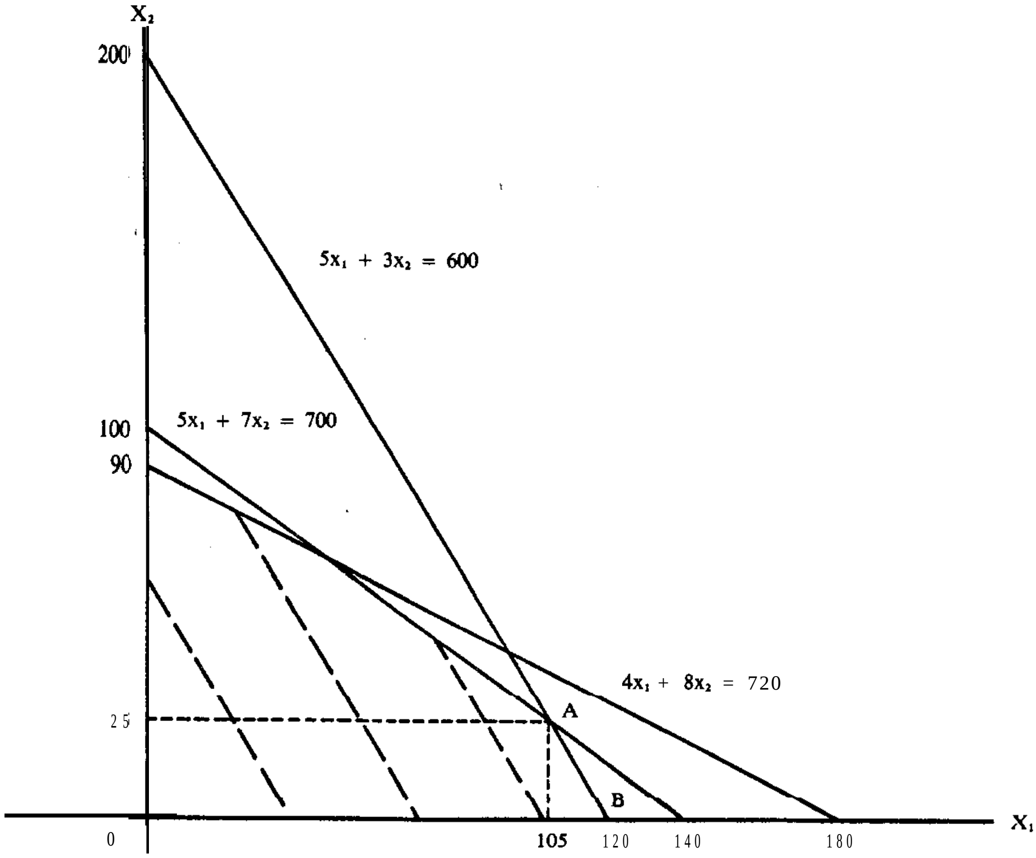
ตารางที่	ตัวแปรฐาน x_i	c_i	c_j / คำตอบฐาน	15 / a_1	9 / a_2	0 / a_3	0 / a_4	0 / a_5	ค่าที่เป็นไปได้ θ_i
1	x_3	0	700	5	7	1	0	0	140
	x_4	0	600	5	3	0	1	0	120
	x_5	0	720	4	8	0	0	1	180
	P = 0		s_j	0	0	0	0	0	
			$c_j - s_j$	15	9	0	0	0	
2	x_3	0	100	0	4	1	-1	0	25
	x_1	15	120	1	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	200
	x_5	0	240	0	$\frac{28}{5}$	0	$-\frac{4}{5}$	1	42.86
	P = 1,800		s_j	15	9	0	3	0	
			$c_j - s_j$	0	0	0	-3	0	

ผลจากตารางที่ 2 จะเห็นว่า ไม่มี $c_j - s_j$ ตัวใดมีค่ามากกว่า 0 แสดงว่า ตารางนี้เป็นตารางสุดท้ายที่ให้คำตอบอุตมะแล้ว แต่เมื่อพิจารณาค่าของ $c_j - s_j$ ในคอลัมน์ที่ไม่อยู่ในฐาน พบว่า $c_2 - s_2 = 0$ ซึ่งแสดงให้เห็นว่า หากเราเพิ่มค่าของ x_2 ค่าของ P จะคงที่ อันเป็นการแสดงว่า เรายังมีคำตอบอุตมะชุดอื่นอีก โดยมี x_2 เป็นตัวแปรฐาน เราหาค่าของ x_2 (θ) ที่เป็นไปได้ ได้คำตอบชุดใหม่ดังตารางข้างล่าง

	ตัวแปรฐาน x_i	c_i	c_j / คำตอบฐาน	15 / a_1	9 / a_2	0 / a_3	0 / a_4	0 / a_5	
	x_2	9	25	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	
	x_1	15	105	1	0	$-\frac{3}{20}$	$\frac{7}{20}$	0	
	x_5	0	100	0	0	$-\frac{7}{5}$	$\frac{3}{5}$	1	
	P = 1,800		s_j	15	9	0	3	0	
			$c_j - s_j$	0	0	0	-3	0	

สรุปได้ว่า ปัญหานี้มีคำตอบอุตมะ 2 ชุด ชุดแรกได้ $x_1 = 120, x_3 = 100, x_5 = 240, x_2 = x_4 = 0$ ชุดที่สองได้ $x_1 = 105, x_2 = 25, x_5 = 100, x_3 = x_4 = 0$ มีค่า $P_{สูงสุด} = 1,800$

ตัวอย่างของปัญหานี้ แสดงให้เห็นได้ด้วยกราฟดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่า มีจุดอุตมะ 2 จุด แสดงว่าปัญหานี้มีคำตอบอุตมะ 2 ชุดคือ

$x_1 = 120, x_2 = 0, x_3 = 100, x_4 = 0, x_5 = 240$

และ $x_1 = 105, \quad x_2 = 25, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 100$

ได้ค่า $P_{สูงสุด} = (15)(120) + (9)(0) = 1,800$

อย่างไรก็ตาม การหาคำตอบด้วยวิธีกราฟจะสะดวกที่สุด ก็ต่อเมื่อมีตัวแปรควบคุมได้ไม่เกิน 2 ตัว หากมีมากกว่า 2 วิธีการซิมเพลกซ์เท่านั้นที่จะเป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพมากที่สุด

สำหรับกรณีที่ต้องการค่าต่ำสุดก็เช่นเดียวกัน เราจะได้คำตอบที่มีค่าของฟังก์ชันเป้าหมายต่ำสุดมากกว่า 1 ชุด ถ้าหากในตารางสุดท้ายที่ให้ค่า P ต่ำสุดแล้ว มีค่าของ $c_j - s_j$ ใน nonbasic column j มีค่าเท่ากับ 0 ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4.4

จงใช้วิธีการ Two - Phase แสดงให้เห็นว่าปัญหาโปรแกรมต่อไปนี้มีคำตอบอุตมะมากกว่า 1 ชุด

หาค่าต่ำสุดของ P

$$= 75x_1 + 25x_2 + 60x_3$$

โดยมีข้อจำกัด

$$x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_3 \geqslant 270$$

$$\frac{\;}{2}x_1 + \frac{\;}{2}x_2 + x_3 \geqslant 345$$

$$x_2 \leqslant 30$$

$$x_3 \leqslant 90$$

และ x_j $(j = 1, 2, 3) \geqslant 0$

วิธีทำ

เปลี่ยนตัวแบบให้อยู่ในรูปมาตรฐาน และโดยอาศัยตัวแปรเทียม จะได้ว่า

หาค่าต่ำสุดของ P

$$= 75x_1 + 25x_2 + 60x_3 + Mx_8 + Mx_9$$

โดยมีข้อจำกัด

$$x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_3 - x_4 + x_8 = 270$$

$$\frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 - x_5 + x_9 = 345$$

$$x_2 + x_6 = 30$$

$$x_3 + x_7 = 90$$

และ x_j $(j = 1, 2, 3, \dots 9) \geqslant 0$

เขียนตารางที่ 1 ของ Phase - I และปรับปรุงต่อไปจนกว่าจะไม่มีตัวแปรเทียม จะได้ว่า

ตารางที่	ตัวแปรฐาน		c_j	0	0	0	0	0	0	0	1	1	ค่าที่เป็นไปได้
	x_i	c_i	คำตอบฐาน	a,	a_2	a_3	a_4	a,	a_6	a,	a,	a_9	θ_i
1	x_8	1	270	1	$\frac{1}{3}$	1	- 1	0	0	0	1	0	270
	x_9	1	345	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1		O-l	0	0	0	1	230
	x_6	0	30	0	1	0	0	0	1	0	0	0	—
	x_7	0	90	0	0	1	0	0	0	1	0	0	—
	$P_1 = 615$		s_j	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{6}$	2	-1-l		0	0	1	1	
			$c_j - s_j$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{6}$	-2	1	1	0	0	0	0	
x	x_8	1	40	0	0	$\frac{1}{3}$	-1	$\frac{2}{3}$	0	0	1	$-\frac{2}{3}$	60
	x_1	0	230	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	0	0	0	$\frac{2}{3}$	—
	x_6	0	30	0	1	0	0	0	1	0	0	0	—
	x_7	0	90	0	0	1	0	0	0	1	0	0	—
	$P_1 = 40$		s_j	0	0	$\frac{1}{3}$	-1	$\frac{2}{3}$	0	0	1	$-\frac{2}{3}$	
			$c_j - s_j$	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	0	0	0	$\frac{5}{3}$	

ตารางต่อไปจะเป็นตารางสุดท้ายของ Phase - I ซึ่งเปลี่ยนไปเป็นตารางที่ 1 ของ Phase II ดังนี้

ตารางที่	ตัวแปรฐาน x_i	c_i	c_j / ค่าตอบฐาน	75 a_1	25 a_2	60 a_3	0 a_4	0 a_5	0 a_6	0 a_7	θ_i
1	x_5	0	60	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	0	0	120
	x_1	75	270	1	$\frac{1}{3}$	1	-1	0	0	0	270
	x_6	0	30	0	1	0	0	0	1	0	—
	x_7	0	90	0	0	1	0	0	0	1	90
$P_2 = 2,250$			s_j	75	25	75	-75	0	0	0	
			$c_j - s_j$	0	0	-15	75	0	0	0	

หาคำตอบชุดใหม่ต่อไป จนกว่าค่าของ P จะลดลงไม่ได้อีกแล้ว ตารางที่ 2 และ 3 ของ Phase - II นี้ต่างเป็นตารางสุดท้าย ซึ่งให้คำตอบอุตมะ ดังต่อไปนี้

ตารางที่	ตัวแปรฐาน x_i	c_i	c_j / คำตอบฐาน	75 a_1	25 a_2	60 a_3	0 a_4	0 a_5	0 a_6	0 a_7	ค่าที่เป็นไปได้ θ_i
2	x_5	0	15	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	—
	x_1	75	180	1	$\frac{1}{3}$	0	-1	0	0	-1	540
	x_6	0	30	0	1	0	0	0	1	0	30
	x_3	60	90	0	0	1	0	0	0	1	—
$P_2 = 18,900$			s_j	75	25	60	-75	0	0	-15	
			$c_j - s_j$	0	0	0	75	0	0	15	
3	x_5	0	15	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	
	x_1	75	170	1	0	0	-1	0	$-\frac{1}{3}$	-1	
	x_2	25	30	0	1	0	0	0	1	0	
	x_3	60	90	0	0	1	0	0	0	1	
$P_2 = 18,900$			s_j	75	25	60	-75	0	0	-15	
			$c_j - s_j$	0	0	0	75	0	0	15	

ผลที่ได้จากตารางที่ 2 และ 3 ต่างให้ค่า P เท่ากับ 18,900 และเมื่อพิจารณาค่าของ $c_j - s_j$ จะเห็นว่าในคอลัมน์เดียวกันมีค่าเท่ากัน และไม่มีค่าใดเป็นลบ แสดงว่าค่าของ P ลดลงไม่ได้อีกแล้ว จึงสรุปได้ว่า เราได้คำตอบอุตมะ 2 ชุด ชุดแรกมีค่า $x_1 = 180, x_3 = 90, x_5 = 15, x_6 = 30$ นอกนั้นเป็น 0 ชุดที่สองมีค่า $x_1 = 170, x_2 = 30, x_3 = 90, x_5 = 15$ นอกนั้นเป็น 0 และมีค่า $P_{\text{ต่ำสุด}} = 18.900$

เราสรุปการหาคำตอบอุตมะชุดอื่น เมื่อเราได้ตารางสุดท้ายว่า

ในตารางสุดท้ายที่ให้คำตอบอุตมะแล้ว หากมี $c_k - s_k^N = 0$ โดยที่ a_k ไม่ได้อยู่ในฐาน และ $x_{ik}^N > 0$ เราหาจำนวนของ x ที่เป็นไปได้ นั่นก็คือ หาค่าของ θ_i

เราจะได้คำตอบอุตมะชุดใหม่ ประกอบด้วย

$$x_{ko} = \frac{x_{1o}^N}{x_{1k}^N} = \min_i \frac{x_{io}^N}{x_{ik}^N}$$

$$\text{Xi.} = x_{io}^N - (x_{ik}^N)(x_{ko}) \ , \ i \neq k$$

4.4 ปัญหาที่มี degenerate basic feasible solutions

การหาคำตอบเท่าที่กล่าวมาแล้วข้างต้น เรามีเกณฑ์สมมติ (assumption) ว่า คำตอบฐานที่ได้เป็น nondegenerate basic feasible solution นั่นก็คือ เราจะได้คำตอบฐานที่มีค่ามากกว่า 0 เป็นจำนวนเท่ากับจำนวนของข้อจำกัด เกณฑ์ที่เราใช้ในการหาคำตอบที่ทำให้ได้ค่า P สูงสุด (กรณีที่ต้องการหาค่าสูงสุดของ P) ก็คือ

(1) หาอัตราการเพิ่มขึ้นของ P ต่อหนึ่งหน่วยของ nonbasic variable x_k ซึ่งอัตราที่เพิ่มขึ้นกำหนดไว้ดังนี้

$$c_k - s_k = \text{ค่าสูงสุด } (c_j - s_j) \ , \ c_j - s_j > 0$$

(2) หาจำนวนที่เป็นไปได้ของ nonbasic variable x_k ที่จะเข้ามาแทนที่ basic variable x_1 ซึ่งก็คืออัตราส่วนที่ทดสอบค่าที่ต่ำสุด นั่นก็คือ

$$\theta_o = x_{1o}/x_{1k} = \text{ค่าต่ำสุด}_i \ (x_{io}/x_{ik}) \ , \ x_{ik} > 0$$

และค่า θ_o จะมีเพียงค่าเดียวเท่านั้น

อาศัยเกณฑ์ทั้งสองนี้ เราจะหาคำตอบอุตมะได้ หากไม่เป็นไปตามเกณฑ์ดังกล่าว ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นอาจเป็น ปัญหาที่มี unbounded solutions หรืออาจจะเป็นปัญหาที่มีคำตอบที่เป็นไปได้ขั้นฐานมีค่าเป็น 0 อย่างน้อยที่สุด 1 ตัว นั่นก็คือ ปัญหาที่มีคำตอบฐานที่มีค่ามากกว่า 0 มีจำนวนน้อยกว่า จำนวนของข้อจำกัด เราเรียกปัญหานี้ว่า degeneracy problem ซึ่งก็หมายถึงปัญหาที่มี degenerate basic feasible solution นั่นเอง หากมีกรณีเช่นนี้เกิดขึ้น ย่อมแสดงว่า ค่าของ θ_o จะเท่ากับ 0 และค่าของฟังก์ชันเป้าหมายที่คำนวณได้จากคำตอบชุดใหม่ จะเท่ากับค่าของฟังก์ชันเป้าหมายเดิม อันแสดงให้เห็นได้ว่า ค่าของฟังก์ชันเป้าหมายคงค่าเดิม ทั้ง ๆ ที่มีการปรับคำตอบฐานใหม่แล้ว นอกจากนี้ ในบางกรณี การคำนวณเพื่อปรับคำตอบฐานใหม่ที่ดีกว่าอาจจะวนกลับไปได้คำตอบฐานชุดเดิมก็ได้ ซึ่งเราเรียกกรณีเช่นนี้ว่า กระบวนการคำนวณมี cycled

พิจารณาจาก degeneracy problem ที่เป็นปัญหาที่มีจำนวนคำตอบฐานซึ่งมีค่ามากกว่า 0 น้อยกว่าจำนวนของข้อจำกัด อันเป็นผลมาจากเรามี θ_o มีค่าเท่ากับ 0 หรือจากขั้นตอนหนึ่งของการคำนวณได้ค่า θ_o มากกว่า 1 ค่า ซึ่งเป็นผลให้เราได้คำตอบฐานชุดใหม่มีค่าเป็น 0 อย่างน้อยที่สุด 1 ค่า หากเป็นการหาคำตอบด้วยตัวเราเอง กรณีเช่นนี้ไม่ก่อให้เกิดความยุ่งยากมากนัก เราอาจจะเลือกให้ค่า θ_o ของแถวใดมีค่าต่ำสุดที่แท้จริงก็ได้ นั่นก็คือ จะตัดสินใจเอาตัวแปรฐานของแถวที่มีค่า θ_o แถวใดออกไปก็ได้ และแน่ใจได้ว่า จะไม่เกิดกรณีซ้ำ หรือเกิดมี cycled อย่างไรก็ตาม การพิจารณาอาจจะยุ่งยากและเสียเวลามากและอาจจะทำไม่ได้ หากเราใช้คอมพิวเตอร์ในการคำนวณ เพื่อแก้ปัญหาดังกล่าว ได้มีการคิดหาเทคนิคต่าง ๆ เข้ามาช่วยในการตัดสินใจและแก้ไขกรณีที่กระบวนการคำนวณมี cycled เทคนิคที่คิดขึ้นก็มีของ Charnes' ของ Dantzig, Orden และ Wolfe และยังมีวิธีการของ Hoffman และ Beale เป็นต้น ในทางปฏิบัติถือว่าเทคนิคของแต่ละกลุ่มไม่แตกต่างกัน วิธีการที่นิยมใช้วิธีหนึ่ง เรียกว่า Perturbation Method ดังมีรายละเอียดต่อไปนี้

4.4.1 Perturbation Method

Charnes' ได้เสนอวิธีการที่จะนำมาใช้กับปัญหาประเภท degeneracy problem โดยการเปลี่ยนค่าคงที่ของข้อจำกัด i เสียใหม่ จากเดิมเป็น b_i เปลี่ยนเป็น $b_i(\varepsilon)$ ซึ่งกำหนดว่า

$$b_i(\varepsilon) = b_i + \varepsilon a_{i1} + \varepsilon^2 a_{i2} + \ldots + \varepsilon^j a_{ij} + \ldots + \varepsilon^{n+m} a_{i(n+m)}$$

ในเมื่อ ε เป็นค่าบวกที่เล็กที่สุด, $\varepsilon << \varepsilon^2 << \ldots << \varepsilon^{n+m}$

นั่นก็คือ เปลี่ยนรูปสมการของข้อจำกัด จากเดิม

$$x_1a_1 + \ldots + x_la_l + \ldots + x_{n+m}a_{n+m} = a. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(4.8)$$

มาเขียนเป็น

$$x_1a_1 + \ldots + x_la_l + \ldots + x_{n+m}a_{n+m} = a_o + \varepsilon a_1 + \ldots + \varepsilon^l a_l + \ldots + \varepsilon^{n+m}a_{n+m} \ldots\ldots\ldots\ldots (4.9)$$

ถ้า

$$X_o = (x_{10}, x_{20}, \ldots . x_{io}, \ldots . x_{mo}) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(4.10)$$

เป็นคำตอบฐานที่ได้จาก (4.8) แล้ว

$$X_o(\varepsilon) = X_o + \varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2 + \ldots + \varepsilon^l X_l + \ldots + \varepsilon^{n+m} X_{n+m} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(4.11)$$

จะเป็นคำตอบฐานที่ได้จาก (4.9)

ในเมื่อ X_j เป็น identity vector ที่มีค่าเป็น 1 อยู่ในตำแหน่ง j, j = 1, 2, ..., m นั่นก็หมายความว่า $x_{io}(\varepsilon)$ จะมีค่าเท่ากับ

$$x_{io} + \sum_{j=1}^{n+m} \varepsilon^j x_{ij} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(4.12)$$

หรือ

$$x_{io}(\varepsilon) = x_{io} + \varepsilon^i + \sum_{j=m+1}^{n+m} \varepsilon^j x_{ij} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(4.13)$$

จาก (4.13) และโดยเหตุที่ ε เป็นค่าบวกที่เล็กที่สุด เราจะได้ $x_{io}(\varepsilon)$ มีค่ามากกว่า 0 ทุก ๆ i = 1, 2, ..., m (การใช้วิธีการดังกล่าวนี้ โดยทั่วไปเราจะจัดเรียงตัวแบบของปัญหาเสียใหม่เพื่อให้ได้ตัวแปร m ตัวแรก เป็นตัวแปรฐาน)

เมื่อเรามี

$$c_k - s_k = \text{ค่าสูงสุด}_j\ (c_j - s_j) \quad , \quad c_j - s_j > 0$$

เกณฑ์ที่จะใช้ในการพิจารณาคำตอบที่เป็นไปได้ขั้นฐานชุดต่อไป ก็คือการเลือกค่า

$$\theta_o = \frac{x_{lo}(\varepsilon)}{x_{lk}} = \text{ค่าต่ำสุด}_i\ \frac{x_{io}(\varepsilon)}{x_{ik}} = \text{ค่าต่ำสุด}_i\ \frac{x_{io} + \varepsilon^i + \sum_{j=m+1}^{n+m} \varepsilon^j x_{ij}}{x_{ik}} > 0$$

$$x_{ik} > 0 \qquad \ldots\ldots\ldots(4.14)$$

พิจารณาจาก (4.14) จะเห็นได้ว่า θ_o มีเพียงค่าเดียวเท่านั้น ทั้งนี้เนื่องจากผลที่ได้ใน (4.13) ชี้ให้เห็นว่า $x_{io}(\varepsilon)$ เป็นค่าของตัวแปรฐาน x_i เพียงตัวเดียวที่มีค่าในเทอมของ ε^i

ตัวอย่างเช่น เรามีตารางซิมเพลกซ์แสดงคำตอบชุดแรกของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น ดังนี้

ตัวแปรฐาน x_i	c_i	c_j / คำตอบฐาน	0 a_1	0 a_2	0 a_3	4 a_4	3 a_5	ค่าที่เป็นไปได้ θ_i
x_1	0	2	1	0	0	2	4	2
x_2	0	0	0	1	0	3	1	0
x_3	0	0	0	0	1	4	2	0
P = 0		s_j	0	0	0	0	0	
		$c_j - s_j$	0	0	0	4	3	

จะเห็นว่า มีค่าต่ำสุดของ θ_i มากกว่า 1 จึงเป็นการยากที่เราจะตัดสินใจว่า ควรเลือกตัวใดดีที่จะเป็นหลักประกันได้ว่า จะไม่มีปัญหาเกิดขึ้น หากเราจะใช้วิธีของ Charns' เข้ามาช่วย จะได้ว่า

$$x_{10}(\varepsilon) = 2 + \varepsilon + 2\varepsilon^4 + 4\varepsilon^5$$

$$x_{20}(\varepsilon) = \varepsilon^2 + 3\varepsilon^4 + \varepsilon^5$$

$$x_{30}(\varepsilon) = \varepsilon^3 + 4\varepsilon^4 + 2\varepsilon^5$$

คำนวณค่า θ_i จะเห็นได้ว่า $\theta_2 = x_{20}(\varepsilon)/3$ มีค่ามากกว่า $\theta_3 = x_{30}(\varepsilon)/4$ (ε เป็นค่าบวกที่เล็กที่สุด) เราจึงได้ $\theta_0 = \theta_3$ ซึ่งแสดงให้เห็นว่า $x_{30}(\varepsilon)$ เป็นคำตอบของตัวแปรฐาน x_3 เพียงตัวเดียวที่มีค่าในเทอม ε^3 และเราจะได้คำตอบฐานชุดต่อไป ดังนี้

คำตอบของตัวแปรฐาน $x_4 = x'_{30}(\varepsilon) = \frac{1}{4}\varepsilon^3 + \varepsilon^4 + \frac{1}{2}\varepsilon^5$

คำตอบของตัวแปรฐาน $x_1 = x'_{10}(\varepsilon) = 2 + -\frac{1}{2}\varepsilon^3 + 3\varepsilon^5$

คำตอบของตัวแปรฐาน $x_2 = x'_{20}(\varepsilon) = \varepsilon^2 - \frac{3}{4}\varepsilon^3 - \frac{1}{2}\varepsilon^5$

โดยมีค่า $P = \varepsilon^3 + 4\varepsilon^4 + 2\varepsilon^5$ ซึ่งค่าที่ได้นี้ จะมากกว่าค่าของ P ที่ได้จากคำตอบชุดแรก (ค่า P จากคำตอบชุดแรกเท่ากับ 0) เราปรับปรุงคำตอบที่ได้ต่อไปจนกว่าจะได้คำตอบอุตมะ

จากคำตอบที่ได้แต่ละชุด เมื่อเราให้ $\varepsilon = 0$ ผลที่ได้จะเป็นคำตอบที่จุดมุมเดียวกันภายใต้ข้อจำกัด (4.8)

อาศัยผลจาก (4.14) และโดยข้อเท็จจริงดังกล่าว เราสรุปผลในทางปฏิบัติเสียใหม่ โดยใช้หลักการดังกล่าวมาแล้ว แต่ไม่จำเป็นต้องเปลี่ยนข้อจำกัดเป็น (4.9) กำหนดแนวทางในการตัดสินใจดังนี้

(1) เมื่อเราได้ x_{io} เป็นคำตอบฐาน และมี

$$\theta_0 = x_{lo}/x_{lk} = \text{ค่าต่ำสุด}_{i} \, (x_{io}/x_{ik}) \quad , \quad x_{ik} > 0$$

เพียงชุดเดียวเท่านั้น เราใช้วิธีการซิมเพลกซ์ในการพิจารณาคำตอบชุดต่อไปได้

(2) ถ้ามี θ_0 มากกว่า 1 เราจะใช้วิธีการซิมเพลกซ์โดยตรงไม่ได้ นั่นก็คือ เราใช้วิธีการอื่นมาช่วยในการพิจารณา θ_0 โดยพิจารณาจากแถวที่มีค่า θ_0 เหมือนกัน คำนวณหาอัตราส่วน x_{ij}/x_{ik} ของแถวนั้น เริ่มจาก basic column j = 1 แล้วเปรียบเทียบอัตราส่วนที่ได้ หากอัตราส่วนที่คำนวณได้จากแถวใดมีค่าต่ำสุด (ในทางปฏิบัติค่านี้จะเป็น 0) เราถือว่าแถวนั้นเป็น key row หากมีอัตราส่วนต่ำสุดมากกว่า 1 คู่ เราคำนวณค่าของอัตราส่วน x_{ij}/x_{ik} จาก basic column j + 1 ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะได้ค่าต่ำสุดเพียงคู่เดียว เราเรียกวิธีการเช่นนี้ว่า Perturbation Method

ตัวอย่างเช่น สมมติเรามีฐานซึ่งประกอบด้วยเวคเตอร์ $a_1, a_2, \ldots, a_m$ และเราได้

$$\theta_0 = x_{10}/x_{1k} = x_{20}/x_{2k}$$

ดังนั้น เราคำนวณค่าของอัตราส่วน x_{11}/x_{1k} กับ x_{21}/x_{2k} เปรียบเทียบผลที่ได้ หาก

$$\text{ค่าต่ำสุด}_{i} \, (x_{i1}/x_{ik}) = x_{11}/x_{1k} \quad , \quad i = 1, 2$$

เวคเตอร์ a_k จะเข้ามาแทนที่เวคเตอร์ a_1 นั่นก็คือ x_k จะเป็นตัวแปรฐานในคำตอบชุดใหม่แทน x_1 หาก

$$\text{ค่าต่ำสุด}_{i} \, (x_{i1}/x_{ik}) = x_{21}/x_{2k} \quad , \quad i = 1, 2$$

เวคเตอร์ a_k จะเข้ามาแทนที่เวคเตอร์ a_2 นั่นก็คือ x_k จะเป็นตัวแปรฐานในคำตอบชุดใหม่แทน x_2 หาก

$$x_{11}/x_{1k} = x_{21}/x_{2k}$$

เราเปรียบเทียบอัตราส่วนของ x_{12}/x_{1k} กับ x_{22}/x_{2k} ต่อไป จนกว่าจะได้อัตราส่วนที่ต่ำสุดเพียงคู่เดียว

ให้เราย้อนกลับไปดูตัวอย่างหน้า (172) ซึ่งกำหนดคำตอบในตารางแรกมาให้ และได้

$$\theta_0 = \theta_2 = \theta_3 = 0$$

จากตารางนี้ เรามีฐานซึ่งประกอบด้วยเวคเตอร์ a_1, a_2 และ a_3 ดังนั้นเราจึงคำนวณค่าของอัตราส่วน $x_{i1}/x_{i4}, i = 2, 3$ จะเห็นว่า $x_{21}/x_{24} = 0/3$ $x_{31}/x_{34} = 0/4$ เราจึงคำนวณอัตราส่วน $x_{i2}/x_{i4}, i = 2, 3$ ต่อไป จะเห็นว่า $x_{22}/x_{24} = 1/3$ และ $x_{32}/x_{34} = 0/4 = 0$ จึงสรุปว่า θ_3 เป็นค่าต่ำสุด นั่นก็คือ เราให้เวคเตอร์ a_3 แทนที่เวคเตอร์ a_4 หรือให้ x_4 เป็นตัวแปรฐาน แทนที่ x_3 ในตารางต่อไป ซึ่งได้ผลเช่นเดียวกันกับตัวอย่างในหน้า 172 เมื่อเราแทนค่า ε เป็น 0

4.4.2 ตัวอย่างของ cycling

ปัญหาประเภทที่มีคำตอบฐานบางตัวเป็น 0 หากเราใช้วิธีการซิมเพลกซ์ในการหาคำตอบโดยตรง อาจเกิดกรณีที่จะมีบางตารางวนกลับไปหาตารางต้น ๆ นั่นก็คือ ได้คำตอบฐานชุดเดิมอีกครั้ง เมื่อเกิดกรณีเช่นนี้แล้ว ก็หมายความว่า เราจะไม่ได้คำตอบอุตมะ ตัวอย่างต่อไปนี้ จะชี้ให้เห็นกรณีการเกิดขึ้นของปัญหานี้

ตัวอย่างที่ 4.5

กำหนดตัวแบบมาตรฐานของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น ต่อไปนี้

หาค่าต่ำสุดของ P

$$= -\frac{3}{4}x_1 + 150x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 6x_4$$

โดยมีข้อจำกัด

$$\frac{1}{4}x_1 - 60x_2 - \frac{1}{25}x_3 + 9x_4 + x_5 = 0$$

$$\frac{1}{2}x_1 - 90x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 3x_4 + x_6 = 0$$

$$x_3 + x_7 = 1$$

และ $x_j \ (j = 1, 2, \ldots 7) \geqslant 0$

จงแสดงให้เห็นว่า การหาคำตอบโดยวิธีการซิมเพลกซ์ จะทำให้ได้คำตอบวนกลับไปหาคำตอบชุดเดิมได้

วิธีทำ

เขียนตารางซิมเพลกซ์ของคำตอบฐานชุดแรก แล้วปรับคำตอบฐานใหม่ที่จะทำให้ได้ค่า P ต่ำสุด เมื่อมีกรณีที่ได้ θ_0 มากกว่า 1 เราเลือกเวคเตอร์ที่จะถูกขจัดออกตามใจชอบ ดังต่อไปนี้

ตารางที่	ตัวแปรฐาน		c_j	$-\frac{3}{4}$	150	$-\frac{1}{50}$	6	0	0	0	ค่าที่เป็นไปได้
	x_i	c_i	คำตอบฐาน	a_1	a_2	a_3	a_4	a_6	a_7	a_8	θ_i
	x_6	0	0	$\frac{1}{4}$	-60	$-\frac{1}{25}$	9	1	0	0	0
1	x_7	0	0	$\frac{1}{2}$	-90-f	3	0		1	0	0
	x_8	0	1	0	0	1	0	0	0	1	—
P = 0			s_j	0	0	00	0		0	0	
			$c_j - s_j$	$\frac{3}{4}$	150	$-\frac{1}{50}$	6	0	0	0	
	x_1	$-\frac{3}{4}$	0	1	-240	$-\frac{4}{25}$	36	4	0	0	
2	x_6	0	0	0	30	$\frac{3}{50}$	-15	-2	1	0	0
	x_7	0	1	0	0	1	0	0	0		1 —
P = 0			s_j	$-\frac{3}{4}$	180	$\frac{3}{25}$	-27	-3	0	0	
			$c_j - s_j$	0	-30	$-\frac{7}{50}$	33	3	0	0	

	x_1	$-\frac{3}{4}$	0	1	0	$\frac{8}{25}$	-84	-12	8	0	0
3	x_2	150	0	0	1	$\frac{1}{500}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{30}$	0	0
	x_7	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1
P = 0			s_j	$\frac{3}{4}$	150	$\frac{3}{50}$	-12	-1	-1	0	
			$c_j - s_j$	0	0	$-\frac{2}{25}$	18	1	1	0	
	x_3	$-\frac{1}{50}$	0	$\frac{25}{8}$	0	1	$-\frac{525}{2}$	$\frac{75}{2}$	25	0	—
4	x_2	150	0	$-\frac{1}{160}$	1	0	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{120}$	$-\frac{1}{60}$	0	0
	x_7	0	1	$-\frac{25}{8}$	0	0	$\frac{525}{2}$	$\frac{75}{2}$	-25	1	$\frac{2}{525}$
P = 0			s_j	-1	150	$-\frac{1}{50}$	9	2	-3	0	
			$c_j - s_j$	$\frac{1}{4}$	0	0	-3	-2	3	0	
	x_3	$-\frac{1}{50}$	0	$-\frac{125}{2}$	10500	1	0	50	-150	0	0
5	x_4	6	0	$-\frac{1}{4}$	400		1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0
	x_7	0	1	$\frac{125}{2}$	-10500	0	0	-50	150	1	—
P = 0			s_j	$-\frac{1}{4}$	30	$-\frac{1}{50}$	6	1	-1	0	
			$c_j - s_j$	1	120	0	0	-1	1	0	

	x_5	0	0	$-\frac{5}{4}$	210	$\frac{1}{50}$	0	1	-3	0	—
6	x_4	6	0	$\frac{1}{6}$	-30	$-\frac{1}{150}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0	0
	x_7	0	1	0	0	1	0	0	0	1	—
P = 0			s_j	1	-180	$-\frac{1}{25}$	6	0	2	0	2
			$c_j - s_j$	$-\frac{7}{4}$	330	$\frac{1}{50}$	0	0	-2	0	
	x_5	0	0	$\frac{1}{4}$	-60	$-\frac{1}{25}$	9	1	0	0	0
7	x_6	0	0	$\frac{1}{2}$	-90	$-\frac{1}{50}$	3	0	1	0	0
	x_7	0	1	0	0	1	0	0	0	1	—
P = 0			s_j	0	0	0	0	0	0	0	
			$c_j - s_j$	$-\frac{3}{4}$	150	$-\frac{1}{50}$	6	0	0	0	

จะเห็นได้ว่า การหาคำตอบด้วยวิธีการซิมเพลกซ์ และเลือกค่า θ_0 โดยอิสระเมื่อมีกรณีที่มีคำตอบฐานบางค่าเป็น 0 การปรับปรุงคำตอบฐานแต่ละชุด ไม่ได้ทำให้ค่าของ P เปลี่ยนแปลง นอกจากนี้ เมื่อมาถึงตารางที่ 7 ผลที่ได้จะซ้ำกับผลลัพธ์ในตารางที่ 1 เท่ากับว่าเราทำวนกลับไปหาคำตอบฐานชุดแรกอีก หากจะทำต่อไป กรรมวิธีจะซ้ำแบบเดิม ซึ่งจะไม่มีทางที่จะได้คำตอบอุตมะ

จากตัวอย่างนี้ หากเราใช้วิธีการ Perturbation จะพบว่า ในตารางที่ 1 มี a_5, a_6 และ a_7 เป็น basic vector ดังนั้น เราจึงคำนวณอัตราส่วน x_{ij}/x_{i1}, $i = 1, 2$ โดยเริ่มจาก $j = 6$ ปรากฏผลดังนี้

$$\frac{x_{15}}{x_{11}} = \frac{1}{1/4} = 4 \text{ และ } \frac{x_{25}}{x_{21}} = \frac{0}{1/2} = 0$$

สรุปได้ว่า θ_1 เป็น θ_0 เราจึงให้เวคเตอร์ a_1 แทนที่เวคเตอร์ a_5 นั่นก็คือ x_1 จะเป็นตัวแปรฐานแทน x_5 ในตารางต่อไป เราปรับคำตอบฐานต่อไปเรื่อย ๆ จนถึงตารางที่ 3 จะเป็นตารางสุดท้ายที่ให้คำตอบอุตมะ แสดงให้เห็นจริงได้ดังต่อไปนี้

ตารางที่	ตัวแปรฐาน x_i	c_i	c_j / คำตอบฐาน	$-\frac{3}{4}$ a_1	150 a_2	$-\frac{1}{50}$ a_3	6 a_4	0 a_5	0 a_6	0 a_7	ค่าที่เป็นไปได้ θ_i
	x_5	0	0	$\frac{1}{4}$	-60	$-\frac{1}{25}$	9	1	0	0	
1	x_6	0	0	$\frac{1}{2}$	-90-f		3	0	1	0	
	x_7	0	1	0	0	1	0	0	0	1	
$P = 0$			s_j	0	0	00		0	0	0	
			$c_j - s_j$	$-\frac{3}{4}$	150	$-\frac{1}{50}$	6	0	0	0	
	x_5	0	0	0	-15	$-\frac{3}{100}$	15	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	
2	x_1	$-\frac{3}{4}$	0	1	-180	$-\frac{1}{25}$	6	0	2	0	
	x_7	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1
$P = 0$			s_j	$-\frac{3}{4}$	135	$\frac{3}{100}$	$-\frac{9}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	0	
			$c_j - s_j$	0	15	$-\frac{1}{20}$	$\frac{21}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	
	x_5	0	$\frac{3}{100}$	0	-15	0	$\frac{15}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{100}$	
3	x_1	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{25}$	1	-180	0	6	0	2	$\frac{1}{25}$	
	x_3	$-\frac{1}{50}$	1	0	0	1	0	0	0	1	
$P = -\frac{1}{20}$			s_j	$\frac{3}{4}$	135	$-\frac{1}{50}$	$-\frac{9}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{20}$	
			$c_j - s_j$	0	15	0	$\frac{21}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{20}$	

สรุปได้ว่า วิธีการ Perturbation เป็นวิธีการที่มีประสิทธิภาพยิ่ง วิธีการนี้จะกำหนดเกณฑ์ที่จะใช้ในการตัดสินใจกรณีที่มี θ_0 มากกว่า 1 ให้กับเรา แทนที่จะเลือกด้วยตนเอง ซึ่งไม่อาจประกันได้ว่า เป็นการเลือกที่ดีที่สุดหรือไม่ จะได้คำตอบอุตมะหรือไม่

4.5 ปัญหาที่กำหนดค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของตัวแปร (Upper and Lower Bounds)

บ่อยครั้งที่จะมีข้อจำกัดของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นอยู่จำนวนหนึ่ง มีรูปแบบดังนี้

$$0 \leqslant x_j \leqslant u_j$$

ซึ่งเราเรียกข้อจำกัดเหล่านี้ว่า upper bounds on the variables

ข้อจำกัดดังกล่าวนี้ อาจจะแสดงถึงความสามารถในการผลิต หรือแสดงถึงขีดจำกัดของจำนวนที่จะขายได้หรือจำนวนอุปสงค์ของสินค้า (ปริมาณการผลิตสินค้าชนิดนี้ไม่ควรจะเกินขีดจำกัดที่จะขายได้หรือจำนวนอุปสงค์) ในปัญหาการขนส่ง ข้อจำกัดเหล่านี้จะแสดงถึงจำนวนสูงสุดที่สามารถจัดส่งได้ โดยเส้นทางสายนั้น

ตัวแบบของปัญหาที่มีขีดจำกัดบนของตัวแปรหรือกำหนดค่าสูงสุดของตัวแปร ก็คือ

หาค่าสูงสุดของ (หรือหาค่าต่ำสุดของ)

$$P = \sum_{j=1}^{n+m} c_j x_j \qquad \text{..........(4.15)}$$

โดยมีข้อจำกัด

$$\sum_{j=1}^{n+m} a_{ij} x_j = b_i \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m \qquad \text{..........(4.16)}$$

$x_j \leqslant u_j$ ทุก ๆ ค่าหรือบางค่า $j = 1, 2, \ldots, n$ ....(4.17)

และ $x_j \; (j = 1, 2, \ldots, n + m) \geqslant 0$ ....(4.18)

หนทางหนึ่งในการแก้ปัญหาประเภทนี้ ก็คือการเปลี่ยนเซทของข้อจำกัดใน (4.17) เป็นเซทของสมการ

$$x_j + x_{s_j} = u_j \qquad \text{..........(4.19)}$$

ในเมื่อ x_{s_j} เป็น slack variables

อย่างไรก็ตามวิธีการเช่นนี้จะเพิ่มจำนวนแถวในตาราง และเพิ่มงานมากขึ้น ทั้งที่ควรจะมีวิธีที่ประหยัดเวลาได้มากกว่า ดังเช่นตัวอย่างที่ (4.4) การคำนวณในแต่ละตารางต้องพิจารณา 4 แถว แทนที่จะพิจารณาเพียง 2 แถวเท่านั้น หากใช้วิธีการของ Charnes และ Lemke หรือของ Dantzig ซึ่งได้ปรับปรุงวิธีการที่มีประสิทธิภาพยิ่ง วิธีการนี้ยึดตามหลักการเดิม กล่าวคือ หาคำตอบจากเซทของสมการ (4.16) ด้วยวิธีการซิมเพลกซ์ แต่การพิจารณาผลในแต่ละตารางจะต้องคำนึงถึงเงื่อนไขใน (4.17) ควบคู่กันไปด้วย

พิจารณาจาก (4.15) ถึง (4.19) จะเห็นว่า

หาก $x_j = 0$ ก็แสดงว่า $x_{s_j} = u_j$ ผลลัพธ์ที่ได้นี้จะไม่มีผลต่อ (4.15) และ (4.17) เนื่องจาก c_{s_j} เป็น ส.ป.ส. ของ slack variable ในฟังก์ชัน P ค่า c_{s_j} จึงเป็น 0 และ x_{s_j} ไม่อยู่ใน (4.16) นั่นก็คือ x_j เป็น nonbasic variable ที่มีค่าเป็น 0

หาก $x_j = u_j$ แสดงว่า $x_{s_j} = 0$ ซึ่งจะมีผลกระทบต่อ (4.15) และ (4.17) กรณีเช่นนี้เราจะแทนที่ x_j ด้วย x_j^* โดยที่

$$x_j = u_j - x_j^*$$

ลงใน (4.15) และ (4.16) จะได้ว่า

$$P = \sum_{j\notin U} c_j x_j + \sum_{j\in U} c_j(u_j - x_j^*) \qquad \text{.........(4.20)}$$

และ

$$\sum_{j\notin U} a_{ij}x_j + \sum_{j\in U} a_{ij}(u_j - x_j^*) = b_i \;, \quad i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n+m$$

หรือ

$$\sum_{j\notin U} a_{ij}x_j - \sum_{j\notin U} a_{ij}x_j^* = b_i - \sum_{j\in U} a_{ij}u_j \qquad \text{..........(4.21)}$$

เมื่อ U เป็นเซทของดัชนีของตัวแปรที่มีค่าเท่ากับค่าสูงสุดของตัวมันเอง ในที่นี้ x_j^* จะเป็น non-basic variable ที่มี ส.ป.ส. $c_j^* = -c_j$, $a_{ij}^* = -a_{ij}$ และมีความหมายว่า x, เป็น non-basic variable ที่มีค่าเท่ากับ u_j

หาก x_j มีค่าระหว่าง 0 กับ u_j ผลที่ได้เป็นแบบเดียวกับกรณีแรก เพียงแต่กรณีนี้ x_j เป็นตัวแปรฐาน สรุปได้ว่า การหาคำตอบต่อปัญหาประเภทนี้ ใช้วิธีการซิมเพลกซ์ในการหาคำตอบของระบบสมการ (4.15), (4.16) และ (4.18) แต่เพิ่มเงื่อนไขว่า ค่าของ nonbasic variable x_j อาจเป็น 0 หรือ u_j ก็ได้ และเราให้นิยามของคำตอบที่เป็นไปได้ขั้นฐาน ว่าเป็นคำตอบของตัวแปรอย่างน้อยที่สุด 1 ตัว ในจำนวน n ตัว (เดิมมีค่าเป็น 0 ทุกตัว) ที่มีค่าเป็น 0 หรือ u_j คำตอบฐานที่มีค่ามากกว่า 0 จะเป็นคำตอบของตัวแปรฐานที่สอดคล้องกับข้อจำกัด (4.17) และ (4.18) เราจะมีทฤษฎีดังต่อไปนี้

ทฤษฎี (กรณีที่ต้องการหาค่าสูงสุดของฟังก์ชัน)

คำตอบที่ได้จากตารางที่ N จะเป็นคำตอบอุตมะ หากค่าของ $c_j - s_j$ ของ nonbasic variables x_j สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$c_j - s_j \leqslant 0 \quad \text{ถ้า} \quad x_j = 0 \qquad \text{..........(4.22)}$$

และ

$$c_j - s_j \geqslant 0 \quad \text{ถ้า} \quad x_j = u_j \qquad \text{..........(4.23)}$$

พิสูจน์

จากตารางที่ N เรามี

$$s_j = \sum_i c_i x'_{ij}, \quad j = 1, 2, \ldots, n + m$$

และ $P_0 = \sum_i c_i x_{i0}$ เป็นค่า P ของคำตอบชุดที่ N

ผลที่ได้จากตารางนี้ เปลี่ยนกลับในรูปของสมการ หาค่าของ basic variables x_i จะเท่ากับ

$$x_{i0} - \sum_{j \notin B} x^*_{ij} x^*_j \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

เมื่อ B เป็นฐานที่ประกอบด้วย basic vectors (ในที่นี้คือ identity matrix)

และ x^*_j เมื่อ j ไม่อยู่ในฐาน B เป็น nonbasic variables ที่มีความหมายว่า

$$x^*_j = x_j \quad , \quad x^*_{ij} = x_{ij} \qquad \text{เมื่อ} \quad x_j = 0$$

และ

$$x^*_j = 0 \quad , \quad x^*_{ij} = -x_{ij} \qquad \text{เมื่อ} \quad x_j = u_j$$

แทนค่าของ basic variables x_i ที่ได้นี้ใน (4.15) จะได้ว่า

$$P = \sum_{\substack{j \in B \\ j = j}} c^*_j \, (x_{i\cdot} - \sum_{j \notin B} x^*_{ij} x^*_j) + \sum_{j \notin B} c^*_j x^*_j$$

$$c^*_j = c_j \qquad \text{เมื่อ } j \in B \text{ และ } j \notin B \text{ แต่ } x^*_j = x_j$$

$$c_j^* = -c_j \quad \text{เมื่อ } j \notin B \text{ และ } x_j^* = 0$$

$$P = \sum_{\substack{j \notin B \\ i=j}} c_j x_{io} - \sum_{j \notin B} \Big(\sum_{\substack{j \in B \\ i=j}} c_j x_{ij}^* \Big) x_j^* + \sum_{j \notin B} c_j^* x_j^*$$

$$= \sum_i c_i x_{io} - \sum_{j \notin B} \Big(\sum_i c_i x_{ij}^*\Big) x_j^* + \sum_{j \notin B} c_j^* x_j^*$$

อาศัยนิยามของ P_o และ s_j จะได้ว่า

$$P = P_o - \sum_{j \notin B} s_j^* x_j^* + \sum_{j \notin B} c_j^* x_j^* = P_o + \sum_{j \notin B} (c_j^* - s_j^*) x_j^*$$

$$s_j^* = s_j \quad \text{เมื่อ } x_j^* = x_j \text{ และ } s_j^* = -s_j \quad \text{เมื่อ } x_j^* = 0$$

ดังนั้น

$$\text{ค่าสูงสุดของ } P = \text{ค่าสูงสุดของ } \Big(P_o + \sum_{j \notin B} (c_j^* - s_j^*) x_j^*\Big)$$

ถ้า (4.22) เป็นจริง จะได้ว่า

$$\sum_{j \notin B} (c_j^* - s_j^*) x_j^* = \sum_{j \notin B} (c_j - s_j) x_j \leqslant 0$$

หากเราเพิ่มค่าของ x_j

แสดงว่า การเพิ่มค่าของ x_j ไม่ทำให้ค่าของ P เพิ่มขึ้นได้อีก

ถ้า (4.23) เป็นจริง จะได้ว่า

$$\sum_{j \notin B} (c_j^* - s_j^*) x_j^- = \sum_{j \notin B} -c_j - \; s_j)) x_j^- = \sum_{j \notin B} {}^{\omega} - c_j)^{\omega} \leqslant {}^{\circ}$$

หากเราเพิ่มค่าของ x_j^*

นั่นก็หมายความว่า การเพิ่มค่า nonbasic variable x_j^* ไม่ทำให้ค่าของ P เพิ่มขึ้นได้อีก

สรุปได้ว่า หาก (4.22) และ (4.23) เป็นจริงแล้ว $P = P_o$ จะเป็นค่าสูงสุดของฟังก์ชันเป้าหมาย นั่นก็คือผลที่ได้จากตารางนี้ให้คำตอบอุตมะ (optimal solution) แล้ว

การพิสูจน์ทฤษฎีนี้ นักศึกษาอาจจะพิสูจน์โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับเมทริคซ์โดยตรงก็ได้ และสามารถศึกษาเรื่องนี้เพิ่มเติมได้จากหนังสือ Linear Programming ของ G. Hadley หน้า 387-394 หรือจากหนังสือ Linear Programming (Methods and Applications) ของ Saul I. Gass หน้า 214-218 ซึ่งกล่าวถึงในกรณีที่ต้องการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันเป้าหมาย P เป็นต้น

ปัญหาที่เราจะต้องพิจารณาต่อไปก็คือ ถ้าหาก (4.22) และ (4.23) ไม่จริง เราจะต้องปรับปรุงแก้ไขอย่างไรบ้าง หากเงื่อนไขของ (4.22) และ (4.23) ไม่จริงสำหรับ nonbasic variables บางตัว ในที่นี้ให้เป็น x_k ขั้นต่อไปเราก็ต้องพิจารณาว่าค่าของ x_k ที่เหมาะสมควรจะเป็นเท่าใด เรามีเกณฑ์ที่จะใช้ในการปรับปรุงแก้ไขคำตอบใหม่ ดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 การพิจารณาผลที่จะได้ในตารางต่อไป หาก $x_k = 0$

จากคำตอบในตารางเดิม เรามี $x_k = 0$ และ $c_k - s_k > 0$ การเปลี่ยนแปลงของตัวแปร x_i แต่ละตัวในฐาน จะกำหนดได้โดย

$$x_i = x_{io} - \sum_{j \in U} x_{ij}u_j - x_{ik}x_k \qquad \text{..........(4.24)}$$

ในเมื่อ U เป็นเซทของดัชนีสำหรับ nonbasic variables ทั้งหลายที่มีค่าเท่ากับค่าสูงสุดของตัวมันเอง

กำหนด $\bar{b}_i = x_{io} - \sum_{j \in U} x_{ij}u_j$ (4.24) เปลี่ยนเป็น

$$x_i = \bar{b}_i - x_{ik}x_k \qquad \text{ทุกค่า } i \text{ ที่อยู่ในฐาน B}$$

หาก $x_{ik} > 0$ จะเห็นได้ว่า การเพิ่มค่าของ x_k จากเดิมที่เป็น 0 จะเป็นผลให้ค่าของ x_i ในลำดับเดียวกัน ลดลง ดังนั้นการเพิ่มค่าของ x_k จึงต้องระวังว่า จะไม่ทำให้ค่าตัวแปรอื่นที่เกี่ยวข้องเป็นลบ นั่นก็คือ สำหรับ $x_{ik} > 0$ เราจะได้ว่า

$$\bar{b}_i - x_{ik}x_k \geqslant 0$$

หรือ

$$x_k \leqslant \bar{b}_i / x_{ik}$$

หรือ

$$x_k \leqslant \frac{\bar{b}_p}{x_{pk}} = \underset{x_{ik} > 0}{\text{ค่าต่ำสุด}} \; \frac{\bar{b}_i}{x_{ik}} \qquad \text{..........(4.25)}$$

ในทำนองเดียวกัน หาก $x_{ik} < 0$ การเพิ่มค่าของ x_k จะเป็นผลให้ค่าของ x_i ในลำดับเดียวกันเพิ่มขึ้นด้วย แต่ค่าของ x_i แต่ละตัวมีขีดจำกัดบน ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$\bar{b}_i - x_{ik}x_k \leqslant u_i \qquad \text{สำหรับ } x_{ik} < 0$$

หรือ

$$x_k \leqslant \frac{u_i - \bar{b}_i}{-x_{ik}}$$

หรือ

$$x_k \leqslant \frac{u_q - \bar{b}_q}{-x_{qk}} = \underset{x_{ik}<0}{\text{ค่าต่ำสุด}} \frac{u_i - \bar{b}_i}{-x_{ik}} \qquad \text{..........} (4.26)$$

และอีกค่าหนึ่งที่จะเป็นไปได้ของ x_k ก็คือ

$$x_k \leqslant u_k \qquad \text{..........} (4.27)$$

เมื่อพิจารณาเปรียบเทียบจากค่าต่าง ๆ ของ x_k ที่เป็นไปได้ จาก (4.25) ถึง (4.27) สรุปได้ว่า ค่าของ x_k ที่จะเพิ่มขึ้นได้มากที่สุด กำหนดไว้โดย

$$\text{ค่าสูงสุด } x_k = \text{ค่าต่ำสุด} \left[\frac{\bar{b}_i}{x_{ik}} \text{ เมื่อ } x_{ik} > 0,\ \frac{u_i - \bar{b}_i}{-x_{ik}} \text{ เมื่อ } x_{ik} < 0, u_k \right]$$

$$\text{ค่าสูงสุด } x_k = \text{ค่าต่ำสุด} \left[\frac{\bar{b}_p}{x_{pk}},\ \frac{u_q - \bar{b}_q}{-x_{qk}},\ u_k \right] \qquad \text{..........} (4.27a)$$

ถ้าค่าสูงสุดของ x_k ถูกจำกัดโดย (4.25) เราให้ x_k แทนที่ x_p ในฐาน แต่ถ้ามันถูกจำกัดโดย (4.26) เราให้ x_k แทนที่ x_q ในฐาน และถ้ามันถูกจำกัดโดย (4.27) x_k ยังคงเป็น nonbasic variable แต่มีค่าเป็น u_k ซึ่งเราเขียนแทนด้วย x_k^*

ในสองกรณีแรก เราเปลี่ยนตารางใหม่ (นั่นก็คือเปลี่ยนฐานชุดใหม่) โดยใช้ x_{pk} หรือ x_{qk} เป็น pivot ตามลำดับ วิธีการดังกล่าวมานี้ อาจจะมี pivot เป็นลบก็ได้

กรณีที่ 2 พิจารณาผลที่จะได้ในตารางต่อไป (หาฐานใหม่) หาก $x_k = u_k$ และ $c_k - s_k < 0$ ในกรณีนี้ เรามี

$$x_i = x_{io} - \sum_{\substack{j \in U \\ j \neq k}} x_{ij} u_j - x_{ik} x_k \qquad \text{..........} (4.28)$$

กำหนดให้

$$\bar{b}_i' = \text{xi.} - \sum_{\substack{j \in U \\ j \neq k}} x_{ij} u_j$$

(4.26) จะเปลี่ยนเป็น $x_i = \bar{b}_i' - x_{ik} x_k$ ทุกค่า i ที่อยู่ในฐาน B

เมื่อพิจารณาผลที่ได้ จะเห็นว่า สำหรับ $x_{ik} > 0$ การลดค่าของ x_k ลงจะเป็นผลให้ค่าของ x_i เพิ่มขึ้น ในขณะที่ สำหรับ $x_{ik} < 0$ การลดค่าของ x_k จะทำให้ค่าของ x_i ลดลงด้วย เราต้องแน่ใจได้ว่าการลดค่าของ x_k ลง จะไม่ทำให้ค่าของ x_i ในฐาน มีค่าน้อยกว่า 0 หรือมากกว่าขีดจำกัดบนของมัน ดังนั้นเราจะได้

$$x_i = \bar{b}_i' - x_{ik}x_k \leq u_i \qquad \text{เมื่อ } x_{ik} > 0$$

หรือ

$$x_k \geq \frac{\bar{b}_p' - u_p}{x_{pk}} = \underset{x_{ik}>0}{\text{ค่าสูงสุด}} \; \frac{\bar{b}_i' - u_i}{x_{ik}} \qquad \text{..........(4.29)}$$

และ

$$x_i = \bar{b}_i' - x_{ik}x_k \geq 0 \qquad \text{เมื่อ } x_{ik} < 0$$

หรือ

$$x_k \geq \frac{\bar{b}_q'}{x_{qk}} = \underset{x_{ik}>0}{\text{ค่าสูงสุด}} \; \frac{\bar{b}_i'}{x_{ik}} \qquad \text{..........(4.30)}$$

และท้ายที่สุด

$$x_k \geq 0$$

เปรียบเทียบค่าที่เป็นไปได้ของ x_k จาก (4.29) ถึง (4.31) เราจะได้ ค่าต่ำสุดของ x_k กำหนดโดย

$$\text{ค่าต่ำสุด } x_k = \text{ค่าสูงสุด} \left[\frac{\bar{b}_p' - u_p}{x_{pk}}, \frac{\bar{b}_q'}{x_{qk}}, 0\right] \qquad \text{..........(4.31a)}$$

ถ้าค่าต่ำสุดของ x_k ถูกจำกัดโดย (4.29) เราได้ x_k แทนที่ x_p ในฐาน ถ้าถูกกำหนดโดย (4.30) เราให้ x_k แทนที่ x_q ในฐาน แต่ถ้ามันถูกจำกัดโดย (4.31) เราคงฐานเดิมไว้และ x_k จะเป็น nonbasic variable ที่มีค่าเป็น 0

ในแต่ละกรณี เราจะได้ค่าของฟังก์ชันเป้าหมาย P เพิ่มขึ้นมากที่สุด โดยการกำหนดให้ตัวแปร x_k มีค่าเท่ากับค่าที่จำกัดไว้ นั่นก็คือ เราสามารถเพิ่มค่าของ x_k ให้มากที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ ในกรณีที่ 1 และลดค่า x_k ลงให้มากที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ ในกรณีที่ 2 ภายหลังการเปลี่ยนค่า x_k ที่เหมาะสม เราทำซ้ำตามกระบวนการเดิมจนกว่าจะได้ผลตามเงื่อนไข (4.22) และ (4.23) เมื่อเราได้ $x_j \leq u_j$ ทุก ๆ ตัว ก็แสดงว่าปัญหานี้มีค่าสูงสุดจริง

กรรมวิธีในการเปลี่ยนฐานดังกล่าวมาแล้วข้างต้น เรียกว่า Simple Upper - Bounded algorithm เรียกสั้น ๆ ว่า SUB algorithm เพื่อความเข้าใจให้นักศึกษาดูตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4.6

จงหาคำตอบอุตมะของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นนี้ โดยใช้ SUB algorithm

หาค่าสูงสุดของ P

$$= 4x_1 + 2x_2 + 2x_3$$

โดยมีข้อจำกัด

$$x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 60$$

$$x_1 - x_2 + x_3 \leqslant 10$$

$$x_1 \leqslant 30$$

$$x_2 \leqslant 100$$

$$x_3 \leqslant 40$$

และ $x_j \ (j = 1, 2, 3) \geqslant 0$

วิธีทำ

เปลี่ยนข้อจำกัดที่ 1 และ 2 เป็นสมการ โดยบวกฟังก์ชันซ้ายมือด้วย x_4 และ x_5 ตามลำดับ เขียนตารางที่ 1 ได้ดังนี้

ตัวแปรฐาน		c_j	4	2	2	0	0
x_i	c_i	คำตอบฐาน	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
x_4	0	60	1	1	1	1	0
x_5	0	10	1	-1	1	0	1
$P = 0$		s_j	0	0	0	0	0
		$c_j - s_j$	4	2	2	0	0

ผลที่ได้จากตาราง แสดงว่า x_1, x_2 และ x_3 ต่างมีค่าเป็น 0 และมี $c_j - s_j > 0, j = 1, 2, 3$ จึงเข้าลักษณะของกรณีที่ 1 ในที่นี้ เราจะเพิ่มค่าของ x_1

โดยเหตุที่ ไม่มี nonbasic variables ตัวใดมีค่าเท่ากับค่าสูงสุดของมัน ดังนั้น $U = \phi$ และ $\bar{b}_i = (60, 10)'$ ค่าของ $x_{i1} > 0, i = 1, 2$ ค่าที่เป็นไปได้ของ x_1 จะกำหนดได้โดย

$$x_1 \quad = \quad \text{ค่าต่ำสุด } (60/1,\ 10/1) = 10$$

และอีกค่าหนึ่งที่เป็นไปได้ของ x_1 ก็คือ 30 ซึ่งเป็นขีดจำกัดบนของ x_1
ดังนั้น

$$\text{ค่าสูงสุด } x_1 \quad = \quad \text{ค่าต่ำสุด } (10, 30) = 10$$

แสดงว่า เราได้ x_1 แทนที่ x_5 ในฐานใหม่ นั่นก็คือ ตารางที่ 2 ได้จากการเปลี่ยน x_1 แทนที่ x_5 ดังนี้

			4	2	2	0	0
x_4	0	50	0	2	0	1	−1
x_1	4	10	1	−1	1	0	1
P = 40		s_j	4	−4	4	0	4
		$c_j - s_j$	0	6	−2	0	−4

ผลจากตารางที่ 2 จะเห็นว่า $c_2 - s_2 = 6$ เป็นค่าบวกที่มากที่สุด และ x_2 เป็น 0 แสดงว่าเราจะต้องเพิ่มค่าของ x_2 ในที่นี้ ไม่มี nonbasic variable ตัวใดมีค่าเท่ากับค่าสูงสุดของมัน ดังนั้น $U = \phi$ และ $\bar{b}_i = (50, 10)'$ ค่าที่เป็นไปได้ของ x_2 จะมี 3 ค่าคือ

$$\frac{50}{2} \text{ เมื่อ } x_{12} > 0,\ \frac{30 - 10}{-(-1)} \text{ เมื่อ } x_{22} < 0, \text{ และ } 100 \text{ ซึ่งเป็นขีดจำกัดบนของ } x_2$$

$$\text{ค่าสูงสุด } x_2 \quad = \quad \text{ค่าต่ำสุด } (25, 20, 100) \quad = \quad 20$$

นั่นก็คือ เราให้ x_2 แทนที่ x_1 แล้ว x_1 จะเป็น nonbasic variable ที่มีค่าเท่ากับขีดจำกัดบนของมันคือ 30 เรากำหนดด้วยเครื่องหมาย * จะได้ตารางที่ 3 ดังนี้ ($x_{22} = -1$ เป็น pivot)

				4*	2	2	0	0
x_4	0	70	10	2	0	2	1	1
x_2	2	−10	20	−1	1	−1	0	−1
P = 160			s_j	−2	2	−2	0	−2
			$c_j - s_j$	6	0	4	0	2

จากตารางที่ 3 นี้ เรามี nonbasic variable x_1 มีค่าเท่ากับขีดจำกัดบนคือ 30 แสดงว่าค่าของตัวแปรฐาน x_4 และ x_2 คำนวณได้จาก

$$x_4 = 70 - (2)(30) = 10$$

$$x_2 = (-10) - (-1)(30) = 20$$

นั่นก็คือ $U = \{1\}$, $\bar{b}_i = (10, 20)'$

พิจารณาผลที่ได้จากตารางที่ 3 นี้ จะเห็นว่า ค่าของ x_1 จะเพิ่มไม่ได้อีกแล้ว เนื่องจากมันมีค่าเท่ากับขีดจำกัดบนของมันอยู่แล้ว ขณะเดียวกันเราลดค่าของ x_1 ไม่ได้ เนื่องจาก $c_1 - s_1 = 6 > 0$ ซึ่งมีความหมายว่า การเปลี่ยนค่าของ x_1 จะทำให้ค่าของ P ลดลง แต่เมื่อพิจารณาค่าของ $c_j - s_j$ ของ nonbasic variables x_3 กับ x_5 จะเห็นว่ามีค่าเป็นบวก ในขณะที่ x_3 และ x_5 ต่างมีค่าเป็น 0 และ $c_3 - s_3$ เท่ากับ 4 เป็นค่าสูงสุด เราจึงตัดสินให้ x_3 เป็นตัวแปรฐานในตารางต่อไป ขั้นต่อไป ต้องมาพิจารณาว่า x_3 ควรจะมีค่าเท่าใด และแทนที่ตัวแปรฐานตัวใด

การพิจารณาเพิ่มค่าของ x_3 ยังคงเป็นลักษณะของกรณีที่ 1 ดังนั้น ค่าที่เป็นไปได้ของ x_3 คือ

$\frac{10}{2}$ เมื่อ $x_{13} > 0$, $\frac{100 - 20}{-(-1)}$ เมื่อ $x_{23} < 0$ และ 40 ซึ่งเป็นขีดจำกัดบนของ x_3

ค่าสูงสุด x_3 = ค่าต่ำสุด (5, 80, 40) = 5

สรุปได้ว่า ตารางที่ 4 เราให้ x_3 แทนที่ x_4 ได้ผลดังนี้

			4*	2	2	0	0
x_3	2	5	1	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_2	2	25	0	1	0	1	$-\frac{1}{2}$
P = 180		s_j	2	2	2	2	0
		$c_j - s_j$	2	0	0	-2	0

จากตารางที่ 4 นี้ จะเห็นว่า ค่าของ $c_j - s_j$ สอดคล้องตามเงื่อนไข (4.22) และ (4.23) แล้ว ซึ่งมีความหมายว่า คำตอบที่ได้จากตารางนี้เป็นคำตอบอุตมะแล้ว และเมื่อพิจารณาค่าของ

$c_5 - s_5$ จะเห็นว่ามีค่าเป็น 0 (ควรจะมีค่าน้อยกว่า 0) แสดงว่า ปัญหานี้มีคำตอบอุตมะ 2 ชุด โดยเหตุที่ x_5 เป็น nonbasic variable ไม่มีขีดจำกัดบน เราจึงพิจารณาค่าสูงสุดของ x_5 จากค่าต่ำสุดของ θ_i นั่นก็คือ

ค่าสูงสุด x_5 = ค่าต่ำสุด ($\frac{5}{1/2}$, $\frac{25}{-1/2}$ ค่าเป็นลบจึงไม่พิจารณา) = 10

แสดงว่า คำตอบอุตมะชุดต่อไปจะได้มาจากการกำหนดให้ x_5 แทนที่ x_3 ได้ผลดังตาราง

			4 *	2	2	0	0
x_5	0	10	2	0	2	1	1
x_2	2	30	1	1	1	1	0
P = 180		s_j	2	2	2	2	0
		$c_j - s_j$	2	0	0	−2	0

สรุปได้ว่า ปัญหานี้มีคำตอบอุตมะ 2 ชุด ชุดแรกมี $x_1 = 30, x_2 = 25, x_3 = 5$ นอกนั้นเป็น 0 และชุดที่ 2 มี $x_1 = 30$, $x_2 = 30$, $x_5 = 10$ นอกนั้นเป็น 0 โดยมี $P_{สูงสุด} = 180$

สรุปการหาคำตอบโดยใช้ SUB algorithm ได้ดังต่อไปนี้

ตารางที่	ตัวแปรฐาน x_i	c_i	c_j คำตอบฐาน	4 a_1	2 a_2	2 a_3	0 a_4	0 a_5	ค่าที่เป็นไปได้ของ x_k
1	x_4	0	60	1	1	1	1	0	60 ; 30
	x_5	0	10	1	−1	1	0	1	10
P = 0			s_j	0	0	0	0	0	
			$c_j - s_j$	4	2	2	0	0	
2	x_4	0	50	0	2	0	1	−1	25;
	x_1	4	10	1	−1	1	0	1	$\frac{30-10}{-(-1)}$; 100
P = 40			s_j	4	−4	4	0	4	
			$c_j - s_j$	0	6	−2	0	−4	

3	x_4	0	70 10	2	0	2	1	1	5; ; 40
	x_2	2	-10 20	-1	1	-1	0	-1	80
P = 160			s_j	−2	2	−2	0	−2	
			$c_j - s_j$	6	0	4	0	2	
4	x_3	2	5	$\overset{*}{1}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	10
	x_2	2	25	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	—
P = 180			s_j	2	2	2	2	0	
			$c_j - s_j$	2	0	0	−2	0	
5	x_5	0	10	$\overset{*}{2}$	0	2	0	1	
	x_2	2	30	1	1	1	1	0	
P = 180			s_j	2	2	2	2	0	
			$c_j - s_j$	2	0	0	−2	0	

ผลที่อ่านได้จากตาราง ชี้ให้เห็นว่า ปัญหานี้มีคำตอบอุตมะ 2 ชุด ชุดแรกมี $x_1 = 30$, $x_2 = 25$, $x_3 = 5$ นอกนั้นเป็น 0 ชุดที่สองมี $x_1 = 30$, $x_2 = 30$, $x_5 = 10$ นอกนั้นเป็น 0 โดยมี $P_{\text{สูงสุด}} = 180$

สำหรับปัญหาที่ต้องการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันเป้าหมาย จะมีวิธีดำเนินการแบบเดียวกัน แต่เปลี่ยนเครื่องหมายของ ส.ป.ส. ในฟังก์ชันเป้าหมาย เป็นตรงกันข้าม อาศัยข้อเท็จจริงที่ว่า

ค่าต่ำสุดของ P = ค่าสูงสุดของ (−P)

เราจึงสรุปได้ว่า

คำตอบที่เป็นไปได้ขั้นฐานจะเป็นคำตอบอุตมะ ถ้าค่าของ $c_j - s_j$ ของ nonbasic variables x_j สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

$$c_j - s_j \geqslant 0 \quad \text{ถ้า } x_j = 0 \qquad \text{..........(4.32)}$$

และ $$c_j - s_j \leqslant 0 \quad \text{ถ้า } x_j = u_j \qquad \text{..........(4.33)}$$

(เป็นการบ้านให้นักศึกษาพิสูจน์)

กรณีของปัญหานี้แสดงให้เห็นจริงได้ด้วยตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4.7

จงหาคำตอบอุตมะของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นต่อไปนี้ โดยใช้ SUB algorithm

หาค่าต่ำสุดของ P

$$= 8x_1 + 15x_2$$

โดยมีข้อจำกัด

$$5x_1 + 2x_2 \geqslant 80$$

$$3x_1 + 4x_2 \geqslant 96$$

$$2x_1 + 4x_2 \leqslant 128$$

$$x_1 \leqslant 20$$

$$x_2 \leqslant 24$$

และ $x_1, x_2 \geqslant 0$

วิธีทำ

เปลี่ยนข้อจำกัดหลักเป็นรูปมาตรฐาน โดยบวกด้านซ้ายด้วย $-x_3$, $-x_4$ และ x_5 ตามลำดับ ใช้ตัวแปรเทียม x_6 และ x_7 ในสมการข้อจำกัดที่ 1 และ 2 ตามลำดับ หาคำตอบด้วยวิธีการ Two - Phase จะได้ผลดังต่อไปนี้

Phase - I

ตารางที่	ตัวแปรฐาน x_i	c_i	c_j / คำตอบฐาน	0 a_1	0 a_2	0 a_3	0 a_4	0 a_5	1 a_6	1 a_7	ค่าที่เป็นไปได้ของ x_k
	x_6	1	80	5	2	-1	0	0	1	0	16
1	x_7	1	96	3	4	0	-1	0	0	1	32; 20
	x_5	0	128	2	4	0	0	1	0	0	64
	$P_1 = 176$		s_j	8	6	-1	-1	0	1	1	
			$c_j - s_j$	-8	-6	1	1	0	0	0	

2	x_1	0	16	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	0	40
	x_7	1	48	0	$\frac{14}{3}$	$\frac{2}{5}$	-1	0	$-\frac{3}{5}$	1	$\frac{120}{7}$; 24
	x_5	0	96	0	$\frac{16}{3}$	$\frac{2}{5}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	0	30
$P_1 = 48$			s_j	0	$\frac{14}{5}$	$\frac{3}{5}$	-1	0	$-\frac{3}{5}$	1	
			$c_j - s_j$	0	$-\frac{14}{5}$	$-\frac{3}{5}$	1	0	$\frac{8}{5}$	0	

ผลของตารางต่อไป เปลี่ยนเป็นตารางที่ 1 ของ Phase - II แล้วหาคำตอบที่ดีที่สุดต่อไป ปรากฏผลดังนี้

Phase - II

ตารางที่	ตัวแปรฐาน		c_j	8	15	0	0	0	ค่าที่เป็นไปได้
	x_i	c_i	คำตอบฐาน	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	ของ x_k
1	x_1	8	$\frac{64}{7}$	1	0	$-\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	—; 38
	x_2	15	$\frac{120}{7}$	0	1	$\frac{3}{14}$	$-\frac{5}{14}$	0	80
	x_5	0	$\frac{288}{7}$	0	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{8}{7}$	1	—
$P = \frac{2312}{7}$			s_j	8	15	$\frac{13}{14}$	$-\frac{59}{14}$	0	
			$c_j - s_j$	0	0	$-\frac{13}{14}$	$\frac{59}{14}$	0	

	x_3	0	-32	38	$-\frac{7}{2}^{*}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	
2	x_2	15	24	9	$\frac{3}{4}$	1	0	$-\frac{1}{4}$	0	
	x_5	0	32	52	-1	0	0	1	1	
$P = 295$			s_j		$\frac{45}{4}$	15	0	$-\frac{15}{4}$	0	
			$c_j - s_j$		$-\frac{13}{4}$	0	0	$\frac{15}{4}$	0	

สรุปได้ว่า ตารางนี้จะเป็นตารางสุดท้าย คำตอบอุตมะที่ได้คือ $x_1 = 20, x_2 = 9, x_3 = 38,$ $x_5 = 52$

ได้ค่า $P_{\text{ต่ำสุด}} = 295$

คำอธิบาย

1. ตารางที่ 1 และ 2 ใน Phase - I การหาค่าที่เป็นไปได้ของ x_k เป็นไปตามลักษณะของกรณีที่ 1 นั่นก็คือ เลือก x_1 ตาม (4.27a)
2. ตารางที่ 1 ของ Phase - II ปรับปรุงจากตารางที่ 3 ของ Phase - I (ในที่นี้ไม่ได้แสดงไว้) โดยเปลี่ยนค่า c_j กลับมาเป็น c_j ของฟังก์ชันเป้าหมายที่แท้จริง และตัดคอลัมน์ที่ 6 และ 7 ซึ่งเป็นของตัวแปรเทียม x_6 และ x_7 ตามลำดับ
3. จาก Phase - II

   ผลที่ได้จากตารางที่ 1 จะเห็นว่า $c_3 - s_3 = -13/14$ เป็นค่าลบต่ำสุด แสดงว่า หากเราเพิ่มค่าของ x_3 จะทำให้ค่าของ P ลดลง 13/14 ต่อหนึ่งหน่วยของ x_3 เมื่อเราพิจารณาค่าที่ควรจะเพิ่มขึ้นได้มากที่สุดของ x_3 จะเห็นว่า ค่าที่เป็นไปได้ของ x_3 ก็คือ (อาศัยสูตรที่ 4.27a)

   $$\frac{20 - (64/7)}{-(-2/7)} = 38 \text{ เมื่อ } x_{13} < 0 \text{ และ } \frac{120/7}{3/14} = 80 \text{ เมื่อ } x_{23} > 0$$

   ค่ามากที่สุดของ x_3 โดยไม่ทำให้ตัวแปรฐานอื่นเป็นลบ เท่ากับ 38 สรุปว่า เราจะให้ x_3 แทนที่ x_1 และ $x_{13} = -2/7$ เป็น pivot

   ตารางที่ 2 จะมี x_1 เป็น nonbasic variable ที่มีค่าเท่ากับค่าสูงสุดของมัน คือ 20 $U = \{1\}$ ดังนั้นค่าของตัวแปรฐานจะคำนวณได้ดังต่อไปนี้

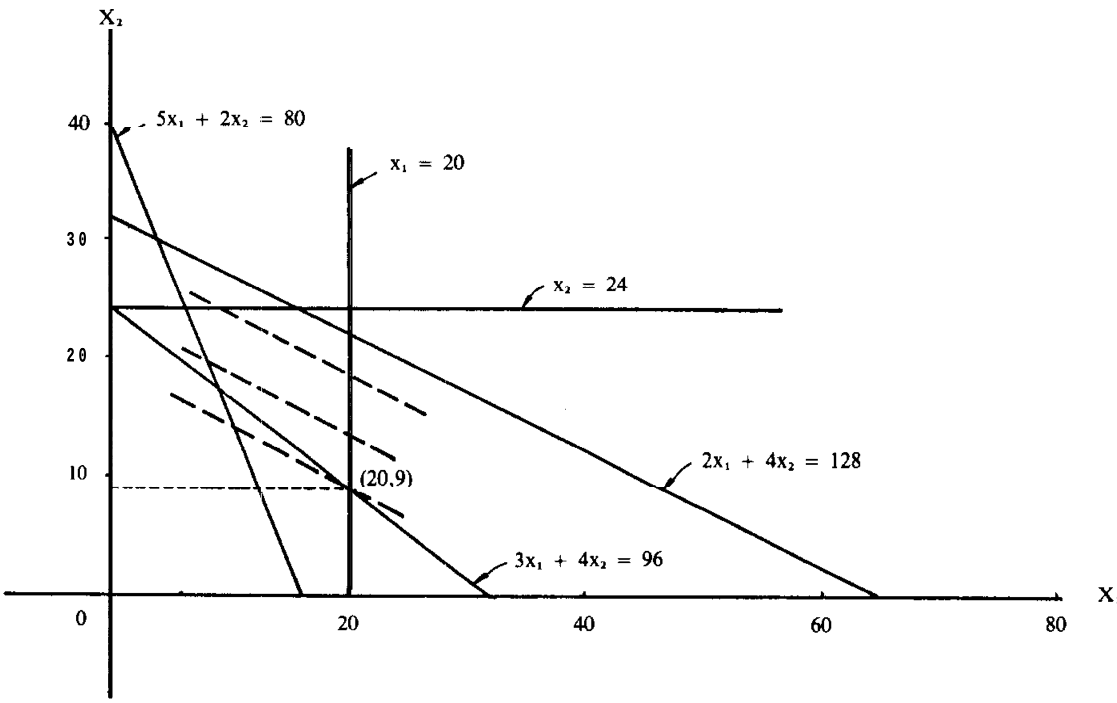
ค่าของ $x_3 \;=\; -32 - (-7/2)(20) \;=\; 38$

ค่าของ $x_2 \;=\; 24 - (3/4)(20) \;=\; 9$

ค่าของ $x_5 \;=\; 32 - (-1)(20) \;=\; 52$

เมื่อพิจารณาค่าของ $c_j - s_j$ ในตารางนี้ จะเห็นว่าสอดคล้องกับเงื่อนไข (4.32) และ (4.33) แล้ว จึงสรุปได้ว่าผลลัพธ์ที่ได้จากตารางนี้ เป็นคำตอบที่ดีที่สุดแล้ว

โดยเหตุที่ปัญหาในตัวอย่างนี้ มีตัวแปรควบคุมได้ 2 ตัว ดังนั้น เราสามารถตรวจสอบคำตอบได้โดยการเขียนกราฟ ดังต่อไปนี้



จากกราฟ อ่านได้ว่า จุด (20, 9) เป็นจุดอุตมะ เราแทนค่า $x_1 = 20$ และ $x_2 = 9$ ในฟังก์ชัน P และในข้อจำกัดที่ 1, 2 และ 3 ตามลำดับ สรุปได้ว่า คำตอบอุตมะของปัญหานี้ ก็คือ

$x_1 = 20,\ x_2 = 9,\ x_3 = 38,\ x_4 = 0$ และ $x_5 = 52$ มี $P_{\text{ต่ำสุด}} = 295$

แสดงว่า คำตอบที่ได้ถูกต้องแล้ว

เท่าที่กล่าวมาแล้วนั้น เป็นกรณีของปัญหาที่มีขีดจำกัดบนของตัวแปร ปัญหาบางประเภทอาจจะมีขีดจำกัดล่างของตัวแปร ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$x_j \geqslant l_j \geqslant 0 \qquad \text{..........(4.34)}$$

เรียกข้อจำกัดเหล่านี้ว่า lower bounds on the variables

กระบวนการในการหาคำตอบต่อปัญหาประเภทนี้ ทำได้ง่ายกว่าปัญหาที่มีขีดจำกัดบนมาก เราเพียงแต่กำหนดตัวแปรใหม่ในเทอมของ x_j และ l_j แล้วแทนที่ใน (4.15) กับ (4.16) จะได้ปัญหาที่มีตัวแบบรูปเดิม เปลี่ยนแปลงเฉพาะค่าคงที่ b_j เท่านั้น ซึ่งเราจะหาคำตอบโดยวิธีการซิมเพลกซ์ เมื่อได้คำตอบอุตมะแล้ว เปลี่ยนกลับตามเงื่อนไขเดิม จะได้คำตอบอุตมะของปัญหานั้น

ให้เรามาพิจารณาการเปลี่ยนรูปตัวแปรดังกล่าวนี้

จาก (4.34) เรานิยามตัวแปรใหม่ ดังนี้

$$y_j = x_j - l_j \geqslant 0 \quad \text{หรือ } x_j = y_j + l_j \geqslant 0$$

ค่าของ x_j และ y_j จะแปรผันตรงกัน และต่างมีค่าเป็นบวกเสมอ

เราแทนค่า $x_j = y_j + l_j$ ลงใน (4.15) จะได้ว่า

$$P = \sum_{j=1}^{n+m} c_j(y_j + 1,) = \mathbf{P^*} + K$$

เมื่อ

$$\mathbf{P^*} = \sum_{j=1}^{n+m} c_j y_j \text{ และ } K = \sum_{j=1}^{n+m} c_j l_j = \text{ค่าคงที่}$$

ค่าของ P จะสูงสุด (หรือต่ำสุด) ได้ ก็ต่อเมื่อ ค่าของ P* สูงสุด (หรือต่ำสุด)

แทนค่า $x_j = y, + 1,$ ลงใน (4.16) จะได้ว่า

$$\sum_{,=I}^{n+m} a_{ij}(y_j + l_j) = b,$$

หรือ

$$\sum_{j=1}^{n+m} a_{ij} y_j = b_i - \sum_{j=1}^{n+m} a_{ij} l_j$$

กำหนด

$$b_i^* = b_i - \sum_{j=1}^{n+m} a_{ij} l_j$$

ตัวแบบ (4.15), (4.16) และ (4.34) จะกลายเป็น

จงหาค่าสูงสุด (หรือค่าต่ำสุด) ของ $\mathbf{P^*}$ =

$$\sum_{j=1}^{n+m} c_j y_j \qquad \text{..........(4.35)}$$

โดยมีข้อจำกัด

$$\sum_{j=1}^{n+m} a_{ij} y_j \quad = \quad b_i^* \qquad \text{..........(4.36)}$$

และ $\quad y_j \geq 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n+m$ ....(4.37)

จะเห็นว่า เราจะได้ตัวแบบรูปเดิม เปลี่ยนแปลงเฉพาะค่าคงที่ b_i เท่านั้น

เมื่อเราได้คำตอบอุตมะของปัญหาที่มีตัวแบบดังกล่าว เราจะได้คำตอบอุตมะของปัญหาเดิมด้วยจาก

$$P_{\text{สูงสุด (หรือต่ำสุด)}} \quad = \quad P^*_{\text{สูงสุด (หรือต่ำสุด)}} + K$$

และ $\quad x_j \quad = \quad y_j + l_j \quad$ ทุกค่า x_j ที่มีขีดจำกัดล่าง l_j

เพื่อความเข้าใจดียิ่งขึ้น เรามาศึกษาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4.8

จงหาคำตอบอุตมะของปัญหาต่อไปนี้ โดยการเปลี่ยนตัวแปรที่มีขีดจำกัดล่าง แล้วตรวจสอบคำตอบที่ได้ด้วยวิธีกราฟ

หาค่าต่ำสุดของ P =

$$4x_1 + 7x_2$$

โดยมีข้อจำกัด

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 60 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 162 \\ 5x_1 + 3x_2 &\geq 150 \\ x_1 &\geq 10 \\ x_2 &\geq 20 \end{aligned}$$

วิธีทำ

กำหนด $\quad y_1 = x_1 - 10$ และ $y_2 = x_2 - 20$

เปลี่ยนตัวแบบในเทอมของ y_1, y_2 ทำให้เป็นรูปมาตรฐาน

หาค่าต่ำสุดของ $P^* = 4y_1 + 7y_2 + My_6$

โดยมีข้อจำกัด

$$\begin{aligned}
y_1 + y_2 + y_3 \quad &= 60-10-20 &= 30 \\
2y_1 + 3y_2 \quad + y_4 \quad &= 162 - 2(10) - 3(20) &= 82 \\
5y_1 + 3y_2 \quad - y_5 + y_6 &= 150 - 5(10) - 3(20) &= 40
\end{aligned}$$

และ $y_j \ (j = 1, 2, \ldots, 6) \geqslant 0$

หาคำตอบโดยใช้ Big - M method ได้ผลดังต่อไปนี้

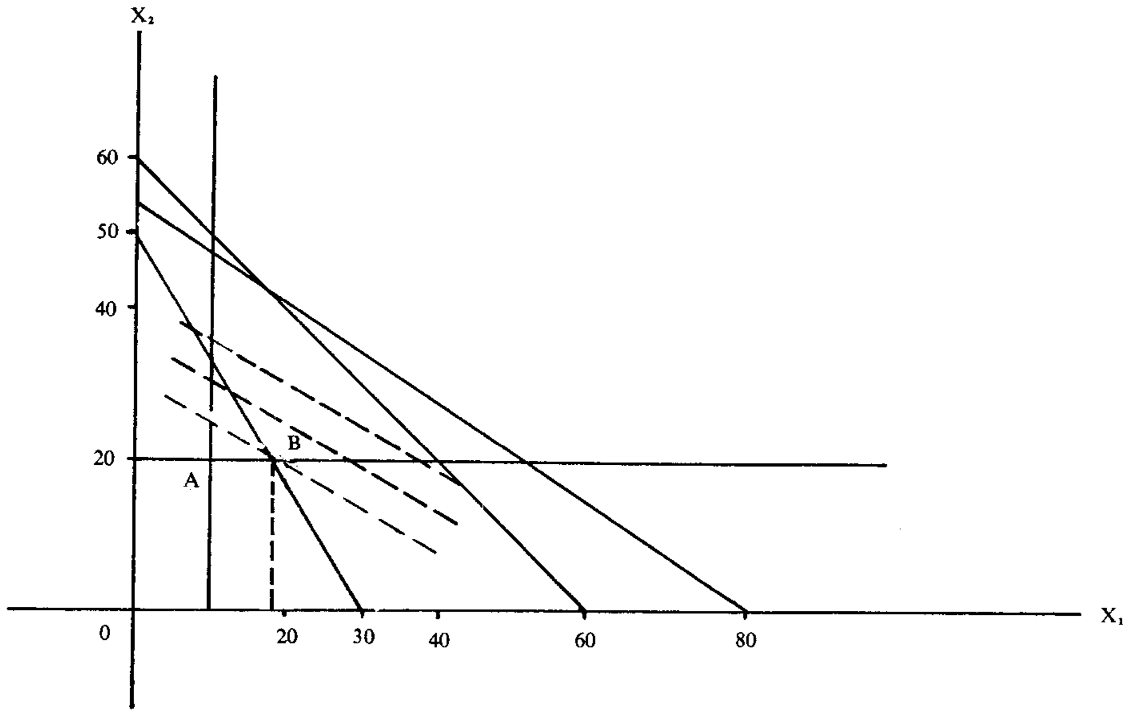
ตารางที่	ตัวแปรฐาน		c_j	4	7	0	0	0	M	ค่าที่เป็นไปได้
	y_i	c_i	คำตอบฐาน	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	θ_i
	y_3	0	30	1	1	1	0	0	0	30
1	y_4	0	82	2	3	0	1	0	0	41
	y_6	M	40	5	3	0	0	-1	1	8
P* = 40M			s_j	5M	3M	0	0	-M	M	
			$c_j - s_j$	-5M	7 – 3M	0	0	M	0	
	y_3	0	22	0	$\frac{2}{5}$	1	0	$\frac{}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$
2	y_4	0	66	0	$\frac{9}{5}$	0	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	
	y_1	4	8	1	$\frac{3}{5}$	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	
P* = 32			s_j	4	12 3	0	0	$-\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	
			$c_j - s_j$	0	$\frac{23}{5}$	0	0	$\frac{4}{5}$	$M-\frac{4}{5}$	

ผลที่อ่านได้จากตาราง แสดงว่า $y_1 = 8, y_2 = 0, y_3 = 22, y_4 = 66, y_5 = 0$ มี $P^*_{\text{ต่ำสุด}} = 32$ เป็นคำตอบอุตมะ เราจึงสรุปได้ว่า คำตอบอุตมะของปัญหานี้คือ

$$x_1 = 8 + 10 = 18,\ x_2 = 20,\ x_3 = 22,\ x_4 = 66,\ x_5 = 0$$

และ $P_{\text{ต่ำสุด}} = 32 + (4)(10) + (7)(20) = 212$

แสดงให้เห็นจริงได้ด้วยกราฟ ดังต่อไปนี้



จากกราฟจะเห็นว่า จุด (18, 20) เป็นจุดอุตมะ เมื่อเราแทนค่าเหล่านี้ในข้อจำกัดที่ 1, 2 และ 3 และ ในฟังก์ชันเป้าหมาย จะได้คำตอบอุตมะ

$x_1 = 18,\ x_2 = 20,\ x_3 = 22,\ x_4 = 66,\ x_5 = 0$

มีค่า $P_{\text{ต่ำสุด}} = (4)(18) + (7)(20) = 212$

สรุปได้ว่า คำตอบที่ได้นั้นถูกต้องแล้ว

เปรียบเทียบคำตอบจากตารางและกราฟ จะเห็นว่า คำตอบในตารางที่ 1 แสดงด้วยกราฟก็คือคำตอบที่จุด A ซึ่งต่างก็เป็น infeasible solution เนื่องจากในตารางที่ 1 มีตัวแปรเทียม y_6 มีค่ามากกว่า 0 และในกราฟเป็นจุดที่อยู่นอกบริเวณคำตอบที่เป็นไปได้ สำหรับคำตอบที่ได้จากตารางที่ 2 เปรียบเทียบกับกราฟก็คือจุด B นั่นก็คือคำตอบอุตมะเป็นคำตอบเดียวกัน

ปัญหาบางประเภทอาจจะมีทั้งขีดจำกัดบนและขีดจำกัดล่างของตัวแปร กรณีเช่นนี้ เราจะใช้วิธีการของขีดจำกัดล่าง คือเปลี่ยนรูปตัวแปรใหม่ที่ไม่มีขีดจำกัดล่าง แล้วจึงใช้วิธีดำเนินการตามแบบของปัญหาที่มีขีดจำกัดบน เมื่อได้คำตอบอุตมะแล้ว ให้เปลี่ยนกลับไปหาคำตอบอุตมะของปัญหาเดิม

หมายเหตุ

1. การทำตารางซิมเพลกซ์ อาจจะเขียนฟังก์ชัน P ในรูปสมการ (0) และทุก ๆ สมการจะแสดงความสัมพันธ์เฉพาะตัวแปรฐานกับตัวแปรนอกฐานเท่านั้น

2. กรณีที่มีค่าสูงสุดของตัวแปร อาจจะใช้วิธีการพิจารณา $c_j - s_j$ หรือ x_{oj} เป็นรูปแบบเดียวกัน ไม่ว่า x_j นั้นจะมีค่าสูงสุดหรือไม่ ก็ได้ กล่าวคือ

เมื่อเราได้

$c_k - s_k$ = ค่าสูงสุด $(c_j - s_j > 0)$

หรือ x_{ok} = ค่าต่ำสุด $(x_{oj} < 0)$

เลือก x_k เป็นตัวแปรฐานใหม่

2.1) ถ้าค่าสูงสุดของ $x_k = u_k$

ให้เปลี่ยน x_k เป็น $\bar{x}_k$ (ซึ่งมีความหมายว่า $x_k = u_k$)

x_{ik} เป็น $-x_{ik}$

และ x_{io} เป็น $x_{io} - x_{ik}u_k$

ทุกค่า $i = 0, 1, \ldots . m$

2.2) ถ้าค่าสูงสุดของ $x_k = \dfrac{x_{lo} - u_l}{x_{lk} < 0}$

ทำตารางต่อไป โดยใช้ x_k เป็นตัวแปรฐานแทนที่ x_l

แล้วเปลี่ยน x_l เป็น $\bar{x}_l$

x_{il} เป็น $-x_{il}$

x_{io} เป็น $x_{io} - x_{il}u_l$

ตัวอย่างที่ 4.9

โรงงานกำหนดการผลิตสินค้า A, B และ C ในเดือนหน้าว่า จะต้องผลิตให้ได้สินค้า B และ C แต่ละชนิด อย่างน้อยที่สุด 50 หน่วย สำหรับสินค้า A ไม่กำหนดปริมาณ ในการผลิตสินค้าแต่ละชนิด ต้องใช้วัตถุดิบ M_1 วัตถุดิบ M_2 และแรงงาน โดยมีรายละเอียดการผลิต และกำไร (ไม่รวมค่าแรงงาน) ดังนี้

สินค้า	M_1 (กก./หน่วย)	M_2 (กก./หน่วย)	แรงงาน (ชม./หน่วย)	กำไร (บาท/หน่วย)
A	6	16	2	175
B	12	25	3	275
C	4	7	1	100

ในเดือนหน้า โรงงานมีวัตถุดิบ M_1 2800 กิโลกรัม วัตถุดิบ M_2 6700 กิโลกรัม และมีแรงงาน 700 ชั่วโมง คิดค่าแรงงาน 30 บาท/ชั่วโมง และเพิ่มแรงงานนอกเวลา 120 ชั่วโมง เป็นอัตราชั่วโมงละ 40 บาท (โรงงานจะจ่ายให้ตามเวลาที่ทำงานจริง) จงหาแผนการผลิตที่ดีที่สุด

วิธีทำ กำหนดว่า ในเดือนหน้าโรงงานจะ

ผลิตสินค้า A $= x_1$ หน่วย

ผลิตสินค้า B $= x_2$ หน่วย

ผลิตสินค้า C $= x_3$ หน่วย

และ จะทำงานล่วงเวลา $= x_4$ ชั่วโมง

ดังนั้น ค่าแรงงานทั้งหมด $= 30\,(2x_1 + 3x_2 + x_3) + 10x_4$

กำไรรวม $= 175x_1 + 275x_2 + 100x_3 - 60x_1 - 90x_2 - 30x_3 - 10x_4$

ตัวแบบจำลอง :

ค่าสูงสุด $P = 115x_1 + 185x_2 + 70x_3 - 10x_4$

โดยมีข้อจำกัด

$$\begin{aligned}
6x_1 + 12x_2 + 4x_3 &\leqslant 2800 \\
16x_1 + 25x_2 + 7x_3 &\leqslant 6700 \\
2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 &\leqslant 700 \\
x_2 &\geqslant 50 \\
x_3 &\geqslant 50 \\
x_4 &\leqslant 120 \\
x_1,\ x_4 &\geqslant 0
\end{aligned}$$

ทำข้อจำกัด 1, 2 และ 3 เป็นสมการ โดยใช้ตัวแปร slack x_5, x_6 และ x_7 ตามลำดับ

ใช้วิธีการของค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของตัวแปร จะได้

ตารางที่ 1

		x_1	x_2'	x_3'	x_4	ค่าของ θ_i
P	185 (50) + 70 (50)	−115	−185	−70	10	ค่าของ θ_i
x_5	2800 − 12 (50) − 4 (50)	6	12	4	0	$\frac{2000}{12}$
x_6	6700 − 25 (50) − 7 (50)	16	25	7	0	$\frac{5100}{25}$
x_7	700 − 3 (50) − 50	2	3	1	−1	$\frac{500}{3}$
	u_j	∞	∞	∞	120	

ตารางที่ 2

		x_1	x_5	x_3'	x_4	
P	$43583\frac{1}{3}$	$-\frac{45}{2}$	$\frac{185}{12}$	$-\frac{25}{3}$	10	ค่าของ θ_i
x_2'	$\frac{500}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1000}{3}$
x_6	$\frac{2800}{3}$	$\frac{7}{2}$	$-\frac{25}{12}$	$-\frac{4}{3}$	0	$\frac{800}{3}$
x_7	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	−1	0 ←
	u_j	∞	∞	∞	120	

ตารางที่ 3.1

		x_7	x_5	x_3'	x_4	
P	$43583\frac{1}{3}$	45	$\frac{25}{a}$	$-\frac{25}{3}$	-35	ค่าของ θ_i
x_2'	$\frac{500}{3}$	-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{500}{3}$
x_6	$\frac{2800}{3}$	−7	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	7	$\frac{400}{3}$
x_1	0	2	$-\frac{1}{2}$	0	-2	−
	u_j	∞	∞	∞	120	

ตารางที่ 3.2

		x_7	x_5	x_3'	$\bar{x}_4$	
P	$47783\frac{1}{3}$	45	$\frac{25}{6}$	$-\frac{25}{3}$	35	ค่าของ θ_i
x_2	$\frac{140}{3}$	-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	-1	140
x_6	$\frac{280}{3}$	-7	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	-7	–
x_1	240	2	$-\frac{1}{2}$	0	2	–
	u_j	∞	∞	∞	120	

ตารางที่ 4

		x_7	x_5	x_2'	$\bar{x}_4$
P	48950	20	$\frac{25}{2}$	25	10
x_3'	140	-3	1	3	-3
x_6	280	-11	1	4	-11
x_1	240	2	$\frac{1}{2}$	0	2

แผนการผลิตที่ดีที่สุดของโรงงานในเดือนหน้า คือ

ผลิตสินค้า A 240 หน่วย ผลิตสินค้า B 50 หน่วย ผลิตสินค้า C 190 หน่วย ต้องเพิ่มแรงงานนอกเวลา 120 ชั่วโมง ซึ่งคาดว่าจะได้กำไรสูงสุด (รวมค่าแรงงานแล้ว) 48,950 บาท

4.6 บทสรุป

เราสรุปขั้นตอนของการหาคำตอบต่อปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น ที่ต้องการหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันเป้าหมาย ได้ดังต่อไปนี้

1. พิจารณาปัญหาว่ามีขีดจำกัดบน และ/หรือ ขีดจำกัดล่าง ของตัวแปรควบคุมได้ หรือไม่
   1.1 ถ้ามีขีดจำกัดบนของตัวแปร ให้ทำต่อข้อ (12)
   1.2 ถ้ามีขีดจำกัดล่างของตัวแปร ให้เปลี่ยนค่าคงที่ b_i เป็น

$$b_i - \sum_{j \in L} a_{ij} l_j$$

   เมื่อ L เป็นเซทของดัชนีตัวแปรที่มีขีดจำกัดล่าง

   แล้วทำต่อข้อ (2)

   1.3 ถ้ามีทั้งขีดจำกัดบนของตัวแปรและขีดจำกัดล่างของตัวแปร ให้เปลี่ยนค่าคงที่ b_i เป็น

$$b_i - \sum_{j \in L} a_{ij} l_j$$

   แล้วทำต่อข้อ (12)

   1.4 ถ้าไม่มี ให้ทำต่อข้อ (2)

2. เปลี่ยนตัวแบบเป็นรูปมาตรฐาน (ใช้ตัวแปรเทียมถ้าจำเป็น)

3. เขียนตารางซิมเพลกซ์ของคำตอบชุดแรก กำหนด $x_{io} = b_i$ และ $x_{ij} = a_{ij}$

4. คำนวณค่า

$$P = \Sigma c_i x_{io} \quad , \quad s_j = \Sigma c_i x_{ij}$$

   หาค่า c, s,

5. ตรวจสอบค่าของ $c_j - s_j$
   5.1 ถ้า $c_j - s_j \leqslant 0$ หมดทุกตัว และ

   5.1.1 $c_j - s_j$ ของ nonbasic variables x_j มีค่าน้อยกว่า 0 หมดทุกตัว แสดงว่าเราได้คำตอบอุตมะแล้ว

   ถ้าเป็นกรณีของข้อ (1.2) ให้เปลี่ยนกลับไปหาคำตอบเดิม กล่าวคือ

$$P = P^* + \sum_{j \in L} c_j l_j \text{ และ } x_j = y_j + l_j$$

5.1.2 หาก $c_j - s_j$ ของ nonbasic variables x_j บางตัวมีค่าเป็น 0 แสดงว่าปัญหานี้มีคำตอบอุตมะมากกว่า 1 ชุด (alternative optimal solutions)

5.1.3 หากคำตอบอุตมะที่ได้ประกอบด้วยตัวแปรเทียมที่มีค่ามากกว่า 0 แสดงว่าปัญหานี้มี infeasible solutions

5.2 หาก $c_j - s_j$ ของ nonbasic variables x_j บางตัว มีค่ามากกว่า 0 ให้ทำต่อข้อ (6)

6. หาค่าสูงสุดของ $c_j - s_j$ สมมติได้

$$c_k - s_k = \text{ค่าสูงสุด } (c_j - s_j) , \quad c_j - s_j > 0$$

แสดงว่า หากเราเพิ่มค่าของ x_k จะทำให้ค่าของ P เพิ่มขึ้นอีก $c_k - s_k$ ต่อหนึ่งหน่วยของ x_k

7. ตรวจสอบค่า x_{ik}

7.1 ถ้า $x_{ik} \leqslant 0$ ทุก ๆ $i = 1, 2, \ldots . m$ แสดงว่า ปัญหานี้มี unbounded solution

7.2 ถ้ามี $x_{ik} > 0$ ให้ทำต่อข้อ (8)

8. คำนวณค่า $\theta_i = x_{io}/x_{ik}$, $x_{ik} > 0$

9. เลือกค่า θ_i ที่น้อยที่สุด

9.1 ถ้า

$$\theta_r = \frac{x_{ro}}{x_{rk}} = \text{ค่าต่ำสุด}_i \ \frac{x_{io}}{x_{ik}} , \quad x_{ik} > 0$$

และ x_{ro} เป็นคำตอบของตัวแปรฐาน x_1 ทำต่อข้อ (10)

9.2 ถ้ามี θ_i ที่ให้ค่าต่ำสุดมากกว่า 1 ให้ทำต่อข้อ (11)

10. เขียนตารางใหม่

ให้ x_k แทนที่ x_1 ในแถว r

คำนวณค่าคำตอบฐาน x'_{io} และ ส.ป.ส. x'_{ij} กำหนดว่า

$$x'_{ro} = x_{ro}/x_{rk} , \quad x'_{rj} = x_{rj}/x_{rk}$$

และ

$$x'_{io} = x_{io} - \frac{x_{ik}x_{ro}}{x_{rk}} , \quad x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{ik}x_{rj}}{x_{rk}} , \ i \neq r$$

ทำต่อข้อ (4) ในที่นี้เราจะมี $x'_{io} = x_{io}$ และ $x'_{ij} = x_{ij}$

1. คำนวณอัตราส่วนระหว่าง x_{ij} กับ x_{ik} เฉพาะ i ที่มี θ_i ต่ำสุดเหมือนกัน โดยเริ่มจาก basic column j = 1 ถ้า

$$x_{rj}/x_{rk} \quad = \quad \text{ค่าต่ำสุด } (x_{ij}/x_{ik}) \text{ สำหรับ i ที่มี } \theta_i \text{ ต่ำสุด}$$

เขียนตารางใหม่ ตามวิธีการในข้อ (10)
ถ้ายังหาค่าอัตราส่วนที่ต่ำสุดเพียงคู่เดียวไม่ได้ ให้คำนวณหาอัตราส่วนใหม่จาก basic column j ถัดไป ทำเช่นนี้ไปเรื่อยจนกว่าจะได้อัตราส่วนที่มีค่าต่ำสุดเพียงคู่เดียว

12. กระบวนการในการคำนวณสำหรับปัญหาที่ขีดจำกัดบน
เขียนตารางซิมเพลกซ์ ภายใต้ข้อจำกัดสำคัญ

I คำนวณค่า $c_j - s_j^*$ พิจารณาค่า $c_j - s_j^*$ ของ nonbasic variables x_j กำหนดว่า

$$c_j - s_j^* = c_j - s_j \qquad \text{หาก } x_j = 0$$

และ
$$c_j - s_j^* = -(c_j - s_j) \qquad \text{หาก } x_j = u_j$$

1. ถ้าทุกค่าของ $c_j - s_j^*$ น้อยกว่าหรือเท่ากับ 0 แสดงว่าคำตอบที่ได้เป็นคำตอบอุตมะแล้ว ให้ทำต่อข้อ III
2. ถ้ามี $c_j - s_j^* > 0$ ให้หาค่าที่มากที่สุด สมมติ

2ก $c_k - s_k = \text{ค่าสูงสุด}_j(c_j - s_j^*)$ และ $x_k = 0$
ให้ทำต่อข้อ II (1)

2ข $c_k - s_k^* = \text{ค่าสูงสุด } (c_j - s_j^*)$ และ $x_k = u_k$
เปลี่ยนค่า x_{io} เป็น

$$x_{io} + x_{ik}u_k \qquad \text{ทุก ๆ } i = 1, 2, \ldots, m$$

เอาเครื่องหมาย * ออกจากคอลัมน์ k ทำต่อข้อ II (2)

II (1) หาค่าต่ำสุดของ $\left(\frac{x_{po}}{x_{pk}}, \frac{u_q - x_{qo}}{-x_{qk}}, u_k\right)$

1ก ถ้าค่าต่ำสุดคือ x_{po}/x_{pk} และ x_{po} เป็นคำตอบของตัวแปรฐาน x_p เขียนตารางใหม่ให้ x_k แทนที่ x_p เปลี่ยนแปลงตารางตามวิธีการในข้อ (10) ทำข้อ (I) ต่อไป

1ข ถ้าค่าต่ำสุดคือ $\frac{u_q - x_{qo}}{-x_{qk}}$ และ x_{qo} เป็นคำตอบของตัวแปรฐาน x_q เขียนตารางใหม่ ให้ x_k แทนที่ x_q เปลี่ยนแปลงตารางตามวิธีการข้อ (10) (ในที่นี้ pivot จะเป็นค่าลบ) ใส่เครื่องหมาย * ที่คอลัมน์ q ภายหลังการเปลี่ยนตาราง ให้เอา $x'_{iq}u_q$ ลบออกจาก x'_{io} ทุก ๆ i = 1, 2, ..., m ทำข้อ I ต่อไป

1ค ถ้าค่าต่ำสุดคือ u_k ใส่เครื่องหมาย * ที่คอลัมน์ k เอา $x_{ik}u_k$ ลบออกจาก x_{io} ทุก ๆ i = 1, 2, ..., m ทำต่อข้อ I

(2) หาค่าสูงสุดของ $(\frac{x_{po} - u_p}{x_{pk}}, \frac{x_{qo}}{x_{qk}}, 0)$

2ก ถ้าค่าสูงสุดคือ $\frac{x_{po} - u_p}{x_{pk}}$ ทำเช่นเดียวกับวิธีการข้อ (1ข)

2ข ถ้าค่าสูงสุดคือ x_{qo}/x_{qk} ทำเช่นเดียวกับวิธีการข้อ (1ก)

2ค ถ้าค่าสูงสุดเป็น 0 กลับไปทำข้อ I

III อ่านผลที่ได้จากตาราง จากคำตอบของตัวแปรฐาน สำหรับตัวแปรที่ไม่เป็นตัวแปรฐาน จะมีค่าเป็น 0 ถ้า nonbasic column ของตัวแปรไม่มีเครื่องหมาย * และจะมีค่าเป็น u_j ถ้าคอลัมน์นั้นมีเครื่องหมาย *

แบบฝึกหัดที่ 4

1. ผลที่ได้จากตารางซิมเพลกซ์ แสดงคำตอบฐาน x'_{io} และ ส.ป.ส. x'_{ij} ดังนี้

คำตอบฐาน	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
40	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$
36	0	0	0	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$
60	3	-1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$
30	-2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$

จงพิจารณาว่าปัญหานี้จะมีคำตอบอย่างไร กำหนดเป้าหมายของฟังก์ชัน

1.1 หาค่าสูงสุดของ : $18x_1 - 10x_2 + 24x_3 + 10x_4$

1.2 หาค่าสูงสุดของ : $24x_1 - 19x_2 + 30x_3 + 9x_4$

2. ในรายการครึ่งชั่วโมงทางทีวีรายการหนึ่ง ประกอบด้วยรายการเกมส์สนุก รายการของตัวตลก และนักร้อง โดยที่จะต้องมีรายการโฆษณาอย่างน้อยที่สุด 3 นาที แต่ไม่เกิน 6 นาที รายการเกมส์จะใช้เวลาอย่างน้อยที่สุด 2 เท่าของรายการนักร้อง รายการแสดงของตัวตลกใช้เวลาไม่เกินเวลารายการของเกมส์และนักร้องรวมกัน จากการสัมภาษณ์ผู้ชม สรุปผลได้ว่า ในแต่ละนาทีของรายการเกมส์ ตัวตลก และนักร้อง สามารถเรียกผู้เข้าชมได้ 40, 50 และ 60 คน ตามลำดับ จงหาเวลาที่จะใช้ในการแสดงแต่ละรายการ ที่จะทำให้มีจำนวนผู้เข้าชมมากที่สุด

ถ้ากำหนดว่า เวลาที่ใช้ในการโฆษณามีได้อย่างมากที่สุด 6 นาที และในรายการเกมส์ การแสดง และร้องเพลง จะต้องเสียค่าเช่าและค่าใช้จ่ายอื่น ๆ โดยเฉลี่ยนาทีละ 2,000 1,200 และ 800 บาท ตามลำดับ สำหรับการโฆษณาไม่ต้องเสีย ผู้จัดรายการควรจัดแบ่งเวลาการแสดงอย่างไร จึงจะทำให้เขาเสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด

3. อาจารย์ในภาควิชาสถิติ ประกอบด้วยศาสตราจารย์ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ และอาจารย์ โดยมีเงื่อนไขว่า จะต้องมีจำนวนศาสตราจารย์และผู้ช่วยรวมกัน ไม่เกินจำนวนอาจารย์ จำนวนชั่วโมงสอนต่อสัปดาห์ของศาสตราจารย์ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ และอาจารย์ เท่ากับ 6, 8 และ 10 ชั่วโมงตามลำดับ มหาวิทยาลัยต้องการให้ภาควิชา จัดการสอนอย่างน้อยที่สุด 480 ชั่วโมงต่อสัปดาห์ เงินค่าสอนของศาสตราจารย์ ผู้ช่วยและอาจารย์ ในแต่ละสัปดาห์เท่ากับ 2,250 1,875 และ 1,500 บาท ตามลำดับ มหาวิทยาลัยมีงบประมาณค่าสอนของภาควิชานี้อย่างมากที่สุด 112,500 บาทต่อสัปดาห์

3.1 จงหาว่าควรจะมีจำนวนอาจารย์ในภาคสถิติแต่ละระดับ เป็นจำนวนเท่าใด จึงจะทำให้ภาควิชานี้มีผลงานทางวิจัยมากที่สุด หากศาสตราจารย์ ผู้ช่วยและอาจารย์มีผลงานวิจัย 3, 2 และ 1 เรื่องต่อปี ตามลำดับ

3.2 หากมีเงื่อนไขเพิ่มเติมว่า จะต้องมีจำนวนศาสตราจารย์และอาจารย์รวมกัน อย่างน้อยที่สุด 2 เท่าของจำนวนผู้ช่วยศาสตราจารย์ ควรจะมีจำนวนอาจารย์ในแต่ละระดับเท่าใด จึงจะทำให้ภาควิชานี้ใช้งบประมาณต่อสัปดาห์น้อยที่สุด

4. โรงงานอุตสาหกรรมผลิตสินค้าวาย ได้ผลิตสินค้าวายมา 4 แบบด้วยกัน โดยกำหนดว่าจะผลิตแต่ละแบบให้ได้จำนวนอย่างน้อยที่สุด 50, 120, 100 และ 60 หน่วย ตามลำดับ รายละเอียดเกี่ยวกับการผลิตมีดังต่อไปนี้

	สินค้าวาย				ปริมาณที่มีอยู่ของ
	แบบ 1	แบบ 2	แบบ 3	แบบ 4	ปัจจัยการผลิต
แรงงาน (ชม./หน่วย)	2	2	1	3	1,020 ชั่วโมง
วัตถุดิบ ก (กก./หน่วย)	4	3	2	2	1,720 กิโลกรัม
วัตถุดิบ ข (กก./หน่วย)	1	2	1	2	1,000 กิโลกรัม
กำไร (บาท/หน่วย)	50	25	15	40	

โรงงานควรจะวางแผนการผลิตอย่างไรจึงจะดีที่สุด ภายหลังการผลิตตามแผนนี้แล้ว คาดว่าจะมีแรงงานวัตถุดิบ ก และวัตถุดิบ ข เหลืออยู่ในปริมาณเท่าใด

5. กำหนดปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นต่อไปนี้

5.1 หาค่าสูงสุดของ $6x_1 + 5x_2$

โดยมีข้อจำกัด

$$x_1 + 2x_2 \leqslant 8$$

$$3x_1 + x_2 \leqslant 15$$

$$x_1 + x_2 \leqslant 5$$

และ $x_1, x_2 \geqslant 0$

จงแสดงให้เห็นจริงว่า ปัญหานี้มี degenerate optimal solution โดย

5.1.1 วิธีกราฟ

5.1.2 วิธีซิมเพลกซ์

5.2 หาค่าสูงสุดของ $3x_1 + 4x_2$

โดยมีข้อจำกัด

$$2x_1 + x_2 \leqslant 60$$

$$8x_1 + 9x_2 \leqslant 360$$

$$x_1 \leqslant 20$$

$$x_2 \leqslant 30$$

และ $x_1 , x_2 \geqslant 0$

ถ้าเปลี่ยนฟังก์ชันเป้าหมายเป็น ต้องการหาค่าสูงสุดของ

$$2x_1 + x_2$$

และเปลี่ยนขีดจำกัดบนของ x_2 เป็น

$$x_2 \leqslant 22$$

จงแสดงให้เห็นจริงว่า ปัญหานี้มีคำตอบอุตมะมากกว่า 1 ชุด (20, 20; 19, 22) ในแต่ละกรณี จงตรวจสอบคำตอบโดยวิธีกราฟ

6. นายยอดชายมีเวลาเพียง 150 วันเท่านั้น ที่จะใช้ในการทำงานให้เสร็จตามโครงการได้ เขาแยกการทำงานออกเป็น 4 งวด จากประสบการณ์เขาคาดคะเนได้ว่า การทำงานในงวดที่ 1 จะเสร็จได้ ต้องใช้เวลาอย่างน้อยที่สุด 25 วัน และอย่างมาก 60 วัน ในการทำงานงวดที่ 2 สำหรับการทำงานในงวดที่ 3 ต้องใช้เวลาอย่างน้อยที่สุด 15 วัน และเวลาไม่เกิน 20 วัน ในการทำงานงวดสุดท้ายต่อไปให้เสร็จได้ การทำงานในแต่ละงวด เขาต้องมาคุมงานเอง เป็นเวลา 6, 3, 4 และ 1 ชั่วโมงต่อวันตามลำดับ การทำงานในงวดที่ 1, 2 และ 4 นั้น จะต้องมีผู้เชี่ยวชาญมาให้คำปรึกษาแนะนำวันละ 2, 1 และ 2 ชั่วโมงตามลำดับ ในการทำงานตลอดโครงการ ผู้เชี่ยวชาญมีเวลาให้ได้มากที่สุด 180 ชั่วโมง นายยอดชายควรกำหนดเวลาทำงานในแต่ละงวดอย่างไร งานจึงจะเสร็จทันเวลา และเขาใช้เวลาควบคุมงานน้อยที่สุด (25, 60, 45, 20 วัน เวลาคุมงานต่ำสุด 530 ชั่วโมง)

7. บริษัทผลิตเครื่องเฟอร์นิเจอร์ มีปัจจัยที่ใช้ในการผลิต และมีรายละเอียดเกี่ยวกับการผลิต ดังนี้

	โต๊ะเรียน	เก้าอี้	โต๊ะทำงาน	ตู้หนังสือ	ปริมาณที่ใช้
แรงงาน (คน-ชั่วโมง)	3	2	5	10	800 ชม.
ไม้ประเภท 1 (แผ่น-ฟุต)	5	1	9	12	1500 แผ่น-ฟุต
ไม้ประเภท 2 (แผ่น-ฟุต)	2	3	4	1	1000 แผ่น-ฟุต
กำไร (บาทต่อหน่วย)	240	100	300	200	

จากจำนวนอุปสงค์ของเครื่องใช้เหล่านี้ บริษัทกำหนดว่า จะผลิตโต๊ะเรียน เก้าอี้และโต๊ะทำงานอย่างน้อยที่สุด 40, 130, 30 ตัว ตามลำดับ และตู้ไม่เกิน 10 ตู้ แผนการผลิตที่ดีที่สุดควรจะเป็นอย่างไร