บทที่ 3
กระบวนการคำนวณ ด้วยวิธีการซิมเพลกซ์

วัตถุประสงค์ในการเรียนบทนี้ ก็เพื่อจะให้นักศึกษาได้ทำความเข้าใจเกี่ยวกับนิยามต่าง ๆ ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง ขั้นตอนของการแก้ปัญหาโดยใช้ตารางซิมเพลกซ์ ซึ่งอาศัยวิธีการ Gaussian Elimination ที่มีการคำนวณอย่างเป็นระบบ ภายใต้เป้าหมายที่วางเอาไว้ เทคนิคการแก้ปัญหา และตัวอย่างเมื่ออสมการหรือสมการของข้อจำกัดมีรูปแบบต่าง ๆ กัน

3.1 คุณสมบัติของคำตอบต่อปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น

จากปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นที่มีตัวแปรควบคุมได้ (controlled variables หรือ decision variables) n ตัว ภายใต้ข้อจำกัด (contraints) m ข้อ ซึ่งมีตัวแบบ ดังนี้

หาค่าสูงสุดของ $P = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

โดยมีข้อจำกัด

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\leqslant b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\leqslant b_2 \\
&\;\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\leqslant b_m
\end{aligned}
$$

และ $x_j\,(j = 1, 2, \ldots, n) \geqslant 0$

เมื่อเขียนให้อยู่ในรูปมาตรฐาน (standard form) จะได้ตัวแบบดังนี้

หาค่าสูงสุดของ $P = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ ....(3.1)

โดยมีข้อจำกัด

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} \quad\quad &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \quad\quad + x_{n+2} &= b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &
\end{aligned}
$$
..........(3.2)

....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \qquad\qquad + x_{n+m} = b_m$$

และ $\quad x_j \; (j = 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots, n+m) \quad \geqslant \quad 0$ ....(3.3)

หรือเขียนย่อ ๆ ได้ดังนี้

หาค่าสูงสุดของ $\quad P = \underline{C}'\underline{X}$

โดยมีข้อจำกัด

$$A\underline{X} = \underline{B}$$

และ $\quad \underline{X} \geqslant 0$

ในเมื่อ

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \\ x_{n+m} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ \\ b_m \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} A &= (A_{m\times n} \; I_m) \\ &= (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n, \ldots \, \underline{a}_{n+m}) \end{aligned}$$

$$A_{m\times n} = (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n) \qquad\qquad I_m = (\underline{a}_{n+1}, \underline{a}_{n+2}, \ldots, \underline{a}_{n+m})$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

เราเรียก $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$ ว่าเป็นตัวแปรอยู่เฉย (slack variables) หากเรากำหนด $x_j = 0$ ทุก ๆ $j = 1, 2, \ldots, n$ และ $x_{n+j} > 0$ ทุก ๆ $j = 1, 2, \ldots, m$ ค่าของ $x_{n+j}, j = 1, 2, \ldots, m$ เหล่านี้จะแสดงถึงจำนวนทรัพยากรต่าง ๆ ที่มีอยู่ ที่จะนำมาใช้ในการทำกิจกรรมของเราได้ ภายหลังการตัดสินใจ ค่าของ $x_{n+j}, j = 1, 2, \ldots, m$ จะแสดงให้ทราบว่า จะมีจำนวนทรัพยากรประเภทใดเหลืออยู่บ้าง ในปริมาณเท่าใด สำหรับค่าของ c_{n+j} จะเป็น 0 เสมอทุก ๆ $j = 1, 2, \ldots, m$

หมายเหตุ อาจจะมีนักศึกษาสงสัยว่า เพราะเหตุใด เราจึงเขียนฟังก์ชันเป้าหมายในรูปสมการ ทั้งนี้เพื่อความสะดวก เราจึงได้กำหนดฟังก์ชันเป้าหมาย ให้เท่ากับ P (อาจจะกำหนดให้เท่ากับ Z หรือ C ก็ได้)

เพื่อให้สอดคล้องกับการจำกัดว่าตัวแปรของเราจะต้องไม่เป็นลบ ดังนั้นค่าของ b_i จะต้องเป็นบวกเสมอ ข้อจำกัดใดที่มีค่าของ b_i เป็นลบ เราคูณสมการหรือข้อจำกัดนั้นด้วย (-1)

เพื่อความเข้าใจเกี่ยวกับการแก้ปัญหา หาคำตอบต่อปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นตรง ก่อนอื่นให้เรามาทำความเข้าใจเกี่ยวกับนิยามสำคัญ ๆ ในปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นตรง ดังต่อไปนี้

นิยาม 3.1 คำตอบที่เป็นไปได้ (feasible solution) ของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นตรง ก็คือค่าของ $X = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+m})$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข (3.2) (3.3)

นิยาม 3.2.1 คำตอบฐาน (basic solution) คือคำตอบที่ได้จากการแก้สมการใน (3.2) โดยการกำหนดตัวแปร n ตัวให้เท่ากับ 0 เสียก่อน แล้วจึงแก้สมการหาค่าตัวแปร m ตัวที่เหลือ กำหนดว่าดีเทอร์มิแนนท์ของตัวแปร m ตัวที่เหลือนี้จะต้องไม่มีค่าเป็น 0 เราเรียกตัวแปร m ตัวนี้ว่า ตัวแปรฐาน (basic variables)

นิยาม 3.2.2 คำตอบที่เป็นไปได้ขั้นฐาน (basic feasible solution) ก็คือ คำตอบฐานที่สอดคล้องกับเงื่อนไข (3.3) นั่นก็คือ ตัวแปรฐานทุกตัวจะต้องไม่มีค่าเป็นลบ

หากตัวแปรฐานทุกตัวมีค่ามากกว่า 0 เราเรียกคำตอบของตัวแปรฐานเหล่านี้ว่าเป็น nondegenerate basic feasible solution หากตัวแปรฐานอย่างน้อยที่สุด 1 ตัว มีค่าเป็น 0 นั่นก็คือ มีคำตอบฐานที่มีค่ามากกว่า 0 น้อยกว่า m ตัว เราเรียกคำตอบของตัวแปรฐานเหล่านี้ว่าเป็น degenerate feasible solution เราสรุปเป็นนิยามได้ดังนี้

นิยาม 3.3 nondegenerate basic feasible solution ก็คือคำตอบที่เป็นไปได้ขั้นฐานที่มีค่าของ x_j เป็นบวก เพียง m ตัวเท่านั้น นั่นก็คือ ตัวแปรฐานทุกตัวเป็นบวก

นิยาม 3.4 คำตอบที่เป็นไปได้สูงสุด (maximum feasible solution) คือคำตอบที่เป็นไปได้ที่ทำให้ฟังก์ชันเป้าหมาย (3.1) มีค่ามากที่สุด

นิยาม 3.5 ฟังก์ชันเชิงเส้นตรง f เป็นฟังก์ชันค่าจริง (real-valued function) ที่นิยามในเวคเตอร์สเปซ n มิติ จะได้ว่า สำหรับทุก ๆ เวคเตอร์ $\underline{X} = \alpha\underline{U} + \beta\underline{V}$

$$f(\underline{X}) = f(\alpha\underline{U} + \beta\underline{V}) = \alpha f(\underline{U}) + \beta f(\underline{V})$$

สำหรับเวคเตอร์ $\underline{U}$ และ $\underline{V}$ ใน n มิติทั้งหมด และสกาลา α และ β ทุกตัว

ฟังก์ชันเป้าหมาย P ใน (3.1) เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นตรงสำหรับค่า $\underline{X}$ ทั้งหลายที่สอดคล้อง (3.2) และ (3.3)

ตัวอย่างของนิยามที่กล่าวแล้วข้างต้น ให้นักศึกษาดูจากตัวอย่างการแก้ปัญหาด้วยกราฟ ซึ่งแสดงถึงจุดต่าง ๆ ที่เป็นคำตอบที่เป็นไปได้ คำตอบฐานและตัวแปรฐาน เป็นต้น กรณีของตัวแปรมากกว่า 2 จะเห็นได้จากตัวอย่างต่อไปนี้

สมมติเรามีตัวแบบมาตรฐานของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น ดังนี้

หาค่าสูงสุดของ $P = 10x_1 + 18x_2 + 12x_3 + 15x_4$

โดยมีข้อจำกัด

$$\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 \qquad\qquad &= 200 \\
x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 \qquad + x_6 \qquad &= 170 \\
2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \qquad\qquad + x_7 &= 180
\end{aligned}$$

และ $\qquad x_j\ (j = 1, 2, \ldots, 7) \geqslant 0$

ในที่นี้ x_5, x_6 และ x_7 เป็น slack variables ดังนั้น c_5, c_6 และ c_7 ต่างมีค่าเป็น 0 ซึ่งเราไม่ได้แสดงไว้ในฟังก์ชันเป้าหมาย

ตัวอย่างของค่า $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$ ที่ได้จากปัญหาดังกล่าวข้างต้น ได้แก่

$$\begin{aligned}
X_1 &= (25,\ 10,\ 20,\ 15,\ 10,\ 20,\ 30) \\
X_2 &= (20,\ 30,\ 10,\ 10,\ 30,\ 50,\ 60) \\
X_3 &= (0,\ 0,\ 0,\ 34,\ 166,\ 0,\ 112) \\
X_4 &= (0,\ 100,\ 0, 0, 0, 70,\ 80) \\
X_5 &= (0, \frac{830}{9}, 0, \frac{140}{9}, 0, 0\ \frac{510}{9})
\end{aligned}$$

จุด X_1 และ X_2 ให้ค่าของคำตอบที่เป็นไปได้ (feasible solution) ส่วนจุด X_3, X_4 และ X_5 ให้ค่าคำตอบที่เป็นไปได้ขั้นฐาน (basic feasible solution) และจุดทั้งสามนี้จะเป็นจุดมุมของบริเวณคำตอบที่เป็นไปได้ (feasible region) ด้วย จุดที่ทำให้ค่าของฟังก์ชันเป้าหมายมีค่ามากที่สุด คือจุด X_5 เราเรียกจุด X_5 นี้ว่าเป็นจุดอุตมะ (optimal point) ค่าของ P สูงสุด จะเท่ากับ (18)(830/9) + (15)(140/9) = 1893.33

ทฤษฎี 3.1 เซทของคำตอบที่เป็นไปได้ทุกคำตอบของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นตรง จะเป็น convex set

พิสูจน์

เราต้องแสดงให้เห็นว่า convex combination ของคำตอบที่เป็นไปได้คู่ใด ๆ ทุก ๆ จุด จะต้องเป็นคำตอบที่เป็นไปได้ด้วย

สมมติว่า เรามีคำตอบที่เป็นไปได้อย่างน้อยที่สุด 2 ชุด ให้ $\underline{X}_1$ และ $\underline{X}_2$ เป็นคำตอบที่เป็นไปได้นี้

เราจะได้

$$A\underline{X}_1 = \underline{B} \quad , \quad \underline{X}_1 > 0$$

และ

$$A\underline{X}_2 = \underline{B} \quad , \quad \underline{X}_2 > 0$$

กำหนดให้

$$\underline{X} = \lambda\underline{X}_1 + (1 - \lambda)\underline{X}_2 \quad , \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$$

เป็น convex combination ของ X_1 และ X_2 ดังนั้น $X > 0$ และ

$$\begin{aligned} A\underline{X} &= A\{\lambda\underline{X}_1 + (1 - \lambda)\underline{X}_2\} \\ &= \lambda A\underline{X}_1 + (1 - \lambda)A\underline{X}_2 = \lambda\underline{B} + \underline{B} - \lambda\underline{B} = \underline{B} \end{aligned}$$

แสดงว่า $\underline{X}$ เป็นคำตอบที่เป็นไปได้ด้วย

นั่นก็คือ เซทของคำตอบที่เป็นไปได้ ของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น เป็น convex set

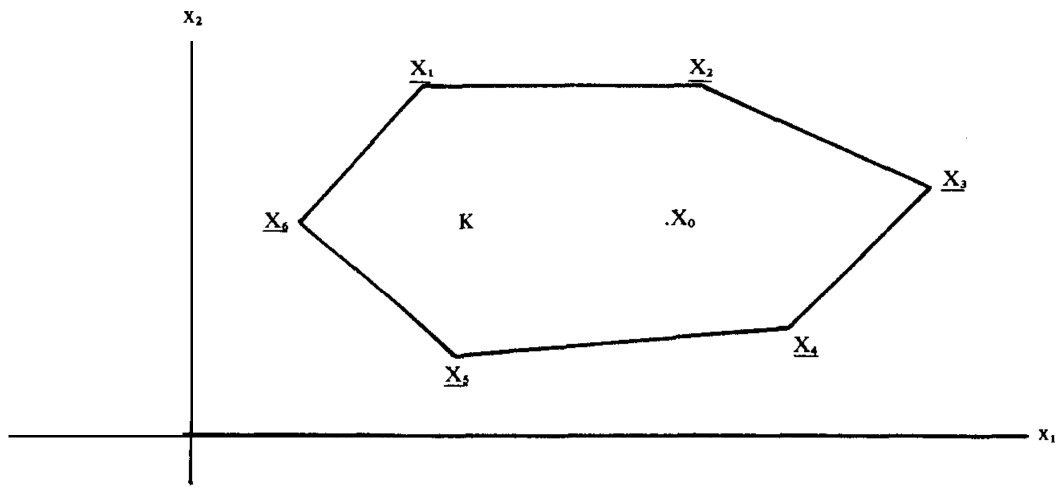
ทฤษฎี 3.2 ถ้าค่าของฟังก์ชันเป้าหมาย (3.1) มีจริง คำตอบที่จะให้ค่าของฟังก์ชันเป้าหมาย (3.1) สูงสุด จะอยู่ที่จุดมุมหรือจุดปลายสุด (vertex or extreme point) ของ convex set K ซึ่งเป็นเซทของคำตอบที่เป็นไปได้ของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นตรง

ถ้าคำตอบที่ทำให้ฟังก์ชันเป้าหมาย (3.1) มีค่าสูงสุด อยู่ที่จุดมุมหรือจุดปลายสุดมากกว่า 1 จุด แล้วฟังก์ชันเป้าหมาย ณ จุดที่เป็น convex combination ทุก ๆ จุด ของบรรดาจุดมุมหรือจุดปลายสุดดังกล่าว จะมีค่าเดียวกัน

พิสูจน์

กำหนด K เป็น convex set ของคำตอบที่เป็นไปได้ของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น และให้มีจุดมุมหรือจุดปลายสุดที่มีจำนวนนับได้

ในกรณี 2 มิติ เราสมมติว่า K สามารถแสดงได้ด้วยกราฟ ดังนี้



เรากำหนดฟังก์ชันเป้าหมาย (3.1) ด้วย $f(\underline{X})$

และให้ $\underline{X}_1, \underline{X}_2, \underline{X}_3, \underline{X}_4, \underline{X}_5, \underline{X}_6$ เป็นจุดมุมหรือจุดปลายสุดของ K

สมมติ $\underline{X}_0$ เป็นจุดอุตมะ (optimal point) นั่นก็คือ จุดที่ทำให้ $f(\underline{X})$ มีค่ามากที่สุด

กำหนดให้ค่า $f(\underline{X})$ ที่มากที่สุดนี้เป็น m ดังนั้น

$m = f(\underline{X}_0) \geq f(\underline{X})$ ทุก ๆ จุด $\underline{X}$ ที่อยู่ใน K ....(1)

ถ้า $\underline{X}_0$ เป็นจุดมุมหรือจุดปลายสุด ย่อมแสดงว่าข้อพิสูจน์ในตอนที่ 1 ของทฤษฎีนี้เป็นจริง

เราสมมติว่า $\underline{X}_0$ ไม่เป็นจุดมุมหรือจุดปลายสุด (ดังแสดงในรูป) ดังนั้น เราสามารถเขียน $\underline{X}_0$ ให้อยู่ในรูปของ convex combination ของจุดมุมทั้งหลายของ K ได้ นั่นก็คือ

$$\underline{X}_0 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \underline{X}_i$$

ในเมื่อ $\lambda_i > 0$, $\Sigma \lambda_i = 1$

โดยเหตุที่ $f(\underline{X})$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นตรง เราจะได้

$$f(\underline{X}_0) = f(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \underline{X}_i) = f(\lambda_1 \underline{X}_1 + \lambda_2 \underline{X}_2 + \ldots + \lambda_p \underline{X}_p)$$
$$= \lambda_1 f(\underline{X}_1) + \lambda_2 f(\underline{X}_2) + \ldots + \lambda_p (f(\underline{X}_p) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

สมมติเรามี $f(\underline{X}_m)$ = ค่าสูงสุด $f(\underline{X}_i)$

แทนค่า $f(X_m)$ ใน (2) จะได้ว่า

$$f(\underline{X}_0) \leqslant \lambda_1 f(\underline{X}_m) + \lambda_2 f(\underline{X}_m) + \ldots + \lambda_p f(\underline{X}_m) = f(X_m)$$

ซึ่งขัดแย้งกับที่กำหนดไว้ใน (1) ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$f(\underline{X}_0) = f(\underline{X}_m) = m$$

นั่นก็คือ X_0 และ X_m จะต้องเป็นจุดเดียวกัน

เราจึงสรุปได้ว่า จะต้องมีจุดมุมหรือจุดปลายสุด $\underline{X}_m$ ที่ทำให้ฟังก์ชันเป้าหมาย (3.1) มีค่าสูงสุด

การพิสูจน์ส่วนที่ 2 ของทฤษฎี แสดงให้เห็นได้ดังนี้

สมมติว่า $f(\underline{X})$ ที่มีค่าสูงสุด อยู่ที่จุดมุมหรือจุดปลายสุดมากกว่า 1 จุด คือจุด $\underline{X}_1, \underline{X}_2, \ldots, \underline{X}_q$ ในที่นี้ เรามี

$$f(\underline{X}_1) = f(\underline{X}_2) = \ldots = f(\underline{X}_q) = m$$

ถ้า X เป็น convex combination ใด ๆ ของบรรดาจุดมุมหรือจุดปลายสุดดังกล่าว นั่นก็คือ

$$\underline{X} = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \underline{X}_i$$

สำหรับ $\lambda_i > 0$ และ $\Sigma \lambda_i = 1$

ดังนั้น

$$f(\underline{X}) = f(\lambda_1 \underline{X}_1 + \lambda_2 \underline{X}_2 + \ldots + \lambda_q \underline{X}_q)$$
$$= \lambda_1 f(\underline{X}_1) + \lambda_2 f(\underline{X}_2) + \ldots + \lambda_q f(\underline{X}_q) = \Sigma \lambda_i m = m$$

แสดงให้เห็นว่า ฟังก์ชันเป้าหมาย ณ จุดใด ๆ ที่เป็น convex combination ของบรรดาจุดมุมหรือจุดปลายสุด ซึ่งต่างให้ค่า f(X) สูงสุด จะมีค่าสูงสุดนั้นด้วย

กรณีเป้าหมายของฟังก์ชัน ต้องการค่าต่ำสุด ค่าต่ำสุดของฟังก์ชันเป้าหมายจะอยู่ที่จุดมุม หรือจุดปลายสุดของบริเวณคำตอบที่เป็นไปได้ หรือ convex set นั่นเอง การพิสูจน์ใช้วิธีการในทำนองเดียวกัน ให้นักศึกษาไปพิสูจน์เป็นการบ้าน

เรากล่าวว่า คำตอบที่เป็นไปได้ ก็คือเวคเตอร์ $X = (x_1, x_2, \ldots, x_{m+n})$ โดยที่ $x_i \geqslant 0$ ทุก ๆ i และมีคุณสมบัติตามสมการใน (3.2) ถ้าเราเขียนสมการใน (3.2) เสียใหม่ เป็น

$$x_1\underline{a}_1 + x_2\underline{a}_2 + \ldots + x_{n+m}\underline{a}_{n+m} = \underline{a}_0$$

ในเมื่อ $\underline{a}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n+m$ เป็นคอลัมน์ที่ j ของเมทริคซ์ A และ $\underline{a}_0 = \underline{B}$

เราจะพบว่า มีเซทที่ประกอบด้วยเวคเตอร์ไม่เกิน m เวคเตอร์ เป็นอิสระเชิงเส้นตรง และจะมีการรวมกันของเวคเตอร์เหล่านี้ ที่ไม่มีค่าเป็นลบ และมีค่าเท่ากับ $\underline{a}_0$ ดังทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎี 3.3 ถ้าเซทของ $k \leqslant m$ เวคเตอร์ $a_1, a_2, \ldots, a_k$ เป็นอิสระเชิงเส้นตรง และทำให้

$$x_1\underline{a}_1 + x_2\underline{a}_2 + \ldots + x_k\underline{a}_k = \underline{a}_0$$

และ $x_i > 0$ ทุก ๆ ตัว แล้วจุด $\underline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$ เป็นจุดมุมหรือจุดปลายสุดของ convex set ของบรรดาคำตอบที่เป็นไปได้ ในที่นี้ $\underline{X}$ จะเป็นเวคเตอร์ n + m มิติที่มีค่าของตัวแปร $m + n - k$ ตัวหลังเป็น 0

พิสูจน์

สมมติว่า $\underline{X}$ ไม่เป็นจุดมุมหรือจุดปลายสุด โดยเหตุที่ $\underline{X}$ เป็นคำตอบที่เป็นไปได้ของ convex set K เราจึงสามารถเขียน $\underline{X}$ ให้อยู่ในรูป convex combination ของจุด $\underline{X}_1$ และ $\underline{X}_2$ ได้ ในเมื่อ $\underline{X}_1$ และ $\underline{X}_2$ เป็นจุดใด ๆ ที่อยู่ใน K นั่นก็คือ

$$\underline{X} = \lambda\underline{X}_1 + (1-\lambda)\underline{X}_2, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$$

โดยเหตุที่ตัวแปร x_i ของ $\underline{X}$ ทุกตัว ไม่เป็นลบ และในเมื่อ $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ ตัวแปร $m + n - k$ ตัวหลังของ $\underline{X}_1$ และของ $\underline{X}_2$ จะต้องมีค่าเป็น 0 นั่นก็คือ

$$\underline{X}_1 = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_k^{(1)}, 0, \ldots, 0)$$

$$\underline{X}_2 = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_k^{(2)}, 0, \ldots, 0)$$

โดยเหตุที่ทั้ง $\underline{X}_1$ และ $\underline{X}_2$ ต่างเป็นคำตอบที่เป็นไปได้ เราจะได้ว่า

$$A\underline{X}_1 = \underline{B} \text{ หรือ } x_1^{(1)}\underline{a}_1 + x_2^{(1)}\underline{a}_2 + \ldots + x_k^{(1)}\underline{a}_k = \underline{a}_0 \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

และ

$$A\underline{X}_2 = \underline{B} \text{ หรือ } x_1^{(2)}\underline{a}_1 + x_2^{(2)}\underline{a}_2 + \ldots + x_k^{(2)}\underline{a}_k = \underline{a}_0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

(1) − (2)

$$(x_1^{(1)} - x_1^{(2)})\underline{a}_1 + (x_2^{(1)} - x_2^{(2)})\underline{a}_2 + \ldots + (x_k^{(1)} - x_k^{(2)})\underline{a}_k = 0$$

แต่ $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ เป็นเซททีเป็นอิสระเชิงเส้นตรง อาศัยนิยามของเซททีเป็นอิสระเชิงเส้นตรง จะได้ว่า

$$x_i^{(1)} - x_i^{(2)} = 0 \text{ นั่นก็คือ } x_i^{(1)} = x_i^{(2)},\ i = 1, 2, \ldots, k$$

ผลที่ตามมาก็คือ $x_i = x_i^{(1)} = x_i^{(2)},\ i = 1, 2, \ldots, k$

ด้วยเหตุนี้ เราจึงไม่อาจจะเขียน $\underline{X}$ ให้อยู่ในรูปของ convex combination ของจุด 2 จุดใด ๆ ใน K ได้ และด้วยเหตุนี้ $\underline{X}$ จึงเป็นจุดมุมหรือจุดปลายสุดของ K

ทฤษฎี 3.4 ถ้า $\underline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+m})$ เป็นจุดมุมหรือจุดปลายสุดของ K แล้วเวคเตอร์ที่มี x_i เป็นบวก จะประกอบกันเป็นเซททีเป็นอิสระเชิงเส้นตรง ผลที่ตามมาก็คือ จะมี x_i ที่เป็นบวก มากที่สุด m ตัว

พิสูจน์

เราสมมติในทางตรงกันข้ามว่า $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ ประกอบกันเป็นเซททีพึ่งพิงเชิงเส้นตรง (linearly dependent set) แล้วจะมีการรวมกันเชิงเส้นตรง (linear combination) ของเวคเตอร์เหล่านี้ ซึ่งมีค่าเท่ากับเวคเตอร์ 0

$$d_1\underline{a}_1 + d_2\underline{a}_2 + \ldots + d_k\underline{a}_k = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

โดยมี d_i อย่างน้อยที่สุด 1 ตัว ไม่เท่ากับ 0

จากสมมติฐานที่ว่า เรามี x_i k ตัวแรกที่มีค่ามากกว่า 0 นั่นก็คือ

$$x_1\underline{a}_1 + x_2\underline{a}_2 + \ldots + x_k\underline{a}_k = a_0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

(2) + d(1), สำหรับค่า d บางตัว ที่มีค่ามากกว่า 0 จะได้

$$\sum_{i=1}^{k} x_i\underline{a}_i + d\sum_{i=1}^{k} d_i\underline{a}_i = \underline{a}_0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

(2) − d(1), สำหรับค่า d บางตัวที่มีค่ามากกว่า 0 จะได้

$$\sum_{i=1}^{k} x_i\underline{a}_i - d\sum_{i=1}^{k} d_i\underline{a}_i = \underline{a}_0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

เราจะได้คำตอบต่อสมการ (3.2) 2 ชุด คือ

$$\underline{X}_1 \quad = \quad (x_1 + dd_1, x_2 + dd_2, \ldots, x_k + dd_k, 0, \ldots, 0)$$

และ $$\underline{X}_2 \quad = \quad (x_1 - dd_1, x_2 - dd_2, \ldots, x_k - dd_k, 0, \ldots, 0)$$

โดยเหตุที่ $x_i > 0$ ทุกตัว เราสามารถกำหนดค่า d เป็นค่าบวก ที่เล็กที่สุด เท่าไรก็ได้ ที่จะทำให้ ค่าของ k ตัวแรกของทั้ง $\underline{X}_1$ และ $\underline{X}_2$ เป็นบวก

แล้ว $\underline{X}_1$ และ $\underline{X}_2$ ต่างเป็นคำตอบที่เป็นไปได้

แต่ $$\underline{X} \quad = \quad \frac{1}{2}\underline{X}_1 + \frac{1}{2}\underline{X}_2$$

ซึ่งขัดแย้งกับสมมติฐานที่ว่า X เป็นจุดมุมหรือจุดปลายสุด

ดังนั้น ที่สมมติว่า เวคเตอร์ $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ เป็นเซทพึ่งพิงเชิงเส้นตรงนั้นผิด

นั่นก็คือ $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ ต้องเป็นอิสระเชิงเส้นตรง

จากคุณสมบัติของเวคเตอร์ เราทราบว่า ทุก ๆ เซทของ m + 1 เวคเตอร์ในสเปซ m มิติ ต้องเป็นพึ่งพิงเชิงเส้นตรง นั่นก็หมายความว่า เราจะมี x_i ที่มีค่าเป็นบวกได้ไม่เกิน m ตัว

ถ้าสมมติว่า มี x_i เป็นบวกมากกว่า m ตัว การพิสูจน์ในตอนต้นก็แสดงว่า จะมีเวคเตอร์ $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_m, \underline{a}_{m+1}$ เป็นอิสระเชิงเส้นตรง ซึ่งขัดแย้งกับทฤษฎี

เราจึงสรุปได้ว่า จะมี x_i ที่มีค่าเป็นบวกได้อย่างมากที่สุด m ตัว

บทแทรก กำหนดเซทของ m + n เวคเตอร์ $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_{m+n}$ ในบรรดาเวคเตอร์เหล่านี้ จะมีอยู่ m เวคเตอร์ ประกอบกันเป็นเซทที่เป็นอิสระเชิงเส้นตรง เกี่ยวข้องกับจุดมุมหรือจุดปลายสุดของ K ทุก ๆ จุด

จากทฤษฎีบทที่กล่าวมาแล้ว เรานำมาสรุปได้ดังนี้

ทฤษฎี 3.5 $\underline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+m})$ จะเป็นจุดมุมหรือจุดปลายสุดของ K ก็ต่อเมื่อ x_j ที่เป็นบวกเป็นสัมประสิทธิ์ของเวคเตอร์ที่เป็นอิสระเชิงเส้นตรง $\underline{a}_j$ ใน

$$\sum_{j=1}^{n} x_j\underline{a}_j \quad = \quad \underline{a}_0$$

ผลที่ตามมาจากเกณฑ์สมมติ (assumptions) และทฤษฎีที่กล่าวมาแล้ว เราจะได้ว่า

(1) จะมีจุดมุมหรือจุดปลายสุดของ K ที่ทำให้ค่าของฟังก์ชันเป้าหมาย ณ จุดนี้ สูงสุด (ต่ำสุด)

(2) คำตอบที่เป็นไปได้ขั้นฐาน ทุก ๆ คำตอบ จะอยู่ที่จุดมุมหรือจุดปลายสุดของ K

(3) จุดมุมหรือจุดปลายสุด ทุก ๆ จุด ของ K จะมีความสัมพันธ์กับเวคเตอร์ที่เป็นอิสระเชิงเส้นตรง m เวคเตอร์ ซึ่งเวคเตอร์เหล่านี้อยู่ในเซทของ n + m เวคเตอร์ที่กำหนดให้

เราจึงสรุปได้ว่า การหาคำตอบต่อปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นตรงนั้น เราเพียงแต่ตรวจสอบจุดมุมหรือจุดปลายสุด หรือเพียงแต่พิจารณาคำตอบที่เป็นไปได้ ซึ่งจะเกี่ยวข้องกับเวคเตอร์ที่เป็นอิสระเชิงเส้นตรง m เวคเตอร์ แต่ไม่ได้หมายความว่า เราจะต้องพิจารณาเซทย่อยของ m เวคเตอร์ที่เป็นอิสระเชิงเส้นตรงทุก ๆ เซท ทั้งนี้เนื่องจาก เราจะต้องพิจารณาถึง $\binom{m+n}{m}$ เซท หาก m และ n มีค่าโต ๆ การหาคำตอบยุ่งยาก เสียเวลา การเปรียบเทียบค่าของฟังก์ชันเป้าหมายที่ได้จากคำตอบแต่ละชุด เพื่อจะหาคำตอบอุตมะ (optimal solution) ต้องใช้เวลามากหรืออาจจะทำไม่ได้ นอกจากนี้คำตอบที่ได้จาก m เวคเตอร์ที่เป็นอิสระเชิงเส้นตรง อาจจะไม่เกี่ยวข้องกับจุดมุมหรือจุดปลายสุดของบริเวณคำตอบที่เป็นไปได้ก็ได้ ดังนั้นจึงต้องมีวิธีการพิจารณาว่าเราจะหาจุดมุมหรือจุดปลายสุดใดบ้าง จุดที่อยู่ถัดไปจากจุดเดิมควรจะเป็นจุดไหน จึงจะทำให้ได้คำตอบที่ให้ค่าฟังก์ชันเป้าหมายสูงสุด (หรือต่ำสุด) โดยเร็ว G. B. Dantzig ได้เสนอระเบียบการซิมเพลกซ์ (simplex procedure) ซึ่งเป็นระเบียบการหาจุดมุมหรือจุดปลายสุด มาพิจารณาว่าเป็นจุดอุตมะ ซึ่งหมายถึงจุดที่ทำให้ได้ค่าฟังก์ชันเป้าหมายสูงสุด (หรือต่ำสุด) หรือไม่ ถ้าไม่เป็นควรจะพิจารณาจุดถัดไป จุดใดดี ที่จะทำให้ได้ค่าของฟังก์ชันเป้าหมายมากกว่า (หรือต่ำกว่า) หรือเท่ากับค่าของฟังก์ชันเป้าหมายที่จุดเดิม และจะทำให้ได้ค่าอุตมะเร็วขึ้น จากการพิจารณาไม่มากนัก นั่นก็คือ สามารถลดจำนวนครั้งการคำนวณมากมาย ให้เหลือเพียงไม่กี่ครั้งในจำนวนที่นับได้

3.2 ตัวอย่างการแก้ปัญหาด้วยวิธีซิมเพลกซ์

ดังได้กล่าวมาแล้วว่า วิธีการแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นตรง โดยใช้ระเบียบการซิมเพลกซ์เป็นการหาจุดมุมหรือจุดปลายสุดของ convex set ของบรรดาคำตอบที่เป็นไปได้ นั่นก็คือจุดที่จะให้ค่าคำตอบที่เป็นไปได้ขั้นฐาน (basic feasible solution) อาศัยระเบียบการนี้ จะมีการคำนวณซ้ำ หรือที่เรียกว่า iteration เขียนในรูปของตาราง เรียกว่า ตารางซิมเพลกซ์ (simplex tableau) โดยเหตุที่ ตัวแบบมาตรฐานของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นตรง ประกอบด้วยเซทของสมการ m สมการ มีตัวแปร m + n ตัว และจากนิยามของคำตอบที่เป็นไปได้ขั้นฐาน หรือเรียกสั้น ๆ ว่า คำตอบฐาน แต่เป็นคำตอบเฉพาะที่มีค่าเป็นบวกเท่านั้น นั่นก็คือ เป็นคำตอบที่ได้จากการกำหนด

ตัวแปรให้เป็น 0 n ตัวแล้ว แก้สมการ m สมการ หาค่าตัวแปร m ที่เหลือ โดยที่ตัวแปรทั้ง m ตัวนี้จะต้องมีค่าเป็นบวกหมดทุกตัว

ปัญหาจึงอยู่ที่ว่า เราควรจะกำหนดตัวแปร n ตัวใดให้เป็น 0 ก่อน นั่นก็คือ คำตอบที่เป็นไปได้ขั้นฐาน หรือตัวแปรฐานชุดแรก ควรจะเป็นอะไร จึงจะเหมาะสมมีประสิทธิภาพมากที่สุด ในกรณีของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นตรง ที่มีตัวแบบดัง (3.1), (3.2) และ (3.3) คำตอบฐานชุดแรกมักจะแสดงถึงจำนวนทรัพยากรที่จะนำมาใช้ได้ ดังนั้นในขั้นตอนที่ 1 หรือตารางที่ 1 จะมี slack variables เป็นตัวแปรฐานชุดแรก ซึ่งจะมีความหมายว่า ก่อนเริ่มต้นกิจกรรมใด ๆ เรามีทรัพยากรอะไรบ้างที่จะนำมาใช้ในปริมาณเท่าใด มีเงื่อนไขเกี่ยวกับการใช้อย่างไรบ้าง และฟังก์ชันเป้าหมายของคำตอบชุดแรก หรือในตารางที่ 1 จะมีค่าเป็น 0 เสมอ ขั้นต่อไปหรือในตารางต่อไป เราพิจารณาผลที่ได้ในตารางเดิม ตรวจดูว่าเป็นตารางสุดท้ายแล้วหรือยัง ถ้าเป็นตารางสุดท้าย ผลลัพธ์ที่ได้จากตารางนี้ก็จะเป็นคำตอบอุตมะ (optimal solution) ถ้าไม่ใช่ตารางสุดท้าย ให้ตรวจดูว่า ตารางต่อไปหรือขั้นตอนต่อไป เราควรจะเปลี่ยนตัวแปรใดเข้ามาแทนที่ตัวแปรฐานตัวไหน ในปริมาณเท่าใด จึงจะเกิดผลดีที่สุด เรามีทฤษฎีที่เกี่ยวกับขั้นตอนการคำนวณด้วยวิธีการซิมเพลกซ์ ก่อนที่จะกล่าวถึงทฤษฎีเหล่านี้ ให้เรามาดูตัวอย่างขั้นตอนการคำนวณด้วยวิธีการที่เป็นระบบ โดยอาศัย Gaussian Elimination และการนำเสนอในรูปของตารางซิมเพลกซ์

ตัวอย่างที่ 3.1

จงหาคำตอบอุตมะ (optimal solution) ของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นตรงในตัวอย่างที่ 1.1 โดยอาศัยวิธีการคำนวณอย่างเป็นระบบ และเขียนในรูปตารางซิมเพลกซ์

วิธีทำ

จากตัวแบบของปัญหาในตัวอย่างที่ 1.1 ทำให้เป็นรูปมาตรฐานได้ดังนี้

ค่าสูงสุดของ P

$$= 600x_1 + 320x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \qquad \text{..........(0)}$$

โดยมีข้อจำกัด

$$20x_1 + 5x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 600 \qquad \text{..........(1)'}$$

$$20x_1 + 8x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 = 660 \qquad \text{..........(2)'}$$

$$15x_1 + 10x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 = 675 \qquad \text{..........(3)'}$$

และ x_j (j = 1, 2, 3, 4, 5) $\geq$ 0

x_3, x_4 และ x_5 ทำหน้าที่เป็น slack variables ในที่นี้แสดงถึงจำนวนของไม้ประเภทที่ 1 จำนวนของไม้ประเภทที่ 2 และจำนวนของแรงงาน ตามลำดับ x_1, x_2 เป็นตัวแปรที่ควบคุมได้ ซึ่งแสดงถึง จำนวนโต๊ะและจำนวนเก้าอี้ที่เราจะผลิต ตามลำดับ

คำตอบฐานชุดแรกของเรา เริ่มต้นจากการกำหนดให้ $x_1 = x_2 = 0$ ดังนั้น

$x_3 = 600, \ x_4 = 660, \ x_5 = 675$

และ $P - 600x_1 - 320x_2 = 0$ ....(0)[1]

ตัวแปร x_3, x_4 และ x_5 ก็คือตัวแปรฐาน (basic variables) ตัวเลข 600, 660 และ 675 เป็นคำตอบฐาน (basic feasible solution) ซึ่งเป็นค่าของตัวแปรฐานหรืออีกนัยหนึ่งก็คือจุดมุมหรือจุดปลายสุดของบริเวณคำตอบที่เป็นไปได้นั่นเอง ผลที่ได้ตลอดจนความสัมพันธ์ดังสมการข้างต้น เขียนในรูปตารางซิมเพลกซ์ได้ดังนี้ (เราทำให้ดูง่ายขึ้น และเพื่อความสะดวกในการคำนวณ จึงย้ายคำตอบฐานมาไว้ด้านซ้ายมือ)

ตารางที่ 1

ตัวแปรฐาน		c_j	600	320	0	0	0
x_i	c_i	คำตอบฐาน	$\underline{a_1}$	$\underline{a_2}$	$\underline{a_3}$	$\underline{a_4}$	$\underline{a_5}$
x_3	0	600	20	5	1	0	0
x_4	0	660	20	8	0	1	0
x_5	0	675	15	10	0	0	1
P = 0		s_j	0	0	0	0	0
		$c_j - s_j$	600	320	0	0	0

จากตารางนี้แสดงว่า เมื่อยังไม่มีการผลิตเกิดขึ้น เรามีไม้ประเภทที่ 1 (x_3) เท่ากับ 600 แผ่น-ฟุต มีไม้ประเภทที่ 2 (x_4) 660 แผ่น-ฟุต และมีแรงงาน (x_5) 675 ชั่วโมง เมื่อไม่มีการผลิตก็ย่อมไม่มีกำไร นั่นก็คือ ค่าของ P = 0

ในเมื่อ c_i เป็น ส.ป.ส. ของตัวแปรฐาน x_i และ c_i หรือ c_j ก็คือ ส.ป.ส.ของ x_j ในฟังก์ชันเป้าหมาย P

a_j เป็น ส.ป.ส.ของ x_j ในสมการข้อจำกัดต่าง ๆ นั่นก็คือเป็น ส.ป.ส. ในคอลัมน์ที่ j ของ x_j

$c_j - s_j$ เป็นอัตรากำไรเพิ่มต่อหน่วย (marginal profit rate) ของ x_j เมื่อกำหนดว่า

$$s_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$$

เราเรียกคอลัมน์ที่มีค่า $c_j - s_j$ เป็นบวกที่มากที่สุดว่า key column

ขั้นต่อไป ก็คือพิจารณาว่าควรจะเปลี่ยนตัวแปรฐานตัวไหน อย่างไร

หากพิจารณาเป้าหมายในการผลิต จะเห็นว่า ต้องการผลิตโต๊ะและ/หรือเก้าอี้ โดยใช้ทรัพยากรที่มีอยู่ เพื่อให้ได้กำไรมากที่สุด ดังนั้นโดยอาศัยการเลือกที่เป็นระบบ ก็ต้องพิจารณาว่าอัตรากำไรเพิ่มต่อหน่วยของตัวแปรใด มีค่ามากที่สุด ซึ่งจากการตรวจสอบ ส.ป.ส.ของ x_j ในฟังก์ชัน P ใน (0) หรือค่าของ $c_j - s_j$ ในตาราง จะเห็นว่า ค่าของ $c_1 - s_1 = 600$ มีค่ามากที่สุด และชี้ให้เห็นว่า หากเราผลิตโต๊ะ เราจะได้กำไร P เพิ่มขึ้นอีก 600 บาทต่อการผลิตโต๊ะ 1 ตัว ในขณะที่ ถ้าเราเลือกผลิตเก้าอี้ กำไรจะเพิ่มขึ้นเพียง 320 บาทต่อการผลิต 1 ตัว ด้วยเหตุนี้เราจึงเลือกผลิตโต๊ะ นั่นก็คือ เราต้องการให้ x_1 เป็นตัวแปรฐาน ปัญหาที่ตามมาก็คือ เราจะผลิตโต๊ะได้มากที่สุดกี่ตัว เมื่อมาพิจารณาปัจจัยที่ใช้ในการผลิต จะเห็นว่า เรามีไม้ประเภทที่ 1 อยู่ 600 แผ่น-ฟุต การผลิตโต๊ะ 1 ตัวจะต้องใช้ไม้ประเภทที่ 1 20 แผ่น-ฟุต ดังนั้นเราสามารถที่จะผลิตโต๊ะโดยใช้ไม้ประเภทที่ 1 ได้ $\frac{600}{20} = 30$ ตัว และเมื่อตรวจดูจำนวนของไม้ประเภทที่ 2 ซึ่งมีอยู่ 660 แผ่น-ฟุต โดยเหตุที่เราใช้ไม้ประเภทที่ 2 ในการทำโต๊ะ 1 ตัวเท่ากับ 20 แผ่น-ฟุต ดังนั้นเราสามารถใช้ไม้ประเภทที่ 2 ในการทำโต๊ะได้ $\frac{660}{20} = 33$ ตัว ทางด้านแรงงานนั้นมีอยู่ 675 ชั่วโมง และการผลิตโต๊ะ 1 ตัวจะต้องใช้แรงงาน 15 ชั่วโมง นั่นก็คือ เรามีแรงงานเพียงพอที่จะผลิตโต๊ะได้ $\frac{675}{15} = 45$ ตัว ดังนั้นเราจึงเห็นได้ว่า จำนวนโต๊ะ (x_1) ที่มากที่สุดที่เราสามารถจะผลิตได้ก็คือ 30 ตัว เพราะถ้าเราผลิต 33 ตัว จะขาดไม้ประเภทที่ 1 ที่จะต้องใช้ผลิตอีก 3 ตัว หรือถ้าเราผลิต 45 ตัว จะขาดทั้งไม้ประเภทที่ 1 และประเภทที่ 2 ซึ่งเป็นผลให้เราไม่อาจผลิตได้ครบตามจำนวนได้ สรุปได้ว่าจำนวนที่เหมาะสมที่สุดคือ 30 ตัว ซึ่งเป็นค่าน้อยที่สุดในจำนวนที่คาดว่าจะผลิตได้ การพิจารณาจำนวนโต๊ะที่คาดว่าจะทำได้จากการใช้ปัจจัยต่าง ๆ นี้ เรากำหนดให้เป็น θ_i ดังนั้น θ_i จะแสดงถึงจำนวนที่เป็นไปได้ หรือจำนวนที่จะผลิตได้จากการใช้ทรัพยากรที่ i และจะกำหนด θ_i ไว้ดังนี้

$$\theta_i = \frac{x_{io}}{a_{ik}} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

ในเมื่อ a_{ik} เป็น ส.ป.ส.ของ x_k ใน key column (จากตารางที่ 1 คือ ส.ป.ส. ในคอลัมน์ที่ 1) เราเลือกค่า θ_i ที่น้อยที่สุด (ในที่นี้คือ 30) เป็นจำนวนโต๊ะที่เราคาดว่าจะผลิต เนื่องจากเป็นจำนวนที่สามารถใช้ปัจจัยในการผลิตทั้งหมดได้พอดี กล่าวคือจะใช้ไม้ประเภทที่ 1 หมดพอดี ส่วนไม้ประเภทที่ 2 และแรงงานยังมีเหลืออยู่บ้าง สรุปแล้ว เราจะเขียนตารางที่ 1 ที่สมบูรณ์ได้ดังนี้

ตัวแปรฐาน		c_j	600	320	0	0	0	ค่าที่เป็นไปได้
x_i	c_i	คำตอบฐาน	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	θ_i
x_3	0	600	20	5	1	0	0	30
x_4	0	660	20	8	0	1	0	33
x_5	0	675	15	10	0	0	1	45
P = 0		s_j	0	0	0	0	0	
		$c_j - s_j$	600	320	0	0	0	

จากตารางที่ 1 เรามี $c_1 - s_1$ เป็น max $(c_j - s_j)$ ซึ่งจะมีความหมายว่า ในตารางต่อไปเราจะมี x_1 เป็นตัวแปรฐาน (ในที่นี้คือการตัดสินใจว่าจะผลิตโต๊ะ) โดยจะทำให้กำไร P เพิ่มขึ้นอีก 600 บาทต่อหน่วย แถวที่มีค่า θ_i น้อยที่สุดคือแถวที่ 1 เราจะเรียกแถวที่มีค่า θ_i น้อยที่สุดว่า key row ค่านี้จะแสดงให้ทราบว่า จะมี x_1 ได้มากที่สุดกี่ตัว แทนที่ตัวแปรใด ซึ่งในที่นี้แทนค่า x_3 ตัวเลขที่อยู่ตรงตำแหน่งที่เป็นจุดตัดของ key row กับ key column จากตารางคือ $a_{11} = 20$ เรียกว่า pivot number หรือ pivot element

กล่าวโดยสรุป จากตารางที่ 1 อ่านได้ว่า เราจะให้ x_1 จำนวน 30 ตัว ไปแทนที่ x_3 ทำให้ค่าของกำไร P เพิ่มขึ้นได้อีก (30)(600) = 18,000 บาท

กลับมาดูที่สมการของเรา จากผลการตัดสินใจข้างต้น บ่งว่าจะใช้ x_1 แทนที่ x_3 นั่นก็คือเรากำหนดให้ $x_3 = 0, x_2 = 0$ และต้องการให้ $x_1 = 30$ ซึ่งจะเท่ากับการที่เราทำให้ ส.ป.ส. ของ x_1 ในสมการที่ 1 เป็น 1 และ ส.ป.ส. ของ x_1 ในสมการอื่น ๆ เป็น 0 ดังวิธีการต่อไปนี้

$(1)^1 \div 20 \quad : \quad x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{20}x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 30 \qquad \ldots\ldots\ldots(1)^2$

$(2)^1 - (1)^1 \quad : 0x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 0x_5 = 60$ ....(2)'

$(3)' - 15(1)^2 : \quad 0x_1 + \frac{25}{4}x_2 - \frac{3}{4}x_3 + 0x_4 + x_5 = 225$ ....$(3)^2$

$(0)' + 600(1)^2 : \quad P - 0x_1 - 170x_2 + 30x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 18,000$ . . . . .$(0)^2$

ผลจาก $(0)^2$ แสดงว่า ในขั้นนี้ฟังก์ชันกำไร P จะเปลี่ยนเป็น

$18,000 + 170x_2 - 30x_3$

จะเห็นได้ว่า เรายังได้กำไรเพิ่มขึ้นได้อีก 170 บาทต่อการทำเก้าอี้ 1 ตัว แสดงว่ากำไร 18,000 ยังไม่เป็นกำไรมากที่สุด จากการพิจารณาฟังก์ชันกำไรเห็นควรทำเก้าอี้ นั่นคือเพิ่มค่า x_2 ปัญหาต่อไปก็คือเราควรจะทำเก้าอี้หรือให้ x_2 มีค่ามากที่สุดเท่าใด พิจารณาจากสมการ $(1)^2$ จะเห็นว่า หากเราไม่ผลิตโต๊ะ แต่เปลี่ยนไปเป็นผลิตเก้าอี้แทน จำนวนเก้าอี้ที่จะผลิตได้จะเท่ากับ $\frac{30}{1/4} = 120$ ตัว จากสมการที่ $(2)^2$ ชี้ให้เห็นว่า หากเราต้องการผลิตทั้งโต๊ะและเก้าอี้ เรายังมีไม้ประเภทที่ 2 เหลือพอที่จะผลิตเก้าอี้ได้อีก $\frac{60}{3}$ หรือ 20 ตัว และจากสมการ $(3)^2$ แสดงว่าเรามีแรงงานพอที่จะใช้ผลิตเก้าอี้ได้อีก $\frac{225}{25/4} = 36$ ตัว เมื่อเปรียบเทียบดูแล้วจะเห็นว่า จำนวนเก้าอี้ที่ควรจะทำมากที่สุดคือ 20 ตัว จึงจะพอดีกับปัจจัยที่จะใช้ในการผลิต ผลที่ได้เหล่านี้ สรุปในรูปตารางได้ดังนี้

ตารางที่ 2

ตัวแปรฐาน x_i	c_i	c_j / คำตอบฐาน	600 a_1	320 a_2	0 a_3	0 a_4	0 a_5	ค่าที่เป็นไปได้ θ_i	หมายเหตุ
x_1	600	30	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{20}$	0	0	120	$R_1^2 = R_1^1/20$
x_4	0	60	0	3	-1	1	0	20	$R_2^2 = R_2^1 - R_1^2$
x_5	0	225	0	$\frac{25}{4}$	$-\frac{3}{4}$	0	1	36	$R_3^2 = R_3^1 - 15R_1^2$
P = 18,000		s_j	600	150	30	0	0		
		$c_j - s_j$	0	170	-30	0	0		

จากตารางที่ 2 อ่านได้ว่า กำไร P ที่ได้นี้ยังไม่เป็นกำไรสูงสุด เรายังมี $c_2 - s_2 = 170$ เป็นค่าบวกที่มากที่สุด แสดงว่าจะต้องเพิ่มค่า x_2 ซึ่งจะทำให้ได้กำไร P เพิ่มขึ้นอีก 170 บาท ต่อ x_2 1 หน่วย ค่า θ_i ที่น้อยที่สุดคือ $\theta_2 = 20$ แสดงว่าจะต้องให้ x_2 แทนที่ x_4 เป็นจำนวน 20 หน่วย อันจะเป็นผลให้กำไร P เพิ่มขึ้นอีก (150)(20) = 3,400 รวมเป็นกำไรที่จะได้ต่อไปเท่ากับ 18,000 + 3,400 = 21,400

ในขั้นที่ 3 เราสรุปว่า จะใช้ x_2 แทนที่ x_4 เป็นจำนวน 20 หน่วย นั่นก็หมายความว่า จากสมการในชุดที่ 2 เราจะกำหนดให้ $x_3 = x_4 = 0$ และให้มี $x_2 = 20$ ซึ่งก็เท่ากับว่าเราจะทำให้ ส.ป.ส. ของ x_2 ในสมการ $(2)^2$ มีค่าเป็น 1 และในสมการอื่น ๆ เป็น 0 ด้วยวิธีการต่อไปนี้

$$(2)^2 \div 3 \quad : \quad x_2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 = 20 \qquad \ldots\ldots\ldots(2)^3$$

$$(1)^2 - \frac{1}{4}(2)^3 \quad : \quad x_1 + \frac{2}{15}x_3 - \frac{1}{12}x_4 = 25 \qquad \ldots\ldots\ldots(1)^3$$

$$(3)^2 - \frac{25}{4}(2)^3 \quad : \quad \frac{4}{3}x_3 - \frac{25}{12}x_4 + x_5 = 100 \qquad \ldots\ldots\ldots(3)^3$$

$$(0)^2 + 170(2)^3 \quad : \quad P - \frac{80}{3}x_3 + \frac{170}{3}x_4 = 21{,}400 \qquad \ldots\ldots\ldots(0)^3$$

ผลจาก $(0)^3$ แสดงว่าฟังก์ชันกำไร P คือ

$$P = 21{,}400 + \frac{80}{3}x_3 - \frac{170}{3}x_4$$

ซึ่งเมื่อพิจารณาดูแล้ว จะเห็นว่า ค่าของกำไร P ยังเพิ่มขึ้นได้อีก $\frac{80}{3}$ บาทต่อการที่ผลิตจนเหลือไม้ประเภทที่ 3 เพียง 1 แผ่น-ฟุต จากการเปรียบเทียบปริมาณที่เหลืออยู่ของไม้ประเภทที่ 1 นี้ พบว่า หากเราจะไม่ผลิตโต๊ะ ผลิตเก้าอี้เพียงอย่างเดียว จะมีไม้ประเภทที่ 1 เหลืออยู่ $\frac{25}{2/15}$ = 187.5 แผ่น-ฟุต แต่การตัดสินใจเช่นนี้ ปรากฏว่าแรงงานขาดไป มีไม่พอที่จะทำเก้าอี้แล้วให้เหลือไม้ประเภทที่ 1 187.5 แผ่น-ฟุตได้ ถ้าเราเปลี่ยนแปลงจำนวนโต๊ะและเก้าอี้เสียใหม่ กำหนดว่าจำนวนที่ผลิตนี้จะต้องใช้แรงงานหมดพอดี เหลือเฉพาะไม้ประเภทที่ 1 จะพบว่าไม้นี้มีเหลืออยู่ $\frac{100}{4/3} = 75$ ซึ่งเห็นว่าเป็นปริมาณที่เหมาะสมที่สุด

ผลสรุปที่ได้ในขั้นที่ 3 นี้ เขียนในรูปของตารางซิมเพลกซ์ได้ดังนี้

ตารางที่ 3

ตัวแปรฐาน x_i	c_i	c_j คำตอบฐาน	600 a_1	320 a_2	0 a_3	0 a_4	0 a_5	ค่าที่เป็นไปได้ θ	หมายเหตุ
x_1	600	25	1	0	$\frac{2}{15}$	$-\frac{1}{12}$	0	187.5	$R_2^3 = R_2^2/3$
x_2	320	20	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	—	$R_1^3 = R_1^2 - \frac{1}{4}R_2^3$
x_5	0	100	0	0	$\frac{4}{3}$	$-\frac{25}{12}$	1	75	$R_3^3 = R_3^2 - \frac{25}{4}R_2^3$
$p = 21,400$		s_j	600	320	$-\frac{80}{3}$	$\frac{170}{3}$	0		
		$c_j - s_j$	0	0	$\frac{80}{3}$	$-\frac{170}{3}$	0		

จากตารางที่ 3 อ่านได้ว่า กำไรที่ได้ยังไม่เป็นกำไรมากที่สุด ค่าของกำไรยังสูงขึ้นได้อีก $\frac{80}{3}$ บาท ถ้าให้มีไม้ประเภทที่ 1 (x_3) เหลืออยู่ 1 แผ่น-ฟุต และจากค่าน้อยที่สุดของ $\theta_3 = 75$ แสดงว่าจะมีไม้ประเภทที่ 1 เหลืออยู่ 75 แผ่น-ฟุต แล้วกำไร P จะเพิ่มขึ้นอีก $(75)(\frac{80}{3}) = 2,000$ บาท รวมเป็นกำไรที่จะได้เท่ากับ $21,400 + 2,000 = 23,400$ บาท

ในขั้นที่ 4 เราสรุปได้ว่า จะใช้ x_3 แทนที่ x_5 เป็นจำนวน 75 หน่วย และให้ $x_4 = x_5 = 0$

นั่นก็หมายความว่า จากสมการในชุดที่ 3 เราทำให้ ส.ป.ส. ของ x_3 ในสมการ $(3)^3$ เป็น 1 และในสมการอื่น ๆ เป็น 0 ด้วยวิธีการต่อไปนี้

$$(3)^3 \ \frac{4}{3} \ : \qquad x_3 - \frac{25}{16}x_4 + \frac{3}{4}x_5 = 75 \qquad .(3)^4$$

$$(2)^3 + \frac{1}{3}(3)^4 \ : \qquad x_2 \qquad \frac{3}{16}x_4 + \frac{1}{4}x_5 = 45 \qquad .(2)^4$$

$$(1)^3 - \frac{2}{15}(3)^4 : \qquad x_1 \qquad + \frac{1}{8}x_4 - \frac{1}{10}x_5 = 15 \qquad ....(1)^4$$

$$(0)^3 + \frac{80}{3}(3)^4 : \ ฆ \qquad + 15x_4 + 20x_5 = 23,400 \qquad ....(0)^4$$

ผลจาก $(0)^4$ แสดงว่าฟังก์ชันของกำไร P คือ

$$P = 23,400 - 15x_4 - 20x_5$$

ซึ่งจากฟังก์ชันนี้แสดงให้เห็นว่า กำไร P ไม่มีทางเพิ่มขึ้นได้อีกแล้ว นั่นก็คือกำไร 23,400 เป็นกำไรสูงสุดแล้ว ผลลัพธ์ที่ได้จากชุดที่ 4 นี้ เป็นคำตอบอุตมะแล้ว เราสรุปผลลัพธ์เหล่านี้ลงในตารางได้ดังนี้

ตารางที่ 4

ตัวแปรฐาน x_i	c_i	c_j / คำตอบฐาน	600 a_1	320 a_2	0 a_3	0 a_4	0 a_5	หมายเหตุ
x_1	600	15	1	0	0	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{10}$	$R_1^4 = R_1^3 - \frac{2}{15} R_3^4$
x_2	320	45	0	1	0	$-\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$R_2^4 = R_2^3 + \frac{1}{3} R_3^4$
x_3	0	75	0	0	1	$-\frac{25}{16}$	$\frac{3}{4}$	$R_3^4 = \frac{3}{4} R_3^3$
P = 23,400		s_j	600	320	0	15	20	
		$c_j - s_j$	0	0	0	-15	-20	

สรุปได้ว่า เจ้าของร้านจะผลิตโต๊ะ 15 ตัว ผลิตเก้าอี้ 45 ตัว จะยังคงเหลือไม้ประเภทที่ 1 อยู่ 75 ส่วนไม้ประเภทที่ 2 และแรงงานใช้หมดไปพอดี ซึ่งจะทำให้เจ้าของร้านได้กำไรมากที่สุด 23,400 บาท

เมื่อพิจารณาจากเซทของสมการ หรือที่เขียนในรูปตารางซิมเพลกซ์ ในแต่ละขั้นตอนจะเห็นว่า จุดแรกที่เราจะต้องพิจารณาก็คือ ค่าของอัตรากำไรเพิ่มต่อหน่วยของ x_j $(c_j - s_j)$ ดูว่ายังมีค่าเป็นบวกหรือไม่ ถ้ายังมีค่าเป็นบวก แสดงว่าค่าของกำไร P ยังเพิ่มขึ้นได้อีก เมื่อไรที่ไม่มี $c_j - s_j$ ตัวใดมีค่าเป็นบวกอีกแล้ว แสดงว่าเราได้คำตอบอุตมะแล้ว หากมี $c_j - s_j$ เป็นบวกให้เลือกค่าบวกที่มากที่สุด ค่านี้อยู่ในคอลัมน์ใด หมายความว่าตัวแปรในคอลัมน์นั้นจะเข้ามาเป็นตัวแปรฐานตัวต่อไป และเราเรียกคอลัมน์นี้ว่า key column เราหาค่าของคำตอบฐานของตัวแปรฐานใหม่นี้โดยการเลือกจากค่า θ ที่น้อยที่สุด โดยที่ θ จะได้มาจาก

$$\theta_i = \frac{\text{คำตอบฐานแถวที่ i}}{x_{ik}} = \frac{x_{io}}{x_{ik}}, \quad x_{ik} > 0$$

วิธีการดังกล่าวมาแล้วเป็นการใช้ Gaussian Elimination อย่างเป็นระบบ แล้วนำเสนอในรูปของตารางซิมเพลกซ์ เพื่อความเข้าใจดียิ่งขึ้น เราจะกล่าวถึงการวิเคราะห์ในเรื่องเหล่านี้อีกครั้ง โดยอาศัยทฤษฎีเกี่ยวกับวิธีการซิมเพล็กซ์ ซึ่งจะได้กล่าวในหัวข้อต่อไป

3.3 ขั้นตอนการคำนวณด้วยซิมเพลกซ์

ก่อนอื่นเรามาทำความตกลงกันก่อนว่า ปัญหาของเราจะต้องมีคำตอบที่เป็นไปได้ และมีคำตอบที่เป็นไปได้ขั้นฐาน (คำตอบฐาน) เป็น nondegenerate

สมมติว่า เรามีคำตอบ

$$\underline{X}_0' = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{m0})$$

ที่เกี่ยวข้องกับเซทของเวคเตอร์ที่เป็นอิสระเชิงเส้นตรง (linearly independent) $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_m$ เราจะได้

$$x_{10}\underline{a}_1 + x_{20}\underline{a}_2 + \ldots + x_{m0}\underline{a}_m = a_o \qquad \ldots\ldots\ldots.(3.3.1)$$

$$x_{10}c_1 + x_{20}c_2 + \ldots + x_{m0}c_m = P_o \qquad \ldots\ldots\ldots.(3.3.2)$$

ในเมื่อ $x_{io} > 0$ ทุก ๆ ตัว (สำหรับ x_{io} ที่เหลืออีก n ตัวและไม่ได้แสดงค่าในที่นี้ แสดงว่ามีค่าเป็น o ในทางปฏิบัติ $x_{io} > 0$ ไม่จำเป็นที่จะต้องเป็น x_{io} m ตัวแรก แต่อาจจะเป็น x_{io} m ตัวใดก็ได้) ในที่นี้ c_i เป็น ส.ป.ส. ของ x_i ในฟังก์ชันเป้าหมาย และ P_o เป็นค่าของฟังก์ชันเป้าหมายที่คำนวณจากคำตอบ $\underline{X}_0'$ ที่กำหนดไว้

โดยเหตุที่ เซทของ $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_m$ เป็นอิสระเชิงเส้นตรง และประกอบกันเป็นฐาน (basis) เราจึงสามารถแสดงเวคเตอร์ใด ๆ จากเซทของ $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_{n+m}$ ในเทอมของ $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_m$ ได้

ให้ $\underline{a}_j$ กำหนดไว้โดย

$$x_{1j}\underline{a}_1 + x_{2j}\underline{a}_2 + \ldots + x_{mj}\underline{a}_m = \underline{a}_j, \; j = 1, 2, \ldots, n+m \qquad \ldots\ldots\ldots.(3.3.3)$$

และกำหนดค่าของ s_j ไว้โดย

$$x_{1j}c_1 + x_{2j}c_2 + \ldots + x_{mj}c_m = s_j, \; j = 1, 2, \ldots, n+m \qquad \ldots\ldots\ldots.(3.3.4)$$

เมื่อ c_i เป็น ส.ป.ส. ของ x_i ที่อยู่ในลำดับเดียวกันกับ a_i

เพื่อความเข้าใจชัดยิ่งขึ้น ขอให้นักศึกษากลับไปดูจากตัวอย่างที่ 3.1 ในตัวอย่างนี้เรามีคำตอบฐานชุดแรกคือ

$$X_0' = (x_{30}, x_{40}, x_{50}) = (600, 660, 675)$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าค่าของ $x_{io} > 0$ ไม่จำเป็นจะต้องเป็นค่าใน m ตัวแรก

สมการ (3.3.1) และ (3.3.2) จะเขียนได้ดังนี้

$$600\underline{a}_3 + 600\underline{a}_4 + 675\underline{a}_5 = \underline{a}_o$$

และ $$600c_3 + 660c_4 + 675c_5 = P_o$$

ในขั้นที่ 2 ของตัวอย่างนี้ เราเปลี่ยนเวคเตอร์ $\underline{a}_1$ เข้ามาในฐาน สมการ (3.3.3) ของเราจึงเป็น

$$20\underline{a}_3 + 20\underline{a}_4 + 15\underline{a}_5 = \underline{a}_1$$

นั่นก็คือ $x_{31} = 20,\ x_{41} = 20,\ x_{51} = 15$

ทฤษฎีที่ 3.6 ถ้าค่าสูงสุดของฟังก์ชันเป้าหมาย P มีจริง กล่าวคือ กรอบบน (upper bound) ถูกจำกัด หากมีเงื่อนไขว่า $c_j - s_j > 0$ สำหรับค่าคงที่ j ใด ๆ แล้วเราจะหาได้เซทของคำตอบชุดใหม่ ที่ทำให้ได้ค่าของฟังก์ชันเป้าหมาย P ซึ่งคำนวณจากคำตอบชุดใหม่นี้ มีค่ามากกว่าค่าของฟังก์ชันเป้าหมายที่คำนวณจากคำตอบชุดเดิม นั่นก็คือ

$$P \geqslant P_o$$

และคำตอบชุดใหม่นี้ จะประกอบด้วยตัวแปรที่มีค่าเป็นบวกเพียง m ตัวเท่านั้น

พิสูจน์

เราคูณสมการ (3.3.3) ด้วยค่า θ แล้วนำผลที่ได้ไปลบออกจากสมการ (3.3.1) นั่นก็คือ

$$(x_{10} - \theta x_{1j})\underline{a}_1 + (x_{20} - \theta x_{2j})\underline{a}_2 + \ldots + (x_{mo} - \theta x_{mj})\underline{a}_m + \theta\underline{a}_j = \underline{a}_o \quad \ldots\ldots\ldots(3.3.5)$$

เอาสมการ (3.3.4) คูณด้วยค่า θ แล้วนำผลที่ได้ไปลบออกจากสมการ (3.3.2) นั่นก็คือ

$$(x_{10} - \theta x_{1j})c_1 + (x_{20} - \theta x_{2j})c_2 + \ldots + (x_{mo} - \theta x_{mj})c_m + \theta c_j = P_o - \theta(s_j - c_j) \quad \ldots\ldots\ldots(3.3.6)$$

ในเมื่อ θc_j เป็นค่าที่เรานำไปบวกสมการ (3.3.6) ทั้งสองข้าง

ถ้า ส.ป.ส. ของเวคเตอร์ในสมการ (3.3.5) คือ $x_{10} - \theta x_{1j}, x_{20} - \theta x_{2j}, \ldots, x_{mo} - \theta x_{mj}$ และ θ ทุกตัวไม่มีค่าเป็นลบ แล้วเราจะได้คำตอบฐานชุดใหม่ ที่ให้ค่าฟังก์ชันเป้าหมาย

$$P = \sum_{i=1}^{m} (x_{io} - \theta x_{ij})c_i$$

อาศัยผลจากสมการ (3.3.6) จะได้ว่า

$$P = P_o - \theta(s_j - c_j)$$

และ $$P = P_o + \theta(c_j - s_j)$$

โดยเหตุที่ ตัวแปร $x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{mo}$ ในสมการ (3.3.5) เป็นบวกทุกตัว เราจึงเลือกค่า $\theta > 0$ ที่จะทำให้ $x_{10} - \theta x_{1j}, x_{20} - \theta x_{2j}, \ldots, x_{mo} - \theta x_{mj}$ ยังคงค่าเป็นบวกทุกตัว

จากเกณฑ์สมมติที่ว่า $c_j - s_j > 0$ สำหรับค่าคงที่ j

เราจะได้

$$P = P_o - \theta(s_j - c_j) = P_o + \theta(c_j - s_j) > P_o$$

สำหรับ θ ที่มีค่ามากกว่า 0

เราจะเห็นได้ว่า เมื่อไรก็ตามที่เราสามารถหาคำตอบที่เป็นไปได้ชุดใหม่ ค่าของฟังก์ชันเป้าหมายที่คำนวณได้จากคำตอบชุดใหม่นี้ จะมีค่ามากกว่าค่าเดิม

ถ้ามี $x_{ij} > 0$ สำหรับค่าคงที่ j อย่างน้อยที่สุด 1 ตัว ในสมการ (3.3.3), $i = 1, 2, \ldots, m$

ค่ามากที่สุดของ θ ที่ยังคงทำให้ $x_{10} - \theta x_{1j}, x_{20} - \theta x_{2j}, \ldots, x_{mo} - \theta x_{mj}$ ไม่เป็นลบ นั่นก็คือ

$$x_{io} - \theta x_{ij} \geqslant 0 \quad \text{หรือ } \theta \leqslant x_{io}/x_{ij} \quad \text{ทุกค่า } x_{ij} > 0,\ i = 1, 2, \ldots, m$$

จะถูกกำหนดโดย

$$\theta_o = \text{ค่าต่ำสุด } \frac{x_{io}}{x_{ij}} > 0\ ,\ x_{ij} > 0 \qquad \text{..........(3.3.7)}$$

ในเมื่อ θ_o เป็นค่ามากที่สุดของ θ ที่เราเลือก

โดยเหตุที่เราสมมติว่าปัญหานี้เป็น nondegenerate นั่นก็คือ จะมีคำตอบฐานที่ประกอบด้วยค่าที่เป็นบวกเพียง m ตัวเท่านั้น ดังนั้นค่า θ_o จะมีเพียงค่าเดียว สมมติ

$$\theta_o = x_{ro}/x_{rj}$$

เราแทนค่า θ ด้วย θ_o ในสมการ (3.3.5) และ (3.3.6) ดังนั้น $x_{ro} - \theta x_{rj} = 0$

แสดงว่าเราจะได้คำตอบฐานชุดใหม่ที่ประกอบด้วย a_j และ $m - 1$ เวคเตอร์ของฐาน (basis) เดิม เราวิเคราะห์ฐานที่ได้ใหม่นี้ในแบบเดียวกันกับฐานเดิม

ถ้า $c_j - s_j$ ของชุดใหม่มีค่ามากกว่า 0 และ x_{ij} ในลำดับเดียวกันก็มีค่ามากกว่า 0 ก็จะได้คำตอบชุดใหม่ที่ทำให้ค่าของฟังก์ชันเป้าหมายเพิ่มขึ้น ขบวนการนี้จะดำเนินไปเรื่อย ๆ จนกระทั่ง

$$c_j - s_j \leqslant 0$$

หมดทุกตัว

ถ้า $c_j - s_j \leqslant 0$ หมดทุกตัว ขบวนการนี้ก็สิ้นสุดลง นั่นก็คือ เราจะได้คำตอบอุตมะ

ทฤษฎีที่ 3.7 หากมีคำตอบฐาน (basic feasible solution)

$$\underline{X}' = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{mo})$$

ภายใต้เงื่อนไข $c_j - s_j \leqslant 0$ ทุก ๆ ค่า $j = 1, 2, \ldots, n + m$

แล้ว ผลจากสมการ (3.3.1) และ (3.3.2) จะให้คำตอบอุตมะ นั่นก็คือ เป็นคำตอบที่ทำให้ได้ค่า P มากที่สุด

พิสูจน์

กำหนด

$$y_{10}\underline{a}_1 + y_{20}\underline{a}_2 + \ldots + y_{(n+m)0}\underline{a}_{n+m} = a_o \qquad \ldots\ldots\ldots(3.3.8)$$

และ

$$y_{10}c_1 + y_{20}c_2 + \ldots + y_{(n+m)0}c_{n+m} = P^* \qquad \ldots\ldots\ldots(3.3.9)$$

เป็นคำตอบฐานอื่น ๆ ที่มีค่า P* เป็นค่าของฟังก์ชันเป้าหมายในลำดับเดียวกัน

เราจะแสดงให้เห็นจริงว่า $P_o \geqslant P^*$

(กรณีนี้ เราไม่คำนึงถึงเกณฑ์สมมติที่ว่าเป็น nondegenerate)

โดยสมมติฐาน $(c_j - s_j) \leqslant 0$ สำหรับทุก ๆ j ดังนั้นเมื่อเราแทนที่ c_j ด้วย s_j ลงในสมการ (3.3.9) จะได้ว่า

$$y_{10}s_1 + y_{20}s_2 + \ldots + y_{(n+m)0}c_{n+m} \geqslant P^* \qquad \ldots\ldots\ldots(3.3.10)$$

ในแต่ละ j เราแทนที่ $\underline{a}_j$ ในสมการ (3.3.8) ด้วยค่าของ $\underline{a}_j$ ที่กำหนดไว้ในสมการ (3.3.3) จะได้ว่า

$$y_{10}(\sum_{i=1}^{m} x_{i1}\underline{a}_i) + y_{20}(\sum_{i=1}^{m} x_{i2}\underline{a}_i) + \ldots + y_{(n+m)0}(\sum_{i=1}^{m} x_{i(n+m)}\underline{a}_i) \quad = \quad \underline{a}_0$$

หรือ

$$(\sum_{j=1}^{n+m} y_{jo}x_{1j})\underline{a}_1 + (\sum_{j=1}^{n+m} y_{jo}x_{2j})\underline{a}_2 + \ldots + (\sum_{j=1}^{n+m} y_{jo}x_{mj})\underline{a}_m \quad = \quad \underline{a}_0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (3.3.11)$$

ในทำนองเดียวกัน ในแต่ละ j เราแทนที่ s_j ในสมการ (3.3.10) ด้วยค่าของ s_j ที่กำหนดไว้ในสมการ (3.3.4) จะได้ว่า

$$y_{10}(\sum_{i=1}^{m} x_{i1}c_i) + y_{20}(\sum_{i=1}^{m} x_{i2}c_i) + \ .\ .\ . + y_{(n+m)0}(\sum_{i=1}^{m} x_{i(n+m)}c_i) \geqslant P^*$$

หรือ

$$(\sum_{j=1}^{n+m} y_{jo}x_{1j})c_1 + (\sum_{j=1}^{n+m} y_{jo}x_{2j})c_2 + \ .\ .\ . + (\sum_{j=1}^{n+m} y_{jo}x_{mj})c_m \geqslant P^* \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (3.3.12)$$

เราเอาสมการ (3.3.1) ลบด้วยสมการ (3.3.12) และอาศัยผลที่ว่า เซทของเวคเตอร์ $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_m$ เป็นอิสระเชิงเส้นตรง จะได้ว่า

$$x_{io} - \sum_{j=1}^{n+m} y_{jo}x_{ij} \quad = \quad 0 \qquad \text{ทุก ๆ } i = 1, 2, \ldots, m$$

หรือ

$$x_{io} \quad = \quad \sum_{j=1}^{n+m} y_{jo}x_{ij}\ , \ \ i = 1, 2, \ldots, m$$

ในแต่ละ i เราแทนค่า $\sum_{j=1}^{n+m} y_{jo}x_{ij}$ ลงในสมการ (3.3.12) ด้วย x_{io} จะได้ว่า

$$x_{10}c_1 + x_{20}c_2 + \ldots + x_{mo}c_m \ \geqslant \ P^*$$

อาศัยผลจากสมการ (3.3.2) จะเห็นว่า $P_o \geqslant P^*$

ผลที่ได้จากทฤษฎีที่ 3.6 และ 3.7 แสดงให้เห็นว่า เราจะเริ่มต้นด้วยการหาคำตอบฐานชุดแรก ซึ่งจะก่อให้เกิดคำตอบฐานชุดอื่น ๆ ที่จะนำไปสู่คำตอบที่ดีที่สุด (คำตอบอุตมะ) ที่ทำให้ได้ค่าของฟังก์ชันเป้าหมายมีค่าสูงสุด เราจึงสรุปการแก้ปัญหาโดยวิธีการซิมเพลกซ์ดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 จากตัวแบบมาตรฐาน (3.1), (3.2) และ (3.3) เขียนตารางซิมเพลกซ์ที่ 1 ดังนี้

ตัวแปรฐาน		c_j	c_1	c_2	....	c_n	0	0	......	0
x_i	c_i	คำตอบฐาน	a_1	a_2	....	a.	a_{n+1}	a_{n+2}	......	a_{n+m}
x_{n+1}	0	x_{10}	x_{11}	x_{12}	......	x_{1n}	1	0	......	0
x_{n+2}	0	x_{20}	x_{21}	x_{22}	....	x_{2n}	0	1	......	0
.	.	.			....	.	.		......	.
.	.	.			....	.			......	.
.	.	.			....	.			......	.
.	.	.			....	.			......	.
x_{n+m}	0	x_{m0}	x_{m1}	x_{m2}	....	x_{mn}	0	0	......	1
P = 0		s_j	0	0	....	0	0	0	......	0
		$c_j - s_j$	c_1	c_2	....	c_n	0	0	......	0

ในที่นี้ $x_{i0} = b_i$ และ x_{ij} = a,, , i = 1, 2, ... m ; j = 1, 2, ... n + m

นั่นก็คือ X'_o = (b,, b_2, ... b,) > 0

ขั้นที่ 2 คำนวณค่า $P = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{io}$ และ $s_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij}$

หาค่า c, s, ทุก ๆ j = 1, 2, ... n + m

ขั้นที่ 3 ตรวจสอบค่าของ $c_j - s_j$ เพื่อทดสอบว่าคำตอบที่ได้เป็นคำตอบอุตมะ (คำตอบที่ให้ค่าฟังก์ชันเป้าหมาย P สูงสุด) หรือไม่

3.1 หากไม่มี $c_j - s_j$ ตัวใดมีค่าเป็นบวก นั่นก็คือ $c_j - s_j \leqslant 0$ ทุก ๆ j แสดงว่าคำตอบนั้นเป็นคำตอบอุตมะแล้ว ขบวนการนี้ก็สิ้นสุดลง

3.2 หากมี $c_j - s_j$ บางตัวมีค่าเป็นบวก นั่นก็คือมี $c_j - s_j > 0$ ให้ทำขั้นที่ 4 ต่อไป

ขั้นที่ 4 เลือกเวคเตอร์ที่จะนำเข้ามาในฐาน (basis) นั่นก็คือ เลือกเวคเตอร์ที่มีค่า $c_j - s_j$ สูงสุด สมมติได้

$c_k - s_k$ = ค่าสูงสุด $(c_j - s_j)$

แสดงว่าเวคเตอร์ $\underline{a_k}$ จะถูกนำเข้ามาในฐาน หรืออีกนัยหนึ่ง เราจะได้ x_k เป็นตัวแปรฐานใหม่ เราเรียกคอลัมน์ k นี้ว่า key column

ขั้นที่ 5 เลือกเวคเตอร์ที่จะขจัดออกจากฐาน เพื่อจะหาคำตอบชุดใหม่ที่ดีกว่า นั่นก็คือ พิจารณาค่าที่เป็นไปได้ของ x_k จากการเปลี่ยนค่าตัวแปรฐานเดิม ซึ่งก็คือการหาค่า θ_i จาก

$$\theta_i = \frac{x_{io}}{x_{ik}}, \; x_{ik} > 0 \; ; i = 1, 2, \ldots, m$$

(เราไม่พิจารณาค่า x_{ik} ที่เป็นลบหรือเท่ากับ 0 เพราะเรากำหนดไว้แล้วว่า ตัวแปรจะต้องไม่มีค่าเป็นลบ นอกจากนี้ค่าของ x_k ที่เป็นไปได้ก็คือค่า θ_i ที่น้อยที่สุด)

เลือกค่า θ_i ที่น้อยที่สุด สมมติได้

$$\theta_r = \text{ค่าต่ำสุด } \theta_i = x_{ro}/x_{rk}$$

แสดงว่าเวคเตอร์ที่อยู่ในแถว r เดิมจะถูกขจัดออก สมมติเป็นเวคเตอร์ $\underline{a}_s$ นั่นก็หมายความว่า เราให้ x_k เป็นจำนวน θ_r แทนที่ x_s

เราเรียกแถว r นี้ว่า key row และเรียก x_{rk} ว่า pivot number (element)

ขั้นที่ 6 เปลี่ยนตารางใหม่โดยใช้วิธีการ Gaussian Elimination

เปลี่ยนตัวแปรฐานจาก x_s เป็น x_k, c_s เป็น c_k นอกนั้นเหมือนเดิม

เปลี่ยนคำตอบฐานและ ส.ป.ส. x_{ij} ดังต่อไปนี้

แถวที่ r ใหม่ เท่ากับ แถวที่ r เดิมหารด้วย x_{rk} จะได้ว่า

$$\frac{x_{ro}}{x_{rk}} \; \frac{x_{r1}}{x_{rk}} \; \frac{x_{r2}}{x_{rk}} \ldots\ldots \frac{x_{rk}}{x_{rk}} \ldots\ldots\ldots$$

นำผลที่ได้นี้คูณด้วย x_{ik}, $i \neq r$ แล้วนำไปลบออกจากแถวที่ i เดิม นั่นก็คือ

แถว i เดิม :	x_{io}	x_{i1}	x_{i2}	.....	x_{ik}	.....	$(i \neq r)$
ลบด้วย :	$\frac{x_{ik}x_{ro}}{x_{rk}}$	$\frac{x_{ik}x_{r1}}{x_{rk}}$	$\frac{x_{ik}x_{r2}}{x_{rk}}$	.....	x_{ik}	.....	

ผลที่ได้คือแถว i ใหม่ $(i \neq r)$

หากเรากำหนด $x'_{ro} = x_{ro}/x_{rk}$, $x'_{rj} = x_{rj}/x_{rk}$

และ $x'_{io} = x_{io} - \dfrac{x_{ik}x_{ro}}{x_{rk}}$, $x'_{ij} = x_{ij} - \dfrac{x_{ik}x_{rj}}{x_{rk}}$; $i \neq r$

ตารางต่อไปจะเขียนได้ดังนี้

ตัวแปรฐาน		c_j	c_1	c_2	...	c_k	.	c_n	0		0	0
x_i	c_i	คำตอบฐาน	a_1	a_2	...	a,	. . .	a,	a_{n+1}		a_{n+r}	a.,,
x_{n+1}	0	x'_{10}	x'_{11}	x'_{12}	...		0	x'_{1n}	1		$x_{1(n+r)}$	0
.	.	.	.	.	...	.		...	.		...	.
x_{n+r-1}	0	$x'_{(r-1)0}$	$x'_{(r-1)1}$	$x'_{(r-1)2}$	...	0	...	$x'_{(r-1)n}$	0	..	$x'_{(r-1)(n+r)}$ ...	0
x_k	c_k	x'_{r0}	x'_{r1}	x'_{r2}	...	1	.	x'_{rn}	0	..	$x'_{r(n+r)}$	0
.	.	.	.	.	...	.			.			
.	.	.	.	.	...				.			
x_{n+m}	0	x'_{m0}	x''_{m1}	x'_{m2}	...	0	...	x'_{mn}	0	...	$x'_{m(n+r)}$	1

กลับไปทำขั้นที่ 2 ต่อไปจนกว่าจะได้คำตอบอุตมะ

การทำซ้ำใหม่ในแต่ละตาราง เรียกว่า iteration

เพื่อความเข้าใจในการทำแต่ละขั้นตอน ขอให้นักศึกษาย้อนกลับไปดูตัวอย่างที่ 3.1 อีกครั้ง

ภายหลังการเขียนตารางที่ 1 (ดูตารางที่ 1 หน้า 61) จะเห็นว่ามี $c_j - s_j > 0$ และค่าสูงสุด คือ $c_1 - s_1 = 600$ เราจึงคำนวณค่า θ_i ได้

$$\theta_1 = \frac{600}{20} = 30, \quad \theta_2 = \frac{660}{20} = 33, \quad \theta_3 = \frac{675}{15} = 45$$

ค่าต่ำสุดของ θ_i คือ $\theta_1 = 30$ แสดงว่าเราจะนำเวคเตอร์ a_1 เข้าไปแทนที่เวคเตอร์ a_3 ดังนั้นตัวแปรฐานชุดที่ 2 จึงประกอบด้วย

ตัวแปรฐาน

x_i	c_i
x_1	600
x_4	0
x_5	0

แถวที่ 1 ของตารางที่ 2 ได้จาก

$$\frac{600}{20} \quad \frac{20}{20} \quad \frac{5}{20} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{0}{20} \quad \frac{0}{20}$$

ผลลัพธ์ที่ได้นี้เอาไปคูณกับ 20 แล้วลบออกจากแถวที่ 2 ของตารางที่ 1 จะกลายเป็นแถวที่ 2 ของตาราง 2

ดังนั้นแถวที่ 2 ของตาราง 2 จะเป็น

600-600 20-20 8 - 5 0-1 1 - 0 0 - 0

เอาผลของแถวที่ 1 ในตาราง 2 ไปคูณกับ 15 จะได้

$$450 \quad 15 \quad \frac{15}{4} \quad \frac{3}{4} \quad 0 \quad 0$$

นำผลที่ได้นี้ไปลบออกจากแถวที่ 3 ตาราง 1 จะได้

$$675-450 \quad 15-15 \quad 10-\frac{15}{4} \quad 0-\frac{3}{4} \quad 0-0 \quad 1-0$$

ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นของแถวที่ 3 ตาราง 2

กลับไปทำขั้นที่ 2 ใหม่ นั่นก็คือคำนวณค่า P และ s_j

$c_ix'_{i0}$	$c_ix'_{i1}$	$c_ix'_{i2}$	$c_ix'_{i3}$	$c_ix'_{i4}$	$c_ix'_{i5}$
(600)(30)	(600)(1)	$(600)(\frac{1}{4})$	$(600)(\frac{1}{20})$	(600)(0)	(600)(0)
(0)(60)	(0)(0)	(0)(3)	(0)(−1)	(0)(1)	(0)(0)
(0)(225)	(0)(0)	$(0)(\frac{25}{4})$	$(0)(-\frac{3}{4})$	(0)(0)	(0)(1)

ผลบวกของผลคูณในแต่ละคอลัมน์ก็คือค่าของ P, s_1, s_2, s_3, s_4 และ s_5 ตามลำดับ

หาค่า $c_j - s_j$ และเมื่อมี $c_2 - s_2 = 170$ เป็นค่ามากที่สุด เราจึงหาค่าของ θ_i ต่อไป ซึ่งผลที่ได้ปรากฏในตาราง 2

การทำตารางที่ 3 และตารางที่ 4 อาศัยวิธีการแบบเดียวกัน เมื่อมาถึงตารางที่ 4 พบว่าไม่มี $c_j - s_j$ ตัวใดเป็นบวกอีกแล้ว เรานำผลจากตารางที่ 4 เป็นทางเลือกที่ดีที่สุด นั่นคือเราได้คำตอบอุตมะแล้ว เราสรุปการคำนวณด้วยวิธีการซิมเพลกซ์ของตัวอย่างที่ 3.1 ได้ดังนี้

ตารางที่	ตัวแปรฐาน x_i	c_i	c_j คำตอบฐาน	600 a_1	320 a_2	0 a_3	0 a_4	0 a_5	ค่าที่เป็นไปได้ θ_i
	x_3	0	600	20	5	1	0	0	30
1	x_4	0	660	20	8	0	1	0	33
	x_5	0	675	15	10	0	0	0	45
	P = 0		s_j	0	0	0	0	0	
			$c_j - s_j$	600	320	0	0	0	

2	x_1 600	30	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{20}$	0	0	120
	x_4 0	60	0	3	-1	1	0	20
	x_5 0	225	0	$\frac{25}{4}$	$-\frac{3}{4}$	0	1	36
	P = 18000	s_j	600	150	30	0	0	
		$c_j - s_j$	0	170	-30	0	0	
3	x_1 600	25	1	0	$\frac{2}{15}$	$-\frac{1}{12}$	0	187.5
	x_2 320	20	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	
	x_5 0	100	0	0	$\frac{4}{3}$	$-\frac{25}{12}$	1	75
	P = 21400	s_j	600	320	$-\frac{80}{3}$	$\frac{170}{3}$	0	
		$c_j - s_j$	0	0	$\frac{80}{3}$	$-\frac{170}{3}$	0	
4	x_1 600	15	1	0	0	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{10}$	
	x_2 320	45	0	1	0	$-\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	
	x_3 0	75	0	0	1	$-\frac{25}{16}$	$\frac{3}{4}$	
	P = 23400	s_j	600	320	0	15	20	
		$c_j - s_j$	0	0	0	-15	-20	

สรุปว่า เจ้าของร้านควรผลิตโต๊ะ 15 ตัว ผลิตเก้าอี้ 45 ตัว จะได้กำไรมากที่สุด 23,400 บาท และในการผลิตนี้ เจ้าของร้าน จะใช้ไม้ประเภทที่ 2 และแรงงานหมดพอดี แต่มีไม้ประเภทที่ 1 เหลืออยู่อีก 75 แผ่น-ฟุต

ตัวอย่างที่ 3.2

โรงงานแห่งหนึ่งต้องการวางแผนการผลิตสินค้า 2 ประเภท แต่ละประเภทแยกเป็นสินค้าเกรด ก และสินค้าเกรด ข ในการผลิตสินค้าแต่ละประเภทต้องใช้เครื่องจักร 3 ชนิด รายละเอียดเกี่ยวกับการผลิต และกำไรที่ได้จากการจำหน่ายสินค้าเหล่านี้ กำหนดไว้ในตารางดังนี้

เวลาที่ใช้ในการผลิต (ชั่วโมงต่อหน่วย)

เครื่องจักร	สินค้าประเภทที่ 1		สินค้าประเภทที่ 2		เวลาที่เครื่องจักรทำงานได้ (ชั่วโมง)
	เกรด ก	เกรด ข	เกรด ก	เกรด ข	
เอ	10	5	2	1	500
บี	5	6	2	1	450
ซี	4.5	18	1.5	6	765
กำไร (บาท/หน่วย)	160	100	60	40	

แผนการผลิตที่ดีที่สุดจะเป็นอย่างไร

วิธีทำ

กำหนดว่าโรงงานจะผลิตสินค้าเพื่อให้ได้กำไร P มากที่สุด จึงกะว่าจะผลิต

สินค้าประเภทที่ 1 เกรด ก x_1 หน่วย และเกรด ข x_2 หน่วย

สินค้าประเภทที่ 2 เกรด ก x_3 หน่วย และเกรด ข x_4 หน่วย

ตัวแบบของปัญหานี้ ก็คือ

หาค่าสูงสุดของ P

$$= 160x_1 + 100x_2 + 60x_3 + 40x_4$$

โดยมีข้อจำกัด

$$10x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 \leqslant 500$$

$$5x_1 + 6x2 + 2x_3 + x_4 \leqslant 450$$

$$\frac{9}{2}x_1 + 18x_2 + \frac{3}{2}x_3 + 6x_4 \leqslant 765$$

และ $x_j \geqslant 0 \quad , j = 1, 2, 3, 4$

แปลงให้อยู่ในรูปมาตรฐานได้ดังนี้

หาค่าสูงสุดของ P

$$= 160x_1 + 100x_2 + 60x_3 + 40x_4$$

โดยมีข้อจำกัด

$$10x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 500$$

$$5x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 + x_6 = 450$$

$$\frac{9}{2}x_1 + 18x_2 + \frac{3}{2}x_3 + 6x_4 + x_7 = 765$$

และ x_j $(j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) \geqslant 0$

แก้ปัญหานี้ด้วยวิธีการซิมเพลกซ์ ปรากฏผลดังต่อไปนี้

ตารางที่	ตัวแปรฐาน x_i	c_i	c_j / คำตอบฐาน	160 a_1	100 a_2	60 a_3	40 a_4	0 a_5	0 a_6	0 a_7	ค่าที่เป็นไปได้ θ_i
1	x_5	0	500	10	5	2	1	1	0	0	50
	x_6	0	450	5	6	2		10		10	90
	x_7	0	765	$\frac{9}{2}$	18	$\frac{3}{2}$	6	0	0	1	170
	P = 0		s_j	0	0	0	0	0	0	0	
			$c_j - s_j$	160	100	60	40	0	0	0	
2	x_1	160	50	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	0	250
	x_6	0	200	0	$\frac{7}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	200
	x_7	0	540	0	$\frac{63}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{111}{20}$	$\frac{9}{20}$	0	1	900
	P = 8000		s_j	160	80	32	16	16	0	0	
			$c_j - s_j$	0	20	28	24	−16	0	0	

3	x_1	160	10	1	$-\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	—
	x_3	60	200	0	$\frac{7}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	400
	x_7	0	420	0	$\frac{273}{20}$	0	$\frac{21}{4}$	$-\frac{3}{20}$	$-\frac{3}{5}$	1	80
	P = 13600		s_j	160	178	60	30	2	28	0	
			$c_j - s_j$	0	-78	0	10	-2	-28	0	
4	x_1	160	10	1	$-\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	
	x_3	60	160	0	$\frac{11}{5}$	1	0	$-\frac{17}{35}$	$\frac{37}{35}$	$-\frac{2}{21}$	
	x_4	40	80	0	$\frac{13}{5}$	0	1	$-\frac{1}{35}$	$-\frac{4}{35}$	$\frac{4}{21}$	
	P = 14400		s_j	160	204	60	40	$\frac{12}{7}$	$\frac{188}{7}$	$\frac{40}{21}$	
			$c_j - s_j$	0	-104	0	0	$-\frac{12}{7}$	$-\frac{188}{7}$	$-\frac{40}{21}$	

แผนการผลิตที่ดีที่สุด ก็คือ โรงงานควรจะผลิตสินค้าประเภทที่ 1 เกรด ก 10 หน่วย ผลิตสินค้าประเภทที่ 2 เกรด ก 160 หน่วย สินค้าประเภทที่ 2 เกรด ข 80 หน่วย จะได้กำไรสูงสุด 14,400 บาท

คำอธิบาย

1. การอ่านค่าหรือตีความหมายจากตาราง

จากตารางที่ 1 แสดงให้เห็นว่า กำไรที่เพิ่มขึ้นต่อหน่วยของการผลิตสินค้าแต่ละประเภทแต่ละเกรดเท่ากับ 160, 100, 60 และ 40 ตามลำดับ ซึ่งจะเห็นว่า กำไรที่เพิ่มขึ้นต่อหน่วยของการผลิตสินค้าประเภทที่ 1 เกรด ก มีค่ามากที่สุด เราจึงตัดสินใจผลิตสินค้านี้เป็นอันดับแรก และเมื่อพิจารณาดูความสามารถของเครื่องจักร จะเห็นว่า เครื่องจักรเอ สามารถผลิตสินค้าประเภทที่ 1 เกรด ก ได้ 50 หน่วย ในขณะที่เครื่องจักรบีและเครื่องจักรซีสามารถผลิตได้ 90 และ 170 หน่วย ตามลำดับ เราจึงสรุปได้ว่า เราจะผลิตสินค้าประเภทที่ 1 เกรด ก เป็นจำนวน 50 หน่วย ซึ่งจะทำให้กำไร P เป็น (160)(50) เท่ากับ 8,000 บาท

จากตารางที่ 2 แสดงให้เห็นว่า กำไร P ยังคงเพิ่มขึ้นได้อีก กำไรต่อหน่วยที่เพิ่มขึ้นมากที่สุด เป็นกำไรจากการผลิตสินค้าประเภทที่ 2 เกรด ก ซึ่งกำไร P จะเพิ่มขึ้นอีก 28 บาทต่อการผลิตสินค้าประเภทที่ 2 เกรด ก หนึ่งหน่วย และเมื่อพิจารณาจากปัจจัยที่ใช้ในการผลิต จะเห็นว่าหากเราไม่ผลิตสินค้า 1 เกรด ก เราสามารถผลิตสินค้า 2 เกรด ก ได้ 250 หน่วย ในขณะที่เครื่องจักรบีและซีสามารถผลิตได้ 200 และ 900 หน่วย ตามลำดับ เปรียบเทียบกันแล้ว จำนวนสินค้า 2 เกรด ก สามารถผลิตได้อย่างมากที่สุด 200 หน่วย ซึ่งจะทำให้กำไร P เพิ่มขึ้นอีก (28)(200) บาท รวมเป็น 8,000 + 5,600 = 13,600 บาท

จากตารางที่ 3 แสดงให้เห็นว่า เมื่อเราผลิตสินค้า 2 เกรด ก 200 หน่วย เราจะผลิตสินค้า 1 เกรด ก ได้เพียง 10 หน่วย และจะมีเวลาของเครื่องจักรซีที่จะทำงานได้อีก 420 ชั่วโมง การตัดสินใจนี้ยังไม่เป็นทางเลือกที่ดีที่สุด เพราะเรายังมีทางเลือกอื่นที่จะทำให้ได้กำไรเพิ่มขึ้นได้อีก นั่นก็คือ หากเราผลิตสินค้า 2 เกรด ข จะมีกำไรเพิ่มขึ้นต่อหน่วยเท่ากับ 10 บาท และจะเห็นว่าจำนวนผลิตที่มากที่สุดที่จะเป็นไปได้คือ 80 หน่วย และกำไร P จะเพิ่มขึ้นได้อีก (10)(80) รวมเป็น 13,600 + 800 = 14,400

จากตารางที่ 4 แสดงให้เห็นว่า เมื่อเราผลิตสินค้า 2 เกรด ข 80 หน่วย จะสามารถผลิตสินค้า 2 เกรด ก ได้ 160 หน่วย และผลิตสินค้า 1 เกรด ก ได้เพียง 10 หน่วย การตัดสินใจนี้เป็นทางเลือกที่ดีที่สุดแล้ว เนื่องจากเราไม่อาจจะเพิ่มค่าของกำไร P ได้อีกแล้ว

2. ขั้นตอนการคำนวณ

ตารางที่ 1 เรามี $c_1 - s_1 = 160$ เป็นค่ามากที่สุด และ $\theta_1 = 50$ ต่ำสุด ดังนั้น $x_{11} = 10$ เป็น pivot element

ตารางที่ 2 เราแทนที่ x_5, c_5 ด้วย x_1, c_1

แถวที่ 1 ตารางที่ 2 ได้มาจาก แถวที่ 1 ตาราง 1 หารด้วย 10 นั่นก็คือ $R_1^2 = R_1^1/10$

ดังนั้น แถวที่ 1 ตาราง 2 ได้จาก

$$\frac{500}{10} \quad \frac{10}{10} \quad \frac{5}{10} \quad \frac{2}{10} \quad \frac{1}{10} \quad \frac{1}{10} \quad \frac{0}{10} \quad \frac{0}{10}$$

เอาผลลัพธ์ที่ได้นี้คูณด้วย 5 จะได้

$$(50)(5) \quad (1)(5) \quad (\frac{1}{2})(5) \quad (\frac{1}{5})(5) \quad (\ \frac{1}{10}\ )(5) \quad (\ \frac{1}{10}\ )(5) \quad 0 \quad 0$$

นำผลที่ได้ไปลบออกจากแถวที่ 2 ตาราง 1 จะเป็นผลลัพธ์ของแถวที่ 2 ตาราง 2 นั่นก็คือ

$$R_2^2 = R_2^1 - 5R_1^2$$

ดังนั้นแถวที่ 2 ตาราง 2 ได้มาจาก

$$450 - 250 \quad 5 - 5 \quad 6 - \frac{5}{2} \quad 2 - 1 \quad 1 - \frac{1}{2} \quad 0 - \frac{1}{2} \quad 1 - 0 \quad 0 - 0$$

เอาแถว 1 ตาราง 2 คูณด้วย $\frac{9}{2}$ จะได้ว่า

$$(50)(\frac{9}{2}) \quad (\frac{9}{2}) \quad (\frac{1}{2})(\frac{9}{2}) \quad (\frac{1}{5})(\frac{9}{2}) \quad (\frac{1}{10})(\frac{9}{2}) \quad (\frac{1}{10})(\frac{9}{2}) \quad 0 \quad 0$$

นำผลที่ได้นี้ไปลบออกจากแถว 3 ตาราง 1 จะกลายเป็นผลลัพธ์ของแถว 3 ตาราง 2 นั่นก็คือ

$$R_3^2 = R_3^1 - \frac{9}{2} R_1^2$$

จะได้ว่า

$$765-225 \quad \frac{9}{2} - \frac{9}{2} \quad 18 - \frac{9}{4} \quad \frac{3}{2} - \frac{9}{10} \quad 6 - \frac{9}{20} \quad 0 - \frac{9}{20} \quad 0-0 \quad 1-0$$

ค่าของ P คำนวณได้จาก $(160)(50) + (0)(200) + (0)(540)$

คำนวณค่าของ s_j จาก $160x_{1j}^2 + 0x_{2j}^2 + 0x_{3j}^2$ นั่นก็คือ

$$s_j : 160 \quad (160)(\frac{1}{2}) \quad (160)(\frac{1}{5}) \quad (160)(\frac{1}{10}) \quad (160)(\frac{1}{10}) \quad 0 \quad 0$$

นำค่า s_j ที่ได้ไปลบออกจาก c_j เมื่อพิจารณาค่าของ $c_j - s_j$ จะเห็นว่า $c_3 - s_3 = 28$ เป็นค่าบวกที่มากที่สุด เราจึงคำนวณค่าของ θ_i จะได้ว่า

$$\theta_1 = 50/\frac{1}{5}, \quad \theta_2 = 200/1, \quad \theta_3 = 540/\frac{3}{5}$$

เราทำตารางที่ 3 ต่อไป

ตารางที่ 3 เราแทนที่ x_6, c_6 ด้วย x_3, c_3

$$R_2^3 = R_2^2; \quad 200 \quad 0 \quad \frac{7}{2} \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad 1 \quad 0$$

$$R_1^3 = R_1^2 - \frac{1}{5}R_2^3; \quad 50-40 \quad 1-0 \quad \frac{1}{2} - \frac{7}{10} \quad \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \quad \frac{1}{10} - \frac{1}{10} \quad \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \quad 0 - \frac{1}{5} \quad 0-0$$

$R_3^3 = R_3^2 - \frac{3}{5}R_2^3$; $540-120 \quad 0-0 \quad \frac{63}{4} - \frac{21}{10} \quad \frac{3}{5}-\frac{3}{5} \quad \frac{111}{20} - \frac{3}{10} \quad -\frac{9}{20} + \frac{3}{10} \quad 0-\frac{3}{5} \quad 1-0$

ค่าของ P เท่ากับ (160)(10) + (60)(200) + (0)(420)

ค่าของ s_j คำนวณได้จาก $160x_{1j}^3 + 60x_{2j}^3 + 0x_{3j}^3$ นั่นก็คือ

s_j ; $160 \quad -32+210 \quad 60 \quad 30 \quad 32-30 \quad -32+60 \quad 0$

นำค่าที่ได้นี้ลบออกจาก c_j จะเห็นว่า ยังมีค่า $c_j - s_j$ ที่เป็นบวกอีกคือ $c_4 - s_4 = 10$ เราจึงหาค่าของ θ_i ต่อไป ซึ่งจะได้ $\theta_2 = 200/\frac{1}{2}$, $\theta_3 = 420/\frac{21}{4}$ สำหรับ θ_1 หาค่าไม่ได้ เราทำตารางที่ 4 ต่อไป

ตารางที่ 4 เราแทนที่ x_7, c_7 ด้วย x_4, c_4

$R_3^4 = \frac{4}{21} R_3^3$; $(\frac{4}{21})(420) \quad 0 \quad (\frac{4}{21})(\frac{273}{20}) \quad 0 \quad (\frac{4}{21})(\frac{21}{4}) \quad (\frac{4}{21})(-\frac{3}{20}) \quad (\frac{4}{21})(-\frac{3}{5}) \quad \frac{4}{21}$

$R_2^4 = R_2^3 - \frac{1}{2}R_3^4 \quad 200-40 \quad 0-0 \quad \frac{7}{2} - \frac{13}{10} \quad 1-0 \quad \frac{1}{2}-\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2}+\frac{1}{70} \quad 1+\frac{2}{35} \quad 0-\frac{2}{21}$

$R_1^4 = \quad R_1^3$ ทั้งนี้เนื่องจาก $x_{14}^3 = 0$

คำนวณค่าของ P จาก (160)(10) + (60)(160) + (40)(80)

และคำนวณค่า s_j จาก $160x_{1j}^4 + 60x_{2j}^4 + 40x_{3j}^4$ จะได้ว่า

s_j : $160 \quad -32+132+104 \quad 60 \quad 40 \quad 32-\frac{204}{7}-\frac{8}{7} \quad 32+\frac{444}{7}-\frac{32}{7} \quad -\frac{120}{21}+\frac{160}{21}$

นำผลที่ได้ลบออกจากค่า c_j จะเห็นว่าในตารางนี้ ไม่มี $c_j - s_j$ ตัวใดมีค่าเป็นบวก แสดงว่าเป็นตารางที่ให้คำตอบอุตมะ (optimal solution) แล้ว

จากตัวอย่างทั้งสอง หากเราพิจารณาตารางซิมเพลกซ์แต่ละตาราง จะเห็นว่า เมทริคซ์ของ ส.ป.ส. ของ x_j จะประกอบด้วยเวคเตอร์ m เวคเตอร์ที่เป็นอิสระเชิงเส้นตรงกันเสมอ และเวคเตอร์เหล่านี้จะประกอบกันเป็นฐาน (basis) เราจะเรียกคอลัมน์ของ m เวคเตอร์นี้ว่า basic column และจะเรียกคอลัมน์ของ n − m เวคเตอร์ที่เหลือว่า nonbasic column ค่า $c_j - s_j$ ของ basic column จะต้องมีค่าเป็น 0 เสมอ

อาศัยข้อเท็จจริงเหล่านี้ เราอาจจะปรับปรุงการเขียนตารางซิมเพลกซ์เสียใหม่ โดยตัดคอลัมน์ของ basic column ออกไป เขียนฟังก์ชัน P ในรูปของสมการ (0) นั่นก็คือ ตารางที่ 1 อาจจะแสดงได้ดังนี้

ตารางที่ 1

		x_1	x_2	...	x_n
P	x_{00}	x_{01}	x_{02}	...	x_{0n}
x_{n+1}	x_{10}	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}
x_{n+2}	x_{20}	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}
	.	.	.	...	.
	.	.	.	...	.
x_{n+m}	x_{m0}	x_{m1}	x_{m2}	...	x_{mn}

x_{00} คือ ค่าของ P, x_{0j} ก็คือค่า $s_j - c_j$

x_{i0} คือ ค่าของตัวแปรฐานในแถว i และ

x_{ij} คือ ส.ป.ส. ในแถวของตัวแปรฐาน i คอลัมน์ของตัวแปรนอกฐาน j

ขั้นตอนการคำนวณ มีดังนี้

1) พิจารณาค่า x_{0j} $(s_j - c_j)$ ถ้า

1.1 $x_{0j} \geq 0$ ทุกคอลัมน์ j แสดงว่า ได้คำตอบอุตมะแล้ว อ่านผลจากตาราง

1.2 $x_{0j} < 0$ เลือก

x_{0k} = ค่าต่ำสุด x_{0j}

ทำต่อข้อ 2

2) เลือก θ_r = ค่าต่ำสุด $\left(\frac{x_{i0}}{x_{ik}}\right)$, $x_{ik} > 0$

3) ทำตารางต่อไป โดยมี x_k เป็นตัวแปรฐานแทน x_r หา ส.ป.ส. ในคอลัมน์ของตัวแปรนอกฐานใหม่ x_r

$$x_{kr} = \frac{1}{x_{rk}} \quad \text{และ} \quad x_{ir} = -\frac{x_{ik}}{x_{rk}}, \; i \neq r$$

หาคำตอบและ ส.ป.ส. ของตัวแปรฐานในแต่ละแถวจะได้

$$x_{k0} = x_{kr} \cdot x_{r0} \qquad , \quad x_{kj} = x_{kr} \cdot x_{rj}$$

$$x_{i0} = x_{i0} + x_{ir} \cdot x_{r0} \qquad , \quad x_{ij} = x_{ij} + x_{ir} \cdot x_{rj}, \; i \neq k$$

ทำต่อข้อ 1

เช่นในกรณีตัวอย่างที่ 3.2 ตารางที่ 1 จะแสดงได้ดังนี้

		x_1	x_2	x_3	x_4	ค่าที่เป็นไปได้
P	0	-160	-100	-60	-40	A.
x_5	500	10	5		1	50
x_6	450	5	6		1	90
x_7	765	$\frac{9}{2}$	18	$\frac{3}{2}$	6	170

ทำต่อตารางที่ 2 โดยให้ x_1 เป็นตัวแปรฐานแทน

ขั้นตอนในการเขียนตารางที่ 2 จะทำได้ดังนี้

เฉพาะในคอลัมน์ 1

		x_5
P		$\frac{160}{10}$
x_1		$\frac{I}{10}$
x_6		$- - \frac{5}{10}$
x_7		$- - \frac{9}{10}$

สำหรับคอลัมน์อื่น ๆ ยกเว้นคอลัมน์ 1

		x_2	x_3	x_4
P	$0 + \frac{80000}{10}$	$-100 + \frac{800}{10}$	$-60 + \frac{320}{10}$	$-40 + \frac{160}{10}$
x_1	$\frac{500}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{2}{10}$	1 iii
x_6	$450 - \frac{2500}{10}$	$6 \quad \frac{25}{10}$	$2 - \frac{10}{18}$	$1 - \frac{5}{10}$
x_7	$765 - \frac{4500}{20}$	$18 - \frac{45}{20}$	$\frac{3}{2}$ - - 20	$6 - \frac{9}{20}$

การทำตารางที่ 2, 3 และ 4 ใช้วิธีการเดียวกันหมด เราสรุปผลการคำนวณได้ดังนี้

ตารางที่			x_5	x_2	[illegible]	x_4	ค่าที่เป็นไปได้
	P	8,000	+16	-20	-28	-24	θ_i
2	x_1	50	1 iii	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	250
	x_6	200	$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	200
	x_7	540	$-\frac{9}{20}$	$\frac{63}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{111}{20}$	900

ตารางที่			x_5	x_2	x_6	x_4	ค่าที่เป็นไปได้
	P	13,600	2	78	28	-1[illegible]	θ_i
3	x_1	10	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	—
	x_3	200	$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	400
	x_7	420	$-\frac{3}{20}$	$\frac{273}{20}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{21}{4}$	80

ตารางที่			x_5	x_2	x_6	x_7
	P	14,400	$\frac{12}{7}$	104	$\frac{188}{7}$	$\frac{40}{21}$
	x_1	10	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0
4	x_3	160	$-\frac{17}{35}$	$\frac{11}{5}$	$\frac{37}{35}$	$\frac{2}{21}$
	x_4	80	$-\frac{1}{35}$	$\frac{13}{5}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{4}{21}$

3.4 เทคนิคการใช้ตัวแปรเทียม (artificial variables)

การหาคำตอบอุตมะโดยวิธีการซิมเพลกซ์ตามที่กล่าวมาแล้วนั้น จะเริ่มต้นคำตอบชุดแรกที่มีตัวแปรควบคุมได้เท่ากับ 0 ซึ่งเป็นจุดเริ่มต้นเมื่อยังไม่ได้ตัดสินใจกระทำกิจกรรมใด ๆ และภายใต้เกณฑ์สมมติว่า เรามีคำตอบฐานชุดแรกซึ่งเป็นคำตอบที่แสดงถึง จำนวนทรัพยากรประเภทต่าง ๆ ที่มีให้ใช้ได้ คำตอบที่ได้นี้จะกำหนดได้เมื่อเงื่อนไขของข้อจำกัดอยู่ในรูป $\leqslant$ แต่ในปัญหาจริง ๆ นั้น เงื่อนไขของการใช้ทรัพยากรต่าง ๆ ไม่ได้มีเพียง $\leqslant$ อย่างเดียว อาจกำหนดเงื่อนไขในรูป $\geqslant$ หรือ $=$ ก็ได้ กรณีเหล่านี้จะก่อให้เกิดปัญหาในการหาคำตอบชุดแรก ตัวอย่างเช่นในกรณีของข้อจำกัดที่กำหนดในรูปสมการ และมีตัวแบบดังต่อไปนี้

หาค่าสูงสุดของ P

$$= c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

โดยมีข้อจำกัด

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

....

....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + + a_{mn}x_n = b_m$$

และ $x_j \geqslant 0 \;, \quad j = 1, 2, \dots, n$

ในลักษณะปัญหาที่มีตัวแบบเช่นนี้ เราไม่อาจจะตัดสินใจได้ว่า เราควรจะเริ่มต้นที่จุดใด เพราะถ้าหากเราเลือกไม่ดี คำตอบที่ได้อาจจะมีค่าบางตัวเป็นลบก็ได้ ซึ่งขัดกับข้อเท็จจริงที่คำตอบของเราจะต้องไม่เป็นลบ และเป็นการยากที่เราจะตัดสินใจได้ทันทีว่า ตัวแปรใดจะเป็นตัวแปรฐานบ้าง Charnes และ Cooper ได้คิดวิธีการ Big-M method ขึ้นในปี ค.ศ. 1961 วิธีการนี้จะกำหนดตัวแปรเทียม (artificial variables) เข้าไปในสมการของข้อจำกัด โดยที่ตัวแปรเทียมเหล่านี้จะไม่มีความหมายต่อปัญหาอันนั้น มันจะเป็นเพียงตัวแปรที่จะเข้ามาช่วยในการกำหนดคำตอบชุดแรกเท่านั้น นั่นก็คือ ในคำตอบอุตมะหรือในตารางสุดท้าย ตัวแปรเทียมจะต้องมีค่าเป็น 0 การขจัดตัวแปรเทียมหรือทำให้ตัวแปรเทียมไม่มีความหมายต่อปัญหานั้น ทำได้โดยการกำหนดค่า c ของตัวแปรเทียมดังนี้

$c_{ai} = -M$ ถ้าต้องการค่า P สูงสุด

$c_{ai} = M$ ถ้าต้องการค่า P ต่ำสุด

ในเมื่อ c_{ai} เป็น ส.ป.ส. ของ x_j ซึ่งเป็นตัวแปรเทียมของข้อจำกัด i

และ M เป็นค่าบวกที่มากที่สุด เมื่อเปรียบเทียบกับค่า c อื่น ๆ

ในการแก้ปัญหาด้วยมือ เรามักจะไม่กำหนดค่าของ M เป็นตัวเลข แต่ถ้าใช้เครื่องคอมพิวเตอร์มาช่วยในการหาคำตอบ เรามักจะกำหนดค่า M เป็น 1000 เท่าของค่า c ที่มากที่สุด

โดยวิธีการ Big-M method ตัวแบบดังกล่าวข้างต้นจะเปลี่ยนเป็น

หาค่าสูงสุดของ P

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n - Mx_{n+1} - Mx_{n+2} \dots - Mx_{n+m}$$

โดยมีข้อจำกัด

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2$$

....

....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m$$

และ $x_j\ (j = 1, 2, \dots, n + m) \geq 0$