บทที่ 2
พื้นฐานทางด้านคณิตศาสตร์

ดังที่ได้กล่าวมาแล้วว่า การแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นด้วยกราฟนั้น จะทำได้ต่อเมื่อมีตัวแปรไม่เกิน 2 ตัว ปัญหาที่มีตัวแปรมากกว่า 2 เช่นกรณีที่มีตัวแปร 3 ตัว ต้องเขียนรูป 3 มิติในแผ่นกราฟ ซึ่งไม่ใช่ของง่าย และยิ่งถ้ามีจำนวนตัวแปรมากขึ้น ก็ยิ่งยากที่จะเขียนหรืออาจจะเขียนกราฟไม่ได้เลยก็ได้ ฉะนั้นจึงจำเป็นต้องมีวิธีการคำนวณที่เป็นระบบ มีระเบียบแบบแผนที่สามารถแก้ปัญหาได้ ไม่ว่าจะมีตัวแปรกี่ตัวก็ตาม วิธีการแก้ปัญหาการโปรแกรมด้วยการคำนวณอย่างเป็นระบบ จำต้องอาศัยความรู้ทางด้านเมทริคซ์ เวคเตอร์ และเรื่องเกี่ยวกับเซท ในบทนี้จึงขอทบทวนความรู้เบื้องต้นของนักศึกษา ในเรื่องเกี่ยวกับเมทริคซ์ เวคเตอร์และเซท ตลอดจนการหาคำตอบของ Simultaneous Linear Equation สำหรับนักศึกษาที่ต้องการเรียนรู้รายละเอียดในเรื่องเหล่านี้ สามารถศึกษาได้จากหนังสือ “เมทริคซ์และพีชคณิตเชิงเส้น”

2.1 เมทริคซ์และดีเทอร์มิแนนท์ (Matrices and Determinants)

เมทริคซ์ก็คือกลุ่มของตัวเลข mn จำนวน ซึ่งเขียนเรียงตัวเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ที่มี m แถว n คอลัมน์ ภายในเครื่องหมาย ( ) หรือ [ ] หรือ || || ก็ได้ ตัวอย่างเช่น

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

เราเรียกเมทริคซ์ A และเรียก a_{ij} แต่ละตัวว่าสมาชิก (element หรือ entry) ที่อยู่ในแถว i คอลัมน์ j สมาชิกเหล่านี้อาจเป็นเลขจำนวนเต็มที่มีค่าจริง หรืออาจกำหนดในรูปฟังก์ชันของตัวแปรที่มีค่าจริง หรืออาจเป็น complex numbers หรือ real numbers ก็ได้

เราเรียกเมทริคซ์ที่มีเพียงแถวเดียวว่า row matrix หรือ row vector และเรียกเมทริคซ์ที่มีเพียงคอลัมน์เดียวว่า column matrix หรือ column vector

เมทริคซ์ใดที่มีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนคอลัมน์ กล่าวคือ $m = n$ เราเรียกเมทริคซ์นั้นว่า เมทริคซ์จัตุรัส และกล่าวว่า เป็นเมทริคซ์ที่มีขนาด (order) n

เมทริคซ์จัตุรัสใดที่มีสมาชิก ที่อยู่นอกแนวเส้นทแยงมุม a_{ij}, $i \neq j$ มีค่าเป็น 0 ทั้งหมด เราเรียกเมทริคซ์จัตุรัสนั้นว่า diagonal matrix

diagonal matrix ที่มีสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุม มีค่าเป็น 1 เรียกว่า unit matrix หรือ identity matrix และเขียนแทนด้วย I_n หรือ I ซึ่งจะแสดงถึง unit matrix ที่มีขนาด n เช่น เมื่อ $n = 3$ เราจะได้

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & & \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

เราจะกล่าวว่า เมทริคซ์จัตุรัสเป็น triangular matrix ถ้าสมาชิกทั้งหลายที่อยู่บนด้านใดด้านหนึ่งของเส้นทแยงมุม มีค่าเป็น 0 กล่าวคือ $a_{ij} = 0$ ทุก ๆ $i > j$ หรือ $i < j$

ตัวอย่างของ triangular matrix ที่มี $m = n = 5$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} \end{pmatrix}$$

ถ้าเราสลับที่สมาชิกของเมทริคซ์ A ระหว่างแถวกับคอลัมน์ กล่าวคือ เปลี่ยนที่สมาชิกที่อยู่ในแถว i ไปเป็นสมาชิกในคอลัมน์ i และเปลี่ยนที่สมาชิกที่อยู่ในคอลัมน์ j ไปเป็นสมาชิกในแถว j เราเรียกเมทริคซ์ที่ได้ใหม่นี้ว่า transposed matrix และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ A' ดังนั้น A' จึงกำหนดได้โดย

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

เมทริคซ์ A จะเป็น symmetric matrix ถ้า $A = A'$ นั่นก็คือ เมื่อ $a_{ij} = a_{ji}$ และจะเรียกว่าเป็น skew symmetric หาก $A = -A'$ นั่นก็คือ เมื่อ $a_{ij} = -a_{ji}$ และ $a_{ij} = 0$ ทุก ๆ $i = j$

ตัวอย่างเช่น

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -6 \\ 2 & -6 & 3 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -6 \\ 2 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

เราเรียก A ว่า symmetric matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ -3 & -5 & 0 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -5 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad -A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ -3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

เราเรียก A ว่า skew symmetric matrix

เราจะกล่าวว่า เมทริคซ์ 2 เมทริคซ์เท่ากัน ก็ต่อเมื่อ สมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันมีค่าเท่ากัน

ฉะนั้นมิติที่อยู่ในลำดับเดียวกัน คือ m และ n ก็ต้องเท่ากันด้วย

ตัวอย่างเช่น

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad A = B$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & x & 2 \\ -1 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 8 \\ 1 & -2 & 0 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 2 \\ -1 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 8 \\ 1 & -2 & 0 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$ $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $x = 7$

เมทริคซ์ที่สมาชิกทุกตัว มีค่าเป็น 0 จะเรียกว่า null matrix และเขียนแทนด้วย $0 = (0)$

2.1.1 การบวกและการคูณเมทริคซ์

เรานิยามการบวกและการคูณเมทริคซ์ไว้ดังนี้

ถ้ามีเลขจำนวนจริง k และเมทริคซ์ A ใด ๆ ผลคูณ kA จะกำหนดได้โดย

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \ldots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \ldots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \ldots & ka_{mn} \end{pmatrix} = (ka_{ij})$$

การบวกกันระหว่างเมทริคซ์ จะกระทำได้ภายใต้เกณฑ์สมมติ (assumption) ที่ว่า เมทริคซ์ที่จะนำมาบวกกัน จะต้องมีทั้งจำนวนแถวและจำนวนคอลัมน์เท่ากัน นั่นก็คือ จะต้องมีมิติ $m \times n$- เหมือนกันหมด สมาชิกของผลบวก $A + B = C$ จะกำหนดได้โดย

สมาชิกในแถวที่ i และคอลัมน์ที่ j ของเมทริคซ์ C จะเท่ากับ ผลบวกของสมาชิกในแถวที่ i และคอลัมน์ที่ j ของเมทริคซ์ A กับ สมาชิกในแถวที่ i คอลัมน์ที่ j ของเมทริคซ์ B นั่นก็คือ

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

ตัวอย่างเช่น เรามีเมทริคซ์ A และ B ซึ่งกำหนดไว้ดังนี้

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ และ } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

ผลบวก $A + B = c$ ก็คือ

$$C = \begin{pmatrix} 2+1 & 3-1 & 4+1 \\ 5+2 & 1+1 & 3-3 \\ -1+1 & 2+3 & 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 7 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

ส่วนการคูณกันระหว่างเมทริคซ์ A กับ B เรานิยามไว้ภายใต้เกณฑ์สมมติที่ว่า จำนวนคอลัมน์ของ A จะต้องเท่ากับจำนวนแถวของ B และกำหนดสมาชิกของผลคูณ $AB = C$ ดังนี้

สมาชิกในแถวที่ i คอลัมน์ที่ j ของเมทริคซ์ C จะเท่ากับ ผลบวกของผลคูณ ระหว่างสมาชิกในแถวที่ i ของ A กับสมาชิกที่อยู่ในลำดับเดียวกันในคอลัมน์ที่ j ของ B นั่นก็คือ

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

จะเห็นว่า ผลคูณของเมทริคซ์ A ที่มีมิติ $m \times n$ กับเมทริคซ์ B ที่มีมิติ $n \times q$ จะเป็นเมทริคซ์ C ที่มีมิติ $m \times q$

ตัวอย่างเช่น เรามีเมทริคซ์ A และ B ซึ่งกำหนดไว้ดังนี้

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

ผลคูณ AB = C ก็คือ

$$c = \begin{pmatrix} 3\cdot1+2\cdot7+1\cdot2 & 3\cdot2+2\cdot1+1\cdot4 \\ -1\cdot1+0\cdot7+5\cdot2 & -1\cdot2+0\cdot1+5\cdot4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 12 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$$

กฎที่เกี่ยวกับการบวกและการคูณเมทริคซ์ มีดังต่อไปนี้

	กฎการบวก	กฎการคูณ
กฎการจัดหมู่ (Associative law)	1. $(A+B)+C = A+(B+C)$	1. $(AB)C = A(BC)$
กฎการสลับที่ (Commutative law)	2. $A + B = B + A$	
กฎการกระจาย (Distributive law)	3. $(a + \beta)A = \alpha A + \beta A$ $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$	2. $(A + B)C = AC + BC$ $C(A + B) = CA + CB$
	4. $A + 0 = A$	3. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = (A)(\alpha B)$
		4. $AI = IA = A$

หมายเหตุ 1. การสลับที่กันของเมทริคซ์ ให้ผลคูณไม่เท่ากัน นั่นก็คือ $AB \neq BA$

2. $(AB)' = B'A'$

2.1.2 ดีเทอร์มิแนนท์ (Determinant)

เมทริคซ์จัตุรัส A ทุก ๆ เมทริคซ์ เกี่ยวข้องโดยตรงกับเลขจำนวน ซึ่งเรียกว่า ดีเทอร์มิแนนท์ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $|A|$ และกำหนดไว้ดังนี้

$$|A| = \Sigma(\pm)a_{1i}a_{2j}\ldots a_{..}$$

โดยที่ (i, j, ..., r) คือการจัดลำดับของสมาชิกของ (1, 2, ..., n) และมีเครื่องหมายเป็น + ถ้า (i, j, ..., r) เป็นลำดับคู่ของ (1, 2, ..., n) มีเครื่องหมายเป็น − ถ้าเป็นการจัดลำดับคี่

ตัวอย่างกรณีที่ $n = 3$ เรามี

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

ดังนั้น ดีเทอร์มิแนนท์ของ A ก็คือ

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

จากนิยามของดีเทอร์มิแนนท์ เรากำหนดคุณสมบัติของดีเทอร์มิแนนท์ได้ดังนี้

1. ถ้าสมาชิกทุกตัวในแถวใดแถวหนึ่ง (หรือคอลัมน์ใดคอลัมน์หนึ่ง) ของเมทริคซ์ A มีค่าเป็น 0 ทั้งหมด ค่าของดีเทอร์มิแนนท์ของ A จะเท่ากับ 0
2. การสลับที่กันระหว่างแถวกับคอลัมน์ที่อยู่ในลำดับเดียวกัน ไม่ทำให้ค่าของดีเทอร์มิแนนท์เปลี่ยนแปลง
3. การสลับที่กันระหว่าง 2 แถว หรือ 2 คอลัมน์ใด ๆ ของเมทริคซ์ จะทำให้ค่าของดีเทอร์มิแนนท์เปลี่ยนเครื่องหมายเป็นตรงกันข้าม นั่นก็คือ

   ถ้า B เป็นเมทริคซ์ที่เกิดจากการสลับที่กันระหว่าง 2 แถว หรือ 2 คอลัมน์ใด ๆ ของ A

   แล้ว $|B| = -|A|$
4. ถ้าเมทริคซ์ใดมีสมาชิกใน 2 แถว หรือใน 2 คอลัมน์ เหมือนกัน ค่าของดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริคซ์นั้น จะเท่ากับ 0

5. ถ้าเอาค่าคงที่ k ไปคูณกับสมาชิกทุกตัวในแถวใดแถวหนึ่ง หรือในคอลัมน์ใดคอลัมน์หนึ่ง ของเมทริคซ์ จะได้ค่าของดีเทอร์มิแนนท์เป็นผลคูณของ k นั่นก็คือ

หาก B เป็นเมทริคซ์ที่มาจากการคูณค่าคงที่ k กับสมาชิกทุกตัวในแถวใดแถวหนึ่ง หรือคอลัมน์ใดคอลัมน์หนึ่ง ของ A จะได้

$$|B| = k|A|$$

6. ค่าของดีเทอร์มิแนนท์จะไม่เปลี่ยนแปลง ถ้าเอาผลคูณของ k กับสมาชิกในแถว (หรือคอลัมน์) ใด ไปบวกกับ สมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันในแถว (หรือคอลัมน์) อื่น ๆ

คุณสมบัติดังกล่าวนี้ แสดงให้เห็นจริงได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \\ 0 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot8\cdot5+1\cdot6\cdot0+3\cdot4\cdot7-2\cdot6\cdot7-1\cdot4\cdot5-3\cdot8\cdot0$$

$$= 60 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 8 & 7 \\ 3 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

กล่าวอีกนัยหนึ่ง $|A| = |A'|$ ตามคุณสมบัติข้อ (2)

$$|B| = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} = 4\cdot1\cdot5+8\cdot3\cdot0+6\cdot2\cdot7-4\cdot3\cdot7-8\cdot2\cdot5-6\cdot1\cdot0 = -60$$

นั่นก็คือ $|B| = -|A|$ ตามคุณสมบัติข้อ (3)

ถ้า $$B = \begin{pmatrix} 2\cdot2 & 2\cdot1 & 2\cdot3 \\ 4 & 8 & 6 \\ 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 4 & 8 & 6 \\ 0 & 7 & 5 \end{pmatrix}, \quad |B| = 120 = 2|A|$$

นั่นก็คือ $|B| = k|A|$ ตามคุณสมบัติข้อ (5) เมื่อ $k = 2$

ถ้า $$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4+2\cdot2 & 8+2\cdot1 & 6+2\cdot3 \\ 0+2\cdot2 & 7+2\cdot1 & 5+2\cdot3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 4 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

จะเห็นว่า $|C| = 60$ ตามคุณสมบัติข้อ (6) เมื่อ $k = 2$

ถ้า $$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} |A| &= 2\cdot4\cdot5+2\cdot0\cdot1+3\cdot4\cdot1-2\cdot0\cdot1-2\cdot4\cdot5-3\cdot4\cdot1- \\ &= 0 \qquad \text{ตามคุณสมบัติข้อ (4)} \end{aligned}$$

อาศัยคุณสมบัติข้อ (4) และ (5) กล่าวได้ว่า เมทริคซ์ที่มีสมาชิกในแถว (คอลัมน์) ใด มีค่าเป็น k เท่าของสมาชิกของอีกแถว (คอลัมน์) หนึ่งที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกัน ตัวต่อตัว ทุกตัว ดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริคซ์นั้น จะมีค่าเป็น 0

ตัวอย่างเช่น

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 1\cdot0\cdot6 + 2\cdot5\cdot2 + 3\cdot4\cdot4 - 1\cdot5\cdot4 - 2\cdot4\cdot6 - 3\cdot0\cdot2 = 0$$

จากนิยามของดีเทอร์มิแนนท์และ triangular matrix สรุปได้ว่า

ดีเทอร์มิแนนท์ของ triangular matrix จะมีค่าเท่ากับผลคูณของสมาชิกที่อยู่ในแนวเส้นทแยงมุม

อาศัยผลที่ได้นี้ จะเห็นว่า การคำนวณค่าของดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริคซ์ใด จะทำได้ง่ายลง ถ้าเราแปลงเมทริคซ์นั้น ให้เป็น triangular matrix นั่นก็คือ อาศัยคุณสมบัติของดีเทอร์มิแนนท์ ดังตัวอย่าง เราต้องการหาดีเทอร์มิแนนท์ของ A โดยอาศัย triangular matrix

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 30 & & 2 \\ 021 & & & 3 \\ 221 & & & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 30 & & 2 \\ 0 & 21 & & 3 \\ 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} \quad R_3 = R_3 - 2R_1$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} \quad R_3 = R_3 + 2R_2$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} \quad R_4 = R_4 - R_3$$

$$= (1)(2)(3)(-7) \qquad = -42$$

เราอาจจะแสดงให้เห็นว่า

ถ้าเมทริคซ์ A และเมทริคซ์ B ต่างก็เป็นเมทริคซ์จัตุรัสที่มีขนาด n เราจะได้

$$|AB| = |A| \cdot |B|$$

เราใช้ดีเทอร์มิแนนท์ในการนิยามอันดับ (rank) ของเมทริคซ์ ดังนี้ อันดับ (rank) ของเมทริคซ์ A ก็คือ ขนาด (order) ที่โตที่สุดของเมทริคซ์จัตุรัส ซึ่งเป็นเมทริคซ์ย่อย (submatrix) ของ A เมื่อค่าของดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริคซ์จัตุรัสย่อยนั้น ไม่เป็น 0

เมื่อพูดถึงเมทริคซ์ย่อย กล่าวได้ว่า เราอาจจะแบ่งเมทริคซ์ A ออกเป็นเมทริคซ์ย่อยต่าง ๆ กันได้ ตัวอย่างเช่น เราแบ่ง

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \text{ ออกเป็น } \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)$$

หรือแบ่งในรูปของ

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)$$

หรือแบ่งย่อยในลักษณะอื่น ๆ

กำหนด A_{ij} เป็นเมทริคซ์ย่อยแต่ละเมทริคซ์ เมื่อ i และ j เป็นจำนวนแถวและจำนวนคอลัมน์ที่ถูกแบ่ง ตามลำดับ จากตัวอย่างที่กล่าวแล้วข้างต้น เมทริคซ์ A จะถูกแบ่งเป็นเมทริคซ์ย่อย 4 เมทริคซ์ ดังนี้

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

สำหรับกฎการบวกที่ใช้กับส่วนแบ่งของเมทริคซ์ จะเป็นแบบเดียวกันกับกฎการบวกเมทริคซ์ นั่นก็คือ เมทริคซ์ย่อยที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกัน จะต้องมีมิติ (dimension) เดียวกัน ส่วนกฎการคูณก็เช่นเดียวกัน

ตัวอย่างเช่น เรามีเมทริคซ์ย่อย A_{ij} และ B_{ij} ที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันมีมิติเหมือนกัน และ

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{22} & B_{21} \end{pmatrix}$$

จะได้ผลบวก

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{pmatrix}$$

และถ้าหาก A_{ij}, B_{ij} ที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกัน มีมิติถูกต้องภายใต้เกณฑ์สมมติของกฎการบวก เราจะได้ผลคูณ

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

ในการหา rank ของเมทริคซ์ จะต้องอาศัยเรื่องของการแบ่งเมทริคซ์ออกเป็นเมทริคซ์ย่อยรูปจัตุรัส (square submatrix)

ถ้าเมทริคซ์ $A_{n\times n}$ เป็นเมทริคซ์จัตุรัสที่มีค่าของดีเทอร์มิแนนท์ ไม่เท่ากับ 0 rank ของเมทริคซ์ A จะเท่ากับ n

แต่ถ้า $|A_{n\times n}| = 0$ เราต้องแบ่ง $A_{n\times n}$ เป็นเมทริคซ์จัตุรัสย่อย หาก r เป็นขนาดที่โตที่สุดของเมทริคซ์ย่อย $A_{r\times r}$ โดยที่ $|A_{r\times r}| \neq 0$ rank ของ A จะเท่ากับ r

สำหรับเมทริคซ์ $A_{m \times n}$ การหา rank ใช้วิธีการแบ่งเมทริคซ์ออกเป็นเมทริคซ์จัตุรัสย่อยเช่นเดียวกัน rank ของเมทริคซ์ $A_{m \times n}$ จะเท่ากับ r ถ้า r เป็นขนาดโตที่สุดของเมทริคซ์จัตุรัสย่อยในบรรดาเมทริคซ์จัตุรัสย่อยของ $A_{m \times n}$ โดยที่ $|A_{r \times r}| \neq 0$

ตัวอย่างเช่น

rank ของ $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ ไม่เท่ากับ 3 ทั้งนี้เนื่องจาก $|A| = 0$

ในที่นี้ rank ของ A = 2 เพราะว่า เมทริคซ์ย่อยที่มีขนาด (order) 2 อย่างน้อยที่สุด 1 เมทริคซ์ มีค่าดีเทอร์มิแนนท์ ไม่เท่ากับ 0 เช่น $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 9$

ถ้า $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, rank ของ A = 3

ทั้งนี้เนื่องจาก $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 16 - 6 = 10 \neq 0$

เรากล่าวว่า เมทริคซ์จัตุรัส A ที่มีค่าดีเทอร์มิแนนท์ ไม่เท่ากับ 0 เป็น nonsingular
และกล่าวว่า เมทริคซ์จัตุรัส A ที่มีค่าดีเทอร์มิแนนท์ เท่ากับ 0 เป็น singular
กล่าวอีกนัยหนึ่ง
เมทริคซ์ $A_{n \times n}$ เป็น nonsingular ก็ต่อเมื่อ rank ของ A = n
นอกนั้น A เป็น singular

rank ของเมทริคซ์ A จะไม่เปลี่ยนแปลง ไม่ว่าจะมีการกระทำตามแถว หรือตามคอลัมน์ของเมทริคซ์ A นั่นก็คือ rank ของ A มีค่าคงที่ ไม่ว่าเราจะ

(1) สลับที่ระหว่าง 2 แถว (คอลัมน์) ใด ๆ ของ A

(2) คูณสมาชิกทุกตัวในแถว (คอลัมน์) หนึ่ง ด้วยค่าคงที่ $\lambda \neq 0$

(3) เอาแถว (คอลัมน์) ที่ i ไปบวกกับ λ เท่าของแถว (คอลัมน์) ที่ j เมื่อ $\lambda \neq 0$ เป็นค่าคงที่ และ $i \neq j$

ผลที่ได้นี้ นำไปใช้ในการหา rank ของ A ทำให้สามารถลดความยุ่งยากในการหา rank ลงได้

ถ้า M_{ij} เป็นเมทริคซ์ย่อยของ $A_{n \times n}$ ที่ได้จากการตัดแถวที่ i และคอลัมน์ที่ j ของ A ออก ดังนั้น M_{ij} จะมีขนาด (n − 1) เราเรียก

M_{ij} ว่า ไมเนอร์ (minor) ของ a_{ij} และเรียก

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

ว่า โคแฟคเตอร์ (cofactor) ของ a_{ij}

เราสามารถคำนวณค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริคซ์ $A_{n \times n}$ ได้จากโคแฟคเตอร์ของ a_{ij}

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \qquad \text{ทุก ๆ } i = 1, 2, \ldots, n$$

หรือ

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \qquad \text{ทุก ๆ } j = 1, 2, \ldots, n$$

ตัวอย่างเช่น เรามี

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ ถ้าเราใช้โคแฟคเตอร์ของ a_{1j} จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{j=1}^{3} a_{1j}A_{1j} \\ &= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &\quad + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

2.1.3 อินเวอร์สของเมทริคซ์

เราให้นิยามของอินเวอร์สของเมทริคซ์ A ดังนี้

กำหนดเมทริคซ์จัตุรัส A ถ้ามีเมทริคซ์จัตุรัส B ที่มีคุณสมบัติว่า

$$AB = BA = I$$

เราเรียก B ว่า อินเวอร์สของ A (inverse of the matrix A) นิยมใช้สัญลักษณ์ A^{-1} แทนอินเวอร์สของ A

เรากล่าวได้ว่า ทุก ๆ nonsingular square matrix A จะมี A^{-1} เพียงเมทริคซ์เดียวที่มีคุณสมบัติว่า

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

และสามารถแสดงให้เห็นได้ว่า ถ้า $A \neq O$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} J$$

เรียก J_{nxn} ว่าเป็น adjoint ของเมทริคซ์จัตุรัส A_{nxn} และกำหนดเมทริคซ์ J_{nxn} ไว้ดังนี้

$$J = (A_{ji})$$

ในเมื่อ สมาชิกในแถวที่ i และคอลัมน์ที่ j เป็นโคแฟคเตอร์ของสมาชิกในแถวที่ j และคอลัมน์ที่ i ของ A

นั่นก็คือ

$$J = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \dots\dots\dots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \dots\dots\dots A_{n2} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ A_{1n} & A_{2n} \dots\dots\dots A_{nn} \end{bmatrix}$$

อินเวอร์สของเมทริคซ์ มีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

(1) เฉพาะ nonsingular square matrices เท่านั้นที่มีอินเวอร์ส

(2) ถ้าเมทริคซ์ A และเมทริคซ์ B ต่างก็เป็น nonsingular ที่มีขนาด n จะเห็นว่า

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

(3) $(A^{-1})^{-1} = A$

(4) $(A')^{-1} = (A^{-1})$

(5) ถ้า A เป็น nonsingular และ AB = 0 แล้ว B = 0

(6) ถ้าเมทริคซ์ A เป็น triangular matrix จะเห็นว่า ดีเทอร์มิแนนท์ของ A ก็คือผลคูณของสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุม a_{ii} และอินเวอร์สของ A ก็จะเป็น triangular matrix

คุณสมบัติดังกล่าว แสดงให้เห็นได้ดังตัวอย่าง

ถ้า

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ |A| = 6 \text{ และ}$$

$$J = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \ (A^{-1})' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad |A'| = 6 \text{ และ } J = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$(A')^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = (A^{-1})$$

$$\text{ถ้า } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ แล้ว } |B| = 11$$

$$B^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ -6 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} \\ \frac{3}{11} & \frac{4}{11} & -\frac{2}{11} \\ -\frac{6}{11} & \frac{3}{11} & \frac{4}{11} \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{3}{22} & \frac{2}{11} & \frac{3}{22} \\ \frac{3}{11} & \frac{1}{33} & \frac{2}{33} \\ -\frac{1}{22} & \frac{3}{11} & \frac{1}{22} \end{vmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad |AB| = 66 \text{ หรืออีกนัยหนึ่ง } |AB| = |A| \cdot |B|$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{66}\begin{bmatrix} -9 & -12 & 9 \\ 18 & 2 & 4 \\ -3 & 18 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{22} & -\frac{2}{11} & \frac{3}{22} \\ \frac{3}{11} & \frac{1}{33} & \frac{2}{33} \\ -\frac{1}{22} & \frac{3}{11} & \frac{1}{22} \end{bmatrix} = B^{-1}A^{-1}$$

2.2 **เวคเตอร์และเวคเตอร์สเปซ** (Vectors and Vector Spaces)

ในเรื่องของเมทริคซ์ เรากล่าวว่า เมทริคซ์ที่มีเพียงแถว (คอลัมน์) เดียว ถูกเรียกว่า row (column) vector ดังนั้น

$$\underline{U} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

หรือ $\underline{U} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)'$

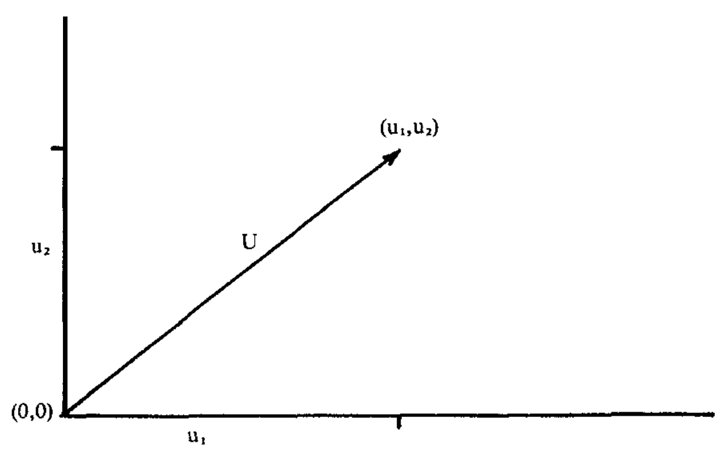
จึงถูกเรียกว่า n-component vector

ในที่นี้ u_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ จะเป็น component ของ $\underline{U}$

โดยทั่วไปแล้ว เรามักจะใช้ column vector มากกว่า row vector และแสดงให้เห็นได้ด้วยกราฟ โดยการลากเส้นตรงจากจุดกำเหนิด o ไปยังจุดที่แสดงเวคเตอร์ และมีหัวลูกศรอยู่ที่จุดปลายสุดของเส้นตรง จุด $\underline{U}$ ในที่นี้จะแสดงถึงจุดในสเปซที่มี n มิติ (n-dimensional space)

เพื่อให้ง่ายต่อความเข้าใจ ให้เรามาพิจารณาในกรณีที่ $n = 2$

$\underline{U} = (u_1, u_2)$ เป็นเวคเตอร์ที่อยู่ห่างจากจุด (0, 0) ทางแนวราบเป็นระยะทาง u_1 และทางแนวดิ่งเป็นระยะทาง u_2 แสดงให้เห็นได้ด้วยกราฟ ดังนี้



เพื่อความสะดวก เราเรียก two-dimensional Euclidean space E_2 และสรุปคุณสมบัติที่สำคัญของเวคเตอร์เป็น E_2 ดังต่อไปนี้

2.2.1 การคูณเวคเตอร์ด้วยปริมาณสกาลา (scalars)

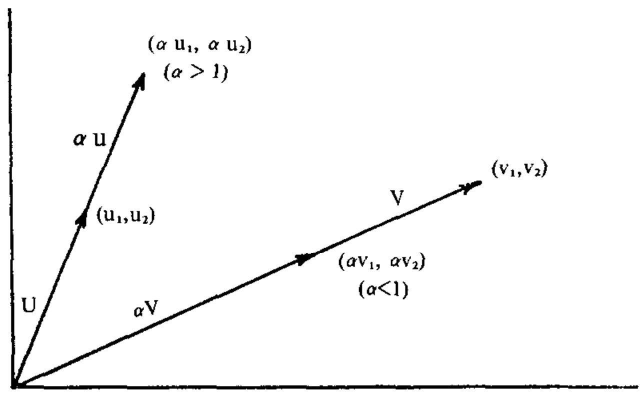
α เป็นสกาลา และ U เป็นเวคเตอร์ ทุก ๆ คู่ α กับ U จะมีเวคเตอร์ในลำดับเดียวกันที่เรียกว่า scalar product ของ α กับ U เขียนแทนด้วย

$$\alpha U = (\alpha u_1, \alpha u_2)$$

และมีคุณสมบัติว่า

(1)	$\alpha(\beta U) = (\alpha\beta)U$		(Associative law)
(2)	$\alpha(U + V) = \alpha U + \alpha V$		(Distributive law)
	$(\alpha + \beta)U = \alpha U + \beta U$		
(3)	$1U = U$		
(4)	$0U = 0 = (0, 0)$		

แสดงให้เห็นได้ด้วยกราฟ ดังนี้



2.2.2 การบวกเวคเตอร์ (Addition of vectors)

สำหรับทุกคู่ของเวคเตอร์ $U = (u_1, u_2)$ กับ $V = (v_1, v_2)$ ใน E_2 จะมีเวคเตอร์ในลำดับเดียวกัน เรียกว่า ผลบวกของ U กับ V เขียนแทนด้วย

$$U + V = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

และมีคุณสมบัติว่า

(1) $U + V = V + U$ (Commutative law)

(2) $(U + V) + W = U + (V + W)$ (Associative law)

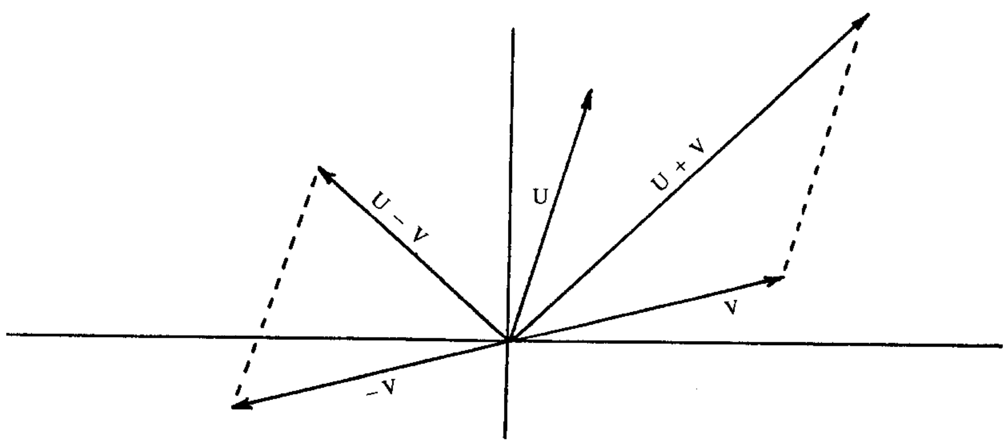
มีเวคเตอร์ 0 ใน E_2 เพียงเวคเตอร์เดียว เรียกว่า origin ที่มีคุณสมบัติว่า

(3) $U + 0 = U$ ทุก ๆ U ใน E_2

แต่ละเวคเตอร์ U ใน E_2 จะมีเวคเตอร์ในลำดับเดียวกันเพียงเวคเตอร์เดียว เรียกว่า อินเวอร์ส ของ U เขียนแทนด้วย $-U$ และมีคุณสมบัติว่า

(4) $U + (-U) = 0$

แสดงให้เห็นได้ด้วยกราฟ ดังนี้



2.2.3 Inner product of vectors

สำหรับทุก ๆ คู่ของเวคเตอร์ U กับ V ใน E_2 จะมีเลขจำนวนจริง (real number) เรียกว่า inner product ของ U กับ V เขียนแทนด้วย

$$U \cdot V = u_1v_1 + u_2v_2$$

และมีคุณสมบัติว่า

(I) $U \cdot V = V \cdot U$ (Commutative law)

(2) $(\alpha U + \beta V)W = \alpha(U \,.\, W) + \beta(V \,.\, W)$

สำหรับทุก ๆ สกาลา α และ β และทุก ๆ เวคเตอร์ U, V, W ใน E_2

(3) $u \,.\, U \geqslant$ และ $u\ u = 0$ ก็ต่อเมื่อ $U = 0$

เรากล่าวว่า เวคเตอร์ U กับ V เป็น orthogonal ซึ่งกันและกัน ถ้า $U \,.\, V = 0$

2.2.4 Length of a vector

สำหรับทุก ๆ เวคเตอร์ U ใน E_2 จะมีเลขจำนวนจริง (real number) เรียกว่า length ของ U เขียนแทนด้วย

$$\|U\| = +\sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

และมีคุณสมบัติว่า

(1) $\|U\| \geqslant 0$ และ $\|U\| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $U = 0$

(2) $\|\alpha U\| = |\alpha| \cdot \|U\|$

ความยาว (length) สอดคล้องกับ triangular inequality

(3) $\|U + V\| \leqslant \|U\| + \|V\|$

สำหรับทุก ๆ U และ V ใน E_2

(4) $\|U\| = +\sqrt{U \cdot U}$

ความยาวของเวคเตอร์ U แสดงให้เห็นได้ด้วยกราฟ

2.2.5 ระยะทางระหว่าง 2 เวคเตอร์ (Distance between two vectors)

สำหรับเวคเตอร์ U กับ V ทุก ๆ คู่ใน E_2 จะมีเลขจำนวนจริง เรียกว่า ระยะทาง (distance) ระหว่าง U กับ V เขียนแทนด้วย d(U, V) กำหนดว่า

$$d(U, V) = \|U - V\| = +\sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}$$

2.2.6 อิสระเชิงเส้นตรง (Linearly Independent)

เซทที่ประกอบด้วยเวคเตอร์ $U_1, U_2, \ldots, U_n$ ถูกเรียกว่า เป็นอิสระเชิงเส้นตรง (linearly independent) ถ้า

สำหรับเลขจำนวน $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ทุกตัว ซึ่งทำให้

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \ldots + \lambda_n U_n = 0$$

จะได้ว่า

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$$

แต่ถ้ามี λ_i ตัวใดมีค่าไม่เท่ากับ 0 เราเรียกเซทนี้ว่าเป็นพึ่งพิงเชิงเส้นตรง (linearly dependent) เพื่อความเข้าใจชัด ให้ดูจากตัวอย่างต่อไปนี้

กำหนดเวคเตอร์

$$U_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ U_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ U_3 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

หากเราพิจารณาเฉพาะเวคเตอร์ U_1 กับ U_2 จะเห็นว่า

ถ้า $$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 = \lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

จะได้ว่า $$\begin{pmatrix}\lambda_1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\lambda_2\\\lambda_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

หรือ $$\begin{pmatrix}\lambda_1 + \lambda_2\\\lambda_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

จะได้ $\lambda_2 = 0$ ซึ่งเป็นผลให้ $\lambda_1 = 0$ ด้วย

แสดงว่า เซทที่ประกอบด้วย U_1 และ U_2 เป็นอิสระเชิงเส้นตรง (linearly independent)

หากเราพิจารณาเซทที่ประกอบด้วย U_1, U_2 และ U_3 จะเห็นว่า

ถ้า $$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = \lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

จะได้ว่า $$\begin{pmatrix}\lambda_1 + \lambda_2\\\lambda_2 + \lambda_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

หรือ $\lambda_1 = -\lambda_2$, $\lambda_3 = -\lambda_2$

นั่นก็คือ $\lambda_1 = \lambda_3 = -\lambda_2$ ซึ่งจะเท่ากับค่าคงที่หนึ่ง ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ 0

แสดงว่า เซทที่ประกอบด้วย U_1, U_2 และ U_3 เป็นพึ่งพิงเชิงเส้นตรง (linearly dependent)

ตัวอย่างดังกล่าว เราพูดเฉพาะเซทของเวคเตอร์ใน E_2 โดยทั่ว ๆ ไป เรามักจะศึกษาคุณสมบัติของเซทของเวคเตอร์ในสเปซ n มิติตามแบบยูคลิด (n-dimensional Euclidean space) เขียนแทนด้วย E_n และให้นิยามไว้ดังนี้

สเปซ n มิติตามแบบยูคลิด (n-dimensional Euclidean space) E_n คือเซทที่ประกอบด้วยเวคเตอร์ที่มีคุณสมบัติดังกล่าวแล้วในหัวข้อ (2.2.1), (2.2.2) และ (2.2.3) พร้อมด้วยคุณสมบัติที่ว่า จะมีเวคเตอร์ที่เป็นอิสระเชิงเส้นตรงต่อกัน n เวคเตอร์ ในขณะที่ เซทของเวคเตอร์ $n+1$ เวคเตอร์เป็นพึ่งพิงเชิงเส้นตรง (linearly dependent)

กล่าวอีกนัยหนึ่งว่า หากเรามีเซทที่ประกอบด้วยเวคเตอร์ $U_1, U_2, \ldots, U_m$ ใน E_n $n \leq m$ กำหนดให้ซับเซทของ n เวคเตอร์ใด ๆ ในเซทนี้เป็นอิสระเชิงเส้นตรง เวคเตอร์อื่น ๆ ทุก ๆ เวคเตอร์ในเซทนี้ สามารถเขียนในรูปการรวมกันเชิงเส้นตรงของ n เวคเตอร์นี้ได้ ซึ่งแสดงให้เห็นจริงได้ดังนี้

สมมติว่า

$U_1, U_2, \ldots, U_n$ เป็นอิสระเชิงเส้นตรง ดังนั้น

$U_1, U_2, \ldots, U_n, U_r$ ต้องเป็นพึ่งพิงเชิงเส้นตรง $r = n + 1, n + 2, \ldots, m$

นั่นก็หมายความว่า จะต้องมี $U_i \neq 0$ อย่างน้อยที่สุด 1 ตัว ซึ่งในที่นี้ ต้องเป็น $U_r \neq 0$ เนื่องจาก $U_1, U_2, \ldots, U_n$ เป็นอิสระเชิงเส้นตรง (linearly independent)

ดังนั้น เราจึงสามารถเขียน U_r ในรูปการรวมกันเชิงเส้นตรงของ $U_1, U_2, \ldots, U_n$

ใน E_n เรามี $U = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ และ

$$\lambda(u_1, u_2, \ldots, u_n) = (\lambda u_1, \lambda u_2, \ldots, \lambda u_n)$$

$$(u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$$

$$(u_1, u_2, \ldots, u_n) \cdot (v_1, v_2, \ldots, v_n) = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n$$

ในการโปรแกรมเชิงเส้นตรง ความเข้าใจเกี่ยวกับเรื่องฐาน (basis) เป็นเรื่องที่สำคัญมาก เราให้นิยามเกี่ยวกับฐาน (basis) ไว้ดังนี้

ฐาน (basis) ใน E_n คือเซทที่ประกอบด้วยเวคเตอร์ n เวคเตอร์ ที่เป็นอิสระเชิงเส้นตรงต่อกัน (n linearly independent vectors)

เวคเตอร์ใด ๆ ใน E_n สามารถเขียนให้อยู่ในรูปการรวมกันเชิงเส้นตรง (linear combination) ของเวคเตอร์ของฐาน (basis) ที่กำหนดให้ ได้เพียงรูปเดียวเท่านั้น

ตัวอย่างของฐานใน E_n ได้แก่ เซทที่ประกอบด้วย unit vectors n เวคเตอร์ คือ (1, 0, …, 0), (0, 1, …, 0), …, (0, 0, …, 1)

ถ้า S_1 และ S_2 ต่างเป็นซับเซทของเวคเตอร์ใน E_n และให้ S_1 เป็นซับเซทของ S_2 หาก S_1 เป็นพึ่งพิงเชิงเส้นตรง แล้ว S_2 เป็นพึ่งพิงเชิงเส้นตรง (linearly dependent) หาก S_2 เป็นอิสระเชิงเส้นตรง แล้ว S_1 ก็จะเป็นอิสระเชิงเส้นตรงด้วย

ใน E_2 เรานิยาม

$$a_1u_1 + a_2u_2 = b$$

เป็นเส้นตรง สำหรับค่าคงที่ a_1, a_2 และ u

ในขณะที่ ใน E_3 เรานิยาม

$$a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = b$$

เป็นระนาบ

เมื่อมาถึง E_n เรากล่าวว่า เซทของจุด $\underline{U}$ ที่สอดคล้องกับสมการ

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n = b$$

กำหนดเป็น hyperplane

เราให้นิยามไว้ดังต่อไปนี้

hyperplane H(A, b) ใน E_n ก็คือเซทที่ประกอบด้วยเวคเตอร์ $\underline{U}$ ซึ่งทำให้ $A \cdot \underline{U} = b$ สำหรับทุก ๆ เวคเตอร์ $A \neq 0$ และเลขจำนวนจริง b

hyperplane จะแบ่ง E_n ออกเป็นสเปซครึ่ง ๆ (half space) 2 สเปซด้วยกันคือ

$$H^+(A, b) = (U/A \cdot U \geqslant b)$$

และ $$H^-(A, b) = (U/A \cdot U \leqslant b)$$

$H^+(A, b)$ เป็น half space นั่นก็คือ เป็นส่วนหนึ่งของ E_n ที่ประกอบด้วยเวคเตอร์ U ซึ่งทำให้ $A \cdot U \geqslant b$ $H^-(A, b)$ เป็น half space ที่ประกอบด้วยเวคเตอร์ U ซึ่งทำให้ $A \cdot U \leqslant b$

ตัวอย่างเช่น เมื่อ $A = (2, -1)$ และ $b = 1$ เรามี inner product

$$A \cdot U = 2u_1 - u_2$$

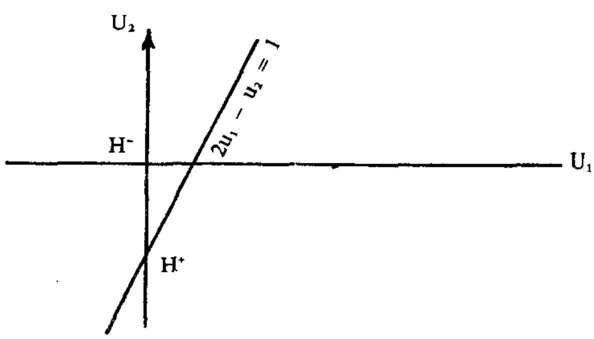
มี half space 2 อันคือ

$$H^+(A, b) = 2u_1 - u_2 \geqslant 1$$

และ

$$H^-(A, b) = 2u_1 - u_2 \leqslant 1$$

แสดงให้เห็นได้ดังรูป



จุดทุกจุดที่อยู่บนเส้นตรง

$$2u_1 - u_2 = 1$$

จะเป็นของ half space ทั้ง 2 อัน

ในปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นตรง เรามีฟังก์ชันเป้าหมาย

$$P = c_1x_1 + c_2x_2 + . + c_nx_n$$

หรือเขียนย่อ ๆ ว่า

$$P = \underline{C}'\underline{X}$$

ในเมื่อ $\underline{C}' = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ และ $\underline{X}' = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

เซทของค่า X ทุก ๆ ชุด ที่กำหนดค่าของฟังก์ชันเป้าหมาย P เป็น hyperplane

hyperplane $\underline{C}_1'\underline{X} = P_1$ และ $\underline{C}_2'X = P_2$ จะขนานกัน ถ้า $C_1' = \lambda C_2', \lambda \neq 0$

เรากล่าวว่า hyperplane $\underline{C}'\underline{X} = P_1$ ได้มาจากการเลื่อน $\underline{C}'X = P_0$ ในแนวที่ขนานกับตัวของมันเอง ตามทิศทางของ $\underline{C}'$

hyperplane $C'X = P$ จะแบ่ง E_n ออกเป็นเซทที่ขจัดกัน 3 เซทคือ

$$\underline{X}_1 = \{x : \underline{C}'\underline{X} < P\}$$

$$\underline{X}_2 = \{x : \underline{C}'\underline{X} = P\}$$

และ $$\underline{X}_3 = \{x : \underline{C}'\underline{X} > P\}$$

เรียกเซท X_1 และ X_3 ว่า สเปซครึ่งที่เปิด (open half-spaces)

ถ้าเรามีเซท

$$X_4 = \{x : C'X < P\} \text{ และ } X_5 = \{x : C'X \geqslant P\}$$

เรียก X_4 และ X_5 ว่า สเปซครึ่งที่ปิด (closed half-spaces) จะเห็นได้ว่า

$$X_4 \cap X_5 = X_2$$

hyperplanes เป็นเซทที่ปิด (closed sets) จุดทุก ๆ จุดใน hyperplane เป็นจุดชายขอบ (boundary point) ดังนั้น สเปซครึ่งที่ปิด (closed half-spaces) จะเป็นเซทปิด (closed sets) ในทางตรงกันข้าม พวกที่เป็นสเปซครึ่งที่เปิด (open half-spaces) ก็จะเป็นเซททีเปิด (open sets)

2.3 Convex Sets

ถ้าเรามีจุด $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$x = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_n X_n$$

ในเมื่อ $\lambda_i \geqslant 0$ และ $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$

เราเรียกจุด X นี้ว่าเป็น convex combination ของจุด $X_1, X_2, \ldots, X_n$

นิยาม 2.3.1 เราเรียกเซท C ว่าเป็น convex set ถ้าหากเราพิจารณาจุด 2 จุดใด ๆ ที่อยู่ในเซท C คือจุด X_a และ X_b แล้วจะมีจุด X_c ที่มีคุณสมบัติว่า

$$X_c = \lambda X_a + (1 - \lambda)X_b , \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$$

เป็นจุดที่อยู่ในเซท C ด้วย

ทฤษฎี 2.3.1 จุดทุก ๆ จุดที่อยู่บนเส้นตรงที่เชื่อมต่อระหว่างจุด 2 จุดใน E_n สามารถเขียนในรูปของ convex combination ของจุดทั้งสองนี้ได้

พิสูจน์

กำหนด X_a และ X_b เป็นจุด 2 จุดใน E_n

ให้ X_c เป็นจุดบนเส้นตรงที่เชื่อมต่อระหว่างจุด X_a กับ X_b

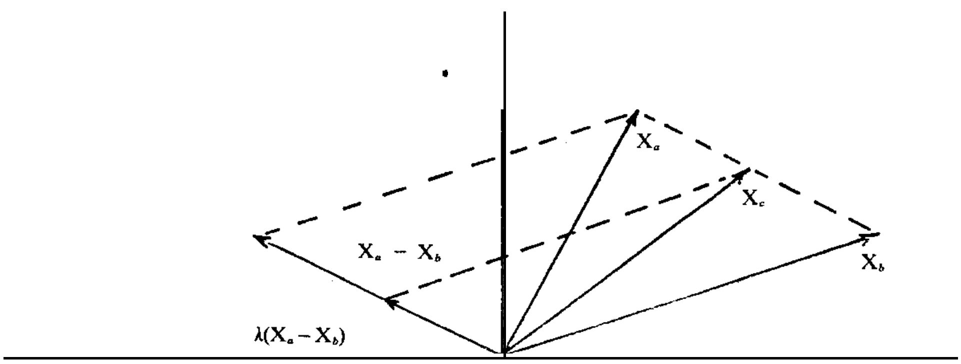
เส้นตรงนี้จะขนานกันกับเส้นตรงที่กำหนดโดยเวคเตอร์ $X_a - X_b$ (ดังรูป)

อาศัยกฎการบวกของเวคเตอร์ จะได้ว่า

$$X_b + \lambda(X_a - X_b) = X_c \quad \text{สำหรับบางค่าของ } 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$$

หรือ $\qquad (1 - \lambda)X_b + \lambda X_a = X_c$

ซึ่งเป็นการแสดงให้เห็นว่า จุด X_c เป็น convex combination ของ X_b กับ X_a



ทฤษฎี 2.3.2 (บทกลับของทฤษฎี 2.3.1)

จุดใด ๆ ที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูป convex combination ของจุด 2 จุดใน E_n ได้ จะต้องเป็นจุดที่อยู่บนเส้นตรงที่เชื่อมต่อระหว่าง 2 จุดนี้

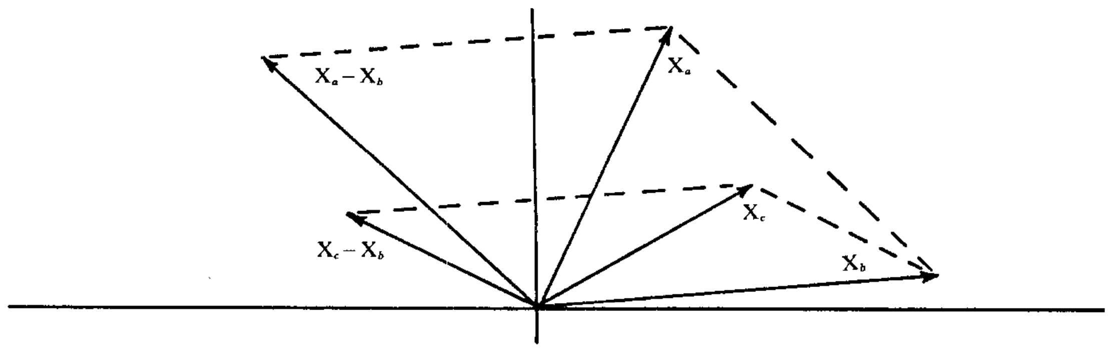
พิสูจน์

ในที่นี้ เรามี

$$X_c = (1 - \lambda)X_b + \lambda X_a$$

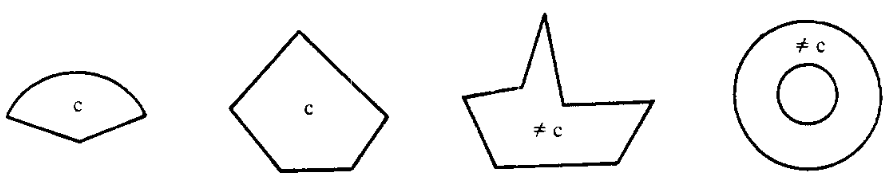
หรือ $$X_c - X_b = \lambda(X_a - X_b)\ ,\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$$

ดังนั้น เวคเตอร์ $X_c - X_b$ จะเท่ากับ ผลคูณระหว่าง ค่าคงที่ที่เป็นบวกกับเวคเตอร์ $X_a - X_b$ โดยที่เวคเตอร์ $X_c - X_b$ ต้องมีทิศทางร่วมกันกับเวคเตอร์ $X_a - X_b$ ซึ่งแสดงให้เห็นได้ดังรูป



โดยเหตุที่ เส้นตรงที่เชื่อมต่อระหว่าง X_a กับ X_b และเส้นตรงที่เชื่อมต่อระหว่าง X_c กับ X_b ขนานกันกับ เส้นตรงที่นิยามโดย $X_a - X_b$ และ $X_c - X_b$ ตามลำดับ จุด X_c จึงต้องอยู่บนเส้นตรงที่เชื่อมต่อระหว่าง X_a กับ X_c

จากทฤษฎีดังกล่าว เราจะเห็นว่า convex set ก็คือ เซทของจุดต่าง ๆ ที่เมื่อเราลากเส้นตรงเชื่อมต่อระหว่าง 2 จุดใด ๆ ที่อยู่ในเซทนี้แล้ว จุดต่าง ๆ บนเส้นตรงทุกจุด จะอยู่ในเซทนี้ด้วย ตัวอย่างของ convex set คือรูป (a) และ (b) สำหรับรูป (c) และ (d) ไม่เป็น convex set

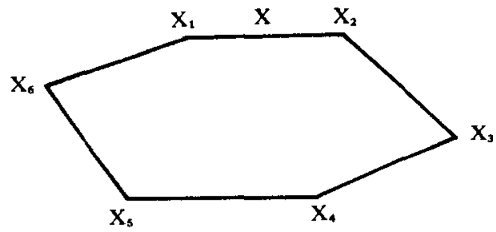


(a) (b) (c) (d)

นิยาม 2.3.2 เราเรียกจุด $\underline{X}$ ว่าเป็นจุดมุมหรือจุดปลายสุด (vertex or extreme point) ของ convext set ก็ต่อเมื่อ จะต้องไม่มีจุดอื่น ๆ เช่น $\underline{X}_1$, $\underline{X}_2$, $\underline{X}_1 \neq \underline{X}_2$ ในเซทนี้ที่ทำให้

$$\underline{X} = \lambda\underline{X}_2 + (1-\lambda)\underline{X}_1 \ , \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$$

ตัวอย่างของจุดปลายสุด ได้แก่ จุดมุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม จุดทุก ๆ จุดบนเส้นรอบวงของวงกลม ในกรณีของรูปเหลี่ยม



จุดที่เป็นจุดปลายสุดหรือจุดมุมคือจุด $\underline{X}_1$, $\underline{X}_2$, X_3, X_4, X_5 และ X_6 จุดที่อยู่บนด้านใดด้านหนึ่งของรูปไม่เรียกว่าจุดปลายสุด เช่นจุด $\underline{X}$ เนื่องจากเราสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ convex combination ของ $\underline{X}_1$ กับ $\underline{X}_2$ ได้

hyperplane ก็เป็น convex set ซึ่งแสดงให้เห็นจริงได้ดังนี้ หากเรามี $\underline{X}_1$ และ $\underline{X}_2$ อยู่ใน hyperplane กล่าวคือ $\underline{C}'\underline{X}_1 = P$ และ $\underline{C}'\underline{X}_2 = P$ แล้ว จะมี

$$\underline{X} = \lambda\underline{X}_2 + (1-\lambda)\underline{X}_1 \ , \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$$

อยู่ใน hyperplane ด้วย ทั้งนี้เนื่องจาก

$$\begin{aligned} \underline{C}'\underline{X} &= \underline{C}'\{\lambda\underline{X}_2 + (1-\lambda)\underline{X}_1\} = \lambda\underline{C}'\underline{X}_2 + (1-\lambda)C'\underline{X}_1 \\ &= \lambda P + (1-\lambda)P \qquad = P \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน สเปซครึ่งที่เปิดและที่ปิด ก็เป็น convex sets นอกจากนี้ บริเวณที่ตัดกัน (intersection) ของ convex set ต่าง ๆ ที่มีจำนวนจำกัด จะเป็น convex set และถ้าหากว่า แต่ละเซทเป็นเซทปิด บริเวณที่ตัดกันก็จะเป็นเซทปิดด้วย ผลที่ตามมาก็คือ บริเวณที่ตัดกันของ hyperplane ต่าง ๆ ที่มีจำนวนจำกัด หรือบริเวณที่ตัดกันของสเปซครึ่ง ต่างเป็น convex set

นิยาม 2.3.3 ถ้าเซท S ประกอบด้วยจำนวนจุดที่มีจำกัด เราเรียกเซทที่ประกอบด้วย convex combination ของจุดที่อยู่ใน S ทั้งหมด ว่าเป็น convex polyhedron

นิยาม 2.3.4 เราเรียก convex polyhedron n มิติ ที่มีจุดมุมเพียง n + 1 จุด ว่าเป็นซิมเพลกซ์ (simplex)

ซิมเพลกซ์ (simplex) ใน 0 มิติ ก็คือจุดใน 1 มิติ คือเส้นตรงใน 2 มิติคือรูปสามเหลี่ยม และใน 3 มิติก็คือรูปทรงสี่เหลี่ยม

สมการของ simplex ที่มีจุดตัดที่ 1 ก็คือ

$$x_i \geqslant 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \leqslant 1$$

กรณีที่ m = 3 เราจะได้รูปทรงสี่เหลี่ยม ที่มีจุดมุมอยู่ที่ (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0) และ (0, 0, 1)

2.4 Solution of a set of Simultaneous Linear Equations

ถ้าเรามีเซทของสมการเชิงเส้นตรงที่ประกอบด้วย m สมการ และมี n ตัวแปร ในระบบ

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.4.1)$$

อาจจะเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริคซ์ ดังนี้

$$A\underline{X} = \underline{B}$$

ในเมื่อ

$$A = (a_{ij}), \quad \underline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \text{ และ } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \\ \\ \\ b_m \end{pmatrix}$$

ถ้า A เป็นเมทริคซ์จัตุรัส (นั่นก็คือ หาก m = n) และเป็น nonsingular เวคเตอร์ของคำตอบที่ได้จะถูกกำหนดโดย

$$\underline{X} = A^{-1}\underline{B}$$

มีแบบแผนของการคำนวณอย่างง่าย ๆ ที่สามารถนำไปใช้ในการหาเวคเตอร์ของคำตอบ และ/หรือ อินเวอร์สกรณีของเมทริคซ์เป็น nonsingular กระบวนการที่จะใช้นี้เป็นวิธีการของจอร์แดนและเกาซ์ เรียกว่า complete elimination method of Jordan and Gauss วิธีการเป็นแบบที่มีขั้นตอน (steps) หรือที่เรียกว่า iterations ซึ่งมีจำนวนจำกัด เพื่อให้เกิดความเข้าใจกระจ่างชัดขึ้น ขอให้เราดูตัวอย่างกรณีที่ $m = n = 3$ สมมติเรามีเซทของสามสมการที่มี 3 ตัวแปร ดังนี้

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \end{aligned} \qquad \ldots \quad (2.4.2)$$

ในที่นี้ เรามีเมทริคซ์

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

เป็นเมทริคซ์ของสัมประสิทธิ์ ซึ่งสามารถแสดงให้เห็นได้ว่า A เป็น nonsingular เราอาจจะเขียนระบบสมการใน (2.4.2) ในรูปของสมการเมทริคซ์ ดังนี้

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

หรือถ้าหากเรากำหนดเวคเตอร์

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

ราอาจจะเขียน (2.4.2) เสียใหม่เป็น

$$x_1\underline{a}_1 + x_2\underline{a}_2 + x_3\underline{a}_3 = \underline{B}$$

โดยเหตุที่ A เป็น nonsingular เซทของเวคเตอร์ $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$ และ $\underline{a}_3$ เป็นอิสระเชิงเส้นตรง ดังนั้น เซทของเวคเตอร์เหล่านี้จึงรวมกันเป็นฐาน (basis) ในสเปซ 3 มิติ การแก้ปัญหา (2.4.2) ก็คือ การหาการรวมกันเชิงเส้นซึ่งมีเพียงชุดเดียว (ในที่นี้ คือจำนวนของ x_1, x_2 และ x_3) ของ $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$ และ $\underline{a}_3$ ที่มีค่าเท่ากับ B โดยอาศัยวิธีการของจอร์แดนและเกาซ์ เราเริ่มต้นหาคำตอบโดย เริ่มแรก จะต้องขจัดตัวแปรตัวแรกออกจากทุก ๆ สมการ ยกเว้นในสมการที่ 1 และทำให้สัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัวแรกในสมการที่ 1 นั้นมีค่าเป็น 1 ขั้นต่อไปจะขจัดตัวแปรตัวที่ 2 ตัวที่ 3 ฯลฯ (ถ้ามี) ในวิธีการแบบเดียวกันกับกรณีของตัวแปรตัวแรก ดังนั้นการแก้ปัญหา (2.4.2) จึงมีขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 พิจารณาจากสมการใน (2.4.2) เราทราบแล้วว่า A เป็น nonsingular และจะเห็นว่า ส.ป.ส.ของตัวแปรตัวแรกในสมการที่ 1 ไม่เป็น 0 ในที่นี้ $a_{11} = 1$ เราจึงเพียงแต่ขจัด x_1 จากสมการที่ 2 และ 3 ตามลำดับ การขจัด x_1 ออกจากสมการที่ 2 ก็คือการแทนค่า x_1 ซึ่ง

$$x_1 = 2 - x_2 + x_3$$

ลงในสมการที่ 2 ซึ่งจะเท่ากับการที่เราเอา 2 ไปคูณสมการที่ 1 ตลอด แล้วนำผลที่ได้นี้ไปบวกกับสมการที่ 2 ทำนองเดียวกัน การขจัดตัวแปร x_1 ออกจากสมการที่ 3 ก็คือการแทนค่า x_1 ที่ได้จากสมการที่ 1 ดังกล่าวข้างต้นลงในสมการที่ 3 หรืออีกนัยหนึ่งก็คือการที่เราเอา −1 ไปคูณสมการที่ 1 โดยตลอด แล้วนำผลที่ได้ไปบวกกับสมการที่ 3 นั่นก็คือเราแปรเปลี่ยนเซทของสมการใน (2.4.2) กลายเป็นเซทของสมการ

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ 3x_2 - x_3 &= 7 \\ 2x_3 &= 4 \end{aligned} \qquad \text{..........} (2.4.3)$$

ขั้นตอนที่ 2 ในขั้นนี้เราจะขจัดตัวแปร x_2 ออกจากเซทของสมการใน (2.4.3) ยกเว้นในสมการที่ 2 พิจารณา ส.ป.ส.ของ x_2 ในสมการที่ 2 จะเห็นว่า $a_{22} = 3$ เราทำให้ ส.ป.ส.นี้เปลี่ยนเป็น 1 โดยการหารสมการที่ 2 ด้วย 3 ซึ่งเราจะเรียก ส.ป.ส. 3 นี้ว่า pivot element (ในขั้นตอนที่ 1 pivot element ก็คือ $a_{11} = 1$) เรานำผลที่ได้จากการเอาสมการที่ 2 หารด้วย 3 นี้ ไปลบออกจากสมการที่ 1 สำหรับสมการที่ 3 นั้นมี ส.ป.ส. ของ x_2 เป็น 0 อยู่แล้ว จึงไม่มีการเปลี่ยนแปลงอันใด นั่นก็คือ เราแปรเปลี่ยนเซทของสมการใน (2.4.3) กลายเป็นเซทของสมการ

$$x_1 \qquad - \frac{2}{3}x_3 = -\frac{1}{3}$$

$$x_2 - \frac{1}{3}x_3 = \frac{1}{3} \qquad \text{..........(2.4.4)}$$

$$2x_3 = 4$$

ขั้นตอนที่ 3 ในขั้นตอนนี้เป็นการขจัด x_3 ออกจากเซทของสมการใน (2.4.4) ยกเว้นในสมการที่ 3 เมื่อเราพิจารณา ส.ป.ส. ของ x_3 ในสมการที่ 3 จะเห็นว่า $a_{33} = 2$ นั่นก็คือ pivot element เป็น 2 ดังนั้นเราหารสมการที่ 3 ด้วย 2 แล้วนำผลที่ได้คูณกับ $\frac{2}{3}$ และ $\frac{1}{3}$ เอาผลคูณไปบวกกับสมการที่ 1 และสมการที่ 2 ตามลำดับ จะได้เซทของสมการชุดใหม่ดังนี้

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 3 \qquad \text{..........(2.4.5)}$$

$$x_3 = 2$$

ซึ่งจะเป็นคำตอบต่อปัญหาใน (2.4.2)

หากเราพิจารณาวิธีการหาคำตอบโดยใช้ the complete elimination method of Jordan and Gauss จะเห็นว่า ดำเนินการโดยแปรเปลี่ยนเมทริคซ์ของ ส.ป.ส.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ให้เป็น identity matric

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

กรณีที่จำนวนสมการมีน้อยกว่าจำนวนตัวแปร เรายังคงใช้วิธีการ Gaussian Elimination เพียงแต่ว่า คำตอบที่ได้จากปัญหาเหล่านี้มีหลายชุด ขึ้นอยู่กับว่าเรามีเป้าหมายวางไว้อย่างไรหรือไม่ ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น จะเป็นลักษณะดังกล่าวในตอนหลังนี้

แบบฝึกหัดที่ 2

1. กำหนดเมทริคซ์ต่อไปนี้

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 6 & 14 & 8 \end{pmatrix}$$

จงหา

1.1 เมทริคซ์ของ A + B และ AB

1.2 ดีเทอร์มิแนนท์ของ A (120)

1.3 rank ของ B

2. กำหนดฐาน (basis) ที่ประกอบด้วยเวคเตอร์

$$\underline{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{a_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

จงหาอินเวอร์สของเมทริคซ์ที่ประกอบเป็นฐานนี้ และคำนวณค่าของการรวมกันเชิงเส้น (linear combination) ของฐานของเวคเตอร์เหล่านี้ ที่มีค่าเท่ากับเวคเตอร์ $\underline{a_4}$ ในเมื่อ $\underline{a_4'} = (1\ 3\ 4)$

(คำตอบ

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1}\underline{a_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3. กำหนดเซทของสมการต่อไปนี้

$$2x_1 + 2x_2 \quad x_3 = 4$$

$$3x_1 - x_2 - 3x_3 = 7$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$$

จงหาคำตอบโดยวิธีการ complete elimination และจงหาอินเวอร์สของเมทริคซ์ A จากการหา adjoint matrix

จงตรวจสอบคำตอบที่ได้จากการคำนวณ $A^{-1}\underline{B}$, AA^{-1}

(คำตอบ $x_1 = 13/5$, $x_2 = -2/5$, $x_3 = 2/5$)

4. จงแก้สมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 \qquad + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 \qquad &= 2 \end{aligned}$$

โดยจัดรูปสมการเป็น $A\underline{X} = \underline{B}$ แล้วหาอินเวอร์สของ A หาคำตอบของสมการจาก $\underline{X} = A^{-1}\underline{B}$

(2, 2, −2)