บทที่ 1
ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น

1.1 คำนำ

การวางแผนและการตัดสินใจเป็นกิจกรรมสำคัญอย่างหนึ่งของผู้บริหาร ปัญหาที่เกิดขึ้นไม่ว่าจะเป็นปัญหาทางด้านธุรกิจ ปัญหาทางด้านอุตสาหกรรมหรือองค์การของรัฐก็ตาม เป็นหน้าที่ของผู้รับผิดชอบที่จะต้องศึกษาลักษณะของปัญหานั้น ๆ แล้วนำมาวิเคราะห์หาคำตอบเพื่อเลือกวิถีทางปฏิบัติที่ดีที่สุดในบรรดาทางเลือกที่ได้ เป็นคำตอบต่อปัญหาที่จะนำเสนอต่อผู้บริหารระดับสูงต่อไป หากผู้บริหารยอมรับทางเลือกนี้ คำตอบที่ได้ก็จะเป็นการวางแผนและการตัดสินใจเกี่ยวกับปัญหาที่ประสบอยู่ ในสมัยก่อนผู้บริหารมักจะวางแผนและตัดสินปัญหา โดยอาศัยความชำนาญ ใช้หลักเหตุและผลประกอบกับประสบการณ์ในงานนั้น ๆ เป็นเครื่องมือในการตัดสินใจ โดยขาดข้อมูลหรือการวิเคราะห์อย่างละเอียด เป็นผลให้การวางแผนหรือการตัดสินใจนั้น อาจจะไม่ใช่ทางเลือกหรือวิถีทางปฏิบัติที่ดีที่สุดก็ได้ เนื่องจากคำตอบที่ได้มานั้นขึ้นอยู่กับตัวบุคคลผู้ตัดสินใจ ดุลย์ในการตัดสินใจจึงไม่มี ในระยะเวลาต่อมา ปริมาณงาน ปริมาณข้อมูลและระบบต่าง ๆ ได้ขยายกว้างขวางและสลับซับซ้อนยิ่งขึ้น จึงเป็นการยากที่ผู้บริหารจะวางแผนหรือตัดสินใจโดยอาศัยแต่เพียงความชำนาญหรือประสบการณ์ ในปัจจุบันปัญหาที่สลับซับซ้อนเหล่านี้ สามารถแก้ได้โดยอาศัยการโปรแกรมเชิงคณิตศาสตร์ (mathematical programming) และใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ที่ให้ผลลัพธ์อย่างรวดเร็ว ถูกต้องแม่นยำกว่า วิธีการหนึ่งอันเป็นที่รู้จักกันดีและใช้กันแพร่หลายมากในบรรดาเทคนิคการโปรแกรมเชิงคณิตศาสตร์ ก็คือ การโปรแกรมเชิงเส้น (Linear Programming) เรียกสั้น ๆ ว่า LP การโปรแกรมเชิงเส้นจะถูกนำมาช่วยในการแก้ปัญหาที่เราไม่สามารถแก้ได้ด้วยตัวเราเองเพราะเสียเวลานาน และเราอาจมองข้ามปัญหาปลีกย่อยบางอย่างไป LP จะมีประโยชน์ในการแก้ปัญหาที่มีทางเลือกมากมาย แต่การเกิดขึ้นของทางเลือกเหล่านั้นอยู่ภายใต้สภาวการณ์ที่แน่นอนเพียงแต่ไม่ทราบแน่ชัดว่า ทางเลือกใดจะดีที่สุด LP ใช้กับปัญหาซึ่งความสัมพันธ์กันระหว่างตัวแปรทั้งหมดเป็นแบบเชิงเส้น นั่นก็หมายความว่า การเปลี่ยนแปลงแต่ละหน่วยของตัวแปรตัวใดตัวหนึ่งจะมีผลทำให้ปริมาณของตัวแปรอื่น ๆ ที่มีความสัมพันธ์กัน เปลี่ยนแปลงไปด้วยในอัตราส่วนที่คงที่

ปัจจุบันประเทศที่มีความเจริญทางวิชาการ นิยมใช้ LP กับปัญหาทางด้านธุรกิจ อุตสาหกรรม และองค์การของรัฐอย่างกว้างขวาง เช่นปัญหาเกี่ยวกับการขนส่ง การคมนาคม การวางแผนเกี่ยวกับการผลิตและสต๊อคสินค้า การวางแผนพัฒนาการเกษตร การทหาร การจัดการทางด้านโภชนาการ การจัดงบประมาณ การให้บริการชุมชน เป็นต้น ปัญหาเหล่านี้มีการจำกัดของทรัพยากร ผู้วิเคราะห์หรือผู้รับผิดชอบจะต้องศึกษาลักษณะของปัญหาและข้อจำกัด แล้วนำมาวิเคราะห์เพื่อแสวงหาคำตอบที่ดีที่สุดต่อปัญหา ให้บรรลุถึงเป้าหมายที่วางไว้

1.2 ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น (Linear Programming Problem : LPP)

เราอาจนิยาม LP ว่า เป็นเทคนิคเชิงคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการจัดสรรหรือแจกจ่ายทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัด ให้เกิดผลดีที่สุด ตรงตามวัตถุประสงค์ที่วางไว้ นักคณิตศาสตร์อาจให้นิยามว่า LP เป็นวิธีการแก้ปัญหาภายใต้ข้อบังคับต่าง ๆ โดยมีเป้าหมายว่า ต้องการให้ได้ค่าสูงสุด หรือค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน นักเศรษฐศาสตร์นิยามไว้ว่า LP เป็นวิธีการจัดสรรทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัดให้สอดคล้องกับกฎของอุปสงค์และอุปทาน นักธุรกิจมอง LP ในแง่ของเครื่องมืออย่างหนึ่งที่ใช้ในปัญหาการวิเคราะห์กิจกรรมทางด้านธุรกิจ เพื่อการวิจัยและพัฒนาให้เป็นไปตามเป้าหมายที่กำหนดไว้ อย่างไรก็ตาม LP จะเกิดขึ้นได้ก็ต่อเมื่อมีการจำกัดของทรัพยากร ปัญหาในชีวิตจริงมักจะมีข้อจำกัดเสมอ ตัวอย่างเช่น โรงงานอุตสาหกรรมสามารถผลิตสินค้าได้หลายชนิด สินค้าแต่ละชนิดใช้วัตถุดิบไม่เหมือนกันและมีปริมาณต่างกัน เวลาที่ใช้ในการผลิต ขั้นตอนการผลิตก็แตกต่างกันออกไป แรงงานที่ใช้จึงไม่เท่ากัน ทั้งวัตถุดิบและแรงงานมีปริมาณจำกัด จำนวนวัตถุดิบอาจแปรผันไปตามฤดูกาล เวลาที่ใช้ในการผลิตขึ้นอยู่กับความสามารถของเครื่องจักร หากต้องการเพิ่มผลผลิตก็ต้องสต๊อควัตถุดิบไว้มากยิ่งขึ้น ต้องมีที่เก็บเพียงพอ นั่นคือต้องขยายที่เก็บวัตถุดิบอีกและต้องเพิ่มปริมาณแรงงาน เช่นเพิ่มเครื่องจักรหรือขยายเวลาการทำงาน เป็นต้น นอกจากนี้ยังมีข้อจำกัดเกี่ยวกับการขายซึ่งอาจแปรผันไปตามฤดูกาล หรือปริมาณขายของสินค้าต่าง ๆ บางชนิดอาจขายได้ในปริมาณจำกัด แต่บางชนิดขายได้ไม่จำกัด กำไรที่ได้จากการจำหน่ายสินค้าแต่ละชนิดขึ้นอยู่กับต้นทุนการผลิต ค่าขนส่ง หรืออื่น ๆ กำไรของสินค้าแต่ละชนิดจึงไม่เท่ากัน ปัญหามีอยู่ว่าเราจะเลือกผลิตสินค้าชนิดใด อย่างไร จึงจะได้กำไรมากที่สุด การผลิตเพื่อให้ได้กำไรสูงสุดก็คือเป้าหมายของโรงงานอุตสาหกรรมนี้ การใช้ LP ในการแก้ปัญหาจึงต้องศึกษารายละเอียดและทำการวิเคราะห์ปัญหาที่เกิดขึ้น จะต้องรู้ว่าข้อจำกัดของปัญหาที่ประสบอยู่มีอะไรบ้าง มีขอบเขตและเงื่อนไขอย่างไร เป้าหมายที่ต้องการคืออะไร ต้องการค่าสูงสุดหรือต้องการค่าต่ำสุด อาศัยเงื่อนไขของข้อจำกัดและเป้าหมายที่กำหนดไว้ นำมาวิเคราะห์หาตัวแปรที่จะใช้ในการตัดสินใจ (decision variable) ดูว่าตัวแปรเหล่านี้มีอะไรบ้าง สามารถนำมาเขียนเป็นรูปสมการหรืออสมการ

เชิงเส้นของข้อจำกัด และฟังก์ชันเป้าหมายได้หรือไม่ และมีข้อกำหนดว่าตัวแปรเหล่านี้จะต้องมีค่าเป็นบวกเสมอ เราจึงให้นิยามของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น (LPP) และตัวแบบของปัญหาดังต่อไปนี้

ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น (LPP) ก็คือ ปัญหาเกี่ยวกับการใช้หรือการจัดสรรทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัด ให้บรรลุถึงเป้าหมายที่วางไว้ อย่างมีประสิทธิภาพ เป้าหมายจะเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของตัวแปร เรียกว่า ฟังก์ชันเป้าหมาย (objective function) กำหนดในเทอมของการหาค่าสูงสุดหรือการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน โดยมีข้อจำกัดเกี่ยวกับการใช้หรือการจัดสรรทรัพยากร อันได้แก่ กำลังคน เงินทุน วัตถุดิบ เครื่องจักร ทรัพย์สินต่าง ๆ ฯลฯ ซึ่งเขียนเป็นสมการหรืออสมการเชิงเส้น ตัวแบบของปัญหาเขียนได้ดังนี้

หาค่าสูงสุด (หรือหาค่าต่ำสุด) P

$$= c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1.1)$$

โดยมีข้อจำกัด

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ \{\leqslant, \geqslant, =\} \ b_1 , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ \{\leqslant, \geqslant, =\} \ b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ \{\leqslant, \geqslant, =\} \ b_m \end{array} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1.2)$$

และ $x_j \ (j = 1, 2, \ldots, n) \geqslant 0$ ……….(1.3)

หรือเขียนแบบย่อได้ดังนี้

หาค่าสูงสุด P

$$= \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$

โดยมีข้อจำกัด

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ \{\leqslant, \geqslant, =\} \ b_i , \quad i = 1, 2, \ldots m$$

และ $x_j \geqslant 0$, $j = 1, 2, 3, \ldots, n$

ในเมื่อ c_j, a_{ij} และ b_i ต่างเป็นค่าคงที่

x_j เป็นตัวแปรที่เราต้องการหาค่าเพื่อให้ได้ค่า P สูงสุด (หรือ P ต่ำสุดแล้วแต่กรณี) เรียก x_j ว่า decision variable

จะเห็นว่า โครงสร้างของตัวแบบปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นประกอบด้วย

(1.1) ฟังก์ชันเป้าหมาย ซึ่งวางไว้อย่างชัดเจนและกำหนดค่าของเป้าหมายเป็นปริมาณ

(1.2) เงื่อนไขของข้อจำกัด (constraints) ซึ่งอยู่ในรูปอสมการ ($\leqslant$ หรือ $\geqslant$) หรือรูปสมการ (=) ก็ได้ แสดงให้เห็นความสัมพันธ์เชิงเส้นของตัวแปร และเป็นขอบเขตที่กำหนดว่าจะมีโอกาสใช้ทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัดอย่างไร

(1.3) การจำกัด (restriction) ของตัวแปร กำหนดไว้ว่า ตัวแปร (variable) ทุกตัวจะต้องมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0 เสมอ จะเป็นลบไม่ได้

จากตัวแบบที่ได้ นำมาแก้ปัญหาเพื่อให้ได้คำตอบอุตมะ (optimal solution) ซึ่งเป็นคำตอบที่ดีที่สุดในบรรดาคำตอบทั้งหลาย หรือเรียกว่าเป็นคำตอบที่ให้ผลประโยชน์ต่อส่วนรวมมากที่สุด

1.3 ตัวอย่างตัวแบบปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น

ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นมีหลายขนาด ตั้งแต่ปัญหาขนาดเล็ก มีตัวแปรหรือข้อจำกัดไม่เกิน 5 เป็นปัญหาง่าย ๆ ซึ่งเราอาจพบได้ในชีวิตประจำวัน และเราสามารถหาคำตอบได้ด้วยตัวเราโดยไม่ต้องใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ ปัญหาขนาดกลาง มีตัวแปรและข้อจำกัดเป็นจำนวนร้อยเราพอจะแก้ปัญหานี้ได้ แต่ต้องใช้เวลามากและอาจจะเกิดข้อผิดพลาดได้ง่าย หรือหาคำตอบได้ไม่ทันการ โดยทั่วไปจึงต้องใช้เครื่องคอมพิวเตอร์เข้ามาช่วย นอกจากนี้ก็มีปัญหาขนาดใหญ่มีจำนวนตัวแปรนับพันและข้อจำกัดอีกมากมายจนเราไม่สามารถแก้ปัญหาเองได้ ต้องใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ในการแก้ปัญหาเท่านั้น อย่างไรก็ตามวิธีการหาคำตอบยังคงใช้หลักการเดียวกัน เพื่อที่จะให้เข้าใจถึงปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น และการสร้างตัวแบบของปัญหานั้น ๆ จะขอเริ่มด้วยปัญหาขนาดเล็ก ให้เรามาพิจารณาตัวอย่างปัญหาต่อไปนี้

1.3.1 ปัญหาการวิเคราะห์กิจกรรม

โรงงานอุตสาหกรรมมีจำนวนทรัพยากรอยู่จำนวนหนึ่งที่จะนำมาใช้ในการผลิต ทรัพยากรเหล่านี้ประกอบด้วย วัตถุดิบ แรงงาน และเครื่องมือที่จะนำมาใช้ในการผลิต โรงงานต้องการผลิต

สินค้าชนิดต่าง ๆ โดยใช้ทรัพยากรที่มีอยู่นี้ และทราบดีว่าจะต้องใช้ทรัพยากร เป็นปริมาณเท่าใดในการผลิตสินค้าหนึ่งหน่วย นอกจากนี้ยังรู้ดีว่ากำไรที่จะได้จากการจำหน่ายสินค้า แต่ละหน่วยที่ผลิตออกมาเป็นเท่าใด เป้าหมายที่โรงงานอุตสาหกรรมต้องการก็คือ จะต้องวางแผนในการผลิตสินค้าว่าควรจะผลิตแต่ละชนิดเป็นปริมาณเท่าใดจึงจะได้กำไรมากที่สุด แต่ให้ได้คุณสมบัติตรงตามข้อกำหนดของคุณภาพสินค้านั้น

สมมติว่าโรงงานมีจำนวนทรัพยากร จำนวนสินค้า และเงื่อนไขเกี่ยวกับการผลิตดังต่อไปนี้

m = จำนวนทรัพยากร

n = จำนวนสินค้าที่จะผลิต

a_{ij} = จำนวนหน่วยของทรัพยากร i ที่จะใช้ในการผลิตสินค้า j หนึ่งหน่วย

b_i = จำนวนหน่วยทรัพยากร i ที่มีอยู่ขณะนี้

c_j = กำไรต่อหน่วยของสินค้า j ที่ผลิตออกมา

x_j = ระดับของกิจกรรม (จำนวนที่จะผลิต) ทำสินค้า j

ตัวแบบของโปรแกรมจะกำหนดได้ดังนี้

ค่าสูงสุดของ P

$$= c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

โดยมีข้อจำกัด

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leqslant b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leqslant b_2 \\
&\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leqslant b_m
\end{aligned}
$$

และ $x_j\ (j = 1, 2, \dots, n) \geqslant 0$

เพื่อความเข้าใจในปัญหาประเภทนี้ ให้เราศึกษาจากตัวอย่างที่จะพบเห็นได้ใกล้ ๆ ตัวเรา

ตัวอย่าง 1.1

ร้านผลิตเครื่องเฟอร์นิเจอร์แห่งหนึ่ง มีไม้ที่จะใช้ทำโต๊ะและเก้าอี้ 2 ประเภท ไม้ประเภทที่ 1 มีอยู่ 600 แผ่น-ฟุต ไม้ประเภทที่ 2 มีอยู่ 660 แผ่น-ฟุต และมีแรงงานทั้งหมด 675 คน-ชั่วโมง

รายละเอียดเกี่ยวกับการผลิตมีดังนี้

	โต๊ะ 1 ตัว	เก้าอี้ 1 ตัว
ไม้ประเภทที่ 1 (แผ่น-ฟุต)	20	5
ไม้ประเภทที่ 2 (แผ่น-ฟุต)	20	8
แรงงาน (คน-ชั่วโมง)	15	10

ในการจำหน่ายเขาขายโต๊ะได้กำไรตัวละ 600 บาท และขายเก้าอี้ได้กำไรตัวละ 320 บาท เจ้าของร้านต้องการวางแผนในการผลิตเพื่อที่จะทำให้จำหน่ายแล้วได้กำไรมากที่สุด จงสร้างตัวแบบของปัญหานี้

วิธีทำ

กำหนดว่าเจ้าของร้านผลิตโต๊ะ = x_1 ตัว

และผลิตเก้าอี้ = x_2 ตัว

ดังนั้น กำไรที่จะได้จากการขาย = $600x_1 + 320x_2$ บาท

ผลิตโต๊ะ 1 ตัวใช้ไม้ประเภทที่ 1 20 แผ่น-ฟุต ดังนั้นในการผลิตโต๊ะ x_1 ตัวจึงต้องใช้ไม้ประเภทที่ 1 เท่ากับ $20x_1$ แผ่น-ฟุต การผลิตเก้าอี้ 1 ตัวใช้ไม้ประเภทที่ 1 5 แผ่น-ฟุต ดังนั้นในการผลิตเก้าอี้ x_2 ตัวจึงต้องใช้ไม้ประเภทที่ 1 เท่ากับ $5x_2$ แผ่น-ฟุต รวมจำนวนไม้ประเภทที่ 1 ที่จะต้องใช้ในการผลิตครั้งนี้เท่ากับ $20x_1 + 5x_2$ แผ่น-ฟุต ซึ่งจำนวนนี้จะต้องไม่เกินจำนวนไม้ที่มีอยู่คือ 600 แผ่น-ฟุต

นั่นก็คือ

$$20x_1 + 5x_2 \leqslant 600$$

ในทำนองเดียวกัน จำนวนไม้ประเภทที่ 2 ที่จะใช้ทำโต๊ะ เท่ากับ $20x_1$ แผ่น-ฟุต และใช้ทำเก้าอี้เท่ากับ $8x_2$ แผ่น-ฟุต รวมเป็นปริมาณไม้ที่จะต้องใช้ทั้งหมด เท่ากับ $20x_1 + 8x_2$ แผ่น-ฟุต ซึ่งจะต้องไม่เกินจำนวนที่มีอยู่คือ 660 แผ่น-ฟุต นั่นก็คือ

$$20x_1 + 8x_2 \leqslant 660$$

ทางด้านแรงงาน ต้องใช้แรงงานในการทำโต๊ะ x_1 ตัวเท่ากับ $15x_1$ คน-ชั่วโมง และใช้แรงงานในการทำเก้าอี้ x_2 ตัวเท่ากับ $10x_2$ คน-ชั่วโมง รวมเป็นปริมาณแรงงานที่จะต้องใช้ทั้งสิ้น เท่ากับ $15x_1 + 10x_2$ คน-ชั่วโมง ซึ่งจะต้องไม่เกินแรงงานที่มีอยู่ 675 คน-ชั่วโมง นั่นก็คือ

$$15x_1 + 10x_2 \leqslant 675$$

ในการตัดสินใจผลิต อาจจะผลิตทั้งโต๊ะและเก้าอี้ หรือผลิตเพียงประเภทใดประเภทหนึ่งเพียงอย่างเดียวก็ได้ นั่นคือจำนวนโต๊ะและเก้าอี้จะต้องมากกว่าหรือเท่ากับ 0

จะเห็นว่าโปรแกรมของปัญหานี้สร้างเป็นตัวแบบปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นได้ดังนี้

ค่าสูงสุดของ P

$$= 600x_1 + 320x_2$$

โดยมีข้อจำกัด

$$\begin{aligned} 20x_1 + 5x_2 &\leqslant 600 \\ 20x_1 + 8x_2 &\leqslant 660 \\ 15x_1 + 10x_2 &\leqslant 675 \end{aligned}$$

และ $x_1 \geqslant 0$

$x_2 \geqslant 0$

ตัวอย่างที่ 1.2

ร้านขายขนมปังแห่งหนึ่งมีขนมที่ต้องทำเป็นประจำทุกวันคือ ขนมปัง เค็ก คุกกี้และขนมปุยฝ้าย เจ้าของร้านต้องการพิจารณาว่าจะทำขนมแต่ละชนิดเป็นปริมาณเท่าใดจึงจะได้กำไรมากที่สุด รายละเอียดเกี่ยวกับการทำขนมแต่ละชนิดกำหนดไว้ในตารางต่อไปนี้ (รายละเอียดปลีกย่อยบางอย่างเช่น เกลือ น้ำ ฯลฯ ตลอดจนเวลาในการทำ ไม่นำมาพิจารณา)

	ขนมปัง	เค็ก	คุกกี้	ปุยฝ้าย	ปริมาณที่มี
แป้ง (ถ้วย)	10	3	$\frac{3}{2}$	2	50
น้ำตาล (ถ้วย)	1	$1\frac{1}{2}$	1	1	40
นมสด (ถ้วย)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	–	$\frac{1}{3}$	30
เนยสด (ถ้วย)	$\frac{3}{4}$	1	1	–	40
ไข่ไก่ (ฟอง)	2	5	1	2	40
ผงฟู (ช้อนชา)	–	3	–	1	25
กำไร (บาท)	20	10	5	5	

จงสร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นของปัญหานี้

วิธีทำ

กำหนด x_1, x_2, x_3 และ x_4 เป็นปริมาณขนมปัง เค็ก คุกกี้และขนมปุยฝ้ายที่จะทำตามลำดับ ดังนั้น

กำไรที่ได้ $P = 20x_1 + 10x_2 + 5x_3 + 5x_4$

ปริมาณส่วนประกอบต่าง ๆ ที่ใช้ในการทำขนมแสดงให้เห็นได้ดังตารางต่อไปนี้

	ขนมปัง	เค็ก	คุกกี้	ปุยฝ้าย
แป้ง (ถ้วย)	$10x_1$	$3x_2$	$\frac{3}{2}x_3$	$2x_4$
น้ำตาล (ถ้วย)	x_1	$\frac{3}{2}x_2$	x_3	x_4
นมสด (ถ้วย)	$\frac{1}{2}x_1$	$\frac{1}{2}x_2$	—	$\frac{1}{3}x_4$
เนยสด (ถ้วย)	$\frac{3}{4}x_1$	x_2	x_3	—
ไข่ไก่ (ฟอง)	$2x_1$	$5x_2$	x_3	$2x_4$
ผงฟู (ช้อนชา)	—	$3x_2$	—	x_4

รวมเป็นปริมาณแป้งที่ใช้ $= 10x_1 + 3x_2 + \frac{3}{2}x_3 + 2x_4$ ถ้วย ซึ่งจะต้องไม่เกินปริมาณแป้งที่มีอยู่ 50

นั่นคือ $\quad 10x_1 + 3x_2 + \frac{3}{2}x_3 + 2x_4 \leq 50$

ปริมาณน้ำตาลที่ใช้ $= x_1 + \frac{3}{2}x_2 + x_3 + x_4$ ถ้วย ซึ่งจะต้องไม่เกินปริมาณที่มีอยู่ 40

นั่นก็คือ $\quad x_1 + \frac{3}{2}x_2 + x_3 + x_4 \leq 40$

ปริมาณนมสดที่ใช้ทั้งหมด $= \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_4$ ถ้วย ซึ่งจะต้องไม่เกินปริมาณนมสดที่มีอยู่ 30

นั่นก็คือ $\quad \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_4 \leq 30$

ในทำนองเดียวกัน เราจะได้

$$\frac{3}{4}x_1 + x_2 + x_3 \leq 40$$

$$2x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 40$$

$$3x_2 + x_4 \leq 25$$

ปริมาณขนมปัง เค็ก คุกกี้และปุยฝ้ายอาจจะมีหรือไม่มีก็ได้ นั่นก็คือ x_1, x_2, x_3, x_4 จะต้องมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0

โปรแกรมนี้เขียนเป็นตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น

ค่าสูงสุดของ P

$$= 20x_1 + 10x_2 + 5x_3 + 5x_4$$

โดยมีข้อจำกัด

$$\begin{array}{rcl}
10x_1 + 3x_2 + \frac{3}{2}x_3 + 2x_4 & \leqslant & 50 \\
x_1 + \frac{3}{2}x_2 + x_3 + 2x_4 & \leqslant & 40 \\
\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \qquad + \frac{1}{3}x_4 & \leqslant & 30 \\
\frac{3}{4}x_1 + x_2 + x_3 \qquad & \leqslant & 40 \\
2x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 & \leqslant & 40 \\
3x_2 \qquad + x_4 & \leqslant & 25
\end{array}$$

และ $x_j\ (j = 1, 2, 3, 4) \geqslant 0$

(หมายเหตุ ปัญหาในชีวิตจริงจะมีข้อจำกัดเกี่ยวกับการจำหน่าย เวลาที่ใช้ในการทำขนมแต่ละชนิด ฯลฯ)

1.3.2 ปัญหาทางด้านโภชนาการ

ปัญหาที่เกี่ยวกับการนำวัตถุดิบต่าง ๆ มาประกอบเป็นยา หรือมาประกอบเป็นอาหาร เพื่อให้มีประโยชน์ครบถ้วนตามหมอสั่ง โดยให้เสียค่าใช้จ่ายต่ำที่สุด ปัญหานี้ใช้ทั่วไปในเรื่องการผลิตอาหารเสริมของเด็ก การผลิตอาหารสัตว์ ฯลฯ ลักษณะของปัญหานี้ก็คือเราจะพิจารณาเลือกซื้ออาหาร (วัตถุดิบ) ประเภทใดบ้าง เป็นปริมาณเท่าใด เพื่อนำมาประกอบเป็นอาหารที่มีคุณค่าทางด้านโภชนาการตามความต้องการต่ำสุด โดยให้เสียค่าใช้จ่ายในการซื้อหรือการประกอบอาหารต่ำที่สุด ทั้งนี้เราทราบดีว่าในอาหาร (วัตถุดิบ) แต่ละประเภทมีประโยชน์หรือให้คุณค่าทางด้านโภชนาการอย่างไร ขนาดใดบ้าง จากปัญหานี้เรากำหนด

m = จำนวนคุณค่าของอาหาร (ส่วนประกอบ)

n = จำนวนอาหาร (วัตถุดิบ)

a_{ij} = จำนวนหน่วยของส่วนประกอบ i ในหนึ่งหน่วยของอาหาร j

b_i = จำนวนหน่วยต่ำสุดของส่วนประกอบ i ที่ต้องการ

c_j = ค่าใช้จ่ายหรือราคาอาหาร j ต่อหน่วย

x_j = จำนวนหน่วยของอาหาร j ที่จะซื้อ

ดังนั้น จำนวนส่วนประกอบ i ทั้งหมดที่จะได้จากอาหารที่ซื้อมา จะเท่ากับ

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n$

ซึ่งจำนวนนี้จะต้องมีคุณค่า (ส่วนประกอบ) ต่ำสุดตามที่ระบุไว้คือ b_i เราจะต้องหาค่าของ x_j ที่จะทำให้ฟังก์ชันของค่าใช้จ่าย P

$= c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

มีค่าต่ำที่สุด

ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นของปัญหานี้ จะกำหนดได้โดย

ค่าต่ำสุดของ P

$$= c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

โดยมีข้อจำกัด

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\geqslant b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\geqslant b_2 \\
\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\geqslant b_m
\end{aligned}$$

และ $x_j \; (j = 1, 2, \ldots, n) \geqslant 0$

ตัวอย่างที่ 1.3

แม่ต้องการเลือกอาหารเสริมให้กับลูก ระหว่างอาหาร 2 ชนิด ว่าควรจะเลือกชนิดใดหรือจะต้องใช้ทั้ง 2 ชนิดรวมกัน ในอาหารเสริมแต่ละชนิดมีคุณค่าของอาหาร (ส่วนประกอบ) ในแต่ละออนซ์ ดังนี้

	ไทอามิน (มิลลิกรัม)	ไนอาซิน (มิลลิกรัม)	พลังงาน (แคลอรี)
อาหารชนิดที่ 1	0.10	1.00	100
อาหารชนิดที่ 2	0.25	0.25	120

ในอาหารแต่ละมื้อ แม่ต้องการให้ลูกได้รับไทอามินอย่างน้อยที่สุด 1 มิลลิกรัม ได้รับไนอาซินอย่างน้อยที่สุด 5 มิลลิกรัม และได้พลังงานอย่างน้อยที่สุด 600 แคลอรี ถ้าอาหารชนิดที่ 1 ราคาออนซ์ละ 7.50 อาหารชนิดที่ 2 ราคาออนซ์ละ 8.50 บาท แม่ควรจะตัดสินใจซื้ออาหารอย่างไร

จึงจะทำให้ลูกได้รับคุณค่าของอาหารตามที่ต้องการ โดยที่แม่เสียค่าใช้จ่ายต่ำสุด จงสร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น

วิธีทำ

กำหนดว่าแม่ซื้ออาหารชนิดที่ 1 มา x_1 ออนซ์ และซื้ออาหารชนิดที่ 2 x_2 ออนซ์ ดังนั้น ค่าใช้จ่ายในการซื้ออาหารทั้งสองชนิด = $7.50x_1 + 8.50x_2$ บาท อาหารชนิดที่ 1 x_1 ออนซ์จะให้ไทอามิน $0.10x_1$ มิลลิกรัม และอาหารชนิดที่ 2 x_2 ออนซ์จะให้ไทอามิน $0.25x_2$ มิลลิกรัม รวมจำนวนไทอามินที่ได้อย่างน้อยที่สุดต้องเท่ากับ 1 มิลลิกรัม นั่นคือ

$$0.10x_1 + 0.25x_2 \geqslant 1$$

จำนวนไนอาซินที่ได้จากอาหารชนิดที่ 1 x_1 ออนซ์เท่ากับ x_1 มิลลิกรัม และได้จากอาหารชนิดที่ 2 x_2 ออนซ์เท่ากับ $0.25x_2$ มิลลิกรัม รวมทั้งหมดต้องได้อย่างน้อยที่สุด 5 มิลลิกรัม นั่นคือ

$$x_1 + 0.25x_2 \geqslant 5$$

ในทำนองเดียวกันอาหารทั้งสองชนิดให้พลังงานรวมกันแล้วเท่ากับ $100x_1 + 120x_2$ แคลอรี ซึ่งจะต้องมากกว่าหรือเท่ากับ 600 แคลอรี นั่นคือ

$$100x_1 + 120x_2 \geqslant 600$$

แม่อาจจะซื้ออาหารชนิดใดชนิดหนึ่งหรือทั้งสองชนิดรวมกันก็ได้ นั่นก็คือ $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$ ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นของปัญหานี้ กำหนดได้ดังนี้

ค่าต่ำสุดของ P

$$= 7.50x_1 + 8.50x_2$$

โดยมีข้อจำกัด

$$\begin{aligned} 0.10x_1 + 0.25x_2 &\geqslant 1 \\ x_1 + 0.25x_2 &\geqslant 5 \\ 100x_1 + 120x_2 &\geqslant 600 \\ \text{และ} \quad x_1, x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1.4

หมอสั่งควบคุมอาหารที่มีวิตามินเอ บี และดี แก่คนไข้ โดยกำหนดว่าในแต่ละวันคนไข้จะต้องได้รับวิตามินเอ อย่างน้อยที่สุด 1 มิลลิกรัม ได้รับวิตามินบีอย่างน้อยที่สุด 50 มิลลิกรัม

และวิตามินดีอย่างน้อยที่สุด 10 มิลลิกรัม ถ้าคนไข้เลือกอาหารพวกเนื้อ นมและไข่ ซึ่งมีส่วนประกอบของวิตามินต่าง ๆ ดังตาราง

	เนื้อ (100 กรัม)	นม (ลิตร)	ไข่ (ฟอง)
วิตามิน เอ	0.2	0.2	0.8
วิตามิน บี	2.2	25	0.8
วิตามิน ดี	20.5	2.5	0.8

ถ้าเนื้อราคากิโลกรัมละ 60 บาท นมลิตรละ 20 บาท และไข่ราคาโหลละ 18 บาท จงสร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น กำหนดว่าคนไข้ได้รับวิตามินต่าง ๆ ตามหมอสั่ง แต่ให้เสียค่าใช้จ่ายในการซื้ออาหารต่ำที่สุด

วิธีทำ

กำหนดว่าซื้อเนื้อมา x_1 ร้อยกรัม ซื้อนม x_2 ลิตร และซื้อไข่ x_3 ฟอง เนื้อกิโลกรัมละ 60 บาท ดังนั้นเนื้อ x_1 ร้อยกรัมราคา $6x_1$ บาท นม x_2 ลิตรราคา $20x_2$ บาท ไข่โหลละ 18 บาท ดังนั้นไข่ x_3 ฟองราคา $1.5x_3$ บาท รวมเป็นค่าใช้จ่ายทั้งสิ้น

$$6x_1 + 20x_2 + 1.5x_3 \text{ บาท}$$

คนไข้ได้รับวิตามินเอจากเนื้อ $0.2x_1$ ได้จากนม $0.2x_2$ และได้จากไข่ $0.8x_3$ มิลลิกรัม รวมจำนวนวิตามินเอทั้งหมดที่จะได้ เท่ากับ $0.2x_1 + 0.2x_2 + 0.8x_3$ มิลลิกรัม ซึ่งมีค่าอย่างน้อยที่สุด 1 มิลลิกรัม นั่นก็คือ

$$0.2x_1 + 0.2x_2 + 0.8x_3 \geq 1$$

จำนวนวิตามินบีที่ได้รับจากเนื้อ $2.2x_1$ ได้รับจากนม $25x_2$ และได้รับจากไข่ $0.8x_3$ มิลลิกรัม รวมทั้งสิ้นจะต้องได้อย่างน้อยที่สุด 50 มิลลิกรัม นั่นก็คือ

$$2.2x_1 + 25x_2 + 0.8x_3 \geq 50$$

วิตามินดีได้จากเนื้อ $20.5x_1$ ได้จากนม $2.5x_2$ และได้จากไข่ $0.8x_3$ มิลลิกรัม รวมกันแล้วจะต้องได้อย่างน้อยที่สุด 10 มิลลิกรัม นั่นก็คือ

$$20.5x_1 + 2.5x_2 + 0.8x_3 \geq 10$$

ในการตัดสินใจซื้อ อาจจะซื้อเพียงอย่างใดอย่างหนึ่ง หรือซื้ออย่างน้อยที่สุด 2 ชนิด นั่นก็คือ

$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$ และ $x_3 \geqslant 0$

เขียนเป็นตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นได้ดังนี้

หาค่าต่ำสุดของ P

$$= 6x_1 + 20x_2 + 1.5x_3$$

โดยมีข้อจำกัด

$$0.2x_1 + 0.2x_2 + 0.8x_3 \geqslant 1$$

$$2.2x_1 + 25x_2 + 0.8x_3 \geqslant 50$$

$$20.5x_1 + 2.5x_2 + 0.8x_3 \geqslant 10$$

และ $x_j\ (j = 1, 2, 3) \geqslant 0$

1.3.3 ปัญหาการขนส่ง

ปัญหาเกี่ยวกับการส่งสินค้าหรือผลิตภัณฑ์จากที่แห่งหนึ่งไปยังอีกแห่งหนึ่ง เช่นส่งจากโรงงานไปเก็บที่คลังสินค้า หรือส่งไปยังตลาดต่าง ๆ ฯลฯ รวมไปถึงการตัดสินใจหรือวางแผนว่าช่วงใดจะผลิตสินค้าชนิดใด อย่างไร ให้เพียงพอกับจำนวนอุปสงค์ โดยมีเป้าหมายของการขนส่งหรือการผลิตว่าจะต้องให้ค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด ตัวอย่างของปัญหาประเภทนี้คือ

บริษัทฝ่ายผลิตต้องการส่งสินค้าจากคลังสินค้าซึ่งมีจำนวน m แห่ง ไปยังตลาดหรือศูนย์การค้าในเขตต่าง ๆ จำนวน n เขต ตลาดหรือศูนย์การค้าในเขต j ต้องการสินค้าเป็นจำนวน b_j หน่วย จำนวนสินค้าที่มีอยู่ในคลังสินค้า i เท่ากับ a_i หน่วย ผลรวมของจำนวนสินค้าที่มีอยู่ในคลังสินค้าทุกเขต อาจจะเท่ากับหรือไม่เท่ากับ ผลรวมของจำนวนสินค้าที่ตลาดหรือศูนย์การค้าทุกแห่งต้องการก็ได้ บริษัทรู้ว่าอัตราค่าขนส่งจากคลังสินค้า i ไปยังตลาด j เท่ากับ c_{ij} และบริษัทจัดส่งสินค้า x_{ij} หน่วยจากคลังสินค้า i ไปยังตลาด j ปัญหาก็คือ x_{ij} ควรจะมีค่าเท่าใดจึงจะทำให้เสียค่าใช้จ่ายในการขนส่งทั้งหมดน้อยที่สุด สมมติว่าผลรวมของจำนวนสินค้าที่จะส่งเท่ากับผลรวมของจำนวนสินค้าที่ต้องการ กล่าวคือ

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

เราเรียกปัญหาประเภทนี้ว่า ปัญหาการขนส่งสมดุลย์ สร้างเป็นตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นได้ดังนี้

หาค่าต่ำสุดของ P

$$= c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{mn}x_{mn}$$

โดยมีข้อจำกัด

$$x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1$$

$$x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m$$

$$x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1$$

$$x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n$$

และ $x_{ij}\ (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n) \geqslant 0$

กรณีปัญหาการขนส่งไม่สมดุลย์ ตัวอย่างกรณีที่ผลรวมของจำนวนสินค้าที่จะส่ง มากกว่าผลรวมของจำนวนสินค้าที่ต้องการรับ กล่าวคือ

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \geqslant \sum_{j=1}^{n} b_j$$

ข้อจำกัดจะกำหนดได้ดังนี้

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

ตัวอย่างที่ 1.5

บริษัทซีมมีโรงงานผลิตสินค้าอยู่ที่เขต ก และเขต ข โรงงานในแต่ละเขตสามารถผลิตสินค้าได้สัปดาห์ละ 8,000 และ 12,000 หน่วย ตามลำดับ บริษัทมีที่เก็บสินค้าอยู่ที่เขตเอ เขตบีและเขตซี ตามลำดับ ที่เก็บในแต่ละเขตสามารถเก็บสินค้าได้ 6,000 7,000 และ 7,000 หน่วย ตามลำดับ บริษัทต้องการส่งสินค้าที่ผลิตได้ทั้งหมดในแต่ละสัปดาห์ไปเก็บไว้ที่คลังสินค้าเหล่านี้ โดยให้เสียค่าใช้จ่ายในการขนส่งทั้งหมดต่ำที่สุด ค่าขนส่งสินค้าขึ้นอยู่กับน้ำหนักและระยะทางในการขนส่งกำหนดในอัตราบาทต่อหน่วยดังนี้

โรงงาน \ คลังสินค้า	เขตเอ	เขตบี	เขตซี
เขต n	3	5	2
เขต ข	4	1	6

จงสร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น

วิธีทำ

กำหนดว่าบริษัทส่งสินค้าจากโรงงาน ก ไปยังคลังเอ x_{11} หน่วย ไปยังคลังบี x_{12} หน่วย และส่งไปยังคลังซี x_{13} หน่วย รวมจำนวนที่โรงงาน ก ส่งไปนี้ต้องเท่ากับจำนวนที่โรงงานสามารถผลิตได้ นั่นคือ

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 8,000$$

ให้บริษัทส่งสินค้าจากโรงงาน ข ไปยังคลังเอ x_{21} หน่วย ไปยังคลังบี x_{22} หน่วย และส่งไปยังคลังซี x_{23} หน่วย รวมจำนวนที่โรงงานส่งไปทั้งหมดต้องเท่ากับจำนวนที่โรงงาน ข ผลิตได้ นั่นคือ

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 12,000$$

คลังเอได้รับสินค้าจากโรงงาน ก x_{11} หน่วย และได้จากโรงงาน ข x_{21} หน่วย รวมกันแล้วต้องเท่ากับจำนวนที่คลัง เอ สามารถเก็บไว้ได้ นั่นคือ

$$x_{11} + x_{21} = 6,000$$

คลังบีได้รับสินค้าจากโรงงาน ก x_{12} หน่วย ได้จากโรงงาน ข x_{22} หน่วย รวมกันแล้วจะต้องเท่ากับจำนวนที่คลังสินค้าบีสามารถเก็บไว้ได้ นั่นคือ

$$x_{12} + x_{22} = 7,000$$

คลังซีได้รับสินค้าจากโรงงาน ก x_{13} หน่วย ได้รับจากโรงงาน ข x_{23} หน่วย รวมกันแล้วจะต้องเท่ากับจำนวนที่คลังซีสามารถเก็บไว้ได้ นั่นคือ

$$x_{13} + x_{23} = 7,000$$

จำนวนสินค้าที่บริษัทกำหนดไว้นี้อาจมีจริง (> 0) หรือไม่มีจริง ($= 0$) ก็ได้ นั่นคือ

$$x_{ij}\ (i = 1, 2;\ j = 1, 2, 3) \geqslant 0$$

บริษัทต้องเสียค่าใช้จ่ายในการขนส่งดังกล่าว ดังนี้

ค่าใช้จ่ายในการส่งสินค้าจาก ก ไปยัง เอ x_{11} หน่วย เท่ากับ $3x_{11}$ บาท

ค่าใช้จ่ายในการส่งสินค้าจาก ก ไปยัง บี x_{12} หน่วย เท่ากับ $5x_{12}$ บาท
ค่าใช้จ่ายในการส่งสินค้าจาก ก ไปยัง ซี x_{13} หน่วย เท่ากับ $2x_{13}$ บาท
ค่าใช้จ่ายในการส่งสินค้าจาก ข ไปยัง เอ x_{21} หน่วย เท่ากับ $4x_{21}$ บาท
ค่าใช้จ่ายในการส่งสินค้าจาก ข ไปยัง บี x_{22} หน่วย เท่ากับ x_{22} บาท
ค่าใช้จ่ายในการส่งสินค้าจาก ข ไปยัง ซี x_{23} หน่วย เท่ากับ $6x_{23}$ บาท

รวมเป็นจำนวนค่าใช้จ่ายในการขนส่งทั้งหมด $= 3x_{11} + 5x_{12} + 2x_{13} + 4x_{21} + x_{22} + 6x_{23}$ บาท สร้างเป็นตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นได้ดังนี้

หาค่าต่ำสุดของ P

$$= 3x_{11} + 5x_{12} + 2x_{13} + 4x_{21} + x_{22} + 6x_{23}$$

โดยมีข้อจำกัด

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 8{,}000$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 12{,}000$$
$$x_{11} + x_{21} = 6{,}000$$
$$x_{12} + x_{22} = 7{,}000$$
$$x_{13} + x_{23} = 7{,}000$$

และ $x_{ij}\ (i = 1\ 2;\ \ j = 1, 2, 3) \geqslant 0$

ตัวอย่างที่ 1.6

บริษัทที่มีวางแผนในการจัดส่งสินค้าซึ่งเก็บไว้ที่คลังสินค้า ก ข และ ค ไปจำหน่ายที่เขตการค้า เอ บี ซี และ ดี โดยที่บริษัททราบดีว่าอุปสงค์ของสินค้าในเขตการค้าแต่ละเขตเป็นอย่างไร บริษัทต้องการส่งสินค้าไปจำหน่ายให้เพียงพอกับจำนวนอุปสงค์ของสินค้าในแต่ละเขต และให้บริษัทเสียค่าใช้จ่ายในการขนส่งครั้งนี้น้อยที่สุด ถ้าอัตราค่าขนส่ง (บาทต่อกล่อง) จำนวนสินค้าที่มีอยู่ในคลังสินค้า และจำนวนอุปสงค์ของสินค้าในแต่ละเขตการค้า กำหนดไว้ดังตาราง ต่อไปนี้

ค่าขนส่ง (บาทต่อกล่อง)

คลังสินค้า	เขตการค้า				จำนวนที่มีอยู่ (กล่อง)
	เอ	บี	ซี	ดี	
ก	8	7	9	4	800
ข	10	6	12	15	900
ค	13	14	5	9	600
อุปสงค์ (กล่อง)	550	600	650	480	

จงสร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น

วิธีทำ

กำหนดจำนวนสินค้าที่บริษัทจัดส่งจากคลังสินค้าแต่ละแห่ง ไปยังเขตการค้าแต่ละเขต ดังตารางต่อไปนี้

เขตการค้า / คลังสินค้า	เอ	บี	ซี	ดี	ผลรวมของจำนวนสินค้าที่ส่ง (กล่อง)
ก	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14}$
ข	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24}$
ค	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34}$

ผลรวมของจำนวนสินค้าที่คลังสินค้าแต่ละแห่งส่งไปจะต้องไม่เกินจำนวนที่คลังสินค้านั้น ๆ มีอยู่ ตัวอย่างเช่น

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leqslant 800$$

ผลรวมของจำนวนสินค้าที่เขตการค้าแต่ละเขตได้รับต้องเท่ากับจำนวนอุปสงค์ของสินค้าในเขตนั้น ตัวอย่างเช่น

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 550$$

ค่าใช้จ่ายในการขนส่งรวมทั้งหมดจะเท่ากับ $8x_{11} + 7x_{12} + 9x_{13} + 4x_{14} + 10x_{21} + 6x_{22} + 12x_{23} + 15x_{24} + 13x_{31} + 14x_{32} + 5x_{33} + 9x_{34}$

ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นกำหนดได้ดังนี้

หาค่าต่ำสุดของ P

$$= 8x_{11} + 7x_{12} + 9x_{13} + 4x_{14} + 10x_{21} + 6x_{22} + 12x_{23} + 15x_{24} + 13x_{31} + 14x_{32} + 5x_{33} + 9x_{34}$$

โดยมีข้อจำกัด

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leqslant 800$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leqslant 900$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leqslant 600$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 550$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 600$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 650$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 480$$

และ $x_{ij}\ (i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3, 4) \geqslant 0$

จะเห็นว่าการสร้างตัวแบบของแต่ละปัญหา สิ่งสำคัญที่สุดก็คือการกำหนดตัวแปรที่จะใช้ในการตัดสินใจซึ่งจัดเป็นตัวแปรที่ควบคุมได้ การกำหนดตัวแปรเหล่านี้จะต้องชัดเจนจึงจะสามารถสร้างตัวแบบได้

นอกจากปัญหาที่กล่าวมาแล้วข้างต้น เรายังมีปัญหาต่าง ๆ อีกมากมายที่จัดเป็นปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น ซึ่งไม่ได้กล่าวไว้ ณ ที่นี้ แต่นักศึกษาสามารถค้นเพิ่มเติมได้จากหนังสืออ้างอิงท้ายเล่ม

1.4 การใช้กราฟในปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น

ในปัญหาที่มีตัวแปรที่ใช้ในการตัดสินใจหรือตัวแปรที่ควบคุมได้ไม่เกิน 2 ตัว สามารถใช้กราฟแสดงขอบเขตของการใช้ทรัพยากรต่าง ๆ ได้ จากกราฟจะมองเห็นได้อย่างชัดเจนว่าจุดอุตมะอยู่ที่ใด การหาคำตอบที่ได้จากกราฟอาจแสดงได้ดังนี้คือ เรากำหนดแกนนอนแสดงถึง x_1 จำนวนต่าง ๆ แกนตั้งแสดงถึง x_2 จำนวนต่าง ๆ ในเมื่อ x_1 และ x_2 แสดงถึงจำนวนที่มีความหมายแท้จริงค่าของมันจะต้องไม่เป็นลบ นั่นก็คือ เราสนใจค่าของ x_1 และ x_2 ที่อยู่ในส่วนที่ 1 เท่านั้น

การเขียนกราฟของข้อจำกัด ที่กำหนดจำนวนทรัพยากรที่มีอยู่ เช่นตัวอย่างของข้อจำกัด

$$3x_1 + 5x_2 \leqslant 150$$
$$x_1 \geqslant 0$$
$$x_2 \geqslant 0$$

เพื่อความสะดวกในการเขียนกราฟ เราจะแยกพิจารณากราฟของข้อจำกัดเป็น 2 ส่วน คือส่วนที่เป็นอสมการ (น้อยกว่า) กับส่วนที่เป็นสมการ ดังนั้นคำตอบที่จะได้จากข้อจำกัดนี้จะเป็นจุดทุกจุดบนเส้นตรง

$$3x_1 + 5x_2 = 150$$

และจุดทุกจุดบนระนาบ

$$3x_1 + 5x_2 < 150$$

สมการ $3x_1 + 5x_2 = 150$ แสดงให้เห็นได้ด้วยกราฟเส้นตรงที่ลากเชื่อมต่อระหว่างจุด 2 จุดใด ๆ บนเส้นตรงนั้น ซึ่งจุดเหล่านี้หาได้จากการแก้สมการ ตัวอย่างเช่น

เมื่อเรากำหนด $x_1 = 0$ แล้วแก้สมการ จะได้ว่า

$$(3)(0) + 5x_2 = 150$$
$$x_2 = \frac{150}{5} = 30$$

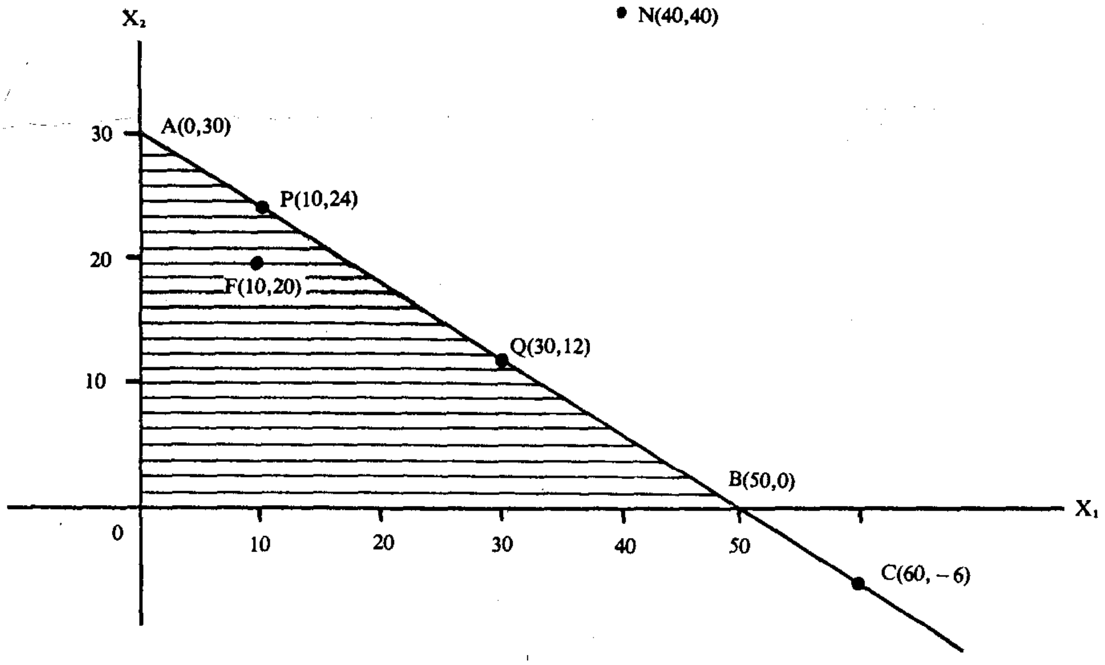
จุดของคำตอบนี้คือจุด A(0, 30)

เมื่อเรากำหนด $x_2 = 0$ แล้วแก้สมการ จะได้ว่า

$$3x_1 + (5)(0) = 150$$
$$x_1 = \frac{150}{3} = 50$$

จุดของคำตอบนี้คือจุด B(50, 0)

ลากเส้นตรง AB จะได้กราฟของข้อจำกัดดังรูป



จากรูป ค่าของ x_1 และ x_2 ที่ใช้ได้ คือทุกค่าที่อยู่บนเส้นรอบรูปและภายในรูปสามเหลี่ยม 0AB จุดทุกจุดบนเส้นตรง AB แสดงถึงค่าของ x_1 และ x_2 ที่ทำให้

$$3x_1 + 5x_2 = 150$$

นั่นก็คือ การนำทรัพยากรที่มีอยู่ไปใช้ทั้งหมด ตัวอย่างเช่น คำตอบที่จุด P(10, 24) และจุด Q(30, 12) เป็นต้น ถ้าเราเลือกคำตอบที่จุด P(10, 24) แสดงว่าเราเลือก $x_1 = 10$ และ $x_2 = 24$ จำนวนทรัพยากรที่นำไปใช้ จะเท่ากับ

$$(3)(10) + (5)(24) = 150$$

แสดงให้เห็นว่าทรัพยากรนี้ถูกนำไปใช้จนหมดพอดี

ถ้าคำตอบที่เราเลือกเป็นจุดภายในสามเหลี่ยม 0AB แสดงว่า ในการตัดสินใจของเราไม่ได้ใช้ทรัพยากรจนหมด ยังคงมีเหลืออยู่ นั่นก็คือ

$$3x_1 + 5x_2 < 150$$

ตัวอย่างเช่น จุดตัดสินใจของเราคือจุด F(10, 20) แสดงว่าเราเลือก x_1 10 หน่วย และเลือก x_2 20 หน่วย จำนวนทรัพยากรที่ถูกนำไปใช้จากการตัดสินใจครั้งนี้ จะเท่ากับ

$$(3)(10) + (5)(20) = 130$$

ซึ่งจะมีจำนวนทรัพยากรเหลืออยู่ เท่ากับ $150 - 130 = 20$

สำหรับจุดที่อยู่นอกรูปสามเหลี่ยม 0AB แสดงถึงคำตอบที่เป็นไปไม่ได้ ตัวอย่างเช่น C(60, −6) ให้ค่าของ x_1 และ x_2 ที่ไม่เกินจำนวนทรัพยากรที่มีอยู่ แต่ค่าของ x_2 เป็นลบซึ่งเป็นจำนวนที่ไม่มีความหมาย ขัดกับข้อกำหนดที่ว่า $x_i \geq 0$ หรือค่าของ x_1 และ x_2 ที่จุด N(40, 40) แม้ว่าจะเป็นค่าที่มีความหมายสอดคล้องข้อจำกัดว่า $x_1 \geq 0$ และ $x_2 \geq 0$ ก็จริง แต่ขัดกับข้อเท็จจริง กล่าวคือ เรามีจำนวนทรัพยากรที่จะนำไปใช้ได้เพียง 150 หน่วย เรากลับใช้ทรัพยากรถึง 3(40) + 5(40) = 320 ซึ่งเป็นไปไม่ได้ สรุปว่าคำตอบที่ถูกต้องแท้จริงจะอยู่ในส่วนที่กำหนดไว้เท่านั้น

การเขียนกราฟของข้อจำกัดที่กำหนดเกณฑ์ขั้นต่ำของการใช้ หรือกำหนดคุณสมบัติขั้นต่ำสุด เราใช้วิธีการเดียวกันคือ แยกข้อจำกัดเป็นรูปอสมการ (มากกว่า) กับรูปสมการ การเขียนกราฟเส้นตรงยังคงใช้วิธีการเดิม ต่างกันตรงที่ ระนาบซึ่งแสดงถึงส่วนของข้อจำกัดในรูปสมการจะอยู่เหนือเส้นตรง แทนที่จะอยู่ใต้เส้นตรง ตัวอย่างเช่น เรามีข้อจำกัดว่า

$$5x_1 + 4x_2 \geqslant 200$$

และ $$x_1, x_2 > 0$$

การเขียนกราฟเส้นตรงทำในวิธีการเดียวกัน กล่าวคือ

กำหนดให้ $x_1 = 0$ แล้วแก้สมการ จะได้ว่า

$$(5)(0) + 4x_2 = 200$$

$$x_2 = \frac{200}{4} = 50$$

ให้เป็นจุด A(0, 50)

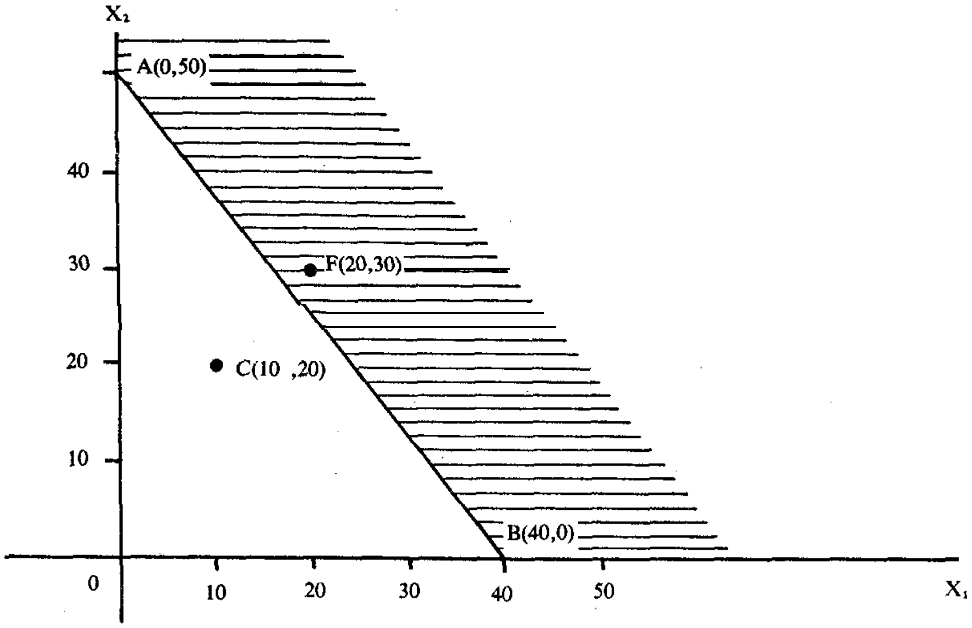
ต่อไป กำหนด $x_2 = 0$ แล้วแก้สมการ จะได้ว่า

$$5x_1 + (4)(0) = 200$$

$$x_1 = \frac{200}{5} = 40$$

ให้เป็นจุด B(40, 0)

ลากเส้นตรง AB จุดทุกจุดบนเส้นรอบรูป X_2ABX_1 และบนระนาบเหนือเส้น จะเป็นคำตอบของข้อจำกัดนี้



อ่านค่าและตีความหมายจากกราฟได้ดังนี้ จุดทุกจุดบนเส้นตรง AB แสดงถึงคำตอบที่เราเลือกโดยใช้ทรัพยากรตามเกณฑ์ต่ำสุด หรือมีคุณสมบัติตรงตามเกณฑ์กำหนดขั้นต่ำสุด นั่นก็คือ เป็นคำตอบของสมการ

$$5x_1 + 4x_2 = 200$$

สำหรับจุดที่อยู่บนระนาบ X_2ABX_1 แสดงถึงคำตอบที่เราเลือกโดยใช้ทรัพยากรเกินกำหนดขั้นต่ำ หรือมีคุณสมบัติเกินเกณฑ์กำหนดขั้นต่ำสุด เช่นจุด F(20, 30) แสดงให้เห็นว่า x_1 มีค่า 20 และ x_2 มีค่า 30 จำนวนทรัพยากรที่ถูกนำไปใช้ หรือคุณสมบัติที่มี จะเท่ากับ

$$(5)(20) + (4)(30) = 220$$

จำนวนทรัพยากรที่ใช้เกินกำหนดขั้นต่ำ หรือคุณสมบัติที่เกินเกณฑ์กำหนดขั้นต่ำสุด จะเท่ากับ

$$220 - 200 = 20$$

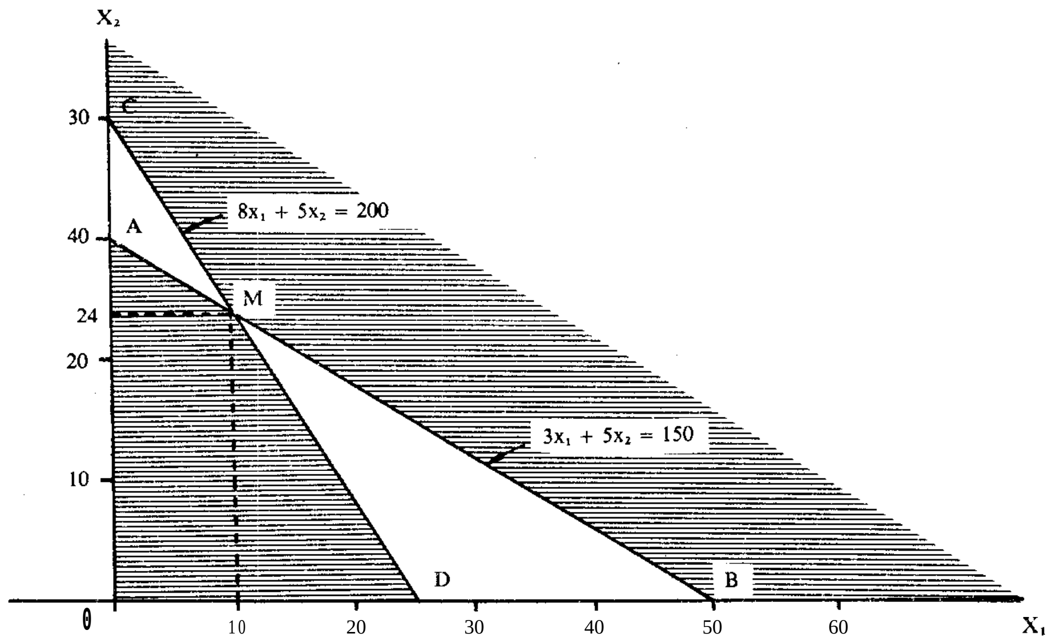
จุดทุกจุดบนระนาบดังกล่าว จะเป็นคำตอบของอสมการ

$$5x_1 + 4x_2 > 200$$

จุดที่อยู่นอกเหนือไปจากนี้ใช้ไม่ได้ เช่นจุด C(10, 20) แสดงให้เห็นว่าเมื่อ $x_1 = 10$ และ $x_2 = 20$ จำนวนทรัพยากรที่จะนำไปใช้รวมกันแล้วเท่ากับ $5 \times 10 + 4 \times 20 = 130$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

เนื่องจากข้อจำกัดกำหนดว่าจะต้องใช้ต่ำสุด 200 สรุปว่าคำตอบที่จะได้อยู่ในส่วนที่กำหนดไว้ข้างต้นเท่านั้น

เมื่อมีข้อจำกัดเกิน 1 การหาบริเวณร่วมกันของคำตอบ ทำได้โดยการลากเส้นตรงของสมการข้อจำกัดแต่ละข้อจำกัด แล้วหาบริเวณร่วมกันของทุก ๆ ข้อจำกัด ตัวอย่างเช่น



พื้นที่ 0AMD เป็นบริเวณร่วมกัน และเป็นเซทของจุดที่เป็นคำตอบภายใต้ข้อจำกัด

$$8x_1 + 5x_2 \leqslant 200$$

$$3x_1 + 5x_2 \leqslant 150$$

และ $x_1, \quad x_2 \geqslant 0$

พื้นที่ระนาบเหนือ X_2CMBX_1 เป็นบริเวณร่วมกัน และเป็นเซทของจุดที่เป็นคำตอบภายใต้ข้อจำกัด

$$8x_1 + 5x_2 \geqslant 200$$

$$3x_1 + 5x_2 \geqslant 150$$

และ $x_1, \quad x_2 \geqslant 0$

ไม่ว่าจะเป็นกรณีของข้อจำกัดแบบใดก็ตาม จุด M จะเป็นจุดตัดของสมการข้อจำกัดทั้งสอง ดังนั้นการหาค่าที่จุด M (หากไม่สามารถอ่านค่าได้โดยตรงจากกราฟ) จะได้จากการแก้สมการข้อจำกัดทั้งสอง

$$8x_1 + 5x_2 = 200 \qquad \text{..........(1)}$$

$$3x_1 + 5x_2 = 150 \qquad \text{..........(2)}$$

$$(1) - (2) \quad 5x_1 = 50$$

$$x_1 = \frac{50}{5} = 10$$

แทนค่า x_1 ใน (1) จะได้ว่า

$$(8)(10) + 5x_2 = 200$$

$$x_2 = \frac{200 - 80}{5} = 24$$

คำตอบที่จุด M ก็คือ $x_1 = 10$ และ $x_2 = 24$

การเขียนกราฟของฟังก์ชันเป้าหมาย หากเราทราบว่าพื้นที่หรือบริเวณคำตอบที่เป็นไปได้อยู่ที่ใด สิ่งที่จะต้องพิจารณาต่อไปก็คือ คำตอบที่ให้ค่าของฟังก์ชันสูงสุดหรือให้ค่าของฟังก์ชันต่ำสุดควรจะอยู่ที่จุดใด การหาคำตอบจากกราฟกระทำได้ โดยการลากเส้นตรงของฟังก์ชันเป้าหมายที่จะกำหนดในรูปเส้นตรงของสมการ

$$P = c_1x_1 + c_2x_2$$

คำนวณค่าของฟังก์ชันเป้าหมายจากจุดใดจุดหนึ่งบนเส้นตรงนั้น

จากสมการเส้นตรง เขียนเสียใหม่เป็น

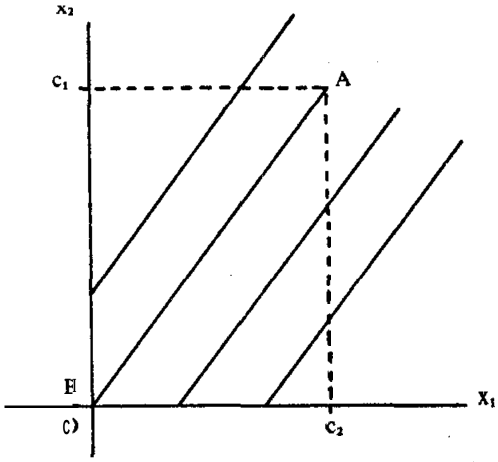
$$x_2 = \frac{P - c_1x_1}{c_2}$$

P เป็นค่าคงที่ซึ่งแสดงถึงค่าของฟังก์ชันเป้าหมาย ณ จุดต่าง ๆ ที่เป็นไปได้ เส้นตรงของฟังก์ชัน P ก็คือเส้นตรงที่มีความลาดชัน (slope) เท่ากับ

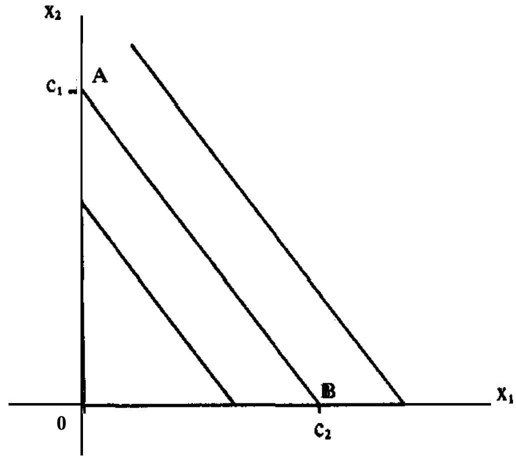
$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{c_1}{c_2}$$

แสดงให้เห็นได้ด้วยกราฟดังนี้

กรณีความชันเป็นบวก



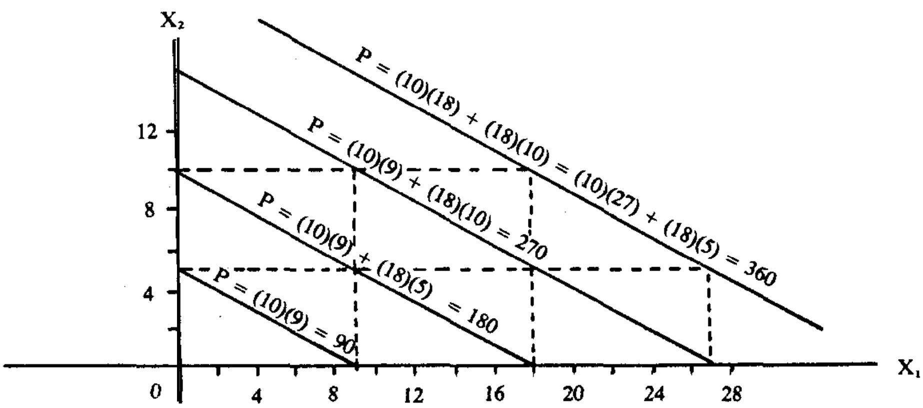
กรณีความชันเป็นลบ



เส้นตรง AB และเส้นตรงทุกเส้นที่ลากขนานกับ AB จะเป็นกราฟของฟังก์ชันเป้าหมาย P

การหาค่าของ P เราจะคำนวณได้จากจุดใดจุดหนึ่งบนเส้นตรงแต่ละเส้น ค่าของ P ที่คำนวณจากทุกจุดบนเส้นตรงเดียวกันจะเป็นค่าของฟังก์ชันเป้าหมายเดียวกัน ถ้ามาจากจุดต่างเส้นกันก็จะได้ค่าฟังก์ชันเป้าหมายต่างกัน ดังตัวอย่างการหาค่าฟังก์ชันเป้าหมาย P

$$= 10x_1 + 18x_2$$



จะเห็นว่า เมื่อเส้นตรง P เคลื่อนที่ห่างจากจุด 0 ค่าของ P จะสูงขึ้น และเมื่อเส้นตรง P เคลื่อนที่เข้าใกล้จุด 0 จะพบว่าค่าของ P ลดลง แสดงให้เห็นว่า หากเราต้องการค่า P สูงสุด เราต้องเลื่อนเส้นตรงนี้ (ในแนวขนานกัน) ออกไป ให้ไกลที่สุดเท่าที่จะทำได้ ในทางตรงข้าม หากเราต้องการค่า P ต่ำสุด เราต้องเลื่อนเส้นตรงนี้ (ในแนวขนานกัน) ให้ลงต่ำที่สุดเท่าที่จะทำได้ เพื่อความเข้าใจวิธีการหาคำตอบอุตมะ (optimal solutions) ของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นจากกราฟ ให้เราศึกษาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.7

จงหาคำตอบอุตมะ (optimal solutions) ของปัญหาจากตัวอย่างที่ 1.1

วิธีทำ

เนื่องจาก $x_1, x_2 \geqslant 0$ ดังนั้นคำตอบที่เป็นไปได้จะมีอยู่เฉพาะในส่วนที่ 1 เท่านั้น พิจารณาจากข้อจำกัดของไม้ประเภทที่ 1

$$20x_1 + 5x_2 \leqslant 600$$

หากเราจะไม่ผลิตทั้งโต๊ะและเก้าอี้ นั่นคือ $x_1 = x_2 = 0$ ก็แสดงว่าเรามีไม้ประเภทที่ 1 เหลืออยู่ 600 แผ่น-ฟุต หากเราจะผลิตโต๊ะเพียงอย่างเดียว นั่นคือ ให้ $x_2 = 0$ เราจะสามารถผลิตโต๊ะได้เป็นจำนวน 600/20 หรือ 30 ตัว และหากเราจะผลิตเก้าอี้เพียงอย่างเดียว นั่นคือให้ $x_1 = 0$ เราจะสามารถผลิตเก้าอี้ได้เป็นจำนวน 600/5 หรือ 120 ตัว แต่ถ้าเราจะผลิตทั้งโต๊ะและเก้าอี้รวมกัน จำนวนที่จะกำหนดได้คือจุดทุกจุดที่อยู่ภายในสามเหลี่ยม 0AB หรือบนเส้น AB นั่นเอง ถ้าจำนวนที่กำหนดได้เป็นจุดบนเส้น AB แสดงว่าเราใช้ไม้ประเภทที่ 1 หมดพอดี นั่นคือ $20(x_1) + 5(x_2) = 600$ ถ้าได้จุดใต้เส้น AB ก็แสดงว่า เรายังมีไม้ประเภทที่ 1 เหลืออยู่ เท่ากับ $600 - 20(x_1) - 5(x_2)$ แผ่น-ฟุต ในเมื่อ (x_1) และ (x_2) เป็นค่าที่เราเลือก

พิจารณาจากข้อจำกัดการใช้ไม้ประเภทที่ 2

$$20x_1 + 8x_2 \leqslant 660$$

หากไม่มีการผลิตเกิดขึ้นก็แสดงว่าเรามีไม้ประเภทที่ 2 อยู่ 660 แผ่น-ฟุต หากเราจะผลิตโต๊ะเพียงอย่างเดียว เราจะสามารถผลิตได้เป็นจำนวน 660/20 หรือ 33 ตัว และหากเราจะผลิตเก้าอี้เพียงอย่างเดียว เราจะสามารถผลิตได้เป็นจำนวน 660/8 หรือ 82.5 ตัว แต่ถ้าจะผลิตทั้งโต๊ะและเก้าอี้รวมกัน จำนวนที่จะกำหนดได้คือจุดทุกจุดในสามเหลี่ยม 0ED หรือบนเส้น ED จำนวนผลรวมที่แสดงด้วยจุดบนเส้น ED (เส้นที่เชื่อมระหว่างจุด (33, 0) กับ (0, 82.5)) แสดงว่าเราใช้ไม้ประเภทที่ 2 หมดพอดี นั่นคือ $20(x_1) + 8(x_2) = 660$ ถ้าได้จุดใต้เส้น ED แสดงว่าเราใช้ไม้ประเภทที่ 2 ไม่หมด ยังคงมีเหลืออยู่เท่ากับ $660 - 20(x_1) - 8(x_2) = 20$

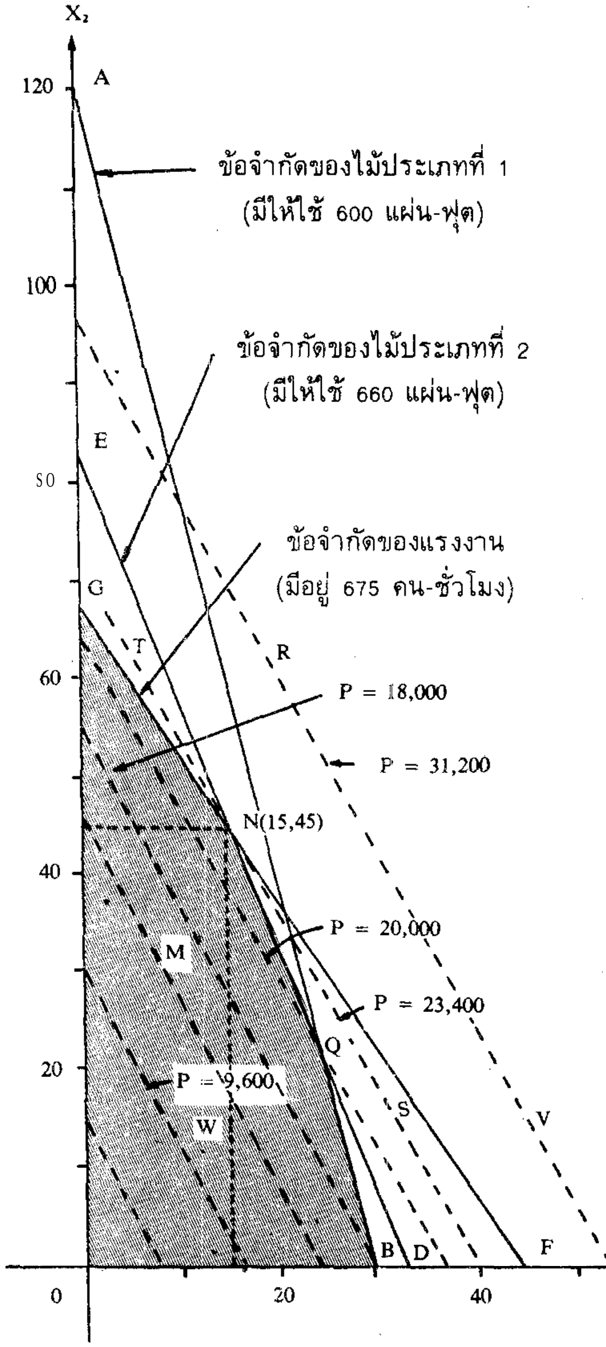
ทำนองเดียวกันเมื่อเราพิจารณาจากข้อจำกัดของการใช้แรงงาน

$$15x_1 + 10x_2 \leqslant 675$$

เราอาจผลิตโต๊ะเพียงอย่างเดียวได้ 675/15 หรือ 45 ตัว หรือผลิตเก้าอี้เพียงอย่างเดียวได้ 675/10 หรือ 67.5 ตัว หรือผลิตทั้งสองชนิดรวมกันเป็นจำนวนที่อ่านได้จากจุดในสามเหลี่ยม 0GF

หรือบนเส้น GF หากจำนวนที่ได้เป็นจุดบนเส้น GF (เส้นที่เชื่อมระหว่างจุด (45, 0) กับ (0, 67.5) แสดงว่าใช้แรงงานที่มีอยู่ทั้งหมด นั่นคือ $15(x_1) + 10(x_2) = 675$ ถ้าได้จุดใต้เส้น GF แสดงว่า เราใช้แรงงานไม่หมด ยังคงมีเหลืออยู่ $= 675 - 15(x_1) - 10(x_2)$ คน-ชั่วโมง

จากข้อจำกัดของทรัพยากรแต่ละชนิด แสดงให้เห็นได้ด้วยรูปดังนี้



เราหาจุดการผลิตที่จะทำให้ได้กำไรสูงสุด โดยการลากเส้นของกำไร คือเส้นที่มีความลาดชัน $-\frac{600}{320}$ หรือ $-\frac{15}{8}$ ในรูปเส้น - - - - - - - - - ทุกเส้นที่ขนานกันจะแสดงถึงค่าของกำไร P ต่าง ๆ ให้เรามาเปรียบเทียบกำไรที่ได้เหล่านี้ ตัวอย่างเช่น กำไรที่จุด M(10, 30) (รวมถึงทุกจุดบนเส้นกำไรที่ลากผ่านจุด M) จะเท่ากับ $600 \times 10 + 320 \times 30$ หรือ 15,600 บาท

กำไรที่จุด B(30, 0) (และทุกจุดบนเส้นกำไรที่ลากผ่านจุด B) จะเท่ากับ $600 \times 30 + 0$ หรือ 18,000 บาท

กำไรที่จุด N(15, 45) และทุกจุดบนเส้น TS จะเท่ากับ $600 \times 15 + 320 \times 45$ หรือเท่ากับ 23,400 บาท

กำไรของจุดการผลิตทุกจุดบนเส้น RV จะเท่ากับ 31,200 บาท

จะเห็นว่า แม้ว่ากำไรที่ได้ 31,200-บาท จะมากกว่า 23,400 บาทก็จริง แต่เราไม่อาจจะผลิตให้ได้กำไรนี้ได้ เนื่องจากไม่มีทรัพยากรเพียงพอ และกรณีการผลิตให้ได้กำไร 23,400 บาทนั้น จะเห็นว่ามีเพียงจุดเดียวที่ใช้การได้ จุดอื่น ๆ

นอกเหนือไปจากจุดนี้ แม้ว่าจะให้ค่าของกำไรเท่ากันก็ใช้ไม่ได้ เนื่องจากขาดทรัพยากรบางอย่างเช่น

จุด T(7, 60) และทุกจุดเหนือจุด N ใช้ไม่ได้เนื่องจากเรามีแรงงานไม่พอ หรือทุกจุดที่ต่ำกว่า เช่นจุด S เรามีแรงงานเพียงพอแต่ขาดไม้ทั้งสองประเภทจึงไม่สามารถผลิตถึงจุดนี้ได้ สรุปว่าจุดที่ใช้ได้มีเพียงจุดเดียวคือจุด N(15, 45) ซึ่งจะเป็นจุดอุตมะ (optimal point) นั่นก็คือ เจ้าของร้านจะผลิตโต๊ะ 15 ตัว และผลิตเก้าอี้ 45 ตัวจึงจะได้กำไรมากที่สุดคือ 23,400 บาท ในการผลิตครั้งนี้ ปรากฏว่าใช้ไม้ประเภทที่ 2 และแรงงานหมดพอดี แต่มีไม้ประเภทที่ 1 เหลืออยู่ = 600 - 20(15) - 5(45) = 75 แผ่น-ฟุต

ตัวอย่าง 1.8

จงหาคำตอบอุตมะ (optimal solutions) ของปัญหาจากตัวอย่างที่ 1.3

วิธีทำ

เนื่องจาก $x_1 \geqslant 0$ และ $x_2 \geqslant 0$ ดังนั้นคำตอบที่เป็นไปได้จะอยู่เฉพาะในส่วนที่ 1 ของกราฟเท่านั้น พิจารณาจากข้อจำกัดของไทอามินคือ

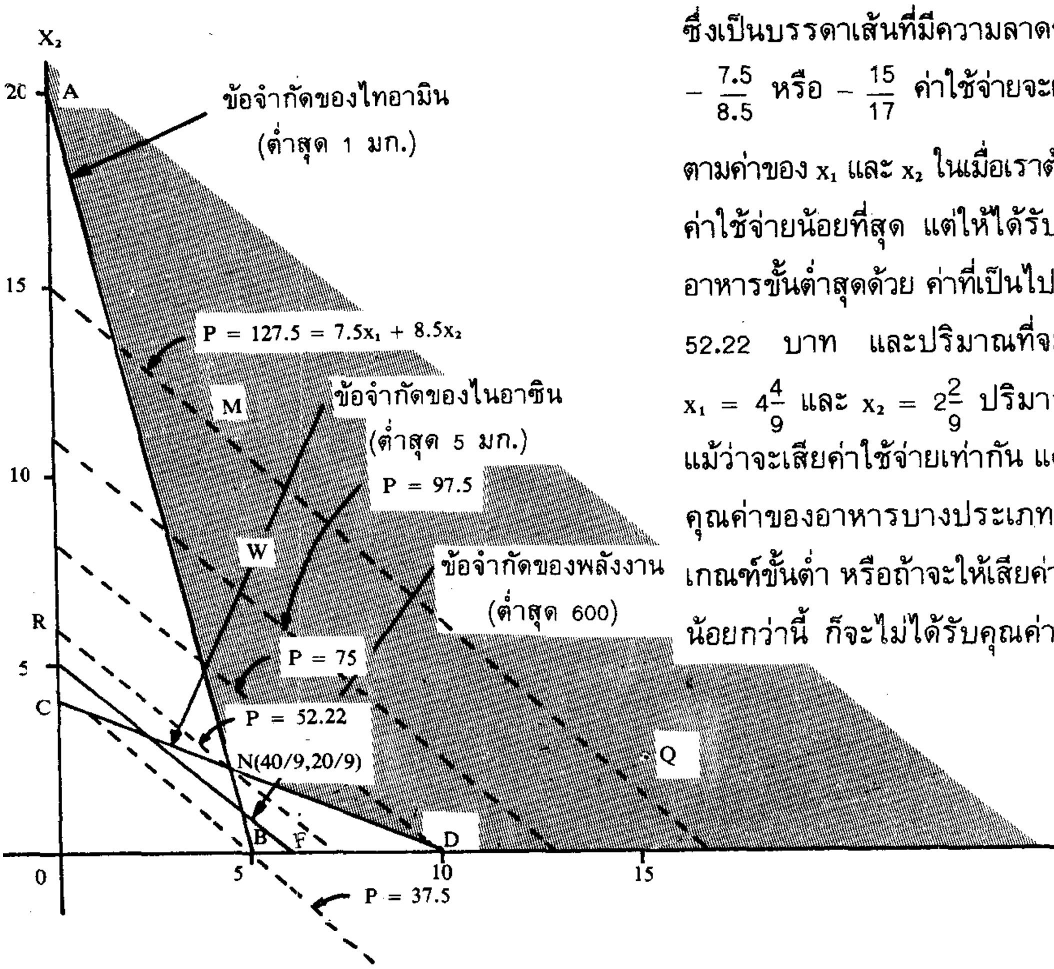
$$0.1x_1 + 0.25x_2 \geqslant 1$$

หากแม่ซื้ออาหารชนิดที่ 1 เพียงอย่างเดียว จะต้องซื้ออย่างน้อยที่สุด 1/0.1 หรือ 10 ออนซ์ หากจะซื้ออาหารชนิดที่ 2 เพียงอย่างเดียว จะต้องซื้ออย่างน้อยที่สุด 1/0.25 หรือ 4 ออนซ์ และหากจะซื้ออาหารทั้งสองชนิดรวมกัน ปริมาณที่จะต้องซื้อน้อยที่สุดจะต้องอยู่บนเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุด (10, 0) กับ (0, 4) จึงจะได้ปริมาณต่ำสุดของไทอามิน ปริมาณซื้อที่อยู่เหนือเส้นนี้ (เส้น CD) จะทำให้ได้ค่าของไทอามินมากกว่า 1 มิลลิกรัม

ในทำนองเดียวกัน ถ้าจะให้ได้รับปริมาณไนอาซินตามความต้องการน้อยที่สุด จะต้องซื้ออาหารชนิดที่ 1 และ/หรือ ชนิดที่ 2 ปริมาณอย่างน้อยที่สุดจะต้องอยู่บนเส้นตรงเชื่อมระหว่างจุด $(\frac{5}{1}, 0)$ กับจุด $(0, \frac{5}{.25})$ คือเส้นตรง AB ในรูป หากซื้อในปริมาณเหนือเส้น AB นี้จะได้รับไนอาซินมากกว่า 5 มิลลิกรัม

สำหรับพลังงาน หากต้องการเพียงปริมาณต่ำสุดตามที่กำหนด จะต้องซื้ออาหารชนิดที่ 1 และ/หรือ อาหารชนิดที่ 2 ปริมาณอย่างน้อยที่สุดจะต้องอยู่บนเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุด $(\frac{600}{100}, 0)$ กับจุด $(0, \frac{600}{120})$ คือ เส้นตรง RF ในรูป หากซื้อในปริมาณเหนือเส้นนี้ จะได้พลังงานมากกว่า 600 แคลอรี

ข้อจำกัดทั้งสาม แสดงได้ด้วยกราฟดังนี้



เส้นของค่าใช้จ่าย ก็คือเส้น ------ ซึ่งเป็นบรรดาเส้นที่มีความลาดชันเป็น $-\frac{7.5}{8.5}$ หรือ $-\frac{15}{17}$ ค่าใช้จ่ายจะแปรไปตามค่าของ x_1 และ x_2 ในเมื่อเราต้องการค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด แต่ให้ได้รับคุณค่าอาหารขั้นต่ำสุดด้วย ค่าที่เป็นไปได้ก็คือ 52.22 บาท และปริมาณที่จะซื้อคือ $x_1 = 4\frac{4}{9}$ และ $x_2 = 2\frac{2}{9}$ ปริมาณอื่น ๆ แม้ว่าจะเสียค่าใช้จ่ายเท่ากัน แต่ได้รับคุณค่าของอาหารบางประเภทต่ำกว่าเกณฑ์ขั้นต่ำ หรือถ้าจะให้เสียค่าใช้จ่ายน้อยกว่านี้ ก็จะไม่ได้รับคุณค่าอาหาร ตามที่ระบุไว้ สรุปได้ว่า แม่ควรจะซื้ออาหารชนิดที่ 1 $4\frac{4}{9}$ ออนซ์ และซื้ออาหารชนิดที่ 2 $2\frac{2}{9}$ ออนซ์ จึงจะได้คุณค่าอาหารตามที่ต้องการ และเสียค่าใช้จ่ายต่ำสุด 52.22 บาท

หมายเหตุ 1. ค่าอุดมะ (optimal value) จะหาได้ (กรณีที่ไม่สามารถอ่านจากกราฟได้) จากการแก้สมการของข้อจำกัดที่จุดนี้อยู่ เช่นกรณีตัวอย่างที่ 2 นี้ จุด N เป็นจุดตัดของเส้น 1 กับเส้น 2 เราจึงได้ค่าของจุดอุดมะจากการแก้สมการ

$$0.1x_1 + 0.25x_2 = 1$$

$$x_1 + 0.25x_2 = 5$$

2. จากตัวอย่างแรกจะเห็นว่าการผลิตนี้ ใช้ไม้ประเภทที่ 2 และแรงงานหมดสิ้น แต่มีไม้ประเภทที่ 1 เหลืออยู่เป็นจำนวน 600 − 20 × 15 − 5 × 45 = 75 แผ่น-ฟุต จำนวนที่เหลือนี้เราเรียกว่า slack variables ในตัวอย่างที่สองค่าของตัวแปรนี้กลับแสดงถึงปริมาณที่เกินเกณฑ์ต้องการขั้นต่ำ ซึ่งในที่นี้คือปริมาณของพลังงานเกินกำหนดขั้นต่ำสุดไปเท่ากับ $100 \times \frac{40}{9} + 120 \times \frac{20}{9} - 600 = \frac{1000}{9}$ แคลอรี

บรรดาจุดที่อยู่ในบริเวณหรือพื้นที่ที่แลเงาหรือเส้นล้อมรอบบริเวณนั้น ถือเป็นคำตอบได้ทั้งสิ้น เราจึงเรียกบริเวณนี้ **บริเวณของคำตอบที่เป็นไปได้** (feasible region) ทุกจุดในบริเวณคำตอบที่เป็นไปได้ ถือเป็น**คำตอบที่เป็นไปได้** (feasible solution) นั่นก็คือคำตอบซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขของข้อจำกัดทุกข้อที่มีอยู่ จุดยอด (extreme point) ของแต่ละมุมของบริเวณคำตอบที่เป็นไปได้ถือเป็น**คำตอบที่เป็นไปได้พื้นฐาน** (basic feasible solution) ตัวแปรของคำตอบที่เป็นไปได้พื้นฐานเรียกว่า **ตัวแปรฐาน** (basic variable)

จากตัวอย่างที่ 1.7 เรามี

บริเวณ 0GNQB เป็นบริเวณคำตอบที่เป็นไปได้ (feasible region) ทุกจุดในบริเวณนี้และที่ล้อมรอบด้วย 0GNQB เช่นจุด G, N, M, Q, W, B ฯลฯ เป็นคำตอบที่เป็นไปได้ (feasible solution) เส้น 0G, GN, NQ, QB และ B0 เป็นขอบเขต (boundary) ของบริเวณคำตอบที่เป็นไปได้ GN, NQ และ QB เป็นขอบเขตการใช้สูงสุดของทรัพยากร จุดยอดตรงหัวมุมเช่นจุด 0, G, N, Q และ B เป็นคำตอบที่เป็นไปได้พื้นฐาน (basic feasible solution)

จากตัวอย่างที่ 1.8 เรามี

บริเวณ X_2ANDX_1 เป็นบริเวณคำตอบที่เป็นไปได้ (feasible region) ทุกจุดในบริเวณนี้และที่ล้อมรอบด้วย X_2ANDX_1 เป็นคำตอบที่เป็นไปได้ (feasible solution) เช่นจุด A, M, W, N, Q ฯลฯ เส้น X_2A, AN, ND และ DX_1 เป็นขอบเขต (boundary) ของบริเวณคำตอบที่เป็นไปได้ AN และ ND เป็นขอบเขตความต้องการขั้นต่ำสุด จุดยอดมุม A, N และ D เป็นคำตอบที่เป็นไปได้พื้นฐาน (basic feasible solution)

จุด T, R, V และทุกจุดนอกบริเวณคำตอบที่เป็นไปได้ เป็นคำตอบที่เป็นไปไม่ได้ (infeasible solution)

จากตัวอย่างทั้งสอง จะเห็นว่า คำตอบที่ให้ค่า P สูงสุด หรือให้ค่าของ P ต่ำสุด จะอยู่ที่จุดยอดมุมของบริเวณคำตอบที่เป็นไปได้ ดังนั้นแทนที่เราจะมาพิจารณาคำตอบที่เป็นไปได้นับจำนวนไม่ถ้วน เราจะพิจารณาเฉพาะคำตอบที่เป็นไปได้พื้นฐาน (basic feasible solution) ซึ่งก็คือจุดยอดมุมนั่นเอง นั่นคือ ลดจำนวนพิจารณาจากจำนวนนับไม่ถ้วนมาเป็นจำนวนที่นับได้ เนื่องจากคำตอบอุตมะ (optimal solution) จะอยู่ที่จุดยอดมุมเสมอ สรุปได้ว่า ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นที่มีตัวแปรไม่เกิน 2 ตัว หรือมีตัวแปรมากกว่า 2 ตัวแต่สามารถแปลงให้มีตัวแปรไม่เกิน 2 ได้ ซึ่งมีตัวแบบเป็น

ค่าสูงสุด (หรือค่าต่ำสุด) ของ P

$$= c_1x_1 + c_2x_2$$

โดยมีข้อจำกัด

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \ (\leqslant, \geqslant) \ b_i, \ i = 1, 2, \ldots, m$$

และ

$$x_1 \geqslant 0$$

$$x_2 \geqslant 0$$

เราหาคำตอบอุตมะ (Optimal solutions) ด้วยวิธีกราฟได้ตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

1) ลากเส้นตรงเชื่อมระหว่างจุด $(\frac{b_i}{a_{i1}}, 0)$ กับ $(0, \frac{b_i}{a_{i2}})$ ทุก ๆ $i = 1, 2, \ldots, m$ เส้นตรงเหล่านี้จะแสดงขอบเขตสูงสุดของการใช้ทรัพยากร (ข้อจำกัดอยู่ในรูป $\leqslant$) หรือขอบเขตต่ำสุดตามที่กำหนดไว้ (ข้อจำกัดอยู่ในรูป $\geqslant$)

2) หาบริเวณร่วมกันของของข้อจำกัดทุกข้อที่มี ซึ่งก็คือบริเวณในส่วนที่ 1 ล้อมรอบด้วยเส้นตรงจาก (1) บริเวณนี้คือบริเวณคำตอบที่เป็นไปได้ (feasible region)

3) ลากเส้นตรงที่มีความลาดชันเท่ากับ $-c_1/c_2$ (คือเส้น -----) เลื่อนเส้นตรงนี้ในแนวขนานในบริเวณคำตอบที่เป็นไปได้ เส้นขนานเหล่านี้จะแสดงค่าของกำไร (isoprofit) หรือค่าใช้จ่าย (isocost) ที่คำตอบต่าง ๆ

หากต้องการค่า P สูงสุด เลื่อนเส้นขนานไปข้างบน

หากต้องการค่า P ต่ำสุด เลื่อนเส้นขนานลงมาข้างล่าง

จุดสุดท้ายที่เส้นขนานเหล่านี้ลากผ่านก่อนที่จะพ้นบริเวณคำตอบที่เป็นไปได้ จะเป็นจุดยอดมุมที่เรียกว่าจุดอุตมะ เราจะได้คำตอบอุตมะ (optimal solutions)

ข้อสังเกต หากคำตอบนี้อยู่บนเส้นตรงของข้อจำกัด p และ q คำตอบอุตมะ ก็คือคำตอบที่ได้จากการแก้สมการ

$$a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 = b_p$$

และ

$$a_{q1}x_1 + a_{q2}x_2 = b_q$$

ซึ่งแสดงให้เห็นว่า ทรัพยากร p และ q ถูกนำไปใช้จนหมดสิ้น (กรณี $\leqslant$) หรือใช้ตามเกณฑ์กำหนดขั้นต่ำสุด (กรณี $\geqslant$) สมมติคำตอบที่ได้คือ $x_1 = d_1, x_2 = d_2$ แสดงให้เห็นว่า ผลจากการตัดสินใจจะมีทรัพยากรที่ $i\ (i \neq p \neq q)$ เหลืออยู่เป็นจำนวน $b_i - a_{i1}d_1 - a_{i2}d_2$ (กรณี $\leqslant$) หรือใช้ทรัพยากร $i\ (i \neq p \neq q)$ เกินขีดต่ำสุดไปเท่ากับ $a_{i1}d_1 + a_{i2}d_2 - b_i$

เรามาศึกษาการใช้กราฟแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นจากตัวอย่างต่อไป

ตัวอย่างที่ 1.9

จงหาคำตอบอุตมะของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น

ค่าสูงสุดของ P

$$= 16x_1 + 20x_2$$

โดยมีข้อจำกัด

$$9x_1 + 8x_2 \leqslant 360$$

$$5x_1 + 6x_2 \leqslant 300$$

$$1x_1 + 7x_2 \leqslant 350$$

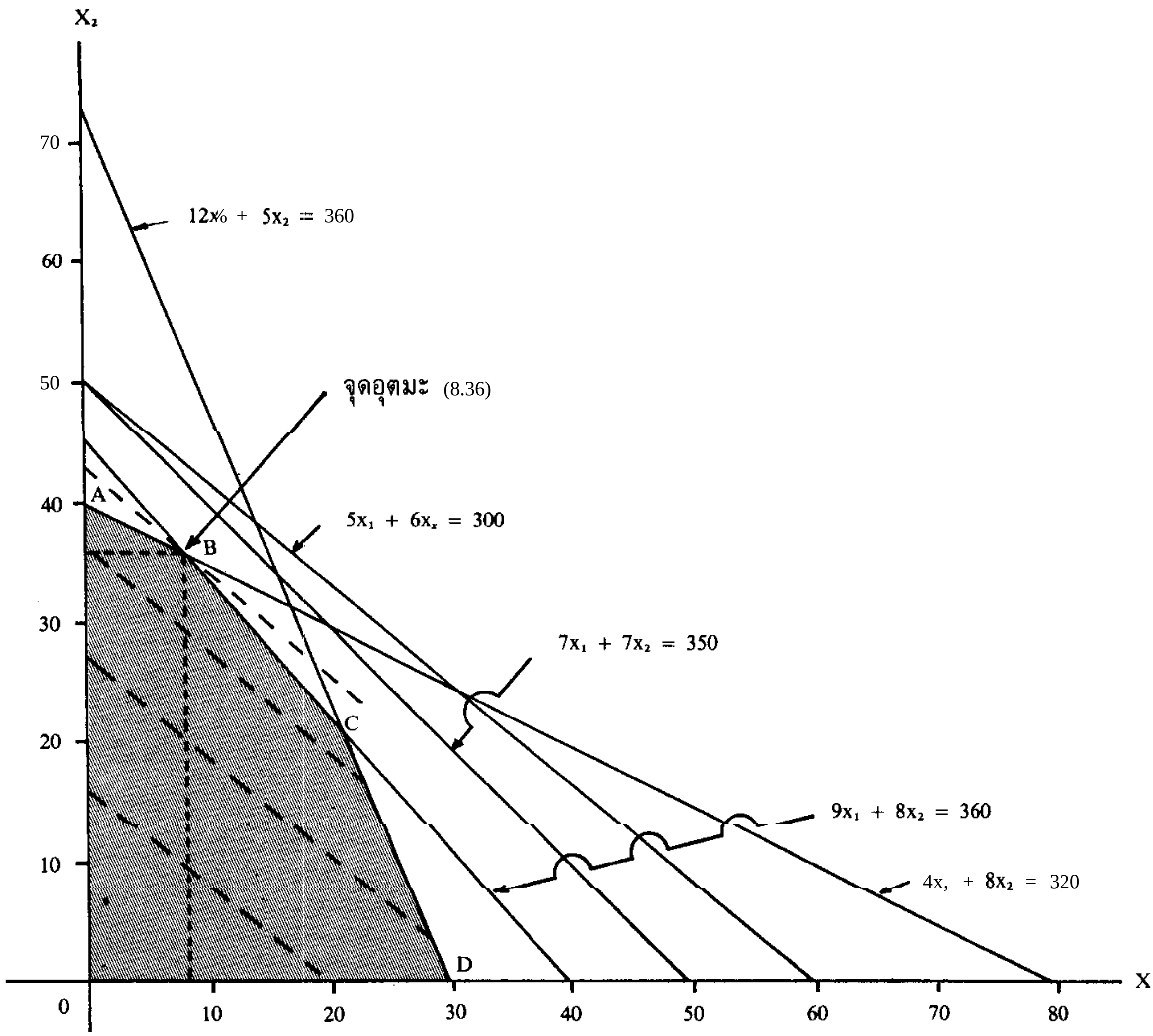
$$4x_1 + 8x_2 \leqslant 320$$

$$12x_1 + 5x_2 \leqslant 360$$

และ $x_1, x_2 \geqslant 0$

วิธีทำ

เขียนกราฟเส้นตรงของสมการข้อจำกัด หาบริเวณร่วมกันของทุกข้อจำกัด จะได้รูป 0ABCD เป็นบริเวณคำตอบที่เป็นไปได้



อ่านผลจากกราฟ คำตอบอุตมะที่ได้คือ $x_1 = 8, x_2 = 36$ โดยมีค่าของ

$$P_{\text{สูงสุด}} = (16)(8) + (20)(36) = \mathbf{848}$$

ตัวแบบของปัญหาทั่วไปไม่จำเป็นที่จะต้องมีรูปแบบอสมการเดียวกัน ในปัญหาจริง ๆ ตัวแบบของข้อจำกัดอาจอยู่ในรูปอสมการ $\geqslant$ และ/หรือ $\leqslant$ ก็ได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.10

จงหาคำตอบอุตมะของปัญหาในตัวอย่างที่ 1.5

วิธีทำ

กำหนด $x_1 = x_{11}$ และ $x_2 = x_{12}$ นำไปแทนค่าในสมการข้อจำกัด

ในตัวอย่าง 1.5 จะเห็นว่า

$$x_1 + x_2 + x_{13} = 8000 \quad \text{หรือ} \quad x_{13} = 8000 - x_1 - x_2 \geqslant 0$$

$$x_1 + x_{21} = 6000 \quad \text{หรือ} \quad x_{21} = 6000 - x_1 \geqslant 0$$

$$x_2 + x_{22} = 7000 \quad \text{หรือ} \quad x_{22} = 7000 - x_2 \geqslant 0$$

และจาก $x_{21} + x_{22} + x_{23} = 12000$ จะได้

$$6000 - x_1 + 7000 - x_2 + x_{23} = 12000 \quad \text{หรือ} \quad x_{23} = x_1 + x_2 - 1000 \geqslant 0$$

(ในสมการ $x_{13} + x_{23} = 7000$ แทนค่า x_{13} จะได้ $x_{23} = x_1 + x_2 - 1000$ เช่นเดียวกัน)

ดังนั้น

$$\begin{aligned} P &= 3x_1 + 5x_2 + 2(8000 - x_1 - x_2) + 4(6000 - x_1) + \\ &\quad (7000 - x_2) + 6(x_1 + x_2 - 1000) \\ &= 41000 + 3x_1 + 8x_2 \end{aligned}$$

ตัวแบบที่ได้จะเป็น

หาค่าต่ำสุดของ P

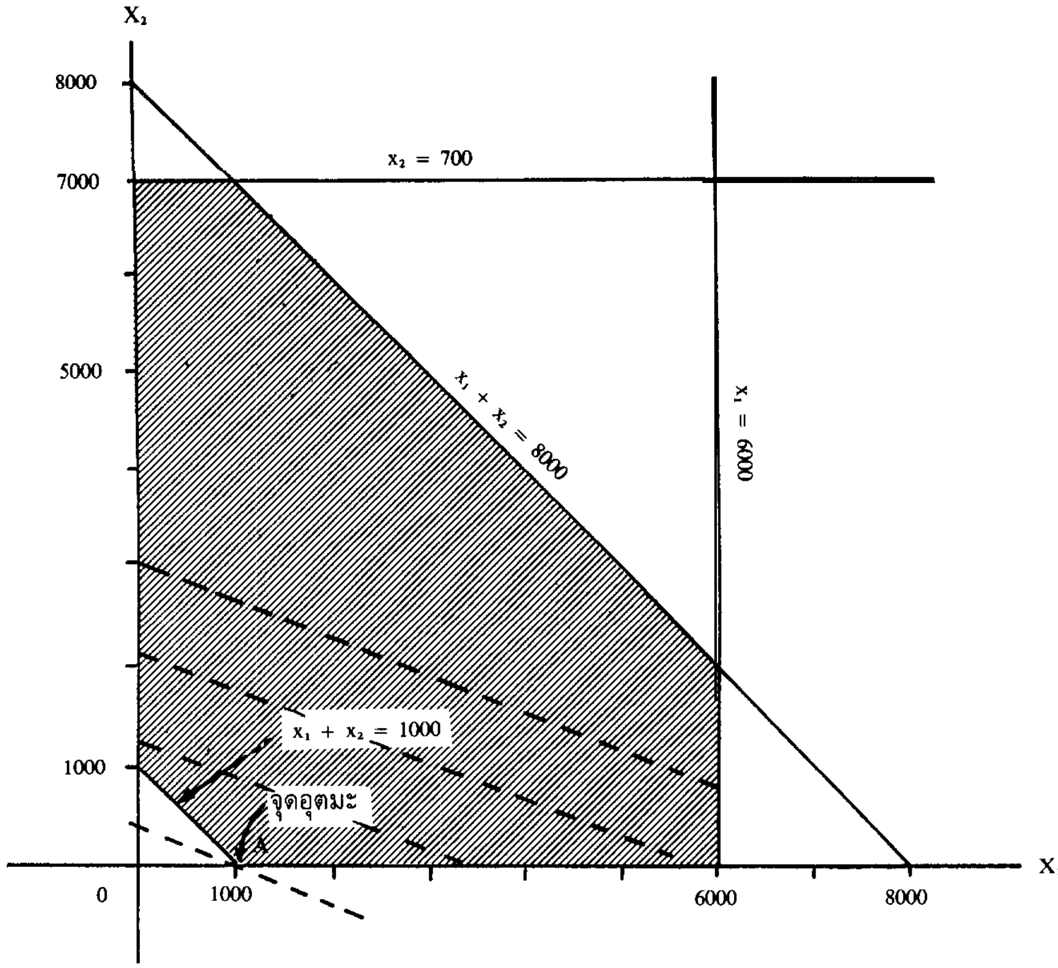
$$= 41000 + 3x_1 + 8x_2$$

โดยมีข้อจำกัด

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leqslant 8000 \\ x_1 &\leqslant 6000 \\ x_2 &\leqslant 7000 \\ x_1 + x_2 &\geqslant 1000 \end{aligned}$$

และ $x_1, x_2 \geqslant 0$

แสดงได้ด้วยกราฟดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่า จุดอุตมะ (optimal point) คือจุด A(1000, 0) แสดงว่า $x_1 = 1{,}000$, $x_2 = 0$ ดังนั้น $x_{13} = 8000 - 1000 = 7000$, $x_{22} = 7000$, $x_{21} = 6000 - 1000 = 5000$ และ $x_{23} = 0$

สรุปได้ว่า

โรงงาน ก ส่งสินค้าไปที่คลังเอ 1,000 หน่วย และส่งไปที่คลังซี 7,000 หน่วย

โรงงาน ข ส่งสินค้าไปที่คลังเอ 5,000 หน่วย และส่งไปที่คลังบี 7,000 หน่วย

เสียค่าใช้จ่ายในการขนส่งต่ำที่สุด = 41000 + (3)(1000) = 44,000 บาท

ตัวอย่างที่ 1.11

บริษัทคิดและลูก ตั้งเป้าหมายการผลิตในสัปดาห์หน้าไว้ว่า จะต้องผลิตให้ได้ผลิตภัณฑ์เกรดเออย่างน้อยที่สุด 12,000 ชิ้น ผลิตภัณฑ์เกรดบีอย่างมากที่สุด 48,000 ชิ้น และผลิตภัณฑ์เกรดซี

ไม่เกิน 60,000 ชิ้น บริษัทมีเครื่องจักรที่จะใช้ในการผลิต 2 ประเภท ความสามารถในการผลิตของเครื่องจักรแต่ละเครื่องในแต่ละประเภท มีดังนี้

	เครื่องจักรวาย	เครื่องจักรวี
ผลิตภัณฑ์เกรดเอ (ชิ้น/สัปดาห์)	150	200
ผลิตภัณฑ์เกรดบี (ชิ้น/สัปดาห์)	400	300
ผลิตภัณฑ์เกรดซี (ชิ้น/สัปดาห์)	400	500

จากการวิเคราะห์ต้นทุนการผลิต การจำหน่าย ประมาณได้ว่า การผลิตโดยใช้เครื่องจักรวายทำกำไรให้โดยเฉลี่ยเครื่องละ 175,000 บาท ส่วนการผลิตโดยใช้เครื่องจักรวีให้ผลกำไรโดยเฉลี่ย 200,000 บาทต่อเครื่อง บริษัทควรจะวางแผนในการใช้เครื่องจักรแต่ละประเภทกี่เครื่อง จึงจะทำให้บรรลุถึงเป้าหมายที่วางไว้ และทำให้บริษัทได้กำไรมากที่สุด

ถ้าบริษัทกำหนดการใช้เครื่องจักรไว้ว่า ในการผลิตแต่ละสัปดาห์ จะใช้เครื่องจักรวายได้อย่างน้อยที่สุด 40 เครื่อง และใช้เครื่องจักรวีไม่น้อยกว่า 20 เครื่อง ค่าใช้จ่ายในการทำงานของเครื่องจักรแต่ละประเภท เท่ากับ 185,000 และ 148,000 บาทต่อเครื่อง ตามลำดับ บริษัทควรจะวางแผนการใช้เครื่องจักรอย่างไร จึงจะทำให้บริษัทเสียค่าใช้จ่ายทางด้านเครื่องจักรน้อยที่สุด

วิธีทำ

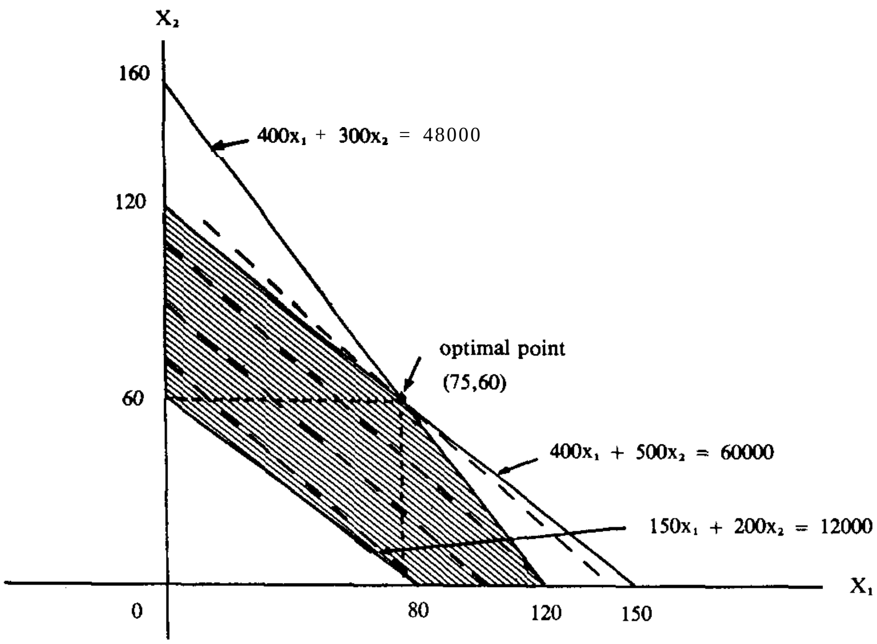
กำหนดว่า บริษัทใช้เครื่องจักรวาย x_1 เครื่อง และใช้เครื่องจักรวี x_2 เครื่อง ให้ P เป็นกำไรที่ได้ทั้งหมด เขียนตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นได้ดังนี้

ค่าสูงสุด P

$$= 175000x_1 + 200000x_2$$

โดยมีข้อจำกัด

$$\begin{aligned} 150x_1 + 200x_2 &\geq 12000 \\ 400x_1 + 300x_2 &\leq 48000 \\ 400x_1 + 500x_2 &\leq 60000 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



บริษัทควรจะใช้เครื่องจักรวาย 75 เครื่อง และใช้เครื่องจักรวี 60 เครื่อง ซึ่งจะทำให้บริษัทได้กำไรมากที่สุด เท่ากับ (175000)(75) + (200000)(60) = 25,125,000 บาท

ถ้าเป้าหมายเปลี่ยนเป็นต้องการเสียค่าใช้จ่ายต่ำสุด นั่นคือเปลี่ยนฟังก์ชันเป้าหมายเป็น

ค่าต่ำสุด $Z = 185000x_1 + 148000x_2$

โดยมีข้อจำกัดเพิ่มเติมอีก 2 ข้อคือ

$x_1 \geqslant 40$

$x_2 \geqslant 20$

ดังนั้น ตัวแบบจะเปลี่ยนเป็น

หาค่าต่ำสุด $Z = 185000x_1 + 148000x_2$

โดยมีข้อจำกัด

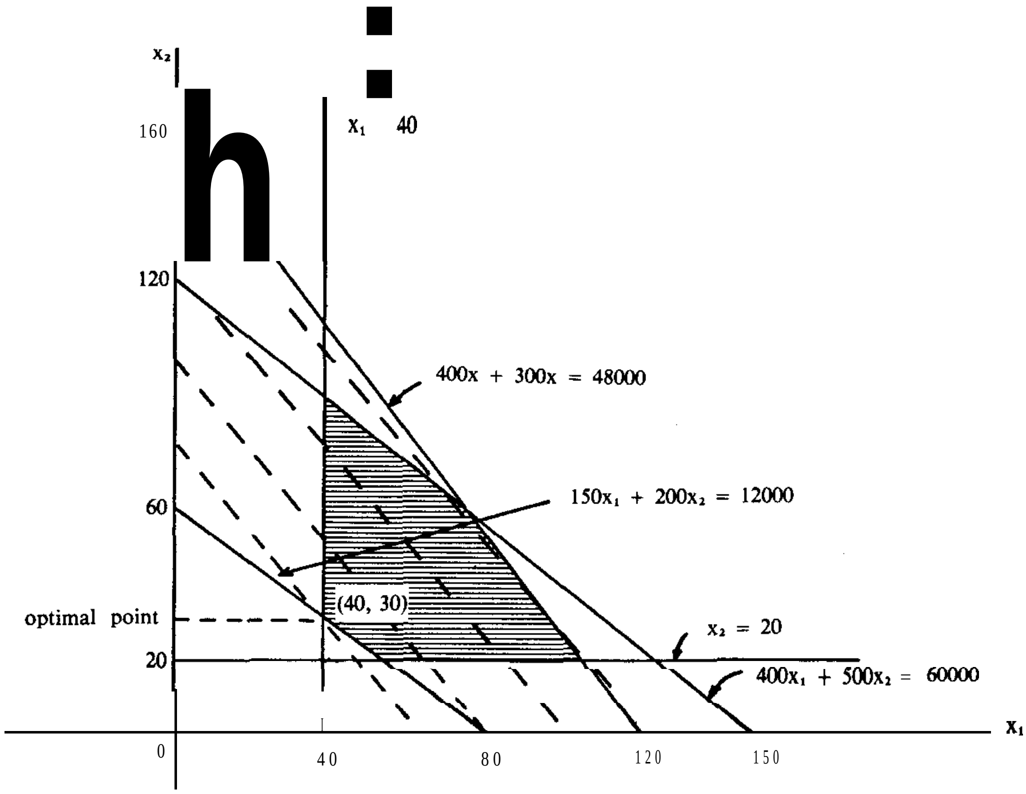
$$150x_1 + 200x_2 \geqslant 12000$$

$$400x_1 + 300x_2 \leqslant 48000$$

$$400x_1 + 500x_2 \leqslant 60000$$

$$x_1 \geqslant 40$$

$$x_2 \geqslant 20$$



บริษัทควรจะใช้เครื่องจักรวาย 40 เครื่อง เครื่องจักรวี 30 เครื่อง ซึ่งจะทำให้เสียค่าใช้จ่ายทั้งหมดต่ำสุด เท่ากับ (185000)(40) + (148000)(30) = 11,840,000 บาท

ตัวอย่างที่ 1.12

โรงงานต้องการควบคุมอาหารสัตว์ ตามเกณฑ์กำหนดว่า ในอาหารสัตว์ทุก ๆ 300 กิโลกรัม จะต้องมีโปรตีนอย่างน้อยที่สุด 90 กิโลกรัม มีไขมันอย่างน้อยที่สุด 21 กิโลกรัม มีอาหารที่มีเส้นใยไม่เกิน 15 กิโลกรัม เกลือแร่อย่างมากที่สุด 30 กิโลกรัม ความชื้นอย่างมากที่สุด 30 กิโลกรัม โรงงานเลือกใช้อาหาร 2 ชนิดมาผสมกัน อาหารแต่ละชนิดมีส่วนประกอบดังนี้

	อาหาร ก	อาหาร ข
โปรตีน	25%	40%
ไขมัน	10%	6%
อาหารมีเส้นใย	4%	5%
เกลือแร่	8%	10%
ความชื้น	10%	8%

ราคาของอาหารแต่ละชนิด กิโลกรัมละ 7.50 บาท และ 9 บาท ตามลำดับ โรงงานควรใช้ส่วนผสมของอาหารแต่ละชนิดอย่างไร จึงจะเกิดผลดีที่สุด

วิธีทำ

โรงงานเลือกใช้อาหาร ก x_1 กิโลกรัม และอาหาร ข x_2 กิโลกรัม จะได้ตัวแบบปัญหาการโปรแกรม ดังนี้

ค่าต่ำสุด $P = 7.50x_1 + 9.00x_2$

โดยมีข้อจำกัด

$$x_1 + x_2 = 300 \qquad \text{.......... (1)}$$

$$0.25x_1 + 0.40x_2 \geqslant 90 \qquad \text{.......... (2)}$$

$$0.10x_1 + 0.06x_2 \geqslant 21 \qquad \text{.......... (3)}$$

$$0.04x_1 + 0.05x_2 \leqslant 15 \qquad \text{.......... (4)}$$

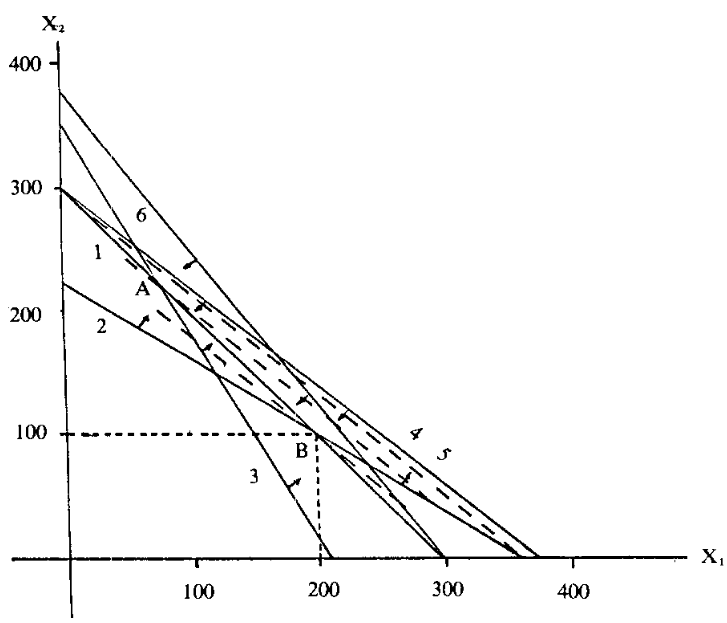
$$0.08x_1 + 0.10x_2 \leqslant 30 \qquad \text{.......... (5)}$$

$$0.10x_1 + 0.08x_2 \leqslant 30 \qquad \text{.......... (6)}$$

$$x_1 \quad a \quad 0$$

$$x_2 \geqslant 0$$

แสดงได้ด้วยกราฟดังนี้



จากกราฟจะเห็นได้ว่า คำตอบที่เป็นไปได้ จะอยู่บนเส้น AB เส้นค่าใช้จ่าย P เลื่อนลงได้ต่ำสุดที่จุด B สรุปได้ว่า

โรงงานควรจะใช้ส่วนผสมของอาหาร ก 200 กิโลกรัม ของอาหาร ข 100 กิโลกรัม จึงจะได้อาหารสัตว์ที่มีคุณภาพตามเกณฑ์ที่กำหนด และเสียค่าใช้จ่ายต่ำสุด 7.50(200) + 9.00(100) = 2,400 บาท

1.5 วิธีการซิมเพลกซ์ (Simplex Method)

การหาคำตอบต่อปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นด้วยวิธีกราฟนั้นสะดวกในกรณีที่มีตัวแปรควบคุมได้ไม่เกิน 2 หากมีตัวแปรเกิน 2 การใช้กราฟค่อนข้างยุ่งยาก หรือไม่อาจทำได้ ปัญหาโดยทั่ว ๆ ไปนั้นมีตัวแปรหลายตัวจึงไม่อาจใช้กราฟในการแก้ปัญหาหรือหาคำตอบต่อปัญหานั้นได้ วิธีการที่เป็นที่รู้จักกันดีมากและใช้กันแพร่หลายในการหาคำตอบต่อปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นคือวิธีการซิมเพลกซ์ (simplex method) ซึ่งปรับปรุงขึ้นมาโดย George Dantzig ในปี 1947 เป็นวิธีการทำซ้ำอย่างมีระบบ โดยเริ่มต้นจากจุดยอดมุมเริ่มต้น เคลื่อนที่อย่างมีระบบไปยังจุดยอดมุมต่อไปที่ทำให้ค่าของฟังก์ชันเป้าหมายสูงสุดหรือต่ำสุดแล้วแต่กรณี จุดยอดมุมแต่ละจุดจะเป็นคำตอบฐาน (basic solution) ตลอดจนเงื่อนไขการเปลี่ยนจุดกำหนดไว้ในตาราง ซึ่งเรียกว่าตารางซิมเพลกซ์ วิธีการซิมเพลกซ์จึงแสดงค่าด้วยตารางที่มีจำนวนนับได้ เนื่องจากตารางหนึ่งก็คือคำตอบของจุดยอดมุมหนึ่ง จากตารางจะบอกให้เรารู้ว่าจุดยอดมุมที่ได้หรืออีกนัยหนึ่งก็คือคำตอบที่เป็นไปได้พื้นฐาน (basic feasible solution) เป็นจุดอุตมะ (optimal point) หรือไม่ ถ้าไม่เป็น จุดถัดไปควรจะเป็นจุดไหน

วิธีการซิมเพล็กซ์จะเริ่มที่จุดกำหนดให้ จึงมีปัญหาว่าจุดยอดมุมที่จะเป็นคำตอบขั้นต้นควรจะเป็นจุดใด หากจุดกำเนิดเป็นคำตอบที่เป็นไปได้ด้วย จุดยอดมุมเริ่มต้นก็จะอยู่ที่จุดกำเนิด ซึ่งเท่ากับว่าเมื่อไม่มีการตัดสินใจใด ๆ หรือยังไม่ทำกิจกรรมใด ค่าของฟังก์ชันเป้าหมายจะเป็น 0 แต่ถ้าจุดกำเนิดไม่เป็นคำตอบที่เป็นไปได้ จะมีวิธีเลือกจุดเริ่มต้นอย่างไรจึงจะไม่มีปัญหา หากเลือกไม่ดีอาจต้องใช้เวลามาก ต้องทำหลายตารางกว่าจะถึงคำตอบอุตมะได้ อย่างไรก็ตามการกำหนดจุดยอดมุมเริ่มต้น เรามักจะเริ่มด้วยการกำหนดตัวแปรที่ควบคุมได้ซึ่งเป็นตัวแปรกำหนดการตัดสินใจ (decision variables) ให้เป็น 0 วิธีการหาคำตอบโดยใช้ตารางซิมเพลกซ์และการกำหนดคำตอบขั้นต้นจะได้กล่าวในบทต่อไป

แบบฝึกหัดที่ 1

1. จงเขียนสมการหรืออสมการของข้อจำกัดต่อไปนี้

1.1) คนขายหนังสือพิมพ์คาดว่าในวันหนึ่ง ๆ เขาสามารถขายหนังสือพิมพ์รายวันประเภทต่าง ๆ รวมกันแล้วไม่เกิน 800 ฉบับ แยกเป็นหนังสือพิมพ์ j (j = 1, 2, 3, 4, 5) จำนวน x_j ฉบับ

1.2) นายรามกำหนดว่า ทุก ๆ วันจันทร์เขาจะใช้เวลาอยู่ในมหาวิทยาลัยไม่เกิน 8 ชั่วโมง เขาเลือกลงทะเบียนเรียนในวันนี้ x_1 วิชา แต่ละวิชาใช้เวลาเรียน 110 นาที รับประทานอาหาร x_2 ครั้ง ๆ ละ 20 นาที ใช้เวลาในการสนทนาและทำการบ้าน x_3 นาที ใช้เวลาในห้องสมุดและอื่น ๆ x_4 นาที

1.3) ชาวไร่ปลูกพืช 3 ชนิดในที่ดินของเขา โดยปลูกพืชชนิดที่ 1 x_1 ไร่ ปลูกพืชชนิดที่ 2 x_2 ไร่ และปลูกพืชชนิดที่ 3 x_3 ไร่

1.3.1 ชาวไร่มีที่ดิน 1,000 ไร่

1.3.2 ชาวไร่มีน้ำที่จะใช้ได้ 4,000 ไร่-ฟุต จำนวนน้ำที่พืชแต่ละชนิดต้องการต่อไร่เท่ากับ 5, 4, 6 ไร่-ฟุต ตามลำดับ

1.4) นายกสิกรได้รับมรดก 1,000,000 บาท เขานำเงินจำนวนนี้ไปซื้อพันธบัตรราคาฉบับละพันบาท x_1 ฉบับ ซื้อสลากออมสินราคาฉบับละ 20 บาท x_2 ฉบับ ซื้อหุ้นราคา 250 และ 400 บาท อย่างละ x_3 และ x_4 หุ้น ตามลำดับ

1.5) โรงงานผลิตสินค้า 3 ประเภท ประเภทที่ 1 โดยใช้กรรมวิธี ก x_1 หน่วย โดยใช้กรรมวิธี ข x_2 หน่วย สินค้าประเภทที่ 2 ขนาดใหญ่ x_3 หน่วย ขนาดเล็ก x_4 หน่วย และประเภทที่ 3 x_5 หน่วย

1.5.1 เครื่องจักรเอ สามารถทำงานในแต่ละวันได้ไม่เกิน 9 ชั่วโมง เวลาที่ใช้เครื่องจักรในการผลิตสินค้าแต่ละประเภท แต่ละแบบ ต่อหน่วยเท่ากับ 12, 17, 10, 8 และ 15 นาที ตามลำดับ

1.5.2 โรงงานมีวัตถุดิบที่จะใช้ในการผลิตเป็นจำนวน 7,000 หน่วย จำนวนวัตถุดิบที่จะใช้ผลิตต่อหน่วยเท่ากับ 8, 8, 12, 10 และ 9 หน่วย ตามลำดับ

1.6) คนเลี้ยงหมูต้องการอาหารสำหรับหมูที่มีโปรตีนอย่างน้อยที่สุด 18 หน่วยต่อวัน เขา

เลือกซื้ออาหาร 3 ประเภทผสมกันคือ ข้าวโพด x_1 กิโลกรัม รำข้าว x_2 กิโลกรัม และถั่ว x_3 กิโลกรัม เขาทราบว่าอาหารแต่ละชนิดใน 1 กิโลกรัมจะให้โปรตีน 7, 16 และ 12 หน่วยตามลำดับ

2. จงเขียนฟังก์ชันเป้าหมายของการโปรแกรมต่อไปนี้

2.1) เพื่อที่จะทำให้โรงงานได้กำไรจากการผลิตมากที่สุด ผู้จัดการฝ่ายผลิตจึงวางแผนในการผลิตผลิตภัณฑ์แต่ละชนิดเป็นจำนวน x_j หน่วย $j = 1, 2, 3, 4$ กำไรจากการจำหน่ายผลิตภัณฑ์แต่ละชนิดเท่ากับ 42, 35, 30 และ 28 บาทต่อหน่วย ตามลำดับ

2.2) นายเพิ่มพูลต้องการจำหน่ายสินค้าให้ได้กำไรมากที่สุด ในแต่ละวันเขากำหนดว่าจะต้องขายสินค้า ก ให้ได้ x_1 หน่วย สินค้า ข x_2 หน่วย และสินค้า ค x_3 หน่วย กำไรที่ได้จากสินค้าแต่ละชนิดเท่ากับ 76, 60 และ 80 บาทต่อหน่วย ตามลำดับ

2.3) ผู้จัดการบริษัทลงทุนโฆษณาสินค้าทางทีวี x_1 ครั้ง ทางวิทยุ x_2 ครั้ง และทางหนังสือพิมพ์รายวัน x_3 ครั้ง ค่าใช้จ่ายในการโฆษณาแต่ละครั้งเท่ากับ 6,000 บาท, 4,500 บาท และ 4,000 บาท ตามลำดับ ในการโฆษณาแต่ละครั้งคาดว่าจะสามารถเรียกลูกค้าเพิ่มขึ้นโดยเฉลี่ย 10,000, 8,200 และ 9,000 คน ตามลำดับ

2.3.1 บริษัทต้องการโฆษณาโดยให้เสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด

2.3.2 บริษัทต้องการโฆษณาเพื่อให้ได้ลูกค้ามากที่สุด

2.4) ผู้จัดการบริษัทพีเอมพี ต้องการซื้อวัตถุดิบมาสต๊อคไว้ เพื่อให้เพียงพอกับการผลิตในคราวหน้า แต่ให้เสียค่าใช้จ่ายต่ำสุด เขาซื้อวัตถุดิบ ก จากเขตเอ x_1 หน่วย ๆ ละ 20 บาท จากเขตบี x_2 หน่วย ๆ ละ 18 บาท และจากเขตซี x_3 หน่วย ๆ ละ 15 บาท ซื้อวัตถุดิบ ข จากเขตเอ x_4 หน่วย ๆ ละ 25 บาท และจากเขตดี x_5 หน่วย ๆ ละ 30 บาท

2.5) เพื่อระดมเงินทุนให้ได้มากที่สุด บริษัทไทยการค้าจึงขายหุ้นราคา 100 บาท x_1 หุ้น ขายพันธบัตรประเภทหนึ่งราคา 1,000 บาท x_2 ใบ และขายพันธบัตรประเภท 2 ราคา 10,000 บาท x_3 ใบ

3. โรงงานอุตสาหกรรมขนาดย่อมผลิตวัสดุเอและวัสดุบี เครื่องจักรที่ใช้ในการผลิตวัสดุทั้งสองสามารถทำงานในช่วงการผลิตหนึ่ง ๆ ได้ 300 ชั่วโมง การผลิตวัสดุแต่ละหน่วยใช้เวลา 2 นาที

วัสดุเออาจทำมาจากวัตถุดิบ ก หรือวัตถุดิบ ข ก็ได้ ไม่ว่าจะใช้วัตถุดิบชนิดใดก็ตาม ในการผลิตวัสดุเอหนึ่งหน่วยต้องใช้วัตถุดิบ 1.2 กิโลกรัม สำหรับวัสดุบีอาจใช้วัตถุดิบ ก หรือวัตถุดิบ ข หรือวัตถุดิบ ค อย่างใดอย่างหนึ่ง 1.8 กิโลกรัมต่อหน่วย ในช่วงการผลิตหนึ่ง ๆ โรงงานมีวัตถุดิบ ก 370 กิโลกรัม มีวัตถุดิบ ข 450 กิโลกรัม และมีวัตถุดิบ ค 600 กิโลกรัม จงเขียนข้อจำกัดของการโปรแกรมนี้

4. ในการผลิตสินค้าเอและสินค้าบีของโรงงานแห่งหนึ่ง ต้องใช้เครื่องจักรในการผลิต 4 เครื่อง เครื่องจักรแต่ละเครื่องสามารถทำงานได้ไม่เกิน 3,000 ชั่วโมง รายละเอียดการผลิตกำหนดได้ดังนี้

เครื่องจักร	สินค้าเอ (นาทีต่อชิ้น)	สินค้าบี (นาทีต่อชิ้น)
เครื่องที่ 1	23	42
เครื่องที่ 2	21	50
เครื่องที่ 3	30.5	45.5
เครื่องที่ 4	20	37.5
ราคาวัตถุดิบ (บาท/ชิ้น)	5	23
ราคาขาย (บาท/ชิ้น)	50	120

ค่าใช้จ่ายทางด้านแรงงานทั้งหมด 15,000 บาท และค่าใช้จ่ายในการเตรียมการ 21,500 บาท จงเขียนตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นของปัญหานี้

5. บริษัทเออาดีได้ผลิตผลิตภัณฑ์ 2 ชนิดคือ เอ กับ ดี แต่ละชนิดต้องผ่านกรรมวิธีการผลิต 5 ขั้นตอนดังมีรายละเอียดต่อไปนี้

ขั้นตอนการผลิต	1	2	3	4	5
ผลิตภัณฑ์เอ (นาที/ชิ้น)	4	7	6	3	2
ผลิตภัณฑ์ดี (นาที/ชิ้น)	5	4	6	4	2
เวลาสูงสุดที่ใช้ทำงาน (ชั่วโมง)	2,300	5,800	5,000	3,400	2,000

ค่าใช้จ่ายในการลงทุนแต่ละขั้นตอนมีดังนี้

ขั้นตอนการผลิต	1	2	3	4	5
ค่าใช้จ่ายคงที่ (แสนบาท)	2.0	1.2	1.9	1.4	1.7
ค่าใช้จ่ายผันแปร					
ผลิตภัณฑ์เอ (บาท/ชิ้น)	3.0	5.0	4.5	2.7	2.0
ผลิตภัณฑ์ดี (บาท/ชิ้น)	2.5	2.0	4.2	2.1	1.8

บริษัทจำหน่ายผลิตภัณฑ์เอชิ้นละ 80 บาท ผลิตภัณฑ์ดีชิ้นละ 75 บาท จงเขียนตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นของปัญหานี้

6. องค์การผลิตอาหารสำเร็จรูปโดยใช้วัตถุดิบ 3 ประเภท วางแผนว่าจะซื้อวัตถุดิบแต่ละประเภทมาจำนวนเท่าใดจึงจะเพียงพอกับการผลิตภายใน 2 สัปดาห์ และให้อาหารที่ได้มีส่วนประกอบต่าง ๆ ครบตามเกณฑ์กำหนดขั้นต่ำ แต่ให้องค์การลงทุนน้อยที่สุด รายละเอียดเกี่ยวกับส่วนประกอบและราคาของวัตถุดิบกำหนดไว้ดังตาราง

	วัตถุดิบ ก	วัตถุดิบ ข	วัตถุดิบ ค	ปริมาณต่ำสุดที่ต้องการ
ส่วนประกอบ เอ	3	4	7	1,450 กรัม
ส่วนประกอบ บี	1	2	1	1,000 กรัม
ส่วนประกอบ ซี	5	3	1	1,200 กรัม
ส่วนประกอบ ดี	2	1	3	850 กรัม
ราคาวัตถุดิบ (บาท/หน่วย)	40	50	75	

(ส่วนประกอบของอาหารกำหนดในจำนวนกรัมต่อหน่วย)

จงเขียนตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นของปัญหานี้

7. นายเล็งเลิศมีเงิน 2,000,000 บาทที่จะนำไปลงทุนในด้านต่าง ๆ แยกเป็น ลงทุนในการซื้อหุ้นไม่เกิน 250,000 บาท ร่วมลงทุนในการค้ากับนายพานิชไม่เกิน 350,000 บาท ซื้อพันธบัตรรัฐบาล ได้ดอกเบี้ยปีละ 12% ที่เหลือนำไปฝากธนาคาร อย่างน้อยที่สุด 60% ของการลงทุนเป็นจำนวนที่ซื้อพันธบัตรรัฐบาล นายเล็งเลิศซื้อหุ้น ก และ หุ้น ข ซึ่งได้เงินปันผล 14% และ 11% ตามลำดับ อย่างน้อยที่สุด 70% ของจำนวนที่ซื้อหุ้นจะต้องเป็นหุ้น ข ซึ่งเป็นการลงทุนที่

ปลอดภัยกว่าหุ้น ก ในเรื่องเกี่ยวกับการลงทุนในการค้า มี 2 ประเภท ซึ่งคาดว่าจะได้กำไรโดยเฉลี่ยจากการค้าแต่ละประเภทเท่ากับ 20% และ 15% ตามลำดับ แต่การลงทุนทางด้านการค้าประเภทแรกเสี่ยงมากกว่าประเภทที่ 2 เขาจึงลงทุนในการค้าประเภทแรกไม่เกิน 30% ของการลงทุนทางด้านการค้าทั้งหมด เมื่อนายเล็งเลิศตั้งเป้าหมายในการลงทุน ว่าจะต้องได้ผลตอบแทนมากที่สุด ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นจะเป็นอย่างไร

8. บริษัทเอบีซีได้รับใบสั่งสินค้าจากตัวแทนซึ่งอยู่ในเขต ก เขต ข เขต ค และ เขต ง ให้ส่งตู้เย็นไปให้เป็นจำนวน 6, 5, 7 และ 7 ตู้ ตามลำดับ บริษัทมีตู้เย็นอยู่ในสต๊อคที่โรงงานเอ โรงงานบี และโรงงานซีเป็นจำนวน 10, 10 และ 8 ตู้ ตามลำดับ ค่าขนส่งตู้เย็นขึ้นอยู่กับน้ำหนักของตู้และระยะทางในการขนส่ง ซึ่งมีอัตราค่าขนส่ง (บาทต่อตู้) ดังนี้

	ตัวแทนการค้า			
	เขต ก	เขต ข	เขต ค	เขต ง
โรงงานเอ	120	80	95	100
โรงงานบี	75	90	110	82
โรงงานซี	105	60	150	134

จงเขียนตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น เมื่อบริษัทต้องการจัดส่งตู้เย็นให้ครบตามจำนวนที่ตัวแทนต้องการ แต่ให้เสียค่าใช้จ่ายในการจัดส่งต่ำที่สุด

9. ผู้จัดการฝ่ายขายของบริษัทมีงบประมาณทางด้านโฆษณา 1,200,000 บาท เขากะว่าจะลงทุนโฆษณาในหนังสือพิมพ์รายวัน 2 ฉบับ ฉบับแรกคิดค่าโฆษณา 8,000 บาทต่อครั้ง ฉบับที่ 2 คิดค่าโฆษณา 16,000 บาทต่อครั้ง จากประสบการณ์เขาทราบว่า การลงโฆษณาในหนังสือพิมพ์แต่ละฉบับจะมีผลให้สินค้าของเขาแพร่หลายในตลาดได้ จะต้องลงโฆษณาในหนังสือพิมพ์ฉบับแรกอย่างน้อยที่สุด 50 ครั้ง ในฉบับที่ 2 อย่างน้อยที่สุด 30 ครั้ง อย่างไรก็ตาม การลงโฆษณาในแต่ละฉบับไม่จำเป็นต้องเกิน 75 ครั้ง เขาควรจะลงโฆษณาในหนังสือพิมพ์แต่ละฉบับอย่างไร จึงจะเกิดผลดีที่สุด

10. นายฉลาดเป็นเจ้าของโรงงานผลิตอุปกรณ์ไฟฟ้า ในวันหนึ่ง ๆ เขาจะผลิตเครื่องอุปกรณ์ประเภท ก 30 หน่วย และผลิตเครื่องอุปกรณ์ประเภท ข 120 หน่วย นายเฉลียวลูกชายนายฉลาด

เป็นนักศึกษาวิชาสถิติ ได้เรียนรู้เกี่ยวกับเทคนิคการโปรแกรมเชิงเส้น จึงได้ศึกษารายละเอียดเกี่ยวกับการผลิตของโรงงาน พบว่าการผลิตอุปกรณ์ไฟฟ้าทั้งสองประเภทต้องใช้เครื่องจักร 4 ชนิด เวลาที่ใช้ในการผลิตต่อหน่วย และความสามารถของเครื่องจักร ตลอดจนต้นทุนในการผลิตมีดังนี้

	อุปกรณ์ประเภท ก	อุปกรณ์ประเภท ข	เวลาที่เครื่องจักรทำงานได้
เครื่องจักร เอ	20 นาที/หน่วย	–	3,000 นาที/วัน
เครื่องจักร บี	–	30 นาที/หน่วย	5,400 นาที/วัน
เครื่องจักร ซี	20 นาที/หน่วย	20 นาที/หน่วย	4,400 นาที/วัน
เครื่องจักร ดี	12 นาที/หน่วย	15 นาที/หน่วย	3,000 นาที/วัน
ต้นทุนการผลิต	40 บาท/หน่วย	32 บาท/หน่วย	

นายเฉลียวรู้ว่า กำไรที่จะได้แปรผันโดยตรงกับต้นทุน และอุปกรณ์ที่ผลิตในแต่ละวันสามารถจำหน่ายได้หมด เขาจึงสร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น แล้วแก้ปัญหาด้วยวิธีกราฟ จงหาว่าในแต่ละวันนายเฉลียวจะผลิตอุปกรณ์แต่ละชนิดเท่าใด และเขาจะต้องลงทุนเพิ่มขึ้นอีกวันละเท่าใด

ถ้าต้นทุนการผลิตของอุปกรณ์ไฟฟ้าประเภท ก ลดลง 12 บาท/หน่วย แผนการผลิตจะเปลี่ยนไปอย่างไร

11. โรงงานผลิตผลไม้กระป๋อง ซื้อผลไม้มาจากเขต ก และเขต ข ผลไม้ที่มาจากแต่ละเขตมีขนาดและคุณภาพต่างกัน เป็นผลให้ปริมาณผลผลิตที่ได้จากผลไม้แต่ละเขตแตกต่างกันไปด้วย แต่ส่วนที่เสียไปมีเปอร์เซนต์เท่ากัน ดังมีรายละเอียดต่อไปนี้

	ผลไม้เขต ก/กก.	ผลไม้เขต ข/กก.	ปริมาณสูงสุดที่ต้องการ
น้ำผลไม้	0.2	0.3	180 กิโลกรัม
ผลไม้เชื่อม	0.2	0.1	120 กิโลกรัม
ผลไม้กวน	0.3	0.3	240 กิโลกรัม
กำไร (บาท/กิโลกรัม)	10	12	

โรงงานควรจะวางแผนการซื้ออย่างไรจึงจะได้กำไรสูงสุด

หากในการผลิตกำหนดว่า ต้องการน้ำผลไม้ 170 กก. ผลไม้เชื่อม 110 กก. ผลไม้กวน คงเดิม โปรแกรมการซื้อควรจะเปลี่ยนแปลงอย่างไร

หากกำไรที่ได้จากการจำหน่ายผลไม้กระป๋อง เมื่อใช้ผลไม้จากเขต ก เปลี่ยนเป็น 8 บาท/กก. โปรแกรมการซื้อควรจะเปลี่ยนแปลงอย่างไร

12. บริษัทอาวายผลิตสินค้าอาและวายโดยอาศัยกรรมวิธี 3 ขั้นตอน เวลาที่ใช้ทำงานในแต่ละขั้นตอนในงวดการผลิตหนึ่ง ๆ มีไม่เกิน 120, 200 และ 80 ชั่วโมง ตามลำดับ รายละเอียดเกี่ยวกับการผลิตมีดังนี้

	สินค้าอา (นาที/หน่วย)	สินค้าวาย (นาที/หน่วย)
กรรมวิธีขั้นที่ 1	24	12
ขั้นที่ 2	12	36
ขั้นที่ 3	12	12

ในการจำหน่ายปรากฏว่าขายสินค้าอาได้กำไร 15 บาท/หน่วย ขายสินค้าวายได้กำไร 20 บาท/หน่วย บริษัทควรวางแผนการผลิตอย่างไร จึงจะทำให้ได้กำไรมากที่สุด และภายหลังการผลิตจะมีเวลาเหลือใช้ในแต่ละขั้นตอนการผลิตเท่าใด

13. ผลการวิเคราะห์ยาเม็ดแก้หวัดพบว่า ยาเม็ดขนาดธรรมดาประกอบด้วย แอสไพริน 2 เกรน ไบคาร์บอเนท 5 เกรน และโคดีน 1 เกรน ยาเม็ดขนาดใหญ่ประกอบด้วย แอสไพริน 1 เกรน ไบคาร์บอเนท 8 เกรน และโคดีน 6 เกรน การที่จะรักษาโรคหวัดให้หายได้ จะต้องใช้แอสไพรินอย่างน้อยที่สุด 12 เกรน ไบคาร์บอเนทและโคดีนอย่างน้อยที่สุด 74 เกรนและ 28 เกรน ตามลำดับ จงหาว่าควรจะใช้ยาเม็ดรวมกันอย่างน้อยที่สุดเท่าใด จึงจะรักษาโรคหวัดได้

14. โรงงานผลิตลูกกวาดเอกับบี โดยใช้กรรมวิธี 3 ขั้นตอนคือ ขั้นประกอบส่วนผสม ขั้นอบและขั้นบรรจุ ถ้าเวลาโดยเฉลี่ยเป็นนาทีที่ใช้ผลิตลูกกวาดแต่ละกล่อง ในกรรมวิธีแต่ละขั้นกำหนดไว้ดังตาราง

	ขั้นผสม	ขั้นอบ	ขั้นบรรจุ
ลูกกวาด เอ	3	5	1
ลูกกวาด บี	1	4	2

ในงวดการผลิตแต่ละงวด เครื่องจักรที่ใช้ในการประกอบส่วนผสมทำงานได้อย่างมากที่สุด 15 ชั่วโมง เวลาในการอบและบรรจุมีไม่เกิน 30 และ 12 ชั่วโมง ตามลำดับ โรงงานควรจะวางแผนการผลิตอย่างไรจึงจะทำให้ได้กำไรมากที่สุด ถ้าขายลูกกวาดเอกำไรกล่องละ 40 บาท ลูกกวาดบีกำไรกล่องละ 50 บาท

ถ้ากำไรของลูกกวาดบีเป็นสองเท่าของลูกกวาดเอ แผนการผลิตควรจะเปลี่ยนไปอย่างไร

15. บริษัทสยามสั่งชิ้นส่วนเครื่องจักรมาประกอบเองที่โรงงาน 2 แห่งในเขต ก และเขต ข บริษัทกำหนดว่าจะต้องประกอบเครื่องจักรประเภทที่ 1 ให้ได้อย่างน้อยที่สุด 5,000 ประกอบเครื่องจักรประเภทที่ 2 และ 3 ไม่เกิน 24,000 และ 30,000 ตามลำดับ ในแต่ละวันโรงงานในเขต ก สามารถประกอบเครื่องจักรแต่ละประเภทได้ 20, 40 และ 40 ตามลำดับ ในขณะที่โรงงานในเขต ข สามารถประกอบได้ 10, 30 และ 50 ตามลำดับ โรงงานในเขต ก เสียค่าใช้จ่ายในการประกอบเครื่องจักรวันละ 960,000 บาท ส่วนโรงงานในเขต ข เสียค่าใช้จ่ายวันละ 640,000 บาท บริษัทสยามควรจะวางแผนการประกอบเครื่องจักรอย่างไร จึงจะทำให้บริษัทเสียค่าใช้จ่ายทั้งหมดน้อยที่สุด แต่สามารถประกอบเครื่องจักรแต่ละประเภทได้ตามที่กำหนดไว้

16. องค์การอุตสาหกรรมแห่งหนึ่งผลิตผลิตภัณฑ์ 2 ประเภท กำหนดว่าในแต่ละงวดการผลิตจะผลิตให้ได้รวมกันอย่างมากที่สุด 800 กล่อง โรงงานมีวัตถุดิบที่จะนำมาใช้ได้ 3,000 กิโลกรัม การผลิตผลิตภัณฑ์แต่ละประเภทใช้วัตถุดิบ 2 และ 5 กิโลกรัมต่อกล่อง ตามลำดับ ในการผลิตต้องอาศัยการทำงานของเครื่องจักร 3 ชนิด รายละเอียดเกี่ยวกับการผลิตมีดังต่อไปนี้

	เวลาในการผลิต (นาที/กล่อง)		ค่าใช้จ่ายของเครื่องจักร (บาท/กล่อง)		เวลาที่เครื่องจักรทำงานได้ (ชั่วโมง)
	I	II	I	II	
เครื่องจักรเอ 1	24	12	14	7	240
เครื่องจักรเอ 2	12	36	6	18	336
เครื่องจักรเอ 3	36	24	15	10	480

ถ้าค่าใช้จ่ายของวัตถุดิบเท่ากับ 20 และ 50 บาทต่อกล่อง ราคาขายของผลิตภัณฑ์เท่ากับ 280 และ 385 บาทต่อกล่อง ตามลำดับ องค์การควรวางแผนการผลิตอย่างไรจึงจะได้ประโยชน์มากที่สุด

17. ร้านขายอาหารสัตว์ได้ใบสั่งอาหารซึ่งระบุว่า ในอาหารสัตว์จะต้องมีส่วนประกอบของอาหารเอ บี และ ซี อย่างน้อยที่สุด 60, 84 และ 36 หน่วย ตามลำดับ เจ้าของร้านเลือกอาหาร 2 ประเภทมาผสมกัน ส่วนประกอบของอาหารแต่ละประเภทต่อหนึ่งหน่วยน้ำหนักของอาหารและต้นทุนต่อหน่วยของอาหารทั้งสองกำหนดได้ดังนี้

	อาหารประเภทที่ 1	อาหารประเภทที่ 2
ส่วนประกอบ เอ	6 หน่วย	3 หน่วย
ส่วนประกอบ บี	6 หน่วย	6 หน่วย
ส่วนประกอบ ซี	2 หน่วย	6 หน่วย
ต้นทุน (บาท/หน่วยน้ำหนัก)	15	9

เจ้าของร้านควรใช้อาหารแต่ละประเภทมาผสมกันอย่างไร จึงจะได้อาหารสัตว์ที่ตรงตามใบสั่งขณะเดียวกันให้เจ้าของร้านลงทุนน้อยที่สุด จากอาหารผสมที่ได้จะมีส่วนประกอบของอาหารชนิดใดบ้างที่เกินขีดจำกัดขั้นต่ำ ในปริมาณเท่าใด

เนื่องจากอาหารประเภทที่ 2 มีราคาต่ำ เจ้าของร้านจึงพยายามที่จะใช้อาหารประเภทนี้และกำหนดว่าจะใช้อาหารประเภทที่ 2 ไม่เกิน 12 หน่วยน้ำหนัก ส่วนผสมจะเปลี่ยนแปลงอย่างไร

ถ้าต้นทุนอาหารประเภทที่ 1 เป็น 3 เท่าของอาหารประเภทที่ 2 และในใบสั่งระบุว่าจะต้องให้มีอาหารประเภทที่ 1 อย่างน้อยที่สุด 10 หน่วยน้ำหนัก ส่วนผสมจะเปลี่ยนแปลงอย่างไร

18. บริษัทจักรกลการผลิตรถยนต์รุ่นใหม่ 2 โมเดล เพื่อจัดส่งให้ตัวแทนจัดจำหน่าย โดยบริษัทจะได้กำไรจากการผลิตรถโมเดลเอคันละ 4,000 บาท จากโมเดลบีคันละ 2,000 บาท การผลิตรถโมเดลเอ ต้องใช้แรงคนงานโดยเฉลี่ยในการประกอบเครื่อง 150 ชั่วโมง ในการทาสีและทำให้เสร็จเรียบร้อย 50 ชั่วโมง ตรวจและทดสอบ 10 ชั่วโมง การผลิตรถโมเดลบีใช้แรงคนงานโดยเฉลี่ยในการประกอบเครื่อง 60 ชั่วโมง การทาสีและทำให้เสร็จเรียบร้อย 40 ชั่วโมง

ตรวจสอบและทดลอง 20 ชั่วโมง ในงวดการผลิตหนึ่งบริษัทมีแรงงานที่จะนำไปใช้ได้ดังนี้ ทางด้านประกอบเครื่อง 30,000 ชั่วโมง ทางด้านทาสีและทำให้เรียบร้อย 13,000 ชั่วโมง ทางด้านการตรวจสอบและทดลอง 5,000 ชม.

18.1 บริษัทควรจะวางแผนการผลิตแต่ละงวดอย่างไร จึงจะทำให้ได้กำไรมากที่สุด

18.2 ถ้ากำไรที่ได้จากการจำหน่ายรถทั้งสองโมเดลเท่ากัน แผนการผลิตจะเปลี่ยนไปอย่างไร

18.3 ถ้าอุปสงค์ของรถโมเดลเอขึ้นสูงมากจนทำให้บริษัทสามารถขึ้นราคารถได้ และเป็นผลให้กำไรจากการจำหน่ายรถโมเดลเอเป็น 3 เท่าของโมเดลบี จงแสดงให้เห็นจริงด้วยกราฟว่า บริษัทไม่จำเป็นที่จะผลิตรถโมเดลบีอีกต่อไป

19. ถ้าบริษัทจักรกลการ ยอมรับเป็นสปอนเซอร์ในรายการแสดงครึ่งชั่วโมง ซึ่งประกอบด้วยดนตรีและละคร โดยบริษัทกำหนดว่าจะต้องมีโฆษณาสลับรายการอย่างน้อยที่สุด 3 นาที ทางด้านผู้จัดการกำหนดว่าให้มีโฆษณาได้ไม่เกิน 12 นาที และต้องใช้เวลาไม่เกินรายการของละคร การแสดงละครใช้เวลาอย่างมากที่สุด 20 นาที เวลาที่เหลือเป็นของรายการดนตรี สปอนเซอร์ต้องจ่ายเงินในการแสดงละคร ดนตรีและโฆษณานาทีละ 6,000, 4,000 และ 2,000 บาท ตามลำดับ จากประสบการณ์ชี้ให้เห็นว่า รายการละครและดนตรีสามารถเรียกผู้ชมเพิ่มขึ้นโดยเฉลี่ย 4,000 และ 2,000 คนต่อนาที ตามลำดับ ส่วนการโฆษณาจะทำให้ผู้ชมผละออกไปโดยเฉลี่ยนาทีละ 1,000 คนเสมอ ผู้จัดรายการควรจัดสรรเวลาการแสดงอย่างไร เมื่อสปอนเซอร์ต้องการให้

ก. มีจำนวนผู้ชมรายการมากที่สุด

ข. เสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด

ในแต่ละกรณี จงเขียนตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น แล้วหาคำตอบอุตมะด้วยวิธีกราฟ

20. เพื่อให้เพียงพอกับความต้องการของผู้บริโภค บริษัทจึงต้องผลิตกาแฟดีเยี่ยมให้ได้ปริมาณ 15,000 ขวด แต่ละขวดบรรจุกาแฟ 10 ออนซ์ ส่วนผสมของกาแฟดีเยี่ยมประกอบด้วยกาแฟ 3 ประเภท เป็นกาแฟประเภทดี 1 ดี 2 และดี 3 ในปริมาณกาแฟ 15,000 ขวดนี้ จะต้องประกอบด้วยกาแฟดี 1 ไม่เกิน 45,000 ออนซ์ กาแฟดี 2 อย่างน้อยที่สุด 22,500 ออนซ์ และกาแฟดี 3 มากกว่า 30,000 ออนซ์ จงหาว่าควรใช้กาแฟแต่ละประเภทเป็นปริมาณเท่าใด จึงจะได้กาแฟดีเยี่ยม 15,000 ขวด แต่ให้บริษัทลงทุนน้อยที่สุด ในเมื่อราคาของกาแฟแต่ละประเภทเท่ากับ

5 7 และ 8 บาทต่อออนซ์ตามลำดับ ต้นทุนต่ำสุดจะมีค่าเท่าใด และในการผสมนี้จะมีจำนวนกาแฟดี 1 เหลืออยู่เท่าใด จะใช้กาแฟดี 2 และดี 3 เกินเกณฑ์กำหนดขั้นต่ำหรือไม่ ในปริมาณเท่าใด

21. ในแต่ละปีนักศึกษาวางแผนการเรียนไว้ว่า ในภาคการศึกษา 1 และ 2 จะเรียนภาคละ 8 วิชา และเรียนในภาคฤดูร้อน 4 วิชา แต่ละวิชามี 3 หน่วยกิตเหมือนกันหมด ในปีนี้เขากะว่าจะเรียนวิชาทางสถิติ 13 วิชา และเรียนวิชาอื่น ๆ อีก 7 วิชา จากการให้คำแนะนำของอาจารย์ที่ปรึกษาและจากประสบการณ์ของตัวเขาเอง เขาคาดคะเนว่าจะประสบผลสำเร็จในการเรียนได้จะต้องใช้เวลาในการศึกษาแต่ละวิชา โดยเฉลี่ยชั่วโมงต่อสัปดาห์ดังนี้

	วิชาสถิติ	วิชาอื่น ๆ
ภาคการศึกษา 1	7	7
ภาคการศึกษา 2	5	8
ภาคฤดูร้อน	12	10

21.1 กำหนด x_{i1}, $i = 1, 2, 3$ เป็นจำนวนวิชาสถิติ และ x_{i2}, $i = 1, 2, 3$ เป็นจำนวนวิชาอื่นที่เขาจะเรียนในภาค 1 ภาค 2 และภาคฤดูร้อน ตามลำดับ จงเขียนตัวแบบการโปรแกรม

21.2 ท่านจะแก้ปัญหาในตัวแบบที่ได้จาก 21.1 ด้วยวิธีกราฟอย่างไร และแผนการศึกษาควรจะเป็นอย่างไร เขาจึงจะใช้เวลาในการศึกษารวมกันน้อยที่สุด

21.3 หากเขาคาดคะเนได้ว่า จะได้เกรดเฉลี่ยต่อวิชาดังต่อไปนี้

	วิชาสถิติ	วิชาอื่น ๆ
ภาคการศึกษา 1	3.5	3.0
ภาคการศึกษา 2	3.0	3.5
ภาคฤดูร้อน	2.5	2.7

เขาควรจะวางแผนการเรียนอย่างไร จึงจะทำให้ได้เกรดรวมมากที่สุด จงหาคำตอบด้วยวิธีกราฟ