บทที่ 6
โปรแกรมที่ไม่เป็นเส้นตรง

ในปัญหาโปรแกรมเชิงคณิตศาสตร์ที่มีตัวแบบ

หาค่าสูงสุด (หรือค่าต่ำสุด) $Z = f(\underline{X}) = f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$

โดยมีข้อจำกัด $g_i(\underline{X}) = g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)\{\leqslant, =, \geqslant\} b_i, i = 1,2,\ldots,m$ (6.1)

และ $x_j \geqslant 0, \ j = 1,2,\ldots,n$

ปัญหาที่มีตัวแบบ (6.1) จะเป็นปัญหาการโปรแกรมไม่เป็นเส้นตรง (Nonlinear Programming Problem) ถ้ามีฟังก์ชัน $f,g_1,g_2,\ldots,g_m$ อย่างน้อย 1 ฟังก์ชันไม่เป็นฟังก์ชันเส้นตรง และจะถือว่า ฟังก์ชัน $f,g_1,g_2,\ldots,g_m$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปรตัดสินใจ (ควบคุมได้) $x_1,x_2,\ldots,x_n$ ที่หาอนุพันธ์ได้ การหาคำตอบต่อปัญหาประเภทนี้ จำเป็นต้องอาศัยความรู้ทางด้านแคลคูลัส

ก่อนอื่นให้เรามาทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาค่าสูงสุด (ต่ำสุด) ของฟังก์ชัน $f(\underline{X})$ ที่ไม่มีข้อจำกัด เพื่อความเข้าใจ และสะดวกต่อการนำไปใช้ในการหาคำตอบต่อปัญหาการโปรแกรมไม่เป็นเส้นตรง

convex และ concave function

เราจะพูดว่า $f(\underline{X})$ เป็น convex function ถ้ามีจุด 2 จุดใด ๆ คือ $\underline{X}_1$ กับ $\underline{X}_2$ และทุกค่าของ $\lambda, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ มีคุณสมบัติว่า

$$f\left[\lambda \underline{X}_2 + (1-\lambda)\underline{X}_1\right] \leqslant \lambda f(\underline{X}_2) + (1-\lambda) f(\underline{X}_1) \tag{6.2}$$

และเราจะพูดว่า $f(\underline{X})$ เป็น concave function ถ้า $-f(\underline{X})$ เป็น convex function

กฎที่จะใช้พิจารณาว่าฟังก์ชันเป็น convex หรือ concave มีดังนี้

กรณีของ 1 ตัวแปร $f(x)$ จะเป็น convex ในบริเวณของค่า x ที่เป็นไปได้ ก็ต่อเมื่อ

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \geqslant 0$$

กรณีของ 2 ตัวแปร $f(\underline{X})$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x_1 และ x_2 โดยที่ (x_1, x_2) อยู่ใน $S \subseteq E^2$

$$\text{คำนวณค่าของ } \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2$$

ถ้า $\Delta_2 > 0$ และ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} > 0$ และ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} > 0$ แล้ว f เป็น convex

$\Delta_2 > 0$ และ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} < 0$ และ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} < 0$ แล้ว f เป็น concave

$\Delta_2 < 0$ f ไม่เป็นทั้ง convex หรือ concave ฟังก์ชัน f(x) เป็น saddle

$\Delta_2 = 0$ ใช้นิยาม (6.2) ในการทดสอบว่าเป็น convex หรือไม่

ตัวอย่างเช่น เรามีฟังก์ชัน

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 11)^2 + 4(x_2 - 6)^2$$

ดังนั้น $$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2 > 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 8 > 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

$$\Delta_2 = 2 \times 8 - 0^2 = 16 > 0$$

แสดงว่า f เป็น convex function

กรณีของ n ตัวแปร $f(\underline{X})$ เป็นฟังก์ชันของ n ตัวแปร ที่หาค่าอนุพันธ์ที่ 2 ได้ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ อยู่ใน $S \subseteq E^n$ ให้ Δ_n เป็นดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์ Hessian ซึ่งกำหนดไว้ดังนี้

$$\Delta_n = |H| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

ฟังก์ชันจะเป็น convex ถ้า

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} > 0 \quad \Delta_2 > 0 \ldots \Delta_n > 0 \tag{6.3}$$

ฟังก์ชันจะเป็น concave ถ้า

$$\Delta_1 < 0 \quad \Delta_2 > 0 \quad \Delta_3 < 0 \ldots \tag{6.4}$$

นอกเหนือจากนี้ใช้ (6.2) ตรวจสอบ

ค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าสูงสุดสัมพันธ์

ฟังก์ชัน $f(\underline{X})$ จะมีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ (global maximum) ที่จุด $\underline{X}^*$ ถ้า

$$f(\underline{X}) \leqslant f(\underline{X}^*) \tag{6.5}$$

ทุกค่า $\underline{X}$ ที่ให้ฟังก์ชัน $f(\underline{X})$ นิยามไว้

และฟังก์ชัน $f(\underline{X})$ จะมีค่าสูงสุดสัมพันธ์ (relative maximum) ที่จุด $\underline{X}^0$ สำหรับค่าคงที่ ε และ δ, $0 < \varepsilon < \delta$

$$f(\underline{X}) \leqslant f(\underline{X}^0) \tag{6.6}$$

ทุกค่า $\underline{X}$ ที่ $0 < |\underline{X} - \underline{X}^0| < \varepsilon$ ในเมื่อ $f(\underline{X})$ นิยามในย่าน δ(δ – neighborhood) ของ $\underline{X}^0$

ค่าของ $\underline{X}^0$ จะเป็นคำตอบที่ได้จากสมการ

$$\frac{\partial f(\underline{X})}{\partial x_j} = 0, \; j = 1,2,\ldots,n \tag{6.7}$$

การหาค่าสูงสุดเมื่อมีข้อจำกัด อาศัยหลักการเดียวกัน เพียงแต่ว่าการพิจารณาค่า $\underline{X}$ ทุกค่า ต้องอยู่ภายใต้ข้อจำกัด กล่าวคือ พิจารณาจากค่า $\underline{X}$ ที่เป็นไปได้

ถ้าเรามีเซตของ m สมการ ที่มี n ตัวแปร $(m < n)$

$$g_i(\underline{X}) = 0, \quad i = 1,2,\ldots,m$$

และมี $m \times m$ เมตริกซ์ G ซึ่งนิยามไว้ดังนี้

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1(X)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1(X)}{\partial x_m} \\ \frac{\partial g_2(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2(X)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2(X)}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m(X)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m(X)}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

ถ้าลำดับชั้นของ G ที่จุด X_0 เท่ากับ $m(r(G) = m)$ จะมี m ฟังก์ชัน ϕ_i, $i = 1,2,\ldots,m$ ที่มีคุณสมบัติว่า $x_i = \phi_i(x_{m+1}, x_{m+2},\ldots,x_n)$, $i = 1,2,\ldots,m$

ดังนั้น ที่จุด $\underline{X} = \underline{X}^0$ เราจะได้

$$df(\underline{X}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(\underline{X}^0)}{\partial x_j} \cdot dx_j = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \phi_k(X^0)}{\partial x_j} + \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_j} = 0, \; j = m+1, m+2,\ldots,n \tag{6.8}$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i(X^0)}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \phi_k(X^0)}{\partial x_j} + \frac{\partial g_i(X^0)}{\partial x_j} - \rho \quad = m \cdot 1 m \cdot 2, .., n \qquad (6.9)$$

6.1 **ตัวคูณ** Lagrange

ปัญหาที่มีสมการข้อจำกัด

คาสูงสุด $z = f(\underline{X}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

โดยมีข้อจำกัด $g_i(\underline{X}) = g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_i$

$i = 1,2,\ldots,m$

การแก้ปัญหาโดยวิธีของ Lagrange จะได้จากการนิยามตัวคูณ Lagrange (Lagrangian multipliers) I,, $i = 1,2,\ldots,m$ เป็นตัวเลขที่ได้จาก m สมการ

$$df(\underline{X}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i d\left[b_i - g_i(\underline{X})\right] = 0 \qquad (6.10)$$

อาศัยผลที่ได้จาก (6.8), (6.9) และ (6.10) ทุก $j = m+1, m+2, \ldots, n$ จะสรุปได้ว่า ฟังก์ชัน Lagrange ของปัญหาที่มีสมการข้อจำกัด จะกำหนดได้โดย

$$F(\underline{X}, \underline{\lambda}) = f(\underline{X}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(b_i - g_i(\underline{X})) \qquad (6.11)$$

เงื่อนไขจำเป็นสำหรับ X^0 ที่เป็นค่าสูงสุดสัมพันธ์ของปัญหานี้ จะได้จากการกำหนดอนุพันธ์ของฟังก์ชัน Lagrange F เทียบกับ x_j และ λ_i ให้เท่ากับ 0 นั่นคือ X^0 เป็นค่าที่ได้จากสมการ

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial f(\underline{X})}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(\underline{X}}{\partial x_j} = 0, j = 1,2,\ldots,n \qquad (6.12)$$

และ

$$\frac{\partial F}{\partial_{\lambda i}} = b_i - g_i(\underline{X}) = 0, i = 1,2,\ldots,m \qquad (6.13)$$

กรณีที่มีข้อจำกัดของ n ตัวแปร

$$x_j \geqslant 0, \; j = 1,2,\ldots,n$$

เพื่อให้แน่ใจได้ว่า ทุกตัวแปรมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0 แน่ ๆ เรากำหนดตัวแปรใหม่ w_j^2 โดยที่

$$x_j - w_j^2 = 0, \quad j = 1,2,\ldots,n$$

ฟังก์ชัน Lagrange จะเปลี่ยนเป็น

$$F(X,\lambda,W) = f(X) + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i[b_i - g_i(X)] + \sum_{j=1}^{n}\lambda_{m+j}(x_j - w_j^2) \quad (6.14)$$

ดังนั้น
$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial g_i}{\partial x_j} + \lambda_{m+j} = 0 \quad (6.15)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(\underline{X}) = 0 \quad (6.16)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_{m+j}} = x_j - w_j^2 = 0 \quad (6.17)$$

$$\frac{\partial F}{\partial w_j} = -2\lambda_{m+j}w_j = 0 \quad (6.18)$$

จาก (6.18) แสดงให้เห็นว่า λ_{m+j} และ/หรือ w_j จะมีค่าเท่ากับ 0 สำหรับ $j = 1,2,\ldots,n$ ถ้า $\lambda_{m+j} = 0$ แล้ว $w_j \neq 0$ จะมีผลให้ $x_j > 0$ (จาก 6.17) และถ้า $x_j = 0$ w_j จะเท่ากับ 0 ด้วย ฟังก์ชัน Lagrange (6.14) จะมีรูปแบบเดียวกับ (6.11)

จะเห็นว่า เมื่อ $x_j > 0$ (6.15) ก็คือ (6.12) นั่นเอง ดังนั้น กรณีของปัญหาที่มีค่าตัวแปรไม่เป็นลบ สามารถทำได้วิธีการเดียวกันกับปัญหาที่ไม่มีข้อกำกัดของตัวแปร

กรณีที่ข้อจำกัดอยู่ในรูปอสมการ กล่าวคือ ปัญหามีตัวแบบ

ค่าสูงสุด $Z = f(\underline{X}) = f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$

โดยมีข้อจำกัด $g_i(\underline{X}) \leqslant b_i,\ i = 1,2,\ldots,m$

และ $\qquad x_j \geqslant 0,\quad j = 1,2,\ldots,n$

เปลี่ยนอสมการข้อจำกัดเป็นสมการข้อจำกัด จะได้

$$\left.\begin{aligned} g_i(X) + x_{n+i} &= b_i \\ x_{n+i} &\geqslant 0 \end{aligned}\right\},\quad i = 1,2,\ldots,m$$

จะได้ฟังก์ชัน Lagrange ดังนี้

$$F(X,\lambda,W) = f(X) + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i[b_i - g_i(X) - x_{n+i}] + \sum_{j=1}^{m+n}\lambda_{m+j}(x_j - w_j^2) \quad (6.19)$$

เราจะได้ระบบสมการเช่นเดียวกับ (6.15), (6.17) และ (6.18) สำหรับ (6.16) จะมีรูปแบบ ดังนี้

$$b_i - g_i(\underline{X}) - x_{n+i} = 0 \quad (6.16)$$

สมการที่มีเพิ่มเข้ามาคือ

$$\frac{\partial F}{\partial x_{n+i}} = -\lambda_i + \lambda_{m+n+i} = 0 \qquad (6.20)$$

ผลที่ตามมาจาก (6.17), (6.18) และ (6.20) ก็คือ ถ้า $x_{n+i} > 0$ แล้ว $\lambda_i = 0$ ซึ่งมีความหมายว่า ถ้าคำตอบที่ดีที่สุดสอดคล้องกับอสมการข้อจำกัดใด ตัวคูณ Lagrange ของข้อจำกัดนั้นจะมีค่าเป็น 0

ความหมายของตัวคูณ Lagrange

พิจารณาจากปัญหาที่มีสมการข้อจำกัด ถ้าเราได้ $\underline{X}^*$ เป็นจุดสูงสุด และ $\underline{\lambda}^*$ เป็นเวคเตอร์ของตัวคูณ Lagrange ณ จุด $\underline{X}^*$ ค่าของ $\underline{X}^*$ และ $\underline{\lambda}^*$ จะสอดคล้องกับสมการ (6.12) และ (6.13) จะเห็นได้ว่า $\underline{X}^*$ และ $\underline{\lambda}^*$ มีค่าเท่าใดย่อมขึ้นอยู่กับค่า b_i, $i = 1,2,\ldots,m$ ดังนั้นค่าสูงสุดของ Z ย่อมขึ้นอยู่กับค่า b_i ด้วย นั่นก็คือ

ถ้าเรากำหนด b เป็นเวคเตอร์ของ b_i, $i = 1,2,\ldots,m$ และถือว่า b_i เป็นตัวแปร เราจะได้

$$Z(\underline{b}) = f(\underline{X}^*) \qquad (6.21)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial b_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j^*} \cdot \frac{\partial x_j^*}{\partial b_j} \qquad (6.22)$$

จาก $\qquad g_k(\underline{X}^*) = b_k$ เราจะได้

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_k(X^*)}{\partial x_j^*} \cdot \frac{\partial x_j^*}{\partial b_i} = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } i = k \\ 0 & \text{อื่น ๆ} \end{cases} \qquad (6.23)$$

นั่นก็คือ $$\delta_{ik} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_k(X^*)}{\partial x_j^*} \cdot \frac{\partial x_j^*}{\partial b_i} = 0 \qquad (6.24)$$

$$i, k = 1,2,\ldots,m$$

(6.24) คูณด้วย λ_k^* แล้วหาผลรวมของทั้งหมด จะได้

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k^* \delta_{ik} - \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{m} \lambda_k^* \frac{\partial g_k(\underline{X}^*)}{\partial x_j^*} \right] \frac{\partial x_j^*}{\partial b_i} = 0 \qquad (6.25)$$

รวม (6.22) และ (6.24) เข้าด้วยกัน จะได้

$$\frac{\partial Z}{\partial b_i} = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^* \delta_{ik} + \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial f}{\partial x_j^*} - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^* \cdot \frac{\partial g_k(\underline{X}^*)}{\partial x_j^*} \right] \frac{\partial x_j^*}{\partial b_i} \qquad (6.26)$$

แทนค่า (6.12) ที่จุด $\underline{X}^*$ ใน (6.26) และจาก (6.23) เราจะได้

$$\frac{\partial Z}{\partial b_i} = \lambda_i^* \qquad (6.27)$$

จึงกล่าวได้ว่า ตัวคูณ Lagrange λ_i^* ณ จุดคำตอบที่ดีที่สุดก็คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของค่า Z ที่ดีที่สุด ต่อหน่วยของทรัพยากร b_i

6.2 เงื่อนไข Kuhn – Tucker

Kuhn และ Tucker ได้ปรับปรุงเงื่อนไขที่จำเป็น สำหรับการหาคำตอบที่ดีที่สุดต่อปัญหาโปรแกรมไม่เป็นเส้นตรง ในปี ค.ศ. 1951 โดยพิจารณาตัวแบบปัญหา

หาค่าสูงสุด $Z = f(\underline{X}) = f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$

โดยมีข้อจำกัด $g_i(\underline{X}) \leqslant b_i, \quad i = 1,2,\ldots,r$

$g_i(\underline{X}) \geqslant b_i, \quad i = r+1,\ldots,s$

$g_i(\underline{X}) = b_i, \quad i = s+1,\ldots,m$

และ $\underline{X} \geqslant 0$

เปลี่ยนอสมการกลุ่มที่ 1 และ 2 เป็นสมการ จะได้

$g_i(\underline{X}) + x_{n+i} = b_i, \quad i = 1,2,\ldots,r$

$g_i(\underline{X}) - x_{n+i} = b_i, \quad i = r+1,\ldots,s$

$x_{n+i} \geqslant 0, \quad i = 1,2,\ldots,s$

ปัญหานี้ก็จะกลายเป็นปัญหาที่มีสมการข้อจำกัด m สมการ มีตัวแปร $n+s$ ตัว แต่ละตัวแปรมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0

ฟังก์ชัน Lagrange ของปัญหานี้ก็คือ

$$\mathbf{F(X,\lambda,W) = f(X) + \sum_{i=1}^{r}\lambda_i[b_i - g_i(X) - x_{n+i}] + \sum_{i=r+1}^{s}\lambda_i[b_i - g_i(X) + x_{n+i}]}$$

$$\mathbf{+ \sum_{i=s+1}^{m}\lambda_i[b_i - g_i(X)] + \sum_{j=1}^{n+s}\lambda_{m+j}(x_j - w_j^2)}$$

เราจะได้ระบบสมการ (6.15) สำหรับ $j = 1,2,\ldots,n$ สมการ (6.16) สำหรับ $i = s+1,\ldots,m$ สมการ (6.16)′ สำหรับ $i = 1,2,\ldots,r$ สมการ (6.17), (6.18) สำหรับ $j = 1,2,\ldots,n+s$ สมการ (6.20) สำหรับ $i = 1,2,\ldots,r$ และสมการ

$$b_i - g_i(\underline{X}) + x_{n+i} = 0, \quad i = r+1,\ldots,s \tag{6.28}$$

$$\lambda_i + \lambda_{m+n+i} = 0, \quad i = r+1,\ldots,s \tag{6.29}$$

ผลที่ตามมาจาก (6.20), (6.18), (6.17) และ (6.16)′ เมื่อ $j = n+i$, $i = 1,2,\ldots,r$ ก็คือ

ถ้า $\lambda_i = \lambda_{m+j} > 0$ แล้ว $x_j = w_j^2 = 0$ เป็นผลให้

$$b_i - g_i(\underline{X}) = 0, \quad i = 1,2,\ldots,r \tag{6.30}$$

ถ้า $\lambda_i = \lambda_{m+j} = 0$ แล้ว $x_j = w_j^2 > 0$ เป็นผลให้

$$b_i - g_i(\underline{X}) > 0, \quad i = 1,2,\ldots,r \tag{6.31}$$

กล่าวโดยสรุป สำหรับ $i = 1,2,\ldots,r$

$$b_i - g_i(\underline{X}) \geqslant 0 \tag{6.32}$$

และ $\lambda_i\left[b_i - g_i(\underline{X})\right] = 0$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อเราพิจารณาผลที่ได้จาก (6.29), (6.18), (6.17) และ (6.28) เมื่อ $j = n+i$ และ $i = r+1,\ldots,s$ จะสรุปได้ว่า สำหรับ $i = r+1,\ldots,s$

$$b_i - g_i(\underline{X}) < 0, \quad x_j > 0, \lambda_i = \lambda_{m+j} = 0 \tag{6.33}$$

$$b_i - g_i(\underline{X}) = 0, \quad x_j = 0, \lambda_i = -\lambda_{m+j} > 0 \tag{6.34}$$

ผลที่ได้จาก (6.17), (6.18) และ (6.15) ก็คือ สำหรับ $j = 1,2,\ldots,n$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} < 0, \quad x_j = 0 \tag{6.35}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_j} = 0, \quad x_j > 0 \tag{6.36}$$

จากความหมายของตัวคูณ Lagrange (6.27) และผลจาก (6.30) – (6.36) ถ้าเรามี $\underline{X}^*$ $\underline{\lambda}^*$ เป็นคำตอบที่ดีที่สุดของปัญหานี้ เงื่อนไข Kuhn – Tucker ที่จำเป็นสำหรับคำตอบที่ดีที่สุด ก็คือ

1) $$\frac{\partial f(\underline{X}^*)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \frac{\partial g_i(\underline{X}^*)}{\partial x_i} \leqslant 0, \quad j = 1,2,\ldots,n \tag{6.37}$$

อสมการนี้จะเป็นสมการสำหรับ x_j^* ที่มีค่ามากกว่า 0

2) $$\sum_{j=1}^{n} x_j^*\left[\frac{\partial f(\underline{X}^*)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \frac{\partial g_i(\underline{X}^*)}{\partial x_j}\right] = 0 \tag{6.38}$$

3) $$\begin{aligned} b_i - g_i(\underline{X}^*) &\geqslant 0 \quad i = 1,2,\ldots,r \\ b_i - g_i(\underline{X}^*) &\leqslant 0 \quad i = r+1,\ldots,s \\ b_i - g_i(\underline{X}^*) &= 0 \quad i = s+1,\ldots,m \end{aligned} \tag{6.39}$$

4) $$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^*\left[b_i - g_i(\underline{X}^*)\right] = 0 \tag{6.40}$$

5) สำหรับ $i = 1,2,\ldots,r,\ \lambda_i^* \geq 0$

สำหรับ $i = r+1,\ldots,s\ \lambda_i^* \leq 0$ (6.41)

สำหรับ $i = s+1,\ldots,m\ \lambda_i^*$ อาจเป็นบวกหรือลบก็ได้

สมการและอสมการ (6.37) – (6.41) เป็นเงื่อนไข Kuhn – Tucker ที่จำเป็น สำหรับค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ $f(\underline{X})$

จากการพัฒนาวิธีการ Lagrange โดยเงื่อนไขของ Kuhn – Tucker ชี้ให้เห็นว่า คำตอบที่ได้จะแสดงถึงการใช้หรือต้องการทรัพยากรตามกรอบที่กำหนด และมีทรัพยากรบางประเภทที่เราใช้ไม่หมด หรือมีความต้องการเกินขีดต่ำสุดของมัน ข้อเท็จจริงนี้แสดงให้เห็นว่า ในการหาคำตอบที่ดีที่สุด เราไม่จำเป็นต้องพิจารณาข้อจำกัดทุกข้อ แต่เพื่อให้แน่ใจว่า เราจะได้คำตอบที่ดีที่สุด ที่มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ ควรจะมีการคำนวณตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. หาค่าสูงสุดของ $f(\underline{X})$ เมื่อไม่มีข้อจำกัด โดยการตรวจสอบจากฟังก์ชันเป้าหมาย ถ้าจุดที่ให้ค่า $f(\underline{X})$ สูงสุด เป็นจุดคำตอบที่เป็นไปได้ แสดงว่าได้ค่าสูงสุดสัมบูรณ์แล้ว ถ้าจุดที่ได้ เป็นจุดคำตอบที่เป็นไปไม่ได้ ให้ทำต่อข้อ (2)

2. เขียนฟังก์ชัน Lagrange เมื่อมีสมการข้อจำกัด $m-s$ สมการคือ $g_i(x) = b_i$ $i = s+1,\ldots,m$ จากระบบสมการที่ได้ของฟังก์ชัน หาคำตอบและตรวจสอบคำตอบ ถ้าสอดคล้องกับ s ข้อจำกัดที่เหลือ หยุดกระบวนการ แสดงว่าได้ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ $f(\underline{X})$ แล้ว นอกเหนือจากนี้ ให้ทำต่อข้อ (3)

3. เพิ่มอสมการข้อจำกัดทีละ 1 ในฟังก์ชัน Lagrange ของ (2) โดยถือเสมือนว่าเป็นสมการข้อจำกัดหนึ่ง หาคำตอบต่อระบบ Lagrange นี้ ถ้าคำตอบที่ได้สอดคล้องกับ $s-1$ ข้อจำกัดที่เหลือหยุดกระบวนการ แสดงว่าได้คำตอบที่ให้ค่าสูงสุดสัมบูรณ์แล้ว นอกเหนือจากนี้ให้เอาอสมการข้อจำกัดนี้ออก ใส่อสมการข้อจำกัดใหม่ลงไป ทำซ้ำวิธีการเดิม จนกว่าจะได้คำตอบที่สอดคล้องกับอสมการข้อจำกัดที่เหลือ ถ้าไม่มีอสมการข้อจำกัดใด ที่ทำให้ได้คำตอบที่เป็นไปได้ ให้ทำต่อข้อ (4)

4. ทำซ้ำตามวิธีการในข้อ (3) โดยเพิ่มข้อจำกัดทีละ $2,3,\ldots,s$ จนกว่าจะได้คำตอบที่เป็นไปได้จึงจะหยุดกระบวนการ

ตัวอย่าง 2 ตัวอย่างต่อไปนี้ แสดงให้เห็นอัลกอริทึม Lagrange และการประยุกต์ของเงื่อนไข Kuhn – Tucker

ตัวอย่างที่ 6.1 จากปัญหาการโปรแกรมไม่เป็นเส้นตรง

ค่าสูงสุด $f(x_1, x_2) = -(x_1-9)^2-4(x_2-5)^2$

โดยมีข้อจำกัด $2x_1+3x_2 \leqslant 24$

$2x_1+x_2 \leqslant 16$

$x_1, x_2 \geqslant 0$

จงหาคำตอบที่ดีที่สุด และตรวจสอบว่าคำตอบที่ได้นั้นเป็นไปตามเงื่อนไข Kuhn – Tucker หรือไม่

วิธีทำ **ขั้นที่ 1** ตรวจสอบฟังก์ชัน $f(x_1, x_2)$ จะพบว่ามีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่จุด (9, 5) ค่าที่ได้นี้ไม่สอดคล้องกับข้อจำกัดทั้ง 2 จึงเป็นคำตอบที่เป็นไปไม่ได้

ขั้นที่ 2 เขียนฟังก์ชัน Lagrange เมื่อมีข้อจำกัด $2x_1+3x_2 = 24$

$$F_1(\underline{X}, \underline{\lambda}) = -(x_1-9)^2-4(x_2-5)^2+\lambda_1(24-2x_1-3x_2)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} = -2(x_1-9)-2\lambda_1 = 0 \qquad \text{..........(1)}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = -8(x_2-5)-3\lambda_1 = 0 \qquad \text{..........(2)}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \lambda_1} = 24-2x_1-3x_2 = 0 \qquad \text{..........(3)}$$

คำตอบที่ได้จากสมการ (1) – (3) คือ

$$x_1 = 6.12, \; x_2 = 3.92, \; \lambda_1 = 2.88, \; \lambda_2 = 0$$

จะเห็นว่าคำตอบที่ได้นี้ไม่สอดคล้องกับข้อจำกัดที่ 2 เราจึงทำต่อขั้นที่ 3

ขั้นที่ 3 เขียนฟังก์ชัน Lagrange เมื่อมีข้อจำกัด $2x_1+x_2 = 16$

$$F_2(\underline{X}, \underline{\lambda}) = -(x_1-9)^2-4(x_2-5)^2+\lambda_2(16-2x_1-x_2)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_1} = -2(x_1-9)-2\lambda_2 = 0 \qquad \text{..........(4)}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_2} = -8(x_2-5)-\lambda_2 = 0 \qquad \text{..........(5)}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \lambda_2} = 16-2x_1-x_2 = 0 \qquad \text{..........(6)}$$

คำตอบที่ได้จากสมการ (4) – (6) คือ

$x_1 = 5.706, \; x_2 = 4.588, \; \lambda_1 = 0, \; \lambda_2 = 3.294$

คำตอบที่ได้นี้ยังคงเป็นคำตอบที่เป็นไปไม่ได้ ต้องทำขั้นต่อไป

ขั้นที่ 4 เขียนฟังก์ชัน Lagrange เมื่อมีข้อจำกัดทั้ง 2

$$F_3(\underline{X}, \underline{\lambda}) = -(x_1-9)^2 - 4(x_2-5)^2 + \lambda_1(24-2x_1-3x_2) + \lambda_2(16-2x_1-x_2)$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x_1} = -2(x_1-9) - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \qquad \text{..........(7)}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x_2} = -8(x_2-5) - 3\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \qquad \text{..........(8)}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial \lambda_1} = 24 - 2x_1 - 3x_2 = 0 \qquad \text{..........(9)}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial \lambda_2} = 16 - 2x_1 - x_2 = 0 \qquad \text{..........(10)}$$

ผลจาก (7) – (10) เราจะได้ $x_1 = 6$, $x_2 = 4$, $\lambda_1 = 2.5$, $\lambda_2 = 0.5$ ซึ่งเป็นคำตอบที่เป็นไปได้ สรุปได้ว่า

ค่าสูงสุดสัมบูรณ์เกิดขึ้นที่จุด $\underline{X}^* = (6, 4)$ และ $f(\underline{X}^*) = -13$

ขั้นต่อไปก็คือการตรวจสอบว่า คำตอบที่ดีที่สุด (6, 4, 2.5, 0.5) เป็นคำตอบที่สอดคล้องกับเงื่อนไข Kuhn – Tucker

1. $$\frac{\partial f(\underline{X}^*)}{\partial x_1} - \sum_{i=1}^{2} \lambda_i^* \frac{\partial g_i(\underline{X}^*)}{\partial x_1} = -2(x_1^*-9) - 2\lambda_1^* - 2\lambda_2^*$$
$$= -2(6-9) - 2(2.5) - 2(0.5) = 0$$
$$\frac{\partial f(\underline{X}^*)}{\partial x_2} - \sum_{i=1}^{2} \lambda_i^* \frac{\partial g_i(\underline{X}^*)}{\partial x_2} = -8(x_2^*-5) - 3\lambda_1^* - \lambda_2^*$$
$$= -8(4-5) - 3(2.5) - 0.5 = 0$$

2. $$\sum_{j=1}^{2} x_j^*\left[\frac{\partial f(\underline{X}^*)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{2} \lambda_i^* \frac{\partial g_i(X^*)}{\partial x_j}\right] = 6(0) + 4(0) = 0$$

3. $b_1 - g_1(\underline{X}^*) = 24 - 2(6) - 3(4) = 0$

   $b_2 - g_2(\underline{X}^*) = 16 - 2(6) - 4 = 0$

4. $$\sum_{i=1}^{2} \lambda_i^*\left[b_i - g_i(\underline{X}^*)\right] = 2.5(0) - 0.5(0) = 0$$

5. $\lambda_1^* = 2.5 > 0$, $\lambda_2^* = 0.5 > 0$

แสดงให้เห็นว่า คำตอบที่ได้นี้ เป็นไปตามเงื่อนไข Kuhn – Tucker

ข้อสังเกต

พิจารณา $f(x_1, x_2)$ จะเห็นว่า

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = -2 < 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = -8 < 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

ดังนั้น $\Delta_2 = (-2)(-8)-0^2 = 16 > 0$

แสดงว่า $f(x_1, x_2)$ เป็นฟังก์ชันเว้า (concave function) สำหรับบริเวณคำตอบที่เป็นไปได้เป็นเซตนูน (convex set) ดังนั้น เงื่อนไข Kuhn – Tucker จึงเป็นเงื่อนไขที่พอเพียงด้วย ซึ่งเป็นผลให้จุด (6, 4) เป็นจุดสูงสุดสัมบูรณ์ของ $f(x_1, x_2)$

ตัวอย่างที่ 6.2 จงหาคำตอบที่ดีที่สุดของ

ค่าสูงสุด $Z = f(x_1, x_2) = -x_1^2 + 10x_1 + 10x_2 - x_2^2 - 50$

โดยมีข้อจำกัด $x_1 + x_2 \leqslant 5$

$2x_1 + x_2 \geqslant 4$

$x_1^2 + x_2^2 = 8$

$x_1, x_2 \geqslant 0$

จงตรวจสอบคำตอบที่ได้ว่า เป็นไปตามเงื่อนไข Kuhn – Tucker หรือไม่

วิธีทำ เริ่มต้นจากการตรวจสอบฟังก์ชัน $f(x_1, x_2)$ จะเห็นว่ามีค่าสูงสุดที่จุด (5, 5) ซึ่งเป็นคำตอบที่เป็นไปไม่ได้

ต่อไปเขียนฟังก์ชัน Lagrange เมื่อมีข้อจำกัด $x_1^2 + x_2^2 = 8$ จะได้

$$F(x_1, x_2) = -x_1^2 + 10x_1 + 10x_2 - x_2^2 - 50 + \lambda_3(8 - x_1^2 - x_2^2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = -2x_1 + 10 - 2\lambda_3 x_1 = 0 \qquad \text{..........(1)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = -2x_2 + 10 - 2\lambda_3 x_2 = 0 \qquad \text{..........(2)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_3} = 8 - x_1^2 - x_2^2 = 0 \qquad \text{..........(3)}$$

ผลจาก (1) และ (2) เราจะได้ $\frac{x_1 - 5}{x_2 - 5} = \frac{x_1}{x_2}$ หรือ $x_1 = x_2$ แทนใน (3) จะได้ $x_1 = x_2 = 2$ เป็นผลให้ได้ $\lambda_3 = 1.5$

จะเห็นว่าคำตอบที่ได้นี้สอดคล้องกับข้อจำกัด 2 ข้อแรก เราจึงสรุปว่า $x_1^* = x_2^* = 2$ เป็นคำตอบที่ดีที่สุด มีค่า $Z_{\text{สูงสุด}} = -18$

ต่อไปตรวจสอบว่า $(\underline{X}^*, \underline{\lambda}^*)' = (2, 2, 0, 0, 1.5)$ สอดคล้องตามเงื่อนไข Kuhn – Tucker หรือไม่ ดังนี้

1. $x_j^* > 0, \quad j = 1, 2; \; \lambda_1^* = \lambda_2^* = 0, \; \lambda_3^* > 0$ ดังนั้น

$$\frac{\partial f(\underline{X}^*)}{\partial x_1} - \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^* \frac{\partial g_i(\underline{X}^*)}{\partial x_1} = -2x_1^* + 10 - \lambda_1^* - 2\lambda_2^* - 2\lambda_3^* x_1^*$$

$$= -2(2) + 10 - 0 - 2(0) - 2(1.5)(2) = 0$$

$$\frac{\partial f(\underline{X}^*)}{\partial x_2} - \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^* \frac{\partial g_i(\underline{X}^*)}{\partial x_2} = -2x_2^* + 10 - \lambda_1^* - \lambda_2^* - 2\lambda_3^* x_2^*$$

$$= -2(2) + 10 - 0 - 0 - 2(1.5)(2) = 0$$

2. $$\sum_{j=1}^{2} x_j^* \left[\frac{\partial f(\underline{X}^*)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^* \frac{\partial g_i(\underline{X}^*)}{\partial x_j} \right] = 2(0) + 2(0) = 0$$

3. $b_1 - g_1(\underline{X}^*) = 5 - x_1^* - x_2^* = 5 - 2 - 2 = 1 > 0$

   $b_2 - g_2(\underline{X}^*) = 4 - 2x_1^* - x_2^* = 4 - 2(2) - 2 = -2 < 0$

   $b_3 - g_3(\underline{X}^*) = 8 - x_1^{*2} - x_2^{*2} = 8 - 2^2 - 2^2 = 0$

4. $$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i^* \left[b_i - g_i(\underline{X}^*) \right] = 0(1) + 0(-2) + 1.5(0) = 0$$

แสดงให้เห็นว่า คำตอบที่ได้เป็นไปตามเงื่อนไข Kuhn – Tucker

6.3 โปรแกรมกำลังสอง (Quadratic Programming)

ปัญหาการโปรแกรมเชิงกำลังสอง เป็นกรณีหนึ่งของปัญหาการโปรแกรมไม่เป็นเส้นตรง ลักษณะของปัญหาจะมีฟังก์ชันเป้าหมาย Z ที่เป็นฟังก์ชันของกำลังสองของตัวแปร โดยมีข้อจำกัด $g_i(\underline{X})$ เป็นฟังก์ชันเส้นตรง ทุก $i = 1,2,\ldots,m$ ตัวแบบของปัญหา คือ

ค่าสูงสุด $Z = f(\underline{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} q_{jk} x_j x_k$

โดยมีข้อจำกัด $g_i(\underline{X}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \quad i = 1,2,\ldots,m$

$x_j \geqslant 0, \quad j = 1,2,\ldots,n$

ในเมื่อ q_{jk} เป็นค่าคงที่ และ $q_{jk} = q_{kj}$

(ตัวอย่าง 6.1 ก็เป็นกรณีหนึ่งของปัญหานี้)

การหาคำตอบต่อปัญหานี้ วิธีหนึ่งที่จะนำเสนอในที่นี้ ก็คือวิธีการ Lagrange ตามเงื่อนไข Kuhn – Tucker และการหาคำตอบโดยใช้วิธีการซิมเพลกซ์ของวูลฟ (Wolfe)

เริ่มต้นการหาคำตอบด้วยการเขียนฟังก์ชัน Lagrange ของปัญหาโปรแกรมกำลังสอง ตามรูปแบบ (6.19) ดังนั้น เราจะได้

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} + \lambda_{m+j} = c_j - \sum_{k=1}^{n} q_{jk}x_k - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} + \lambda_{m+j} = 0 \qquad (6.42)$$

$$b_i - g_i(\underline{X}) - x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = 0 \qquad (6.43)$$

และผลจาก (6.17), (6.18) และ (6.20) เราจะได้

$$x_j, x_{n+i}, \lambda_i, \lambda_{m+j} \geqslant 0 \qquad (6.44)$$

$$x_j\lambda_{m+j} = 0, \quad x_{n+i}\lambda_i = 0 \qquad (6.45)$$

ซึ่งเป็นระบบสมการตามเงื่อนไข Kuhn – Tucker ที่มี $m+n$ สมการ $2m+2n$ ตัวแปร เมื่อเราหาคำตอบที่เป็นไปได้ จะมีจำนวนคำตอบทั้งหมด = 2^{m+n} ชุด คำตอบที่มีค่าตัวแปรมากกว่าหรือเท่ากับ 0 และให้ค่า $f(\underline{X})$ สูงสุด จะเป็นคำตอบที่ดีที่สุด อย่างไรก็ตามวิธีนี้ต้องใช้เวลาในการคำนวณมาก ด้วยเหตุที่ระบบสมการ (6.42) และ (6.43) เป็นระบบของสมการเชิงเส้นตรง วูลฟ (Wolfe) ได้เสนอการหาคำตอบด้วยวิธีการซิมเพลกซ์

จาก (6.42) และ (6.43) เราจัดสมการใหม่เป็น

$$\sum_{k=1}^{n} q_{jk}x_k + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} - \lambda_{m+j} = c_j \qquad (6.46)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i \qquad (6.47)$$

จาก (6.46) จะเห็นว่า ถ้าเราเริ่มต้นคำตอบชุดแรก โดยให้ x_k และ λ_i เป็น 0 เราจะได้ $\lambda_{m+j} = -c_j$ ซึ่งเป็นคำตอบที่เป็นไปไม่ได้ (ไม่สอดคล้องกับ (6.44)) การที่เราจะเลือก x_k หรือ λ_i ตัวใดมาเป็นคำตอบชุดแรก ก็เป็นเรื่องที่ตัดสินใจยาก ไม่แน่ว่าจะได้คำตอบที่เป็นไปได้หรือไม่ วิธีที่ดีที่สุด ก็คือการใช้ตัวแปรเทียม y_j บวกเข้าไปทางด้านซ้ายของสมการ (6.46) โดยที่ตัวแปรนี้เป็นเพียงตัวช่วยในการหาจุดเริ่มต้น มันจะต้องมีค่าน้อยที่สุด และในคำตอบที่ดีที่สุด จะต้องมี y_j เป็น 0 ทุกตัว จากข้อเท็จจริงนี้จะเห็นได้ว่า การหาค่า $\underline{X}$ และ $\underline{\lambda}$ ทุกตัวที่ไม่มีค่าเป็นลบของ (6.46) และ (6.47) ก็คือการหาคำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาโปรแกรมเชิงเส้น

ค่าต่ำสุด $P = \sum_{j=1}^{n} y_j$

โดยมีข้อจำกัด (6.46), (6.47), (6.44) และ (6.45)

ข้อจำกัด (6.45) ชี้ให้เห็นว่า ค่าของ x_j กับ λ_{m+j} และ x_{n+i} กับ λ_i จะมีค่าเป็นบวกพร้อม ๆ กันไม่ได้ กล่าวคือ ถ้า x_j เป็นตัวแปรฐาน เราจะเลือก λ_{m+j} มาเป็นตัวแปรฐานในขณะที่มี x_j อยู่ไม่ได้ เช่นเดียวกัน ถ้ามี λ_i เป็นตัวแปรฐาน จะมี x_{n+i} เป็นตัวแปรฐานร่วมกันไม่ได้ ให้เรามาพิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 6.3 จงหาคำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาในตัวอย่างที่ 6.1 โดยใช้เงื่อนไข Kuhn – Tucker และซิมเพลกซ์อัลกอริทึมของวูลฟ

วิธีทำ เงื่อนไข Kuhn – Tucker ของปัญหาในตัวอย่างที่ 6.1 ก็คือ

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} - \sum_{i=1}^{2} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_1} + \lambda_{2+1} = -2x_1 + 18 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} - \sum_{i=1}^{2} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_2} + \lambda_{2+2} = -8x_2 + 40 - 3\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_4 = 0$$

$$b_1 - g_1(\underline{X}) - x_{2+1} = 24 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0$$

$$b_2 - g_2(\underline{X}) - x_{2+2} = 16 - 2x_1 - x_2 - x_4 = 0$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geqslant 0$$

$$x_1\lambda_3,\ x_2\lambda_4,\ x_3\lambda_1,\ x_4\lambda_2 = 0$$

การหาคำตอบโดยใช้ซิมเพลกซ์อัลกอริทึมของวูลฟ์ เริ่มต้นจากการเขียนตัวแบบมาตรฐานของปัญหาโปรแกรมเชิงเส้น จากผลของเงื่อนไข Kuhn – Tucker แล้วหาคำตอบด้วยวิธีการซิมเพลกซ์ จะได้

ค่าต่ำสุด $P = y_1 + y_2$

โดยมีข้อจำกัด

$$\begin{aligned}
2x_1 \qquad\qquad + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \qquad + y_1 &= 18 \\
8x_2 \qquad + 3\lambda_1 + \lambda_2 \qquad - \lambda_4 \quad + y_2 &= 40 \\
2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 24 \\
2x_1 + x_2 \qquad + x_4 &= 16
\end{aligned}$$

$$x_j, x_{2+j}, \lambda_j, \lambda_{2+j}, y_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2$$

$$x_j\lambda_{2+j},\ x_{2+j}\lambda_j = 0, \quad j = 1,2$$

1

		x_1	x_2	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	
P	58	2	8	5	3	−1	−1	ค่า θ_i
y_1	18	2	0	2	2	−1	0	—
y_2	40	0	8	3	1	0	−1	5
x_3	24	2	3	0	0	0	0	8
x_4	16	2	1	0	0	0	0	16

2

		x_1	y_2	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	
P	18	2	−1	2	2	−1	0	ค่า θ_i
y_1	18	2	0	2	2	−1	0	9
x_2	5	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$-\frac{1}{8}$	—
x_3	9	2	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{9}{8}$	$-\frac{3}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	$4\frac{1}{2}$
x_4	11	2	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$5\frac{1}{2}$

3

		x_3	y_2	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	
P	9	−1	$-\frac{5}{8}$	$\frac{25}{8}$	$\frac{19}{8}$	−1	$-\frac{3}{8}$	ค่า θ_i
y_1	9	−1	$\frac{3}{8}$	$\frac{25}{8}$	$\frac{19}{8}$	−1	$-\frac{3}{8}$	$2\frac{22}{25}$
x_2	5	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$-\frac{1}{8}$	$13\frac{1}{3}$
x_1	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{16}$	$-\frac{9}{16}$	$-\frac{3}{16}$	0	$\frac{3}{16}$	—
x_4	2	−1	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$2\frac{2}{3}$

			x_3	y_2	x_4	λ_2	λ_3	λ_4	
	P	$\frac{2}{3}$	$\frac{19}{6}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{25}{6}$	$\frac{4}{3}$	-1	$\frac{19}{24}$	**ค่า θ_i**
	y_1	$\mathbf{\frac{2}{3}}$	$\mathbf{\frac{19}{6}}$	$-\mathbf{\frac{2}{3}}$	$-\mathbf{\frac{25}{6}}$	$\mathbf{\frac{4}{3}}$	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{\frac{19}{24}}$	$\mathbf{\frac{1}{2}}$
4	x_2	4	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	**0**	0	0	—
	x_1	6	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	**0**	0	0	—
	λ_1	$\frac{8}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\mathbf{\frac{1}{3}}$	0	$-\frac{1}{3}$	8

			x_3	y_2	x_4	y_1	λ_3	λ_4	
	P	0	0	-1	0	-1	0	0	
	λ_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{19}{8}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{25}{8}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{19}{18}$	
5	x_2	4	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	
	x_1	6	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	0	0	0	
	λ_1	$\frac{5}{2}$	$-\frac{17}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{19}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{17}{32}$	

สรุปได้ว่า คำตอบที่ดีที่สุดของปัญหานี้ คือ $x_1 = 6$, $x_2 = 4$, $\lambda_1 = 2.5$, $\lambda_2 = 0.5$ ค่า $Z_{\text{สูงสุด}} = -(6-9)^2 - 4(4-5)^2 = -13$

ตัวอย่างที่ 6.4

$$\text{ค่าสูงสุด } Z = f(x_1, x_2)$$
$$= 10x_1 - x_1^2 + 64x_2 - 8x_2^2 + 400$$

โดยมีข้อจำกัด $2x_1 + x_2 \leqslant 47$

$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

ก) จงหาระบบสมการที่จะนำผลไปสู่เงื่อนไข Kuhn – Tucker

ข) จงหาคำตอบที่ดีที่สุด โดยใช้อัลกอริทึมของวูลฟ

วิธีทำ ก) การสร้างเงื่อนไข Kuhn – Tucker เราต้องปรับข้อจำกัด และข้อจำกัดของตัวแปรดังนี้

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 47$$

$$x_j - w_j^2 = 0, \quad j = 1,2,3$$

เขียนฟังก์ชัน Lagrange จะได้

$$F(\underline{X}, \underline{\lambda}, \underline{W}) = 10x_1 - x_1^2 + 64x_2 - 8x_2^2 + 400 + \lambda_1(47 - 2x_1 - x_2 - x_3) + \sum_{j=1}^{3} \lambda_{1+j}(x_j - w_j^2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 10 - 2x_1 - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 64 - 16x_2 - \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_3} = -\lambda_1 + \lambda_4 = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots(3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 47 - 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = x_1 - w_1^2 = 0 \qquad (5)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_3} = x_2 - w_2^2 = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots(6)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_4} = x_3 - w_3^2 = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots(7)$$

$$\frac{\partial F}{\partial w_1} = -2\lambda_2 w_1 = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots(8)$$

$$\frac{\partial F}{\partial w_2} = -2\lambda_3 w_2 = 0 \qquad \ldots\ldots(9)$$

$$\frac{\partial F}{\partial w_3} = -2\lambda_4 w_3 = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots(10)$$

ข) การหาคำตอบโดยใช้ซิมเพลกซ์อัลกอริทึมของวูลฟ เริ่มต้นด้วยการเขียนตัวแบบมาตรฐาน โดยอาศัยผลจากเงื่อนไข Kuhn – Tucker จะได้

ค่าต่ำสุด $P = y_1 + y_2$

โดยมีข้อจำกัด

$$2x_1 + 2\lambda_1 - \lambda_2 + y_1 = 10 \qquad \text{(ผลจาก (1))}$$

$$16x_2 + \lambda_1 - \lambda_3 + y_2 = 64 \qquad \text{(จาก(2))}$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 47 \qquad \text{(จาก (4))}$$

$x_j, \lambda_j, y_i \geqslant 0, \quad j = 1,2,3, \ i = 1,2$ (ผลจาก (3),

$x_j\lambda_{1+j}, x_3\lambda_1 = 0, \quad j = 1,2$ (5) – (10))

			x_1	x_2	λ_1	λ_2	λ_3	
	P	74	2	16	3	−1	−1	ค่า θ_i
	y_1	10	2	0	2	−1	0	—
1	y_2	64	0	16	1	0	−1	4
	x_3	47	2	1	0	0	0	47

			x_1	y_2	λ_1	λ_2	λ_3	
	P	10	2	−1	2	−1	0	ค่า θ_i
	y_1	10	2	0	2	−1	0	5
2	x_2	4	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	0	$-\frac{1}{16}$	—
	x_3	43	2	$-\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{16}$	$21\frac{1}{2}$

			y_1	y_2	λ_1	λ_2	λ_3	
	P	0	−1	−1	0	0	0	
	x_1	5	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	
3	x_2	4	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	0	$-\frac{1}{16}$	
	x_3	33	−1	$-\frac{1}{16}$	$-\frac{33}{16}$	1	$\frac{1}{16}$	

สรุปได้ว่า คำตอบที่ดีที่สุดคือ $x_1 = 5, \ x_2 = 4$ โดยมี

$$Z_{\text{สูงสุด}} = 10(5) - 5^2 + 64(4) - 8(4^2) + 400 = 553$$

ข้อสังเกต

1. จากตารางที่ 2 เรามีอัตราการลดลงต่อหน่วยของ x_1 กับ λ_1 เท่ากัน แต่เราไม่เลือก λ_1 เพราะจะทำให้ได้ λ_1 และ x_3 มีค่ามากกว่า 0 พร้อมกัน ซึ่งขัดกับข้อจำกัดของมัน คำตอบนี้จึงใช้ไม่ได้

2. การหาคำตอบโดยใช้เงื่อนไข Kuhn – Tucker และซิมเพลกซ์อัลกอริทึมของวูลฟ จะได้ค่าที่ดีที่สุดที่แท้จริงของฟังก์ชันเป้าหมาย ถ้าเราใช้วิธีการ Lagrange ที่ใช้เงื่อนไข Kuhn – Tucker บางข้อ เช่นในตัวอย่างที่ 6.1 และตัวอย่าง 6.2 อาจจะไม่ได้คำตอบที่แท้จริง และจะได้คำตอบที่ไม่เป็นไปตามเงื่อนไข Kuhn – Tucker ข้อที่ 5 กล่าวคือ เราจะได้ค่า $\lambda_1 < 0$

ให้นักศึกษาตรวจสอบ โดยการแก้ปัญหาในตัวอย่าง 6.4 ตามวิธีการในตัวอย่างที่ 6.1 และตรวจสอบคำตอบในแต่ละตัวอย่างด้วยวิธีกราฟ

6.4 โปรแกรมเชิงจำนวนที่ไม่เป็นเส้นตรง

ถ้าข้อกำกัดของตัวแปร เป็นเลขจำนวนเต็มที่มีค่ามากกว่า หรือเท่ากับ 0 นั่นคือ

$$x_j = 0,1,2,\ldots$$

โปรแกรมไม่เป็นเส้นตรง ก็จะเป็นโปรแกรมเชิงจำนวนที่ไม่เป็นเส้นตรง (Nonlinear Integer Programming) การหาคำตอบจะใช้วิธีใดย่อมขึ้นอยู่กับลักษณะของปัญหานั้น ในที่นี้จะพูดถึงวิธีการของโปรแกรม 0 – 1 เมื่อฟังก์ชัน f หรือ $g_1, g_2, \ldots, g_m$ เป็นฟังก์ชันที่มีกำลังไม่เกิน 2

ถ้า f หรือ $g_1, g_2, \ldots, g_m$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปรที่มีกำลังไม่เกิน 2 จากฟังก์ชัน g_i หาค่าสูงสุดที่เป็นไปได้ของ x_j ให้เท่ากับ u_j แทนค่าตัวแปร $y_{jk} = 0,1$ ในตัวแบบของปัญหาเดิม ดังนี้

$$x_j = \sum_{k=0}^{i} 2^k y_{jk} \quad \text{เมื่อ } 2^{i+1} - 1 \geqslant u_j$$

เมื่อ $y_{jk} = 0$ หรือ 1 y_{jk}^t ย่อมเท่ากับ 0 หรือ 1 ด้วย แต่ผลคูณของ y_{jk} t ตัว จะเท่ากับ 1 ถ้าทุกตัวเป็น 1 นอกนั้นจะเท่ากับ 0

ดังนั้น ถ้าเรามี $y_P = \prod_{j=1}^{t} y_{jk}$ y_P จะเป็น 0 หรือ 1 ภายใต้ข้อจำกัด

$$\sum_{j=1}^{t} y_{jk} - y_P \leqslant t - 1$$

$$-\sum_{j=1}^{t} y_{jk} + t y_P \leqslant 0$$

ข้อจำกัดแรก จะให้ค่า $y_P = 1$ ถ้าทุกตัวแปรมีค่าเป็น 1 ข้อจำกัดที่สอง จะให้ค่า $y_P = 0$ ถ้ามีตัวแปรอย่างน้อย 1 ตัวเป็น 0 ดังนั้น การกำหนดให้ผลคูณระหว่างตัวแปร 0 – 1

มีค่าเป็น 0 หรือ 1 ได้ก็ต้องเพิ่มข้อจำกัดทั้ง 2 เข้าไปในตัวแบบ ให้เรามาศึกษาจากตัวอย่างต่อไปนี้ กรณี $t = 2$

ตัวอย่างที่ 6.5 จงเปลี่ยนตัวแบบของปัญหาต่อไปนี้ เป็นปัญหาโปรแกรม 0–1 และหาคำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาด้วยวิธีการแจงนับ

ค่าสูงสุด $Z = 3x_1^2 + x_2^2$

โดยมีข้อจำกัด $3x_1 + 4x_2 \leqslant 12$

$$2x_1 + x_2 \leqslant 6$$

$$x_1, x_2 = 0,1,2,\ldots$$

วิธีทำ จะเห็นว่าค่าสูงสุดของ x_1 และ x_2 คือ 3 ดังนั้น เรากำหนด

$$x_j = y_{j0} + 2y_{j1}, \quad j = 1, 2$$

แทนในตัวแบบเดิม จะได้ตัวแบบปัญหาโปรแกรม 0–1

ค่าสูงสุด $Z = 3y^2_{10} + 12y_{10}y_{11} + 12y_{11}^2 + y_{20}^2 + 4y_{20}y_{21} + 4y_{21}^2$

โดยมีข้อจำกัด $3y_{10} + 6y_{11} + 4y_{20} + 8y_{21} \leqslant 12$

$$2y_{10} + 4y_{11} + y_{20} + 2y_{21} \leqslant 6$$

$$y_{10}, y_{11}, y_{20}, y_{21} = 0, 1$$

เราให้ $y_1 = y_{10}y_{11}$ และ $y_2 = y_{20}y_{21}$ ดังนั้น เป้าหมาย Z จะเป็น

ค่าสูงสุด $Z = 3y_{10} + 12y_1 + 12y_{11} + y_{20} + 4y_2 + 4y_{21}$

และมีข้อจำกัดเพิ่มมาอีก ดังนี้

$$y_{10} + y_{11} - y_1 \leqslant 1$$

$$-y_{10} - y_{11} + 2y_1 \leqslant 0$$

$$y_{20} + y_{21} - y_2 \leqslant 1$$

$$-y_{20} - y_{21} + 2y_2 \leqslant 0$$

$$y_1, y_2 = 0, 1$$

การหาคำตอบของโปรแกรมนี้ มักจะกำหนดเป้าหมายในรูป ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน Z โดยมี $c_j \geqslant 0$ ทุก j

โดยเหตุที่ ค่าสูงสุด Z = ค่าต่ำสุด (–Z)

เพื่อให้ ส.ป.ส. ในฟังก์ชัน (–Z) เป็นบวก เรากำหนด $y_{10}, y_{11}, y_{20}, y_{21}, y_1$ และ y_2 ให้เท่ากับ $1 - w_j$, $j = 1,2,3,4,5,6$ ตามลำดับ

ดังนั้นตัวแบบจะเปลี่ยนเป็น

ค่าต่ำสุด (- Z) = $3w_1 + 12w_2 + w_3 + 4w_4 + 12w_5 + 4w_6 - 36$

โดยมีข้อจำกัด

$$3w_1 + 6w_2 + 4w_3 + 8w_4 - 9 \geqslant 0$$
$$2w_1 + 4w_2 + w_3 + 2w_4 - 3 \geqslant 0$$
$$w_1 + w_2 - w_5 \geqslant 0$$
$$- w_1 - w_2 + 2w_5 \geqslant 0$$
$$w_3 + w_4 - w_6 \geqslant 0$$
$$- w_3 - w_4 + 2w_6 \geqslant 0$$
$$w_j (j = 1,2,3,4,5,6) = 0 , 1$$

1. ที่จุดเริ่มต้น w_j = 0 ทุก j เรามี

i	1	2	3	4	5	6
Q_i'	-9	-3	0	0	0	0
Q_i''	12	6	1	0	1	0

ℓ	1	2	3	4	5	6
$\sum_i Q_i(\ell)$	8	4	8	3	•13	13

เลือก w_4 = 1 ไปที่ (2) และด้วยเหตุที่ $a_{i1} + a_{i2} + a_{i5} \geqslant -Q_i'$ (เท่ากันเมื่อ i = 4) เราได้ $w_1 = w_2 = w_5 = 1$ เป็นคำตอบที่เป็นไปได้ มีค่า $(-Z)$ = - 9

2 . 4+ $Q_i' = Q_i' + a_{i4} < 0$ บางค่า i $Q_i'' \geqslant 0$ เลือก w_3 ไปที่ (3) + (4)

3. 4+ , 3+ มี $Q_6' < 0, Q_i'' \geqslant 0$ เราได้ $w_3 = w_4 = w_6 = 1$ มี $(-Z)$ = - 27

4 . 4+ , 3− $Q_i' \leqslant 0, Q_i'' \geqslant 0$ เลือก w_6 ไปที่ (5)

5 . 4+ , 3− , 6+ มี $Q_i' < 0, Q_i'' \geqslant 0$ เราได้ $w w_4 = w_5 = w_6$ มี $(-Z)$ > - 27

สรุปได้ว่า $w_3 = w_4 = w_6 = 1, \quad w_1 = w_2 = w_5 = 0$ เป็นคำตอบที่มีค่า $(-Z)$ ต่ำสุด

คำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาก็คือ $x_1 = 3, x_2 = 0$ ได้ $Z_{\text{สูงสุด}} = 27$

6.6 โปรแกรมพลวัตที่ไม่เป็นเส้นตรง

ปัญหาโปรแกรมที่ไม่เป็นเส้นตรง ที่มีข้อกำกัดของตัวแปร เป็นเลขจำนวนเต็ม ถ้าแต่ละตัวแปรสามารถแยกจากกันโดยอิสระ เราใช้วิธีการโปรแกรมพลวัตในการหาคำตอบได้ และเรียกปัญหาประเภทนี้ว่า ปัญหาโปรแกรมพลวัตไม่เป็นเส้นตรง (Nonlinear Dynamic Programming) ให้เรามาศึกษาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 6.6 จงหาคำตอบที่ดีที่สุดของปัญหา

ค่าสูงสุด $Z = (x_1+3)^2+(x_2+4)^2$

โดยมีข้อจำกัด $3x_1+4x_2 \leqslant 12$

$x_1 \leqslant 3$

$x_1, \quad x_2 = 0,1,2,\ldots$

วิธีทำ เราแบ่งปัญหาเป็น 2 ขั้นตอน

ขั้นตอนแรก หาค่าที่ดีที่สุด $f_1(x)$ และ $d_1(x)$

$$f_1(x) = \underset{\substack{0 \leqslant x_1 \leqslant [x/3] \\ x_1 \leqslant 3}}{\text{ค่าสูงสุด}} \quad (x_1+3)^2, x = 0,1,\ldots,12$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f_1(x)$	9	9	9	16	16	16	25	25	25	36	36	36	36
$d_1(x)$	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3	3

ขั้นตอนที่ 2 หาค่าที่ดีที่สุด $f_2(x)$ และ $d_2(x)$

$$f_2(x) = \underset{\substack{0 \leqslant x_2 \leqslant [x/4] \\ x = 12}}{\text{ค่าสูงสุด}} \quad [f_1(12-4x_2)+(x_2+4)^2]$$

x \ x_2	0	1	2	3	$f_2(x)$	$d_2(x)$
12	52	50	52	58	58	3

สรุปว่า คำตอบที่ดีที่สุดของปัญหานี้ คือ $x_1 = 0, x_2 = 3$ ได้ $Z_{\text{สูงสุด}} = 58$

ตัวอย่างที่ 6.7 จงหาคำตอบที่ดีที่สุดของ

ค่าสูงสุด $Z = 3x_1 + 2x_2$

โดยมีข้อจำกัด $4x_1^2 + x_2^2 \leqslant 16$

$x_1, x_2 = 0,1,2,\ldots$

วิธีทำ เราแบ่งปัญหาเป็น 2 ขั้นตอน

ขั้นตอนที่ 1 หาค่าที่ดีที่สุด $f_2(x)$ และ $d_2(x)$

$$f_2(x) = \underset{\substack{0 \leqslant x_2 \leqslant [\sqrt{x}] \\ x = 0,1,\ldots,16}}{\text{ค่าสูงสุด}} [2x_2]$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$f_2(x)$	0	2	2	2	4	4	4	4	4	6	6	6	6	6	6	6	8
$d_2(x)$	0	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	4

ขั้นตอนที่ 2 หาค่าดีที่สุด $f_1(x)$ และ $d_1(x)$

$$f_1(x) = \underset{\substack{0 \leqslant x_1 \leqslant [x/4] \\ x = 16}}{\text{ค่าสูงสุด}} [3x_1 + f_2(16 - 4x_1^2)]$$

$x \backslash x_1$	0	1	2	$f_1(x)$	$d_1(x)$
16	8	9	6	9	1

สรุปว่า คำตอบที่ดีที่สุดคือ $x_1 = 1, x_2 = 3$ มี $Z_{\text{สูงสุด}} = 9$

แบบฝึกหัดที่ 6

1. หาค่าสูงสุด $Z = 15x_1 + 24x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2$

โดยมีข้อจำกัด

$$x_1 + 2x_2 \leq 11$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

จงใช้เงื่อนไข Kuhn-Tucker ในการตรวจสอบคำตอบต่อไปนี้

ก) $x_1 = 1 , x_2 = 3$

ข) $x_1 = 1 , x_2 = 5$

ว่า คำตอบชุดใด จะเป็นคำตอบดีที่สุด

ก่อนอื่น เราเขียนสมการตามเงื่อนไข Kuhn-Tucker แล้วพิจารณาคำตอบแต่ละชุดว่า คำตอบชุดใดสอดคล้องกับเงื่อนไข Kuhn-Tucker ทุกข้อ คำตอบชุดนั้นจะเป็นคำตอบดีที่สุด

พิจารณา

$$\frac{\partial Z}{\partial x_j} - \lambda_1 \frac{\partial g}{\partial x_j} + \lambda_{1+j} = 0 \quad , j=1,2$$

เราจะได้

$$15 - 4x_1 - 2x_2 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad \text{.........(1)}$$

$$24 - 2x_1 - 4x_2 - 2\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \quad \text{..........(2)}$$

$$11 - x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \quad \text{..........(3)}$$

$$x_1\lambda_2 \ , \ x_2\lambda_3 \ , \ x_3\lambda_1 = 0 \quad \text{..........(4)}$$

$$x_1 , x_2 , x_3 , \lambda_1 , \lambda_2 , \lambda_3 \geq 0 \quad \text{..........(5)}$$

ตรวจสอบคำตอบข้อ ก

แทนค่า $x_1 = 1 , x_2 = 3$ ใน (1) - (4) จะได้

จาก (1) $15 - 4(1) - 2(3) - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ หรือ $\lambda_1 - \lambda_2 = 5$

จาก (2) $24 - 2(1) - 4(3) - 2\lambda_1 + \lambda_3 = 0$ หรือ $2\lambda_1 - \lambda_3 = 10$

จาก (3) $11 - 1 - 2(3) - x_3 = 0$ หรือ $x_3 = 4$

จาก (4) $\lambda_2 , 3\lambda_3 , 4\lambda_1 = 0$ แสดงว่า $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ขัดแย้งกับ (1) และ (3)

สรุปได้ว่า ชุดคำตอบข้อ ก ไม่เป็นคำตอบดีที่สุด

ตรวจสอบคำตอบข้อ ข

แทนค่า $x_1 = 1$, $x_2 = 5$ ใน (1) - (4) จะได้

จาก (1) $15 - 4(1) - 2(5) - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ หรือ $\lambda_1 - \lambda_2 = 1$

จาก (2) $24 - 2(1) - 4(5) - 2\lambda_1 + \lambda_3 = 0$ หรือ $2\lambda_1 - \lambda_3 = 2$

จาก (3) $11 - 1 - 2(5) - x_3 = 0$ หรือ $x_3 = 0$

จาก (4) $\lambda_2 , 5\lambda_3 , 0\lambda_1 = 0$ แสดงว่า $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ แต่ $\lambda_1 \geq 0$

ผลจาก (1) และ (2) จะได้ $\lambda_1 = 1$

ค่าที่ได้ของแต่ละตัวแปร ไม่มี ค่าใดเป็นลบ จึงเป็นคำตอบที่สอดคล้องตามเงื่อนไข Kuhn-Tucker สรุปได้ว่า $x_1 = 1$, $x_2 = 5$ เป็นคำตอบดีที่สุด

2. หาค่าสูงสุด $Z = 2x_1 - 6x_1^3 - x_2 + x_2^2 - x_2^3$

โดยมีข้อจำกัด

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$2x_1 - x_2 + x_4 = 3$$

$$x_1 , x_2 , x_3 , x_4 \geq 0$$

จงใช้เงื่อนไข Kuhn-Tucker ในการตรวจสอบคำตอบที่มี x_1 , x_3 และ x_4 เป็นตัวแปรฐานว่า

เป็นคำตอบที่ดีที่สุด หรือไม่ และหาคำตอบดีที่สุดของปัญหานี้

พิจารณา

$$\frac{\partial Z}{\partial x_j} - \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_j} - \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_j} + \lambda_{2+j} = 0 \ , \ j=1,2$$

เราจะได้สมการตามเงื่อนไข Kuhn-Tucker ดังนี้

$$2 - 18x_1^2 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad \text{..........} \ (1)$$

$$-1 - 3x_2^2 + 2x_2 - \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \quad \text{..........} \ (2)$$

$$6 - 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \quad \text{..........} \ (3)$$

$$3 - 2x_1 + x_2 - x_4 = 0 \quad \text{..........} \ (4)$$

$$x_1\lambda_3 , x_2\lambda_4 , x_3\lambda_1 , x_4\lambda_2 = 0 \quad \text{..........} \ (5)$$

$$x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , \lambda_1 , \lambda_2 , \lambda_3 , \lambda_4 \geq 0 \quad \text{..........} \ (6)$$

คำตอบที่มี x_1 , x_3 และ x_4 เป็นตัวแปรฐาน แสดงว่า x_1 , x_3 , x_4 มีค่ามากกว่า 0 และ $x_2 = 0$

จาก (5) จะได้ λ_1 , λ_2 , λ_3 เป็น 0 และ $\lambda_4 \geq 0$ แทนใน (1) และ (2) จะได้

$$2 - 18x_1^2 = 0 \quad \text{นั่นคือ} \quad x_1 = \frac{1}{3}$$

และ $-1 + \lambda_4 = 0$ หรือ $\lambda_4 = 1$

แทนค่า $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 0$ ใน (3) และ (4) จะได้

$$\frac{2}{3} + x_3 = 6 \quad \text{หรือ} \quad x_3 = \frac{16}{3}$$

$$\frac{2}{3} + x_4 = 3 \quad \text{หรือ} \quad x_4 = \frac{7}{3}$$

จะเห็นว่า คำตอบที่ได้เป็นจริงตามเงื่อนไข Kuhn-Tucker จึงเป็นคำตอบดีที่สุด

สรุปว่า เราจะได้คำตอบดีที่สุดของปัญหานี้ คือ

$$x_1 = \frac{1}{3} , x_2 = 0 , x_3 = \frac{16}{3} , x_4 = \frac{7}{3}$$

ให้ค่า $Z_{\text{สูงสุด}} = 2(\frac{1}{3}) - 6(\frac{1}{3})^3 = \frac{4}{9}$

3. หาค่าสูงสุด $Z = 4x_1 + 10x_2 - x_1^2 + 4x_1x_2 - 5x_2^2$

โดยมีข้อจำกัด

$$x_1 + x_2 \leq 30$$

$$4x_1 + x_2 \leq 92$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

จงหาคำตอบดีที่สุดโดยวิธีการซิมเพลกซ์

การหาคำตอบของปัญหานี้ เริ่มต้นด้วยการเขียนตัวแบบของโปรแกรมเชิงเส้น โดยใช้เงื่อนไข

Kuhn-Tucker แล้วจึงจะหาคำตอบดีที่สุดโดยวิธีการซิมเพลกซ์ ดังต่อไปนี้

พิจารณา

$$\frac{\partial Z}{\partial x_j} - \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_j} - \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_j} + \lambda_{2+j} = 0 \quad , j=1,2$$

จะได้

$$4 - 2x_1 + 4x_2 - \lambda_1 - 4\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad \text{หรือ} \quad 2x_1 - 4x_2 + \lambda_1 + 4\lambda_2 - \lambda_3 = 4$$

และ

$$10 + 4x_1 - 10x_2 - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \quad \text{หรือ} \quad -4x_1 + 10x_2 + \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4 = 10$$

เขียนตัวแบบของโปรแกรมเชิงเส้น โดยใช้เงื่อนไขKuhn-Tucker ดังนี้

หาค่าต่ำสุด $P = y_1 + y_2$

โดยมีข้อจำกัด

$$\begin{aligned}
2x_1 - 4x_2 + \lambda_1 + 4\lambda_2 - \lambda_3 \quad + y_1 &= 4 \\
-4x_1 + 10x_2 + \lambda_1 + \lambda_2 \quad - \lambda_4 \quad + y_2 &= 10 \\
x_1 + x_2 + x_3 &= 30 \\
4x_1 + x_2 \quad + x_4 &= 92 \\
x_1\lambda_3,\ x_2\lambda_4,\ x_3\lambda_1,\ x_4\lambda_2 &= 0 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 &\geq 0
\end{aligned}$$

หาคำตอบด้วยวิธีการซิมเพลกซ์ ดังต่อไปนี้

ตารางที่ 1

		x_1	x_2	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	
P	14	-2	**6**	2	5	-1	-1	ค่า θ_i
y_1	4	2	**-4**	1	4	-1	0	-
y_2	**10**	**-4**	**10**	**1**	**1**	**0**	**-1**	**1**
x_3	30	1	1	0	0	0	0	30
x_4	92	4	1	0	0	0	0	92

ตารางที่ 2

		x_1	y_2	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	
P	8	$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{22}{5}$	-1	$-\frac{2}{5}$	ค่า θ_i
y_1	**8**	**5**	$\frac{2}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{22}{5}$	-1	$-\frac{2}{5}$	**20**
x_2	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$	-
x_3	29	$\frac{7}{3}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$	20.7
x_4	91	$\frac{22}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{I}{10}$	0	$\frac{1}{10}$	20.6

<u>หมายเหตุ</u> เราไม่เลือก λ_1 และ λ_2 เป็นตัวแปรฐาน ทั้งๆที่มีอัตราการลดลงมากกว่า เนื่องจาก

มี x_3 และ x_4 เป็นตัวแปรฐานด้วย ซึ่งขัดกับเงื่อนไขที่ว่า $x_3\lambda_1,\ x_4\lambda_2 = 0$

ตารางที่ 3

		y_1	y_2	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
P	0	−1	−1	0	0	0	0
x_1	20	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{7}{2}$	11	$-\frac{5}{2}$	-1
x_2	9	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$
x_3	1	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-5	$-\frac{31}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{3}{2}$
x_4	3	-11	$-\frac{9}{2}$	$-\frac{31}{2}$	$-\frac{97}{2}$	11	$\frac{9}{2}$

ได้คำตอบดีที่สุด คือ

$x_1 = 20$, $x_2 = 9$, $x_3 = 1$, $x_4 = 3$

ให้ค่า $Z_{max} = 4(20) + 10(9) - 20^2 + 4(20)(9) - 5(9^2) = \mathbf{85}$

4. หาค่าสูงสุด $Z = x_1^2 + 3x_1x_2 + 3x_2$

โดยมีข้อจำกัด

$$x_1^2 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 \ , \ x_2 = 0,1,2,,.....$$

ในที่นี้ ทั้ง x_1 และ x_2 ต่างเป็นเลขจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ จึงใช้วิธีการโปรแกรมพลวัต และเมื่อพิจารณาฟังก์ชัน Z จะเห็นว่า $Z = x_1^2 + 3x_2(x_1 + 1)$

เราจึงใช้วิธีการคำนวณแบบย้อนหลัง ดังนี้

<u>ขั้นตอน 2</u> $f_2(x) = 3x_2$, $x_2 = x = 0,1,2,3,4,5$

$d_2(x) = x_2^*$

x	0	1	2	3	4	5
$f_2(x)$	0	3	6	9	12	15
$d_2(x)$	0	1	2	3	4	5

<u>ขั้นตอน 1</u> $f_1(x)$ = ค่าสูงสุด$\{ x_1^2 + (x_1 + 1) f_2(5 - x_1^2)\}$, $x_1 = [\sqrt{x}]$, $x \leq 5$

$d_1(x) = x_1^*$

x \ x_1	0	1	2	$f_1(x)$	$d_1(x)$
5	15	25	13	25	1

$f_1(x) = 25$, $d_1(x) = 1$. $f_2(5-1) = f_2(4)$ ให้ค่า $d_2(4) = 4$

สรุปได้ว่า เราจะได้คำตอบดีที่สุด คือ

$x_1 = 1$, $x_2 = 4$ ให้ค่า $Z_{สูงสุด} = 25$

5. หาค่าสูงสุด $Z = x_1^3 + 4x_2^2$

โดยมีข้อจำกัด

$$x_1x_2 = 4$$

$$x_1 , x_2 = 1,2,\ldots\ldots$$

ในที่นี้ ทั้ง x_1 และ x_2 ต่างเป็นเลขจำนวนเต็มบวกที่มีค่าอย่างน้อยที่สุด 1 จึงใช้วิธีการโปรแกรมพลวัต วิธีการคำนวณจะใช้แบบรุดหน้าหรือแบบย้อนหลัง ก็ได้ ในที่นี้ ใช้แบบรุดหน้า

~~ขั้นตอน 1~~ $f_1(x) = x_1^3$, $x_1 = x = 1,2,3,4$

$d_1(x) = x_1^*$

x	1	2	3	4
$f_1(x)$	1	a	27	64
$d_1(x)$	1	2	3	4

ขั้นตอน 2 $f_2(x) =$ ค่าสูงสุด$\{f_1(4/x_2) + 4x_2^2\}$, $x = 4$, $x_2 = 1,2,3,4$

$d_2(x) = x_2^*$

x x_2	1	2	3	4	$f_2(x)$	$d_2(x)$
4	68	24	37	65	68	1

$f_2(x) = 68$, $d_2(x) = 1$. $f_1(4/1) = f_1(4)$ ให้ค่า $d_1(4) = 4$

สรุปได้ว่า คำตอบดีที่สุด คือ

$x_1 = 4$, $x_2 = 1$ ให้ค่า $Z_{สูงสุด} = 68$

6. จงใช้เงื่อนไข Kuhn-Tucker ในการหาคำตอบดีที่สุดของปัญหา

หาค่าต่ำสุด $z = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + 4$

โดยมีข้อจำกัด

$$-x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1^2 + x_2 = 1$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

7. หาค่าสูงสุด $Z = x_1 - \frac{1}{2}x_1^2 + x_1x_2 + x_2 - x_2^2$

โดยมีข้อจำกัด

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & \leq & 3 \\ -2x_1 - 3x_2 & \leq & -6 \\ x_1 \ , \ x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

จงใช้เงื่อนไข Kuhn-Tucker ในการตรวจสอบคำตอบที่มี $x_1 = \frac{9}{5}$, $x_2 = \frac{6}{5}$ ว่าเป็นคำตอบดีที่สุด หรือไม่ เพราะเหตุใด

8. หาค่าต่ำสุด $Z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

โดยมีข้อจำกัด

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 & \leq & 5 \\ x_1 \qquad + x_3 & \leq & 2 \\ x_1 & \geq & 1 \\ x_2 & \geq & 2 \\ x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

จงเขียนตัวแบบปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นที่สมนัยกับปัญหานี้ และใช้วิธีการซิมเพลกซ์หาคำตอบดีที่สุดของปัญหาเดิม

9. หาค่าสูงสุด $Z = 2x_1x_2x_3^2 + x_1^2x_2$

โดยมีข้อจำกัด

$$\begin{array}{rcl} 5x_1 + 9x_2^2x_3 & \leq & 5 \\ x_1 \ , \ x_2 \ , \ x_3 & = & 0 \ , 1 \end{array}$$

10. หาค่าสูงสุด $Z = 5x_1^2 + 5x_2^3 + 7x_3$

โดยมีข้อจำกัด

$$\begin{array}{rcl} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 & \leq & 15 \\ x_1 \ , \ x_2 \ , \ x_3 & = & 0 \ , 1 \ , 2 \ , \ldots\ldots \end{array}$$