

บทที่ 5

โปรแกรมเชิงนำจะเป็น

เท่าที่กล่าวมาแล้วข้างต้น เราพิจารณาการสร้างตัวแบบและแก้ปัญหา โดยถือว่ามี สารระข้อมูล (information) ครบถ้วนสมบูรณ์ เช่น ในปัญหาการจัดสรรทรัพยากร ปัญหาการผลิต เราทราบค่าที่แน่นอนของปริมาณทรัพยากร b_i ที่จะนำมาใช้ในการผลิต ทราบค่าที่แน่นอนของ จำนวนทรัพยากร i ที่ใช้ผลิตสินค้า j หนึ่งหน่วย ทราบค่าที่แน่นอนของกำไรต่อหน่วยของสินค้า j c_j และสามารถพยากรณ์จำนวนอุปสงค์ของสินค้า j ได้ ดังนั้น เมื่อเราตัดสินใจผลิตสินค้า j เป็นจำนวน x_j หน่วย เราก็ต้องใช้ทรัพยากร i เท่ากับ $a_{ij}x_j$ และจะได้กำไรจากสินค้า j เท่ากับ c_jx_j ซึ่งแน่นอน ค่าเหล่านี้ย่อมเป็นค่าคงที่ แต่ในหลาย ๆ สถานการณ์ เราไม่อาจหาสารระข้อมูล ได้ครบถ้วน อาจมีความผันแปรเชิงสุ่มหรือมืองศาความไม่แน่นอนเกิดขึ้นในส่วนประกอบของ ระบบงานบางระบบ ค่า a_{ij} , b_i หรือ c_j บางตัวหรือทุกตัว มีลักษณะเป็นตัวแปรเชิงสุ่มมากกว่า จะเป็นค่าคงที่ เช่น กำไรต่อหน่วย c_j ซึ่งคำนวณได้จากรายได้สุทธิกับค่าใช้จ่ายเกี่ยวกับสินค้า j ในบางครั้งเราไม่อาจกำหนดราคาขายที่แน่นอนของสินค้านี้ได้ ราคาอาจจะต้องเปลี่ยนแปลงไปตาม กลไกของตลาด หรือตามความต้องการของลูกค้า ค่าใช้จ่ายในการผลิตสินค้าอาจจะเปลี่ยนแปลง ไป เนื่องจากการควบคุมคุณภาพสินค้า และปัจจัยอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการผลิตหรือการจำหน่าย สินค้า นั้น กำไรสุทธิของสินค้าแต่ละชนิดอาจเป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่ถือว่า รู้ค่าเฉลี่ย หรือความ แปรปรวน สำหรับค่า a_{ij} หรือ b_i ก็เช่นเดียวกัน เราไม่อาจกำหนดค่าที่แท้จริงได้ แต่จาก ประสบการณ์ของโรงงานจะช่วยให้สามารถประมาณค่าได้ การเปลี่ยนแปลงในค่าเหล่านี้สืบเนื่อง มาจากแรงงานคน การทำงานของเครื่องจักร และความต้องการของลูกค้า ซึ่งอยู่เหนือการคาดหมาย หรือการควบคุมของโรงงาน เช่น การขาดงานของลูกค้า การหยุดงานของเครื่องจักร การเปลี่ยนแปลงการซื้อของลูกค้า ฯลฯ แต่อย่างไรก็ตาม ค่าเหล่านี้สามารถคาดคะเนได้ โดย อาศัยวิธีการทางสถิติ

เมื่อตัวพารามิเตอร์ของตัวแบบการโปรแกรมเชิงคณิตศาสตร์ มีลักษณะเป็นตัวแปรเชิงสุ่ม จึงจำเป็นต้องศึกษาหลักของความน่าจะเป็นและความรู้เกี่ยวกับสถิติ (ให้นักศึกษาทบทวนเรื่องราวเหล่านี้จาก ST 203 และ ST 204) มาใช้ในการเขียนตัวแบบและแก้ปัญหา ปัญหาโปรแกรมเชิงสถิติ มักจะเป็นปัญหาเกี่ยวกับการเสี่ยง ถ้าเรารู้การแจกแจงน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่ม แต่ถ้ามีอย่างน้อยที่สุด 1 ตัวแปร ที่เราไม่ทราบการแจกแจงของมัน การพิจารณาปัญหาประเภทนี้จะอยู่ภายใต้ความไม่แน่นอน

5.1 โปรแกรมเชิงสถิติ (Stochastic Programming)

การแก้ปัญหาโปรแกรมเชิงสถิติ ในที่นี้จะพูดถึงกรณีของฟังก์ชันเป้าหมายที่ได้จากการคำนวณค่าคาดหวัง เรียกว่าปัญหาค่าคาดหวัง และกรณีของการพิจารณาจากฟังก์ชันการแจกแจงน่าจะเป็น ที่เรียกว่าปัญหาการแจกแจง ในแต่ละกรณีเราถือว่า เรารู้การแจกแจงน่าจะเป็นของตัวพารามิเตอร์ และเป็นปัญหาที่มีจำนวนขั้นตอน และจำนวนจุดหมายที่จำกัด การหาคำตอบของปัญหาจะใช้วิธีการของโปรแกรมพลวัต ซึ่งเราเรียกปัญหาพวกนี้ว่าเป็นปัญหาโปรแกรมพลวัตเชิงสถิติ (Stochastic Dynamic Programming)

5.1.1 SDP ของปัญหาค่าคาดหวัง

เป็นการพิจารณาปัญหามายใต้สภาวะการณ์ที่เราสามารถคาดคะเน การแจกแจงน่าจะเป็นของผลลัพธ์ได้ การตัดสินใจในแต่ละขั้นตอนและผลลัพธ์ที่ได้ เนื่องจากการตัดสินใจหนึ่งเป็นไปตามกฎความน่าจะเป็น ดังนั้น ในขั้นตอนที่ j เราไม่เพียงแต่จะพิจารณาตัวแปรตัดสินใจ D_j เท่านั้น เราจะต้องพิจารณาแฟกเตอร์เชิงสุ่ม R_j ด้วย การคำนวณยังคงใช้วิธีการเดียวกันกับกรณีการโปรแกรมพลวัตภายใต้ความแน่นอน อาจจะมีแตกต่างกันบ้างตรงที่ เราต้องใช้ค่าความน่าจะเป็นมาเกี่ยวข้องด้วย หากเป้าหมายเป็นเรื่องเกี่ยวกับค่าคาดหวังของผลตอบแทน เราต้องคำนวณค่าผลตอบแทนคาดหวังในแต่ละจุดหมายและแต่ละขั้นตอน ตัวอย่างเช่น

ในปัญหาการแจกจ่ายสินค้าไปยังเขตการค้า หรือในปัญหาการลงทุนในโครงการต่าง ๆ ที่มีการตัดสินใจภายใต้การเสี่ยง นั่นคือในปัญหาการจำหน่ายสินค้า เราทราบความน่าจะเป็นของจำนวนอุปสงค์ของสินค้าในแต่ละเขตการค้า หรือในปัญหาการลงทุน ผลตอบแทนที่จะได้จากโครงการต่าง ๆ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เราสามารถคาดคะเนความน่าจะเป็นของผลตอบแทนนั้นได้ ผลตอบแทนที่ดีที่สุด จะเป็นค่าสูงสุดของค่าคาดหวังของผลตอบแทน นั่นก็คือ

- ถ้า D_j เป็นจำนวนอุปสงค์ของสินค้าในเขตการค้า j
- $P(D_j = k)$ เป็นความน่าจะเป็นที่เขตการค้า j ต้องการสินค้า k หน่วย
- f_j เป็นกำไรต่อหน่วยของสินค้า จากเขตการค้า j
- x เป็นจำนวนสินค้าที่ส่งไปจำหน่าย

กรณีที่สินค้ามีไม่เพียงพอความต้องการ หรือกรณีที่สินค้ามีมากเกินไปเกินความต้องการ ในที่นี้เราถือว่าไม่มีค่าใช้จ่ายหรือค่าเสียหายใด ๆ เกิดขึ้น เราจะได้ค่าคาดหวังของกำไร เท่ากับ

$$\sum_{k=0}^{x-1} kf_j P(D_j = k) + xf_j P(D_j \geq x) \quad (5.1)$$

ถ้าเราสร้างตารางค่าคาดหวังของกำไร ผลที่ได้จะเป็นการแก้ปัญหาโปรแกรมพลวัต ที่มีตัวแบบ (4.1) นั้นเอง

สำหรับตัวแบบโดยทั่ว ๆ ไป จะกำหนดได้ดังนี้

ถ้า $x_j =$ จำนวนสินค้าที่ส่งไปขายเขตการค้า j , $x_j \leq D_j$

$E(P_j|x_j) =$ ค่าคาดหวังของกำไรที่ได้จากการจำหน่ายสินค้า x_j หน่วยในเขตการค้า

$$\text{ดังนั้น } E(P_j|x_j) = f_j \left| \sum_{k=0}^{x_j-1} kP(D_j = k) + x_j P(D_j \geq x_j) \right| \quad (5.2)$$

ถ้าโรงงานมีสินค้าทั้งหมด b หน่วย ส่งไปจำหน่ายที่เขตการค้า n แห่ง ให้ได้ค่าคาดหวังของกำไรทั้งหมดสูงสุด ตัวแบบจะเขียนได้ดังนี้

ค่าสูงสุด $Z = E(P_1|x_1) + E(P_2|x_2) + \dots + E(P_n|x_n)$

โดยมีข้อจำกัด $x_1 + x_2 + \dots + x_n = b$ (5.3)

$$x_j = 0, 1, 2, \dots \text{ ทุกค่า } j$$

เทียบกับตัวแบบ (4.1) ค่า $E(P_j|x_j)$ ก็คือ $g_j(x_j)$ นั้นเอง การคำนวณทำได้ 2 วิธีการ คือ

1) วิธีการตามตัวแบบ (4.1) นั่นคือสร้างตารางของ $E(P_j)$

2) วิธีการตามตัวแบบ (5.3) โดยตรง นั่นคือ กำหนดเขตการค้า j เป็นขั้นตอนที่ j

การคำนวณจะทำแบบรูดหน้าหรือย้อนหลังก็ได้

ถ้าใช้การคำนวณแบบย้อนหลัง เราจะได้

$$f_j(x) = \underset{x_j}{\text{ค่าสูงสุด}} | E(P_j|x_j) + \dots + E(P_{n-1}|x_{n-1}) + E(P_n|x_n) |$$

$$\begin{aligned} \text{โดยมีข้อจำกัด } x_j + \dots + x_{n-1} + x_n &= x \\ x &= 0, 1, \dots, b \end{aligned} \quad (5.4)$$

ที่ขั้นตอน n

$$f_n(x) = \underset{x_n}{\text{ค่าสูงสุด}} [E(P_n | x_n)] = E(P_n | x)$$

จะเป็นค่าคาดหวังของกำไรสูงสุด ที่ได้จากการส่งสินค้า x หน่วยไปที่เขตการค้า n เพียงแห่งเดียว จำนวนจัดส่งที่ดีที่สุด

$$d_n(x) = x, \quad x = 0, 1, \dots, b$$

ที่ขั้นตอน j , $j = n-1, \dots, 2, 1$ ตามลำดับ จะได้ค่าคาดหวังของกำไรสูงสุดจากการขายสินค้า x_j หน่วย ที่เขตการค้า j และขายสินค้า $x - x_j$ หน่วย ที่เขตการค้า $j+1, \dots, n$

$$\begin{aligned} f_j(x) &= \underset{\substack{x_j = 0, 1, \dots, x \\ x = 0, 1, \dots, b}}{\text{ค่าสูงสุด}} [E(P_j | x_j) + f_{j+1}(x - x_j)] \end{aligned} \quad (5.5)$$

และ $d_j(x) =$ ค่าของ x_j ที่มีค่าคาดหวังของกำไร $f_j(x)$

เมื่อ $j = 1$ และ $x = b$

$$\begin{aligned} f_1(b) &= \underset{x_1 = 0, 1, \dots, b}{\text{ค่าสูงสุด}} [E(P_1 | x_1) + f_2(b - x_1)] \\ &= \underset{\{x_k\}}{\text{ค่าสูงสุด}} \left[\sum_{k=1}^n E(P_k | x_k) \right] = Z_{\text{สูงสุด}} \\ &\quad \sum_{k=1}^n x_k = b \end{aligned}$$

จำนวนหน่วยสินค้าที่ส่งให้เขตการค้า j ที่ดีที่สุด

$$x_j^* = d_j \left(b - \sum_{k=1}^{j-1} x_k^* \right)$$

เมื่อ $x_1^* = d_1(b)$

ตัวอย่างที่ 5.1 พ่อค้าขายส่งต้องการส่งสินค้าที่มีอยู่ 6 ลอต แต่ละลอตมี 50 ชิ้น ไปยังร้านค้า 3 แห่ง ความต้องการสินค้าในร้านแต่ละแห่งเป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงน่าจะเป็น ดังนี้

จำนวนลอต k	ความน่าจะเป็นของจำนวนอุปสงค์ $P(D = k)$		
	ร้านค้า 1	ร้านค้า 2	ร้านค้า 3
0	0	0.1	0.1
1	0.2	0.2	0.3
2	0.2	0.3	0.4
3	0.4	0.3	0
4	0.2	0.1	0.2

ถ้ากำไรที่ได้จากการจำหน่ายสินค้าของร้านค้าแต่ละแห่งเท่ากับ 1,000 1,100 และ 1,200 บาทต่อลอต ตามลำดับ พ่อค้าควรส่งสินค้าไปจำหน่ายร้านค้าใดบ้าง จึงจะดีที่สุด

วิธีทำ เริ่มต้นจากขั้นตอนที่ 3 คือ การพิจารณาจำนวนลอตสินค้า x_3 ที่จะส่งไปจำหน่ายที่ร้านค้า 3

$$x_3 = x \leq 4, \quad x = 0, 1, 2, \dots, 6$$

กำไรที่คาดว่าจะได้จากการส่งสินค้า x ลอตที่ดีที่สุด จะเท่ากับ

$$f_3(x) = E(P_3|x)$$

$$= 1200 \left[\sum_{k=0}^{x-1} kP(D_3 = k) + xP(D_3 \geq x) \right] \text{ บาท}$$

$$= 1.2 \left[\sum_{k=0}^{x-1} kP(D_3 = k) + xP(D_3 \geq x) \right] \text{ พันบาท}$$

$$d_3(x) = x, \quad x \leq 4$$

ได้ผลสรุปดังนี้

x	0	1	2	3	4	5	6
$f_3(x)$	0	1.08	1.80	2.04	2.28	2.28	2.28
$d_3(x)$	0	12	3	4	4	4	4

ขั้นตอนที่ 2 พิจารณาจำนวนลอตสินค้า x_2 ที่ส่งไปขายร้านค้า 2

$$f^*(x) = \underset{x_2 = 0, 1, \dots, x \leq 4}{\text{ค่าสูงสุด}} [E(P_2|x_2) + f_3(x - x_2)]$$

$$x = 0, 1, \dots, 6$$

$$E(P_2|x_2) = 1 \cdot 1 \left[\sum_{k=0}^{x_2-1} kP(D_2 = k) + x_2P(D_2 \geq x_2) \right] \text{ พันบาท}$$

ได้ผลสรุปดังนี้

x \ x ₂	E(P ₂ x ₂) + f ₃ (x - x ₂)					f ₂ (x)	d ₂ (x)
	0	1	2	3	4		
0	0					0	0
1	1.08	0.99				1.08	0
2	1.80	2.07	1.76			2.07	1
3	2.04	2.19	2.84	2.20		2.84	2
4	2.28	3.03	3.56	3.28	2.31	3.56	2
5	2.28	3.27	3.80	4.00	3.39	4.00	3
6	2.28	3.27	4.04	4.24	4.11	4.24	3

ขั้นตอนที่ 1 พิจารณาจำนวนลอตสินค้า x_1 ที่ส่งไปขายร้านค้า 1 และจำนวนสินค้า $6 - x_1$ ลอตที่ขายในร้านค้า 1 และ 3 จะได้

$$f_1(x) = \underset{x_1 = 0, 1, \dots, 4}{\text{ค่าสูงสุด}} [E(P_1|x_1) + f_2(6 - x_1)]$$

$$E(P_1|x_1) = \sum_{k=0}^{x_1-1} kP(D_1 = k) + x_1P(D_1 \geq x_1) \text{ พันบาท}$$

ได้ผลสรุปดังนี้

x \ x ₁	E(P ₁ x ₁) + f ₂ (6 - x ₁)					f ₁ (6)	d ₁ (6)
	0	1	2	3	4		
6	4.24	5.00	5.36	5.24	4.67	5.36	2

สรุปได้ว่า

พ่อค้าจะส่งสินค้าไปจำหน่ายที่ร้านค้า 1 = 2 ลอท ร้านค้า 2 = 2 ลอท และร้านค้า 3 = 2 ลอท คาดว่าจะได้กำไรรวม = 5,360 บาท

คำอธิบาย (การคำนวณและแปลความหมาย)

จากตารางที่ 1 มีความหมายว่า พ่อค้าส่งสินค้าไปจำหน่ายที่ร้านค้า 3 เพียงแห่งเดียว จำนวนขายมากที่สุดจะเท่ากับ 4 ถ้าพ่อค้าส่งไปขาย 2 ลอท ($x = 2$) โอกาสที่จะขายไม่ได้เลยเท่ากับ 0.1 โอกาสที่จะขายได้ 1 ลอทเท่ากับ 0.3 และโอกาสที่จะขายได้หมดเท่ากับ $0.4 + 0.2$

ค่าคาดหวังของกำไร = $1.2[0(.1) + 1(.3) + 2(.6)]$ พันบาท

ค่าคาดหวังของกำไรจากการส่งไปขาย x ลอท จะคำนวณได้ดังนี้

x	ค่าคาดหวังของกำไร
0	$1.2[0(.1) + .3 + .4 + 0 + .2]$
1	$1.2[0(.1) + 1(.3) + .4 + 0 + .2]$
2	$1.2[0(.1) + 1(.3) + 2(.4) + 0 + .2]$
3	$1.2[0(.1) + 1(.3) + 2(.4) + 3(0) + .2]$
4	$1.2[0(.1) + 1(.3) + 2(.4) + 3(0) + 4(.2)]$
5	$1.2[0(.1) + 1(.3) + 2(.4) + 3(0) + 4(.2) + 5(0)]$
6	$1.2[0(.1) + 1(.3) + 2(.4) + 3(0) + 4(.2) + 5(0) + 6(0)]$

จากตารางที่ 2 $x = 1$ หมายความว่า พ่อค้าส่งสินค้าไปขายที่ร้านค้า 2 และ 3 เท่ากับ 1 ลอท ถ้า $x_2 = 1$ แสดงว่าส่งไปขายเฉพาะร้านค้า 2 โอกาสที่จะขายไม่ได้เท่ากับ 0.1 โอกาสที่ขายได้หมดเท่ากับ $.2 + .3 + .3 + .1$

ค่าคาดหวังของกำไรรวมที่ดีที่สุด จะคำนวณได้จาก

$$\text{ค่าสูงสุด} \begin{cases} E(P_2|0) + f_3(1) = 1.1|(1)| + 1.08 \\ E(P_2|1) + f_3(0) = 1.1|0(.1) + 1(.9)| + 0 \end{cases}$$

$x = 3$ หมายความว่า พ่อค้าจะส่งสินค้าไปจำหน่ายที่ร้านค้า 2 และ 3 รวมกัน 3 ลอท ถ้าเขาส่งไปที่ร้านค้า 2 x_2 ลอท x_2 ต้องไม่เกิน 3 ถ้า $x_2 = 2$ แสดงว่าขายที่ร้านค้า 2 2 ลอท ความน่าจะเป็นที่จะขายได้ 0, 1, 2 ลอทจะเท่ากับ 0.1, 0.2 และ 0.7 ตามลำดับที่เหลือ 1 ลอท จะขายที่ร้านค้า 3

ค่าคาดหวังของกำไรรวมที่ดีที่สุด จะคำนวณได้จาก

$$\begin{array}{l} \text{ค่าสูงสุด} \\ \left. \begin{array}{l} E(P_2|0) + f_3(3) = 1.1[0(1)] + 2.04 \\ E(P_2|1) + f_3(2) = 1.1[1(.9)] + 1.80 \\ E(P_2|2) + f_3(1) = 1.1[1(.2) + 2(.7)] + 1.08 \\ E(P_2|3) + f_3(0) = 1.1[1(.2) + 2(.3) + 3(.4)] + 0 \end{array} \right\} \end{array}$$

$x = 6$ หมายความว่า พ่อค้าจะส่งสินค้าไปจำหน่ายที่ร้านค้า 2 และ 3 รวมกัน 6 ROW ถ้าเขาส่งไปจำหน่ายที่ร้านค้า 2 x_2 ROW ที่เหลือ $6 - x_2$, ลอทจะส่งไปที่ร้านค้า 3 โดยเหตุที่จำนวนอุปสงค์สูงสุดของร้านค้า 2 เท่ากับ 4 ลอท ดังนั้น ค่าของ x_2 จะต้องไม่เกิน 4 am

ค่าคาดหวังของกำไรรวมที่ดีที่สุด จะคำนวณได้จาก

$$\begin{array}{l} \text{ค่าสูงสุด} \\ \left[\begin{array}{l} E(P_2|0) + f_3(6) = 1.1[0(1)] + 2.28 \\ E(P_2|1) + f_3(5) = 1.1[1(.9)] + 2.28 \\ E(P_2|2) + f_3(4) = 1.1[1(.2) + 2(.7)] + 2.28 \\ E(P_2|3) + f_3(3) = 1.1[.2 + 2(.3) + 3(.4)] + 2.04 \\ E(P_2|4) + f_3(2) = 1.1[.2 + .6 + 3(.3) + 4(.1)] + 1.80 \end{array} \right] \end{array}$$

จากตารางที่ 3 พ่อค้ามีสินค้าทั้งหมด 6 ลอท ที่จะส่งไปจำหน่ายที่ร้านค้าทั้ง 3 ด้วยเหตุที่จำนวนอุปสงค์สูงสุดของร้านค้า 1 เท่ากับ 4 ดังนั้นค่าของ x_1 ต้องไม่เกิน 4

ค่าคาดหวังของกำไรรวมที่ดีที่สุด จะคำนวณได้จาก

$$\begin{array}{l} \text{ค่าสูงสุด} \\ \left[\begin{array}{l} E(P_1|0) + f_2(6) = 1.0 [0(1)] + 4.24 \\ E(P_1|1) + f_2(5) = [0 + 1(1)] + 4.00 \\ E(P_1|2) + f_2(4) = [1(.2) + 2(.8)] + 3.56 \\ E(P_1|3) + f_2(3) = [.2 + 2(.2) + 3(.6)] + 2.84 \\ E(P_1|4) + f_2(2) = [.2 + .4 + 3(.4) + 4(.2)] + 2.07 \end{array} \right] \end{array}$$

การอ่านคำตอบ $f_1(6) = 5.36$ พันบาท จะเป็นค่าคาดหวังของกำไรรวมสูงสุด การแจกจ่ายที่ดีที่สุดจะได้จาก

$$x_1^* = d_1(6) = 2, \quad x_2^* = d_2(6-2) = 2, \quad x_3^* = d_3(6-2-2) = 2$$

ให้นักศึกษาแก้ปัญหาในตัวอย่างนี้ โดยสร้างตารางของ

$$g_j(x_j) = E(P_j|x_j)$$

แล้วหาคำตอบตามวิธีการของตัวแบบ (4.1)

ข้อสังเกต

ในทางปฏิบัติ การส่งสินค้าไปจำหน่าย เราจะพบว่า ในบางครั้งจะมีค่าใช้จ่ายบางประเภทคงที่ และบางครั้งการส่งไปขายจำนวนมากจะมีส่วนลดพิเศษ เป็นต้น กรณีเช่นนี้ เราอาจพิจารณาจำนวนสินค้าคงเหลือด้วย นั่นคือ พิจารณาค่าของ x_j ตามค่าของ x ถ้า $x_j > D_j$ จำนวนที่มากกว่าจะเป็นจำนวนสินค้าคงเหลือ หรือสินค้าคงคลังนั่นเอง

โดยทั่วไปการคาดคะเนจำนวนอุปสงค์สินค้าของเขตการค้าหนึ่ง มักจะคาดคะเนเป็นงวด ๆ เช่น เป็นวัน สัปดาห์ หรือเดือน เป็นต้น การผลิตหรือส่งสินค้ามาจำหน่าย จะต้องพิจารณาความต้องการหรืออุปสงค์สินค้าในแต่ละงวด และดูความเหมาะสมในการเก็บสินค้าคงคลังด้วย ซึ่งเราเรียกปัญหาประเภทนี้ว่า **ปัญหาสินค้าคงคลัง (Inventory Problem)**

ในปัญหาสินค้าคงคลัง การพิจารณากำหนดการผลิตสินค้าและจำนวนสินค้าคงคลังที่เหมาะสม เมื่อจำนวนอุปสงค์สินค้าไม่แน่นอน แต่เราสามารถคาดคะเนการแจกแจงน่าจะเป็นของจำนวนอุปสงค์สินค้าได้ กำหนดการผลิตและจำนวนสินค้าคงคลังที่ดีที่สุด จะขึ้นอยู่กับค่าคาดหวังของค่าใช้จ่ายต่ำสุด หรือค่าคาดหวังของผลตอบแทนสูงสุด

สมมติว่า เรามี I_j = จำนวนสินค้าคงเหลือ (คงคลัง) เมื่อเริ่มต้นการผลิตในงวดที่

$$j, j = 1, 2, \dots, n$$

f = ราคาขายต่อหน่วยของสินค้า

r = ต้นทุนการผลิตต่อหน่วย

c = ต้นทุนการจัดเก็บสินค้าคงเหลือต่อหน่วย

D_j = จำนวนอุปสงค์ของสินค้าในงวดที่ j

$P(D_j = d)$ = ความน่าจะเป็นของจำนวนอุปสงค์สินค้าในงวดที่ j เท่ากับ d หน่วย, $d = 0, 1, \dots, k$

x_j = จำนวนสินค้าที่ผลิตในขั้นตอน (งวดที่) j เมื่อมีสินค้าคงเหลือก่อนการผลิตนี้ I_j หน่วย, $j = 1, 2, \dots, n$ $x_j = 0, 1, \dots, k - 1$

ดังนั้น ต้นทุนการผลิตสินค้านี้จะเท่ากับ rx_j

ค่าคาดหวังของกำไรที่ได้จากการขายสินค้า $x_j + I_j = a$ หน่วย

$$E(P_j | x_j + I_j = a) = \sum_{d=0}^{a-1} P(D_j = d) \{fd - c(a-d)\} + P(D \geq a)fa - rx_j \quad (5.6)$$

ถ้า $v_j(I_j)$ = ค่าคาดหวังสูงสุดของกำไร กำหนดว่ามีสินค้าคงเหลือ I_j หน่วย และมี $j-1$ ขั้นตอนที่เหลือ, $j = n, n-1, \dots, 1$

$d(I_j)$ = ค่าของ x_j ที่มีค่าคาดหวังของกำไรสูงสุด $v_j(I_j)$ เราจะได้ recursive function

$$v_j(I_j) = \underset{x_j = 0, 1, \dots, k - I_j}{\text{ค่าสูงสุด}} \left[E(P_j | x_j + I_j) + \sum_{k=0}^{x_j + I_j - 1} P(D_j = d) v_{j+1}(x_j + I_j - d) + P(D_j \geq x_j + I_j) v_{j+1}(0) \right]$$

ให้ $x_j + I_j = a$, $I_j \leq a \leq k$ จะได้

$$f_j(I_j) = \underset{x_j = 0, 1, \dots, k - I_j}{\text{ค่าสูงสุด}} \left[\sum_{d=0}^{a-1} P(D_j = d) \{fd - c(a-d) + v_{j+1}(a-d)\} + P(D \geq a) \{fa + v_{j+1}(0)\} - r x_j \right] \quad (5.7)$$

ตัวอย่างที่ 5.2 ผู้จัดการฝ่ายผลิตกำลังพิจารณาดูความจำเป็นในการเก็บของคงคลังที่มีราคาค่อนข้างแพง ในระหว่างการผลิต 2 เดือนหน้า ต้นทุนการผลิตของชิ้นนี้ต่อหน่วย เป็น 25,000 บาท ต้นทุนจัดเก็บของคงเหลือต่อหน่วยเป็น 2,500 บาท ราคาขายต่อหน่วยของของชิ้นนี้ เท่ากับ 50,000 บาท ด้วยเหตุที่ช่วงเวลาที่เริ่มการผลิตจำนวนใหม่นั้นสั้น จำนวนที่ผลิตได้ในแต่ละเดือนจึงจัดแค่ให้เพียงพอกับจำนวนอุปสงค์ของเดือนนั้น เมื่อเริ่มการผลิตในเดือนแรก ไม่มีสินค้าคงคลังเลย ของชิ้นใดที่เหลืออยู่หลังการผลิตในเดือนที่ 2 จะมีราคา 12,500 บาท จำนวนอุปสงค์ของชิ้นนี้มีการกระจายแบบเดียวกันทั้ง 2 เดือน และมีการแจกแจงดังต่อไปนี้

จำนวนอุปสงค์ D_j	0	1	2	3
ความน่าจะเป็น	0.25	0.40	0.20	0.15

สิ่งที่จะต้องพิจารณาก็คือ ควรจะกำหนดการผลิตในเดือนแรกกี่ชิ้น เดือนที่ 2 กี่ชิ้น ด้วยเหตุที่จำนวนอุปสงค์ไม่แน่นอน ดังนั้น จำนวนของคงเหลือจึงไม่แน่นอนด้วย ถ้าจำนวนอุปสงค์มากกว่าจำนวนผลิต ไม่ถือว่าเกิดการเสียหาย เพียงแต่ไม่มีของขายเท่านั้นเอง การตัดสินใจเกี่ยวกับการผลิตก็เพื่อให้ได้ค่าคาดหวังสูงสุดของผลตอบแทน

วิธีทำ จุดหมายของปัญหานี้อยู่ที่จำนวนของคงเหลือ เมื่อเริ่มต้นการผลิตแต่ละเดือน เมื่อต้องการกำหนดการผลิตในช่วง 2 เดือน ดังนั้น เราแบ่งขั้นตอนของปัญหานี้เป็น 2 ขั้นตอน เริ่มต้นจากการพิจารณาจำนวนของคงเหลือเมื่อสิ้นสุดการผลิตในเดือนที่ 2 ของเหล่านี้มีราคาต่อหน่วย 12,500 บาท ดังนั้น ถ้าเราให้ I_2 เป็นจำนวนของคงเหลือเมื่อสิ้นสุดการผลิตเดือนที่ 2 และ $v_3(I_2)$ พันบาทเป็นกำไรที่ได้จากการมีของคงเหลือจำนวนนี้ จะได้

I_3	0	1	2	3
$v_3(I_3)$	0	12.5	25.0	31.5

เราไม่เรียกว่าขั้นตอน เนื่องจากไม่มีการผลิตหลังเดือนที่ 2 เพียงแต่พิจารณาค่าหากมีของเหลือจากเดือนที่ 2 เท่านั้น

ต่อไปพิจารณาขั้นตอนที่ 2 ซึ่งก็คือการผลิตในเดือนที่ 2 เมื่อมีสินค้าคงคลังก่อนการผลิต $I_2, I_2 = 0, 1, 2, 3$ จำนวนของที่ผลิตในเดือนที่ 2 คือ $x_2, x_2 + I_2 \leq 3$ จำนวนที่ขายได้ ก็คือจำนวนอุปสงค์ของของนั้น แต่ต้องไม่เกินปริมาณผลิตและของคงเหลือรวมกัน จะได้ผลดังตารางต่อไปนี้

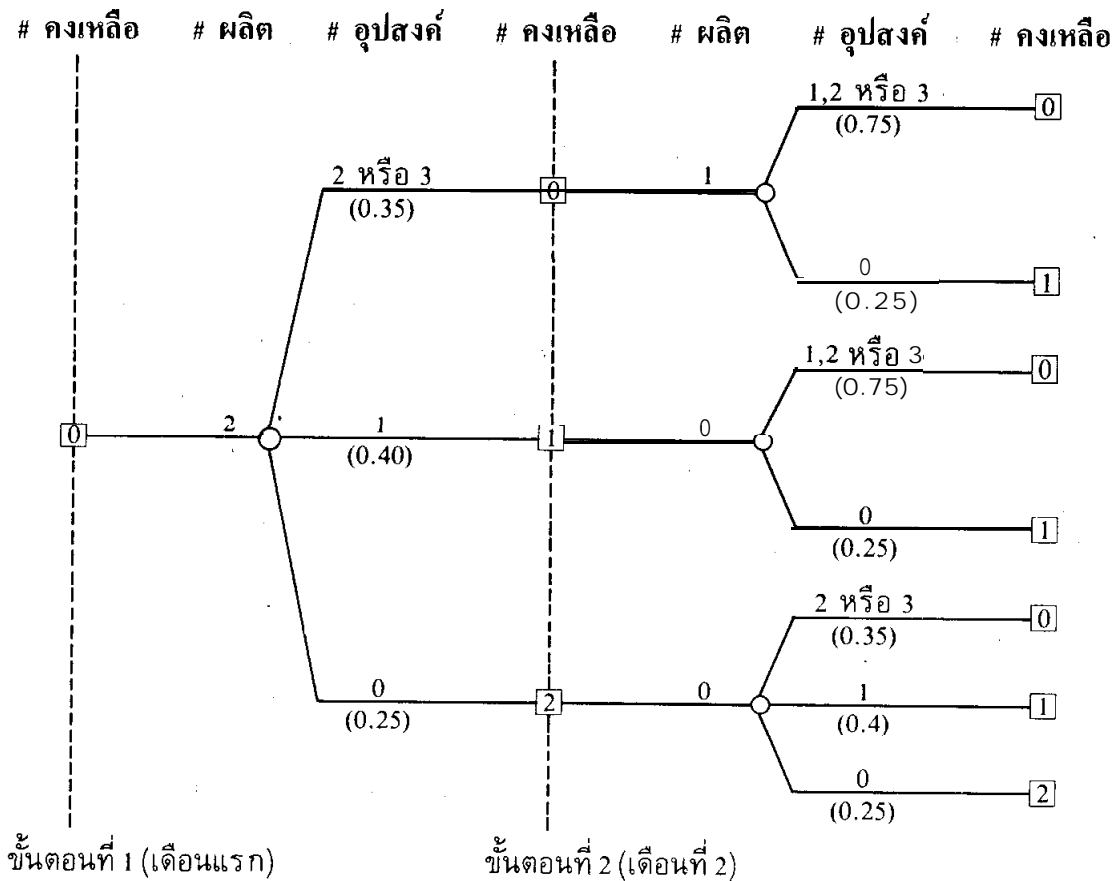
I_2	x_2	ค่าคาดหวังของกำไร (พันบาท)	$v_2(I_2)$	$d(I_2)$	
0	0		0.0	15.0	1
	1	$0.25(0 - 2.5 + 12.5) + 0.75(50) - 25 = 15.0$			
	2	$0.25(0 - 5.0 + 25) + 0.4(50 - 2.5 + 12.5) + 0.35(100) - 50 = 14.0$			
	3	$0.25(37.5 - 7.5) + 0.4(50 - 5 + 25) + 0.2(100 - 2.5 + 12.5) + 0.15(150) - 75 = 5.0$			
1	0	$0.25(12.5 - 2.5) + 0.75(50) = 40.0$	40.0		0
	1	$0.25(25 - 5) + 0.4(50 - 2.5 + 12.5) + 0.35(100) - 25 = 39.0$			
	2	$0.25(37.5 - 7.5) + 0.4(50 - 5 + 25) + 0.2(100 - 2.5 + 12.5) + 0.15(150) - 50 = 30.0$			
2	0	$0.25(25 - 5) + 0.4(50 - 2.5 + 12.5) + 0.35(100) = 64.0$	64.0		0
	1	$0.25(37.5 - 7.5) + 0.4(50 - 5 + 25) + 0.2(100 - 2.5 + 12.5) + 0.15(150) - 25 = 55.0$			
3	0	$0.25(37.5 - 7.5) + 0.4(50 - 5 + 25) + 0.2(100 - 2.5 + 12.5) + 0.15(150) = 80.0$	80.0		

ขั้นตอนต่อไป เป็นการพิจารณาจำนวนผลิต เดือนแรก ก่อนการผลิตในเดือนนี้ ไม่มีสินค้าคงคลัง นั่นคือ $I_1 = 0$ เราจึงพิจารณาเฉพาะจำนวนผลิต $x_1 = 0, 1, 2$ หรือ 3 สรุปผลได้ดังนี้

x_1	ค่าคาดหวังของกำไร (พันบาท)	$v_1(I_1)$	$d(I_1)$
0	$1.00(15) = 15.0$	40.0	2
1	$0.25(40 - 2.5) + 0.75(50 + 15) - 25 = 33.125$		
2	$0.25(64 - 5) + 0.4(50 - 2.5 + 40) + 0.35(100 + 15) - 50 = 40.0$		
3	$0.25(80 - 7.5) + 0.4(50 - 5 + 64) + 0.2(100 - 2.5 + 40) + 0.15(150 + 15) - 75 = 38.975$		

สรุปได้ว่า ในเดือนแรกจะผลิต (x_1) 2 หน่วย ถ้าขายหมด แสดงว่าไม่มีของคงเหลือในต้นเดือน 2 ด้วยความน่าจะเป็น 0.35 เป็นผลให้ตัดสินใจผลิตในเดือนที่ 2 1 หน่วย ถ้าขายหมด จะไม่มีของคงเหลือ เมื่อสิ้นเดือนที่ 2 ด้วยความน่าจะเป็น 0.75 แต่ถ้าขายไม่ได้ก็จะมีของคงเหลือเมื่อสิ้นเดือน 1 หน่วยด้วย ความน่าจะเป็น 0.25 ถ้าในเดือนแรกขายได้ 1 หน่วย จะมีของคงเหลือต้นเดือนที่ 2 1 หน่วย ด้วยความน่าจะเป็น 0.40 เป็นผลให้ตัดสินใจไม่ผลิตในเดือนที่ 2 ดังนั้น จะมีของอยู่ในเดือนนี้ 1 หน่วย ถ้าขายหมด จะไม่มีของเหลือเมื่อสิ้นเดือนที่ 2 ด้วยความน่าจะเป็น 0.75 แต่ถ้าขายไม่ได้ จะมีของคงเหลือเมื่อสิ้นเดือนที่ 2 1 หน่วย ด้วยความน่าจะเป็น 0.25 ถ้าในเดือนแรกขายของไม่ได้เลย จะมีของคงเหลือในต้นเดือน 2 2 หน่วย ด้วยความน่าจะเป็น 0.25 เป็นผลให้ตัดสินใจไม่ผลิตในเดือนที่ 2 ดังนั้น ในเดือนนี้จะมีการอยู่ 2 หน่วย ถ้าขายหมด จะไม่มีของเหลือเมื่อสิ้นเดือนที่ 2 ด้วยความน่าจะเป็น 0.35 ถ้าขายได้ 1 หน่วย จะมีของคงเหลือในสิ้นเดือน 1 หน่วย ด้วยความน่าจะเป็น 0.4 แต่ถ้าขายไม่ได้เลย จะมีของคงเหลือเมื่อสิ้นเดือน 2 หน่วย ด้วยความน่าจะเป็น 0.25 คาดว่าจะได้ผลตอบแทนรวมกันทั้งหมด 40,000 บาท

การตัดสินใจดังกล่าวแสดงให้เห็นได้ด้วยแผนภูมิ ดังต่อไปนี้



5.1.2 SDP ของปัญหาการแจกแจงน่าจะเป็น

การหาคำตอบต่อปัญหาการโปรแกรมพลวัตเชิงน่าจะเป็น นอกจากจะใช้วิธีพิจารณาจากค่าคาดหวังแล้ว ปัญหาบางประเภทจะพิจารณาจากค่าความน่าจะเป็นโดยตรง อาจจะเป็นการหาเพื่อให้ได้ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ทุกขั้นตอนมีค่ามากที่สุด หรือน้อยที่สุด แล้วแต่กรณี โดยเหตุที่แต่ละขั้นตอนเป็นอิสระกัน ดังนั้น การหาค่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ในทุกขั้นตอน จะเป็นผลคูณของความน่าจะเป็นของแต่ละขั้นตอน การคำนวณค่าความน่าจะเป็น อาศัยกฎแห่งความน่าจะเป็น

ถ้าเรามี x_j เป็นตัวแปรตัดสินใจในขั้นตอนที่ j

$P_j(x_j)$ เป็นความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เกิด x_j ในขั้นตอน j

x เป็นจุดหมายในขั้นตอน j , $x_j \leq x$

$f_n(x)$ เป็นความน่าจะเป็นที่เหมาะสมในขั้นตอน n เมื่อมี $n-1$ ขั้นตอนเหลืออยู่

$d_n(x)$ เป็นนโยบายที่เหมาะสมของ x_n ซึ่งมีความน่าจะเป็น $f_n(x)$

จะได้ $f''(X) = P_n(x_n)$ และ $d_i(x) = x_n$

ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันต่อเนื่องคือ

$$f_j(x) = \text{ค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุด} [P_j(x_j)f_{j-1}(x-x_j)]^j = 1, 2, \dots, n \quad (5.8)$$

$$j = 0, 1, \dots, x$$

ตัวอย่างที่ 5.3 ปัญหาสำคัญที่รัฐบาลกำลังเผชิญอยู่ในขณะนี้ ปัญหาหนึ่งคือ ความล้มเหลวในการดำเนินงานของรัฐวิสาหกิจ ซึ่งจากการคาดคะเนผลการดำเนินงานในปีนี้ประมาณว่า รัฐวิสาหกิจ ก ข และ ค จะประสบความล้มเหลวในการดำเนินงาน ด้วยความน่าจะเป็น 0.60, 0.80 และ 0.55 ตามลำดับ รัฐจำเป็นต้องยื่นมือเข้าไปช่วย โดยมีเป้าหมายที่จะทำให้ความน่าจะเป็นที่รัฐวิสาหกิจทั้ง 3 ประสบความล้มเหลวในการดำเนินงานน้อยที่สุด โดยเหตุที่งบประมาณมีจำกัด จึงตัดสินใจว่า จะให้บช่วยเหลือรัฐวิสาหกิจทั้ง 3 รวมกันไม่เกิน 3 หน่วยงบประมาณ ความน่าจะเป็นที่คาดคะเนได้ของรัฐวิสาหกิจแต่ละแห่ง ที่จะประสบความล้มเหลว ภายหลังจากเพิ่มงบประมาณเข้าไป 1, 2 หรือ 3 หน่วย มีดังต่อไปนี้

จำนวนหน่วยงบประมาณ	รัฐวิสาหกิจ		
	ก	ข	ค
1	0.30	0.60	0.30
2	0.20	0.39	0.10
3	0.15	0.10	0.05

รัฐควรจัดสรรงบประมาณช่วยเหลือการดำเนินงานแก่รัฐวิสาหกิจแต่ละแห่งอย่างไร จึงจะเกิดผลดีที่สุด

วิธีทำ เราแบ่งแต่ละรัฐวิสาหกิจเป็นขั้นตอนหนึ่ง ๆ ดังนั้น การคำนวณจะมี 3 ขั้นตอน เริ่มต้นการคำนวณจากรัฐวิสาหกิจ ค (ขั้นตอนที่ 3) จะได้

$x = x_3$	0	1	2	3
$f_3(x)$	0.55	0.30	0.10	0.05
$d_3(x)$	0	1	2	3

ขั้นที่ 2 พิจารณาจากรัฐวิสาหกิจ ข เพิ่มงบประมาณให้รัฐวิสาหกิจ ข และ ค รวมกัน x หน่วย โดยเพิ่มให้ ข x_2 หน่วย ที่เหลือ $x - x_2$ หน่วยเป็นของ ค

ความน่าจะเป็นที่การดำเนินงานของรัฐวิสาหกิจทั้ง 2 จะล้มเหลวจะเท่ากับ

$$p_2(x_2)f_3(x - x_2)$$

ความน่าจะเป็นที่จะประสบความสำเร็จจะน้อยที่สุด

$$f_2(x) = \text{ค่าต่ำสุด } [p_2(x_2)f_3(x - x_2)]$$

$$x_2 = 0, 1, \dots, x$$

$$x = 0, 1, \dots, 3$$

ปรากฏผลตามตาราง ดังนี้

x_2 x	$p_2(x_2)f_3(x - x_2)$				$f_2(x)$	$d_2(x)$
	0	1	2	3		
0	(0.80)(0.55)				0.44	0
1	(0.80)(0.30)	(0.60)(0.55)			0.24	0
2	(0.80)(0.10)	(0.60)(0.30)	(0.30)(0.55)		0.08	0
3	(0.80)(0.05)	(0.60)(0.10)	(0.30)(0.30)	(0.10)(0.55)	0.04	0

ขั้นตอนที่ 1 ซึ่งเป็นขั้นสุดท้าย ค่าของ $x = 3$ เท่านั้น ความน่าจะเป็นที่การดำเนินงานของทั้งสามจะประสบความสำเร็จ เมื่อให้งบช่วยเหลือแก่ ก 0, 1, 2 หรือ 3 หน่วย และให้งบช่วยเหลือ ข และ ค รวมกัน $3 - x$ หน่วย จะเป็นผลคูณระหว่าง $p_1(x_1)$ กับ $f_2(3 - x_1)$ ผลสรุปมีดังนี้

x_1 x	0	1	2	3	$f_1(x)$	$d_1(x)$
	3	(0.60)(0.04)	(0.30)(0.08)	(0.20)(0.24)		

สรุปว่า รัฐควรให้งบประมาณช่วยเหลือเฉพาะรัฐวิสาหกิจ ค แห่งเดียว 3 หน่วยงบประมาณ หรือให้งบประมาณช่วยเหลือรัฐวิสาหกิจ ก 1 หน่วย และให้ ค 2 หน่วยก็ได้ ความน่าจะเป็นที่รัฐวิสาหกิจทั้งสามจะดำเนินงานล้มเหลว เท่ากับ 0.024

หมายเหตุ

การอ่านผลลัพธ์จากตาราง ในที่นี้ $d_1(x) = 0$ หรือ 1 ดังนี้

ถ้า $x_1^* = d_1(3) = 0$, $x_2^* = d_2(3-0) = 0$, $x_3^* = d_3(3-0-0) = 3$

ถ้า $x_1^* = d_1(3) = 1$, $x_2^* = d_2(3-1) = 0$, $x_3^* = d_3(3-1-0) = 2$

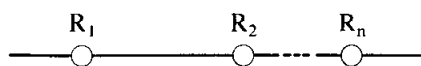
การนำกฎของความน่าจะเป็นไปประยุกต์ใช้ ที่สำคัญเรื่องหนึ่งก็คือ การวัดความเชื่อถือได้ของเครื่องมือ หรือระบบงาน ความเชื่อถือได้จะวัดจากค่าของความน่าจะเป็นของการใช้งานได้ของเครื่องมือหรือระบบงานนั้น ๆ เครื่องมือหรือระบบงานที่มีส่วนประกอบทางด้านเครื่องจักรไฟฟ้า จะมีอายุการใช้งานที่จำกัด เครื่องมือหรือระบบงานที่นำส่วนประกอบต่าง ๆ มาต่อกันเข้า จะทำให้มีโอกาสใช้งานได้มากยิ่งขึ้น การต่อส่วนประกอบของเครื่องมือหรือของระบบงานใด ๆ มีวิธีการต่อกันได้ 2 แบบ

1) การต่อแบบอนุกรม เครื่องมือหรือระบบงาน จะทำงานได้ก็ต่อเมื่อทุกส่วนประกอบใช้งานได้ ดังนี้

ถ้า R_j เป็นความเชื่อถือได้ (ความน่าจะเป็นของการใช้งานได้) ของส่วนประกอบ

$j, j = 1, 2, \dots, n$

ถ้านำทุกส่วนประกอบ มาต่อกันเข้าแบบอนุกรม เป็นระบบหนึ่ง



ความเชื่อถือได้ของระบบ = ความน่าจะเป็นของการใช้งานได้ของทั้งระบบ

$$= R_1 \cdot R_2 \dots R_n = \prod_{i=1}^n R_i$$

2) การต่อแบบขนาน ถ้าใน ส่วนประกอบใดของระบบหรือเครื่องมือใดมาจากการนำขึ้นส่วนต่อแบบขนาน ชิ้นส่วนใดจะทำงานได้ หรือจะทำงานไม่ได้ จะเป็นอิสระต่อกัน ส่วนประกอบของระบบจะทำงานได้ก็ต่อเมื่อมีชิ้นส่วน อย่างน้อย 1 ชิ้นทำงานได้ ดังนี้ ถ้าชิ้นส่วนแต่ละชิ้นมีความเชื่อถือได้ $R_j, j = 1, 2, \dots, n$

ความเชื่อถือได้ของส่วนประกอบในระบบนี้

= ความน่าจะเป็นของการใช้งานได้ของชิ้นส่วนอย่างน้อยที่สุด 1 ชิ้น

= 1 - ความน่าจะเป็นที่ชิ้นส่วนทุกชิ้นใช้งานไม่ได้

$$= 1 - (1 - R_1)(1 - R_2) \dots (1 - R_n) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i)$$

ตัวอย่างเช่น

$$n = 2 \quad \begin{array}{|c|} \hline R_1 \\ \hline R_2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{ความเชื่อถือได้ของส่วนประกอบนี้} \\ = 1 - (1 - R_1)(1 - R_2) \end{array}$$

$$n = 3 \quad \begin{array}{|c|} \hline R_1 = .5 \\ \hline R_2 = .7 \\ \hline R_3 = .9 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{ความเชื่อถือได้ของส่วนประกอบนี้} \\ = 1 - (.5)(.3)(.1) \\ = .985 \end{array}$$

ในปัญหาความเชื่อถือได้ (Reliability Problem) จะพูดถึงการออกแบบส่วนประกอบของระบบงาน เช่น เครื่องมือเครื่องใช้ทางด้านอิเล็กทรอนิกส์ไฟฟ้า แต่ละส่วนประกอบของระบบจะต่อกันแบบอนุกรม ภายในส่วนประกอบหนึ่ง ๆ จะต่อกันแบบขนาน นั่นก็หมายความว่า ถ้าส่วนประกอบใดทำงานไม่ได้ ระบบนี้ก็ทำงานไม่ได้ ถ้าภายในส่วนประกอบใดมีชิ้นส่วนใดทำงานไม่ได้อย่างน้อย 1 ชิ้น ส่วนประกอบนั้น ๆ ยังคงทำงานได้ และระบบนี้ยังคงทำงานได้ อย่างไรก็ตาม การประกอบส่วนประกอบของระบบ ยังมีข้อจำกัดในเรื่องงบประมาณค่าใช้จ่ายของเครื่องมือในเรื่องของน้ำหนัก หรือรูปร่างของระบบต่าง ๆ ปัญหาในเรื่องนี้จึงเป็นปัญหาที่จะต้องพิจารณาว่า จะออกแบบส่วนประกอบของระบบงาน ตามเกณฑ์กำหนด (specification) และภายใต้ข้อจำกัดของงบประมาณ หรือน้ำหนัก ฯลฯ อย่างไร จึงจะทำให้ระบบงานนั้น มีความเชื่อถือได้สูงสุด

ในการออกแบบเครื่องมือหรือระบบงาน ที่ประกอบด้วย n ส่วนประกอบที่ต่อกันแบบอนุกรม

กำหนดตัวแปรตัดสินใจ x_j เป็นจำนวนหน่วยของชิ้นส่วน ในส่วนประกอบ j ที่ต่อขนานกันได้ไม่เกิน m ชิ้น, $x_j = 1, 2, \dots, m$

$R_j(x_j)$ เป็นความเชื่อถือได้ของส่วนประกอบ j ที่มีชิ้นส่วนประกอบต่อขนานกัน x_j ชิ้น, $x_j = 1, 2, \dots, m$

Z = ความเชื่อถือได้ของเครื่องมือหรือระบบงานทั้งหมด

ถ้า $c_j(x_j)$ เป็นราคาของชิ้นส่วน x_j ชิ้น ในส่วนประกอบ j

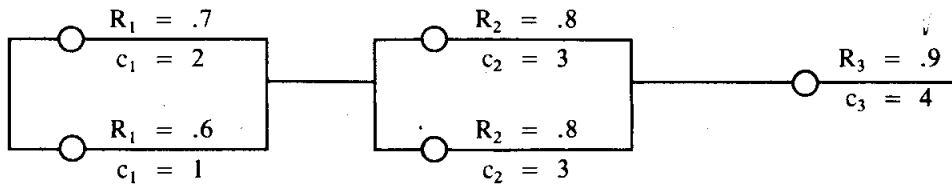
และ b = จำนวนเงินที่จะใช้สร้างเครื่องมือหรือระบบงานจะได้

$$\text{ค่าสูงสุด } z = \prod_{j=1}^n R_j(x_j)$$

$$\text{โดยมีข้อจำกัด } \sum_{j=1}^n c_j(x_j) \leq b \quad (5.9)$$

$$x_j = 1, 2, \dots, m$$

ตัวอย่างเช่น ถ้า $n = 3, x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = 1$ เราจะได้เครื่องมือที่มีรูปแบบดังนี้



$$\text{ความเชื่อถือได้ของเครื่องมือนี้} = [1 - (.3)(.4)][1 - (.2)(.2)][.9]$$

$$\text{ราคาของเครื่องมือ} = (2+1) + (3+3) + 4 = 13$$

ค่านี้ต้องไม่เกินค่า b

การแก้ปัญหา ใช้โปรแกรมพลวัต จะทำแบบรูดหน้า หรือย้อนกลับก็ได้

ขั้นตอน j แสดงถึง ส่วนประกอบสำคัญที่ $j, j = 1, 2, \dots, n$

จุดหมาย x แสดงถึง จำนวนงบประมาณ หรือค่าใช้จ่ายรวมที่อยู่ในแต่ละขั้นตอน

พิจารณาจากเกณฑ์กำหนดของปัญหา จะเห็นได้ว่า ส่วนประกอบสำคัญแต่ละส่วน

จะต้องมีชิ้นส่วนอย่างน้อย 1 ชิ้น ดังนั้น จึงมีข้อจำกัดของค่า x (การคำนวณแบบรูดหน้า) ดังนี้

$$\text{ในขั้นตอนที่ } i \text{ จะได้ } c_i(1) \leq x \leq b - \sum_{j=2}^n c_j(1)$$

$$f_i(x) = \text{ค่าสูงสุด } R_i(x_i)$$

$$x_i = 1, 2, \dots, m$$

= ความเชื่อถือได้ของส่วนประกอบที่ i ที่ได้จากการต่อชิ้นส่วนแบบขนาน

x_i ชิ้น มีค่าใช้จ่าย x

$$d_i(x) = \text{ค่าของ } x_i \text{ ที่มีความเชื่อถือได้ } f_i(x)$$

ในขั้นตอนที่ $j, j = 2, 3, \dots, n$

$$\text{จะได้ } l = c_i(1) + \dots + c_j(1) \leq x \leq b - \sum_{k=j+1}^n c_k(1) = u$$

$f_j(x) =$ ความเชื่อถือได้ที่ดีที่สุดที่สุดของส่วนประกอบที่ $1, 2, \dots, j$ มีค่าใช้จ่ายรวมกัน x

เราได้ฟังก์ชันความสัมพันธ์ต่อเนื่อง (recursive function) $j = 2, 3, \dots, n$ ดังนี้

$$f_j(x) = \text{ค่าสูงสุด } [R_j(x_j) \cdot f_{j-1}(x - c_j(x_j))]$$

$$l \leq x \leq u$$

$$(5.10)$$

$$d_j(x) = \text{ค่าของ } x_j \text{ ที่มีความเชื่อถือได้ } f_j(x)$$

ให้เราพิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 5.4 หน่วยงานผลิตต้องการออกแบบเครื่องมืออิเล็กทรอนิกส์ ที่มีส่วนประกอบสำคัญต่อกันแบบอนุกรม 3 ส่วน แต่ละส่วนประกอบจะมีชิ้นส่วนประกอบต่อกันแบบขนาน ไม่เกิน 3 ชิ้น ราคาของชิ้นส่วนประกอบ c_j และความเชื่อถือได้ R_j ของชิ้นส่วนแต่ละชิ้นที่จะนำมาใช้ใน ส่วนประกอบสำคัญ j กำหนดไว้ดังนี้

ชิ้นส่วนประกอบ 1		ชิ้นส่วนประกอบ 2		ชิ้นส่วนประกอบ 3	
c_1	R_1	c_2	R_2	c_3	R_3
2	0.7	1	0.6	3	0.9

หน่วยงานผลิตมีงบประมาณที่จะสร้างเครื่องมือนี้เท่ากับ 12 ดังนั้น หน่วยงานผลิตควร จะออกแบบเครื่องมืออย่างไรจึงจะเกิดผลดีที่สุด

วิธีทำ เพื่อความสะดวก เราหาราคาและความเชื่อถือได้ของชิ้นส่วนประกอบที่ j เมื่อมีจำนวนที่นำมาต่อขนานกัน k ชิ้น $k = 1, 2, 3$ ซึ่งเราจะได้

$$R_j(1) = R_j, \quad R_j(2) = 1 - (1 - R_j)^2, \quad R_j(3) = 1 - (1 - R_j)^3$$

ปรากฏผลดังนี้

k	j = 1		j = 2		j = 3	
	$c_1(k)$	$R_2(k)$	$c_2(k)$	$R_2(k)$	$c_3(k)$	$R_1(k)$
1	2	0.7	1	0.6	3	0.9
2	4	0.91	2	0.84	6	0.99
3	6	0.973	3	0.936	9	0.999

การคำนวณแบบรูดหน้า

ขั้นตอนที่ 1 $2 \leq x \leq 8$, $f_1(x) = \text{ค่าสูงสุด } R_1(x_1)$
 $x_1 = 1, 2, 3$

$x_1 \backslash x$	2	3	4	5	6	7	8
1	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7
2			0.91	0.91	0.91	0.91	0.91
3					0.973	0.973	0.973
$f_1(x)$	0.7	0.7	0.91	0.91	0.973*	0.973	0.973
$d_1(x)$	1	1	2	2	3	3	3

ขั้นตอนที่ 2 $3 \leq x \leq 9$

$f_2(x) = \text{ค่าสูงสุด } [R_2(x_2) \cdot f_1(x-x_2)]$ ($\because c_2 = 1$)
 $x_2 = 1, 2, 3$
 $3 \leq x \leq 9$

$x_2 \backslash x$	1	2	3	$f_2(x)$	$d_2(x)$
3	(.6)(.7) = .42			.42	1
4	(.6)(.7) = .42	(.84)(.7) = .588		.42	1
5	(.6)(.91) = .546	(.84)(.7) = .588	(.936)(.7) = .6552	.6552	3
6	(.6)(.91) = .546	(.84)(.91) = .7644	(.936)(.7) = .6552	.7644	2
7	(.6)(.973) = .5838	(.84)(.91) = .7644	(.936)(.91) = .85176	.85176	3
8	(.6)(.973) = .5838	(.84)(.973) = .81732	(.936)(.91) = .85176	.85176	3
9	(.6)(.973) = .5838	(.84)(.973) = .81732	(.936)(.973) = .91073*	.91073*	3

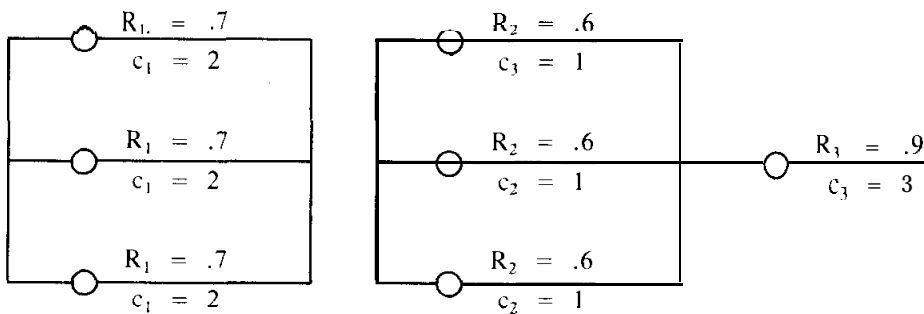
ขั้นตอนที่ 3 $6 \leq x \leq 12$

$$f_3(x) = \text{ค่าสูงสุด}_{x_3 = 1,2,3} [R_3(x_3) \cdot f_2(x - 3x_3)]$$

$$6 \leq x \leq 12$$

x_3	1	2	3	$f_3(x)$	$d_3(x)$
6	$(.9)(.42) = .378$.378	1
7	$(.9)(.42) = .378$.378	1
8	$(.9)(.6552) = .5897$.5897	1
9	$(.9)(.7644) = .6879$	$(.99)(.42) = .4158$.6879	1
10	$(.9)(.85176) = .7666$	$(.99)(.42) = .4158$.7666	1
11	$(.9)(.85176) = .7666$	$(.99)(.6552) = .6486$.7666	1
12	$(.9)(.91073) = .8196$	$(.99)(.7644) = .7567$	$(.999)(.42) = .4196$.8196*	1

สรุปได้ว่า ความเชื่อถือได้สูงสุดของเครื่องมือจะเท่ากับ .8196 ใช้งบประมาณเท่ากับ 12 พอดี โดยออกแบบให้มีการต่อขนานกันของชิ้นส่วนในส่วนประกอบ 1 3 ชิ้น ต่ออนุกรมกับส่วนประกอบ 2 ที่มีชิ้นส่วน 2 ต่อขนานกัน 3 ชิ้น ต่ออนุกรมกับส่วนประกอบ 3 มีชิ้นส่วน 3 1 ชิ้น
รูปร่างของเครื่องมือ แสดงด้วยผังภูมิดังนี้



ค่าใช้จ่ายทั้งหมด = $3 \times 2 + 3 \times 1 + 1 \times 3 = 12$

ความเชื่อถือได้ของเครื่องมือ = $|1 - (.3)^3| |1 - (.4)^3| |.9| = 0.8196$

5.2 ลูกโซ่มาร์คอฟ (Markov chains)

ในปัญหาโปรแกรมพลวัต เราพูดถึงจุดหมาย (state) ว่าเป็นมาตรการเฉพาะรายเกี่ยวกับระบบ เช่น ถ้าระบบเป็นการจัดสรรหุ้นให้กับโครงการต่าง ๆ จุดหมายก็คือ จำนวนหุ้นที่จะนำไปพิจารณาเพื่อการจัดสรร ถ้าระบบเป็นคิวของนักศึกษาที่มาลงทะเบียนเรียน จุดหมายก็คือจำนวนนักศึกษาที่อยู่ในคิวนั้น เป็นต้น ถ้าจุดหมายของระบบเปลี่ยนแปลงไป โดยมีความน่าจะเป็นที่กำหนดได้ในช่วงเวลาหนึ่ง เราจะเรียกว่าเป็นกระบวนการเฟ้นสุ่ม (stochastic process) จุดหมายในกระบวนการเฟ้นสุ่มจะมีความสัมพันธ์กับระบบพลวัต แต่มีคำถามบางอย่างที่น่าสนใจแตกต่างไปจากระบบพลวัต คำถามที่เราต้องการพิจารณา ก็คือ

1) ถ้ากำหนดจุดหมายปัจจุบัน r ให้ระบบ มันจะเปลี่ยนเป็นจุดหมาย s ใน n ขั้นตอนต่อไปด้วยความน่าจะเป็นเท่าใด

2) หลังการเปลี่ยนขั้นตอนหลาย ๆ ขั้น ความน่าจะเป็นที่ระบบจะอยู่ที่จุดหมาย s จะเป็นเท่าใด

3) ถ้าในปัจจุบัน บริษัทมีส่วนแบ่งในตลาดจำนวนหนึ่งที่คงที่ ใน n ขั้นตอนต่อไป ส่วนแบ่งในตลาดจะเป็นเท่าใด

4) ส่วนแบ่งในตลาดของกลุ่มแข่งขันแต่ละรายในอนาคต จะยังคงคงที่หรือมีการเปลี่ยนแปลงอย่างไร หรือไม่

คำถามเหล่านี้จะตอบได้ก็โดยอาศัยกระบวนการเฟ้นสุ่มอย่างหนึ่ง ที่มีคุณสมบัติเฉพาะเรียกว่า คุณสมบัติมาร์คอฟ นั่นก็คือ การใช้ระบบลูกโซ่มาร์คอฟ โดยทั่วไปเราใช้ลูกโซ่มาร์คอฟในปัญหาการเปลี่ยนยี่ห้อสินค้า ปัญหาการเจริญเติบโตของประชากร ปัญหาทางการบัญชี และปัญหาอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกับระบบพลวัต

เราสนใจการวิเคราะห์ระบบ ที่มีจุดหมายต่อไปของระบบขึ้นอยู่กับจุดหมายปัจจุบัน และเป็นอิสระกับจุดหมายก่อนหน้าของระบบ

5.2.1 แนวคิดเกี่ยวกับลูกโซ่มาร์คอฟ

ถ้าเรามี X_i เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่แสดงถึงจุดหมายที่กำหนดให้ของระบบ ในขั้นที่ i , $i = 1, 2, \dots$ เมื่อ $X_i = 0, 1, 2, \dots, N$ ในที่นี้ ขั้นที่ i มักจะมีความหมายถึงเวลา i หรือ i หน่วยเวลานับจาก 0 ตัวอย่างเช่น ในระบบของคลัง X_i เป็นระดับคงเหลือของสินค้าสิ้นอาทิตย์แรก X_2 เป็นระดับคงเหลือของสินค้าสิ้นอาทิตย์ที่ 2, ... ในอีกความหมายหนึ่ง ขั้นที่ i อาจแสดงถึงเมื่อไรที่จะมีการติดต่อครั้งที่ i เกิดขึ้น ตัวอย่างเช่น เมื่อมีลูกค้ามาซื้อของยี่ห้อหนึ่ง เราต้องการ

จะรู้ว่า ในครั้งต่อไป ลูกค้าคนนี้จะซื้อของยี่ห้อใด (จุดหมายของระบบในขั้นที่ 1) และหลังจาก ครั้งถัดไปจะซื้อยี่ห้อใด (จุดหมายของระบบในขั้นที่ 2) เป็นต้น ตัวแปรเชิงสุ่ม X_i แต่ละตัวจะมี พังก์ชันน่าจะเป็นของมันเอง

เราเรียกกลุ่มของตัวแปร $\{X_i\}$ นี้ว่า กระบวนการเฟ้นสุ่ม (Stochastic Process) เมื่อ i มีค่าอยู่ในเซตของ I

ถ้าการแจกแจงน่าจะเป็นเงื่อนไขของ X_{i+1} เป็นอิสระกับจุดหมาย ระบบอยู่ในขั้นที่ $0, 1, 2, \dots, i-1$ และขึ้นอยู่กับจุดหมายที่ระบบอยู่ในขั้น i เพียงอย่างเดียว กล่าวได้ว่า กระบวนการ เฟ้นสุ่ม มีคุณสมบัติมาร์คอฟอันดับหนึ่ง (first-order markovian property)

นั่นก็คือ กระบวนการเฟ้นสุ่ม มีคุณสมบัติมาร์คอฟ ถ้า

$$P(X_{i+1} = s | X_0 = t_0, X_1 = t_1, \dots, X_{i-1} = t_{i-1}, X_i = r) = P(X_{i+1} = s | X_i = r) \quad (5.11)$$

เราเรียกปริมาณ $P(X_{i+1} = s | X_i = r)$ ว่า ความน่าจะเป็นของการถ่ายทอดหนึ่งขั้น (one-step transition probability) จากจุดหมาย r ในขั้นที่ i ไปยังจุดหมาย s ในขั้นที่ $i+1$ ดังนั้น ความน่าจะเป็นของการถ่ายทอด 1 ขั้น จะแสดงถึง ความน่าจะเป็นเงื่อนไขของ X_{i+1} เมื่อ กำหนด X_i มาให้

สำหรับแต่ละ r และ s ถ้า

$$P(X_{i+1} = s | X_i = r) = P(X_i = s | X_0 = r) = p_{rs} \quad (5.12)$$

ทุกค่า i แล้ว เรากล่าวว่า ความน่าจะเป็นของการถ่ายทอด 1 ขั้น จะไม่เปลี่ยนแปลง นั่นคือ one-step stationary transition probabilities

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่เปลี่ยนจากจุดหมาย r ในขั้นปัจจุบันไปยังจุดหมาย s ในขั้นต่อไป จะเป็นอิสระกับจำนวนขั้นในปัจจุบัน ซึ่งเป็นการเห็นว่า one-step stationary transition probabilities ยังคงคงที่ ตลอดช่วงเวลาทั้งหมดของการวิเคราะห์

ความน่าจะเป็นดังกล่าว จะเขียนอยู่ในรูปของจัตุรัสเมตริกซ์ P ดังนี้

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{ไป} & 1 & 2 & \dots & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{จาก} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ i \end{matrix} & \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{i1} & p_{i2} & \dots & p_{in} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\text{โดยที่ } p_{rs} > 0 \text{ และ } \sum_{s=1}^n p_{rs} = 1$$

เรากล่าวว่า กระบวนการเฟ้นสุ่ม $\{X_i\}$ เป็น first-order first-state Markov chain ถ้ามันมีคุณสมบัติมาร์คอฟอันดับหนึ่ง จำนวนที่จำกัดของจุดหมาย เซตของความน่าจะเป็นของการถ่ายทอดคงที่ (stationary transition probabilities) และเซตของความน่าจะเป็นเริ่มต้น $P(X_0 = r)$ ทุกค่า r

ตัวอย่างที่ 5.5 จากการสำรวจ การสมัครเข้าเป็นนักศึกษาในคณะวิทยาศาสตร์ พบว่ามี 50% ที่นักศึกษาจะเลือกวิชาเอกศาสตร์คอมพิวเตอร์ 24% เลือกวิชาเอกเคมี ที่เหลืออีก 26% จะเลือกสาขาอื่น ๆ จากการคาดคะเนได้มีการประมาณไว้ว่า ในแต่ละปี นักศึกษาที่เลือกวิชาเอกศาสตร์คอมพิวเตอร์ เคมี และสาขาอื่น ๆ จะยังคงเลือกเรียนสาขาเดิมอยู่ 75%, 80% และ 60% ของจำนวนนักศึกษาที่เรียนอยู่เดิม ตามลำดับ ในแต่ละปีนักศึกษาที่เลือกสาขาศาสตร์คอมพิวเตอร์เมื่อต้นปี จะเปลี่ยนวิชาเอกเป็นเคมีในปีต่อไป เท่ากับ 2% 9% ของนักศึกษาวิชาเอกเคมี จะเปลี่ยนวิชาเอกเป็นสาขาอื่น ๆ ในปีต่อไป และ 25% ของนักศึกษาสาखाอื่น จะเปลี่ยนไปเลือกวิชาเอกคอมพิวเตอร์

เรากำหนด X_i เป็นการเลือกสาขาวิชาของนักศึกษาที่สมัครเรียนในปีนี้ ด้วยเหตุที่สาขาวิชาเป็นการวัดเชิงคุณภาพ ดังนั้น เรากำหนดให้

$$X_0 = \begin{cases} 0 & \text{ถ้าเลือกสาขาศาสตร์คอมพิวเตอร์ในปีนี้} \\ 1 & \text{ถ้าเลือกสาขาเคมีในปีนี้} \\ 2 & \text{ถ้าเลือกสาขาอื่น ๆ ในปีนี้} \end{cases}$$

$$\text{และ } X_1 = \begin{cases} 0 & \text{ถ้าเลือกสาขาศาสตร์คอมพิวเตอร์ในปีหน้า (ชั้นที่ 1)} \\ 1 & \text{ถ้าเลือกสาขาเคมีในปีหน้า (ชั้นที่ 1)} \\ 2 & \text{ถ้าเลือกสาขาอื่น ๆ ในปีหน้า (ชั้นที่ 1)} \end{cases}$$

จะเห็นได้ว่า ระบบ (นักศึกษาเลือกสาขาวิชาในคณะวิทยาศาสตร์) อยู่ในจุดหมายต่างกัน คือ 0, 1 และ 2 ในแต่ละปี แต่ครั้งหนึ่งที่นักศึกษาเลือกสาขาวิชา การติดต่อหรือขั้นที่เกิดขึ้น ยังผลให้ระบบอยู่ในจุดหมาย 0, 1 และ 2 นั่นก็คือ $\{X_i\}$ เป็นกระบวนการเฟ้นสุ่ม

ความน่าจะเป็นเริ่มต้น เมื่อ $r = 0, 1, 2$ ตามลำดับ

$$P(X_0 = r) = [0.50 \quad 0.24 \quad 0.26]$$

ความน่าจะเป็นของการถ่ายทอด 1 ชั้น กำหนดในตารางที่ 1 ดังนี้

จากจุดหมาย		จุดหมายที่เปลี่ยนไป เป็นจุดหมาย		
		0	1	2
จุดหมายเริ่มต้น	0	0.75	0.02	0.23
	1	0.11	0.80	0.09
	2	0.25	0.15	0.60

ในตารางที่ 1 เราถือว่า มีคุณสมบัติมาร์คอฟอันดับหนึ่ง และมีความน่าจะเป็นของการถ่ายทอดคงที่ ดังนั้น $P_{r,s}$ จะแสดงถึง ความน่าจะเป็นที่จะเปลี่ยนจากจุดหมาย r ไปเป็นจุดหมาย s ในหนึ่งขั้น

ตัวอย่างเช่น

P_{00} = ความน่าจะเป็นที่นักศึกษาสมัครเรียนในสาขาคอมพิวเตอร์ จะยังคงเลือกคอมพิวเตอร์ในปีหน้า

0.75

P_{01} = ความน่าจะเป็นที่นักศึกษาสมัครเรียนในสาขาคอมพิวเตอร์ จะเปลี่ยนไปเลือกเคมีในปีหน้า

= 0.02

P_{21} = ความน่าจะเป็นที่นักศึกษาสมัครเรียนในสาขาอื่น ๆ จะเปลี่ยนมาเลือกคอมพิวเตอร์ในปีหน้า

0.25

เป็นต้น

อาศัยข้อมูลที่ได้นี้ สามารถนำไปใช้เพื่อพิจารณาว่า ส่วนแบ่งของนักศึกษาสาขาต่าง ๆ ในคณะวิทยาศาสตร์จะเปลี่ยนแปลงอย่างไรในปีหน้า (ขั้นที่ 1) ซึ่งจะได้ดังต่อไปนี้

ส่วนแบ่งของนักศึกษาสาขาคอมพิวเตอร์ในคณะ ในขั้นที่ 1

= ความน่าจะเป็นที่จะมีนักศึกษาเลือกคอมพิวเตอร์เป็นวิชาเอกในปีหน้า

= $0.50P_{00} + 0.24P_{10} + 0.26P_{20}$

= $(0.50)(0.75) + (0.24)(0.11) + (0.26)(0.25) = 0.4664$

ส่วนแบ่งของนักศึกษาสาขาเคมีของคณะ ในขั้นที่ 1

= ความน่าจะเป็นที่จะมีนักศึกษาเลือกเคมีเป็นวิชาเอกในปีหน้า

$$= 0.50P_{01} + 0.24P_{11} + 0.26P_{21}$$

$$= (0.50)(0.02) + (0.24)(0.80) + (0.26)(0.15) = 0.2410$$

ส่วนแบ่งของนักศึกษาสาขาอื่น ๆ ของคณะในชั้นที่ 1

$$= \text{ความน่าจะเป็นที่จะมีนักศึกษาเลือกสาขาอื่น ๆ ในปีหน้า}$$

$$= 0.50P_{02} + 0.24P_{12} + 0.26P_{22}$$

$$= (0.50)(0.23) + (0.24)(0.09) + (0.26)(0.60) = 0.2926$$

เปรียบเทียบผลที่ได้ในตารางที่ 2 ดังต่อไปนี้

ตารางที่ 2 การเปลี่ยนแปลงส่วนแบ่งในแต่ละสาขาวิชา จากชั้นที่ 0 (ปีสมัคร) ไปเป็นชั้นที่ 1 (สิ้นปีแรก)

	จุดหมาย		
	0	1	2
ชั้นที่ 0	0.5000	0.2400	0.2600
1	0.4664	0.2410	0.2926

จากข้อมูลในตารางที่ 1 สามารถนำไปใช้ในการพิจารณาต่อไปว่า

- 1) ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนจากจุดหมาย r ไปสู่จุดหมาย s ในอีก n ชั้นข้างหน้า (สำหรับทุกจุดหมาย r และ s) จะเป็นเท่าใด
- 2) ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนจากจุดหมาย r ไปสู่จุดหมาย s เป็นครั้งแรก ในอีก n ชั้น (สำหรับทุก r และ s) จะเป็นเท่าใด
- 3) ค่าความคาดหวังของจำนวนชั้นที่จะเปลี่ยนจากจุดหมาย r ไปสู่จุดหมาย s เป็นครั้งแรก (สำหรับทุก r และ s) จะเป็นเท่าใด
- 4) ความน่าจะเป็นที่อยู่ในจุดหมาย s ภายหลังจากขั้นตอนหลายชั้น (สำหรับทุกจุดหมาย s) คำตอบเหล่านี้จะได้รับการหา ความน่าจะเป็นถ่ายทอดชั้นที่ n

5.2.2 ความน่าจะเป็นของการถ่ายทอด n ชั้น

เรานิยาม $p_{rs}^{(n)}$ เป็นความน่าจะเป็นของการถ่ายทอด n ชั้น (n -step stationary transition-probabilities) จะได้ว่า

$$p_{rs}^{(n)} = P(X_{i+n} = s | X_i = r) = P(X_n = s | X_0 = r) \quad (5.13)$$

ในเมื่อ $p_{r,s}^{(n)} \geq 0$ ทุกจุดหมาย r และ $s, n = 1, 2, \dots$

$$\sum_{s=0}^N p_{r,s}^{(n)} = 1 \quad \text{ทุกจุดหมาย } r, n = 1, 2, \dots$$

โดยทั่วไป สามารถคำนวณได้จาก

$$p_{r,s}^{(n)} = \sum_{j=0}^N p_{r,j} p_{j,s}^{(n-1)} = \sum_{j=0}^N p_{r,j}^{(k)} p_{j,s}^{(n-k)} \quad (5.14)$$

ในเมื่อ จุดหมายที่เป็นไปได้ เป็น $0, 1, 2, \dots, N$

ให้เราพิจารณา กรณีที่ $r = 0, s = 1, n = 2$ และ $N = 3$ ความหมายในที่นี้ก็คือ ต้องการหาความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนจากจุดหมาย 0 (ชั้นเริ่มต้น) ไปเป็นจุดหมาย 1 ในอีก 2 ชั้นต่อไป (ชั้นที่ 2) นั่นคือค่า $p_{0,1}^{(2)}$ ถ้าเราพิจารณาเหตุการณ์ที่เริ่มต้นจากจุดหมาย 0 เปลี่ยนจุดหมายในอีก 2 ชั้นต่อไป ไปเป็นจุดหมาย 1 มีทางเกิดขึ้นได้ 4 หนทางด้วยกัน ดังนี้

1) เปลี่ยนเป็นจุดหมาย 0 ชั้นที่ 1 แล้วเปลี่ยนเป็นจุดหมาย 1 ในชั้นที่ 2 ด้วยความน่าจะเป็น $p_{00}p_{01}$

2) เปลี่ยนเป็นจุดหมาย 1 ในชั้นที่ 1 และยังคงอยู่จุดหมายเดิม ในชั้นที่ 2 ด้วยความน่าจะเป็น $p_{01}p_{11}$

3) เปลี่ยนเป็นจุดหมาย 2 ในชั้นที่ 1 แล้วเปลี่ยนเป็นจุดหมาย 1 ในชั้นที่ 2 ด้วยความน่าจะเป็น $p_{02}p_{21}$

4) เปลี่ยนเป็นจุดหมาย 3 ในชั้นที่ 1 แล้วเปลี่ยนเป็นจุดหมาย 1 ในชั้นที่ 2 ด้วยความน่าจะเป็น $p_{03}p_{31}$

$$\text{ดังนั้น } p_{0,1}^{(2)} = p_{00}p_{01} + p_{01}p_{11} + p_{02}p_{21} + p_{03}p_{31}$$

ตัวอย่างที่ 5.6 จากปัญหาการเปลี่ยนสาขาวิชาของนักศึกษาคณะวิทยาศาสตร์ในตัวอย่างที่ 5.5 จงหา

1) เมตริกซ์ของความน่าจะเป็นที่นักศึกษา จะเปลี่ยนหรือคงสาขาเดิม เมื่อสิ้นปีที่ 2 และหาส่วนแบ่งของนักศึกษาแต่ละสาขาวิชา

2) ความน่าจะเป็นของนักศึกษาที่สมัครเข้าเรียนวิชาเอกเคมี จะย้ายไปเลือกวิชาเอกสาขาอื่น ๆ เมื่อสิ้นปีที่ 3

3) ความน่าจะเป็นของนักศึกษาที่สมัครเข้าเรียนวิชาเอกสาขาอื่น ๆ จะเปลี่ยนไปเลือกสาขาคอมพิวเตอร์ เมื่อสิ้นปีที่ 5

วิธีทำ การคำนวณใช้สูตร (5.14) เมื่อ $r = 0,1,2$; $s = 0,1,2$; $n = 2$ และ $N = 3$ จะได้เมตริกซ์ของความน่าจะเป็น ถ่ายทอด สิ้นปีที่ 2 ดังนี้

$$\begin{aligned}
 p^{(2)} &= \begin{matrix} & & 0 & & 1 & & 2 \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \left[\begin{array}{ccc} .5625 + .0022 + .0575 & .0150 + .0160 + .0345 & .1725 + .0018 + .1380 \\ .0825 + .0880 + .0225 & .0022 + .6400 + .0135 & .0253 + .0720 + .0540 \\ .1875 + .0165 + .1500 & .0050 + .1200 + .0900 & .0575 + .0135 + .3600 \end{array} \right] \\ &= \begin{matrix} & & 0 & & 1 & & 2 \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} & \left[\begin{array}{ccc} .6222 & .0655 & .3123 \\ .3540 & .2150 & .4310 \end{array} \right] \end{matrix} \quad (1)
 \end{aligned}$$

สิ้นปีที่ 2 (ต้นปีที่ 3) จะมีส่วนแบ่งนักศึกษาในขณะดังนี้

ส่วนแบ่งนักศึกษาวิชาเอกคอมพิวเตอร์

$$\begin{aligned}
 &= (.5)(.6222) + (.24)(.1930) + (.26)(.3540) \\
 &= .4495
 \end{aligned}$$

ส่วนแบ่งนักศึกษาวิชาเอกเคมี

$$\begin{aligned}
 &= (.5)(.0655) + (.24)(.6557) + (.26)(.2150) \\
 &= .2460
 \end{aligned}$$

ส่วนแบ่งนักศึกษาในสาขาอื่น ๆ

$$\begin{aligned}
 &= 1 - .4495 - .2460 \\
 &= .3045
 \end{aligned}$$

2) ความน่าจะเป็นของนักศึกษาที่สมัครเข้าเรียนเคมี จะเปลี่ยนเป็นสาขาอื่น เมื่อสิ้นปี

$$\begin{aligned}
 \text{ที่ 3} &= p_{12}^{(3)} \\
 &= p_{10} p_{02}^{(2)} + p_{11} p_{12}^{(2)} + p_{12} p_{22}^{(2)} \\
 &= (.11)(.3123) + (.80)(.1513) + (.09)(.4310) \\
 &= .1942
 \end{aligned}$$

3) ความน่าจะเป็นของนักศึกษาที่สมัครเรียนสาขาอื่น จะเปลี่ยนเป็นสาขาคอมพิวเตอร์

เมื่อสิ้นปีที่ 5

$$\begin{aligned}
 &= p_{20}^{(5)} \\
 &= p_{20} p_{00}^{(4)} + p_{21} p_{10}^{(4)} + p_{22} p_{20}^{(4)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= p_{20} \left[\sum_{j=0}^2 p_{0j}^{(2)} p_{j0}^{(2)} \right] + p_{21} \left[\sum_{j=0}^2 p_{1j}^{(2)} p_{j0}^{(2)} \right] + p_{22} \left[\sum_{j=0}^2 p_{2j}^{(2)} p_{j0}^{(2)} \right] \\
&= (.25)(.5103) + (.15)(.3002) + (.60)(.4143) \\
&= .4212
\end{aligned}$$

ให้นักศึกษาหาเมตริกซ์ของความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสาขาวิชาเมื่อสิ้นปีที่ 3, 5, 10, 15, 20 ตามลำดับ

ถ้าเราคำนวณค่าความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสาขาวิชา เมื่อ n โตขึ้นเรื่อย ๆ จะพบว่าในระยะแรก ค่าของความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสาขาวิชา จะยังคงขึ้นอยู่กับเงื่อนไขเริ่มต้น แต่เมื่อค่า n เพิ่มสูงขึ้น ๆ จะพบว่า ค่าของความน่าจะเป็นจะคงที่ นั่นคือ เมื่อ n โต ๆ ค่าความน่าจะเป็นในจุดหมายหลังการเปลี่ยน จะเท่ากับค่าความน่าจะเป็นในจุดหมายก่อนการเปลี่ยน แสดงว่าการเปลี่ยนแปลงจุดหมายของระบบเป็นอิสระกับเวลา ซึ่งเราเรียกว่า จุดหมายอยู่ตัว (steady state) และเรียกความน่าจะเป็นคงที่ในจุดหมายนี้ว่า steady state stationary transition probabilities เขียนแทนด้วย a_s ดังนี้

$$a_s = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{rs}^{(n)}, s = 0, 1, 2, \dots, N \quad (5.15)$$

เมื่อระบบของเราประกอบด้วย $N+1$ จุดหมาย ค่าความน่าจะเป็นที่คงที่ในแต่ละจุดหมาย จะได้จากสมการเชิงเส้นของจุดหมายอยู่ตัว $N+2$ สมการคือ

$$a_s = \sum_{r=0}^N a_r p_{rs}, s = 0, 1, \dots, N \quad (5.16)$$

$$\text{และ } \sum_{s=0}^N a_s = 1 \quad (5.17)$$

สมการใน (5.17) จะต้องเป็นหนึ่งในระบบ $N+2$ สมการเสมอ เพื่อเป็นหลักประกันว่าผลบวกของความน่าจะเป็นทุกจุดหมายต้องเท่ากับ 1 เสมอ

5.2.3 เวลาของการถ่ายทอดครั้งแรก (first - passage time)

บ่อยครั้งที่ความสนใจจะมุ่งไปในเรื่องเกี่ยวกับเวลาของการถ่ายทอด (transition time) ของลูกโซ่มาร์คอฟ ข้อมูลข่าวสารเกี่ยวกับเวลาถ่ายทอด มักจะนิยมในเทอมของเวลาของการถ่ายทอดครั้งแรก (first - passage time) ซึ่งหมายถึงจำนวนขั้นของการถ่ายทอดที่จำเป็นในการเปลี่ยนจากจุดหมาย r ไปเป็นจุดหมาย s เป็นครั้งแรก และกำหนดโดย T_{rs}

ถ้า T_{rs} เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชันการแจกแจงน่าจะเป็น $g_{rs}(t)$, $t = 1, 2, 3, \dots$

$g_{rs}(1)$ = ความน่าจะเป็นที่จะเปลี่ยนจากจุดหมาย r เป็นจุดหมาย s เป็นครั้งแรก
ในการเปลี่ยน 1 ชั้น

$$= P(X_1 = s | X_0 = r)$$

$$= p_{rs}$$

$g_{rs}(2)$ = ความน่าจะเป็นที่จะเปลี่ยนจากจุดหมาย r เป็นจุดหมาย s เป็นครั้งแรก
ในการเปลี่ยน 2 ชั้น

$$= P(X_2 = s | X_0 = r, X_1 = \bar{s}), \bar{s} \text{ ไม่ใช่จุดหมาย } s$$

$$= p_{rs}^{(2)} - p_{rs}p_{ss}$$

$$= p_{rs}^{(2)} - g_{rs}(1)p_{ss}$$

โดยทั่วไป

$$g_{rs}(n) = p_{rs}^{(n)} - \sum_{t=1}^{n-1} g_{rs}(t)p_{ss}^{(n-t)}$$

โดยที่ T_{rs} เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม ดังนั้น

$$\sum_{t=1}^{\infty} g_{rs}(t) = 1$$

ค่าคาดหวังของจำนวนชั้น (เวลา) ของการเปลี่ยนจุดหมายจาก r เป็น s เป็นครั้งแรก

$$= \mu_{rs}$$

$$\mu_{rs} = \sum_{t=1}^{\infty} t g_{rs}(t)$$

ถ้า $r = s$ ค่าที่ได้จะเป็นค่าคาดหวังของการเปลี่ยนไปอยู่ที่จุดหมายเดิมเป็นครั้งแรก
นั่นคือ ค่าคาดหวังของการเวียนกลับ (recurrence time) ของจุดหมาย r ค่านี้จะเป็นส่วนกลับของ
ความน่าจะเป็นที่คงที่ของจุดหมายอยู่ที่ตัว r

โดยทั่วไป ถ้า T_{rs} เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม, $r = 0, 1, 2, \dots, s-1, s+1, \dots, N$ ค่าคาดหวัง
ของเวลา (จำนวนชั้น) ของการเปลี่ยนจุดหมายจาก r ไป s , $r \neq s$ เป็นครั้งแรก จะหาได้จาก
ระบบสมการเชิงเส้น N สมการ คือ

$$\mu_{rs} = 1 + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq s}}^N p_{rj} \mu_{js} \quad (5.18)$$

ค่าคาดหวังของเวลา (จำนวนชั้น) ที่จะเวียนกลับไปยังจุดตั้งต้นเป็นครั้งแรก จะได้จาก

$$\mu_{ss} = \frac{1}{a_s} \quad (5.19)$$

ตัวอย่างที่ 5.7 จากปัญหาการย้ายสาขาวิชาในตัวอย่างที่ 5.5 จงหา

1) ค่าคาดหวังของจำนวนปีที่นักศึกษาสาขาคอมพิวเตอร์ จะย้ายเป็นสาขาอื่น เป็นครั้งแรก

2) ค่าคาดหวังของจำนวนปีที่นักศึกษาสาขาเคมี จะย้ายเป็นสาขาอื่น เป็นครั้งแรก

3) ค่าคาดหวังของจำนวนปีที่นักศึกษาแต่ละสาขา จะหวนกลับมาเลือกสาขาเดิมอีก ภายหลังจากย้ายสาขาวิชา

วิธีทำ คำถาม (1) และ (2) คือการหาค่า μ_{02} และ μ_{12} ตามลำดับ

จากสมการ (5.18) เราจะได้

$$\begin{aligned} \mu_{02} &= 1 + P_{00}\mu_{02} + P_{01}\mu_{12} = 1 + .75\mu_{02} + .02\mu_{12} \\ &+ .25\mu_{02} - .02\mu_{12} = 1 \end{aligned} \quad \dots(1)$$

$$\begin{aligned} \mu_{12} &= 1 + P_{10}\mu_{02} + P_{11}\mu_{12} = 1 + .11\mu_{02} + .80\mu_{12} \\ &- .11\mu_{02} + .20\mu_{12} = 1 \end{aligned} \quad \dots(2)$$

$$10(1) + (2) \quad 2.39\mu_{02} = 11 \Rightarrow \mu_{02} = \frac{11}{2.39} = 4.6$$

$$\text{จาก (1)} \quad \mu_{12} = \frac{.15}{.02} = 7.5$$

คาดว่าประมาณ 4 ปี นักศึกษาสาขาคอมพิวเตอร์จะย้ายเป็นสาขาอื่นเป็นครั้งแรก และโดยประมาณ 7 ปี นักศึกษาสาขาเคมีจะย้ายเป็นสาขาอื่นเป็นครั้งแรก

คำถาม (3) คือการหาค่า μ_{00} , μ_{11} และ μ_{22} ซึ่งเป็นส่วนกลับของ a_0 , a_1 และ a_2 ตามลำดับ เราจึงต้องหาค่า a_s , $s = 0, 1, 2$ ก่อน จากสูตร (5.17) และ (5.16) จะได้

$$a_0 + a_1 + a_2 = 1 \quad (3)$$

$$.25a_0 - .11a_1 - .25a_2 = 0 \quad (4)$$

$$-.02a_0 + .20a_1 - .15a_2 = 0 \quad (5)$$

$$.25(3) - (4) \quad .36a_1 + .50a_2 = .25 \quad \dots\dots(6)$$

$$.02(3) + (5) \quad .22a_1 - .13a_2 = .02 \quad \dots \quad (7)$$

$$11(6) - 18(7) \quad 7.84a_2 = 2.39$$

$$\Rightarrow \mu_{22} = \frac{1}{a_2} = \frac{7.84}{2.39} = 3.28$$

$$\mu_{11} = \frac{1}{a_1} = \frac{.22}{.0596} = 3.69$$

$$\mu_{00} = \frac{1}{a_0} = \frac{1}{.4241} = 2.358$$

คาดว่า ภายหลังจากเปลี่ยนสาขาวิชา นักศึกษาที่สมัครในสาขาคอมพิวเตอร์ เคมี และสาขาอื่น ๆ จะหวนกลับมาเลือกสาขาเดิมอีก โดยเฉลี่ยเท่ากับ 2, 3 และ 3 ปี ตามลำดับ

ปัญหาในทางปฏิบัติ โดยทั่วไปเราจะใช้สูตรเหล่านี้โดยตรงไม่ได้ เพราะบางจุดหมายจะมีจำนวนชั้นหรือระยะเวลาการถ่ายทอดจำกัด นั่นคือ การเปลี่ยนแปลงจะมาถึงจุดหมายสิ้นสุดหรือจุดหมายสุดท้าย (absorbing state) ปัญหาแต่ละประเภทจะมีระยะเวลาหรือจำนวนชั้นที่สิ้นสุดของจุดหมายแตกต่างกันไป เช่น ในปัญหาการเปลี่ยนหรือย้ายสาขาวิชา จะมีจุดหมายสุดท้ายคือจบการศึกษา ซึ่งอาจจะเป็น 3, 4 หรือมากกว่า หรือหมดสถานภาพคือครบ 8 ปี เป็นต้น ดังนั้น ในปัญหาที่มีเงื่อนไขเช่นนี้ ถ้าเรารวมจุดหมายสุดท้ายทุกจุดหมาย มาประกอบเป็นจุดหมายสุดท้าย q เวลาของการถ่ายทอดเป็นครั้งแรก (first - passage time) จะเป็น ค่าคาดหวังของเวลาหรือจำนวนชั้นที่มาถึงจุดหมายสุดท้าย (μ_{rq}) ซึ่งกำหนดได้ดังนี้

$$\mu_{rq} = 1 + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq q}}^N P'_{rj} \mu_{jq} \quad (5.20)$$

ในเมื่อ P'_{rj} เป็นความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนจากจุดหมายเริ่มต้น r มาถึงจุดหมายสุดท้าย q

$$\text{และ } P'_{rj} = P_{rj} + \sum_{\substack{s=0 \\ s \neq j}}^N P_{rs} P'_{sj} \quad (5.21)$$

ให้นักศึกษาดูตัวอย่างการสิ้นสุดของจุดหมาย ในตัวอย่างที่ 5.9

5.2.4 กระบวนการตัดสินใจมาร์คอฟ

กระบวนการตัดสินใจมาร์คอฟ (Markovian decision process) มีลักษณะเช่นเดียวกับโปรแกรมพลวัต แต่เป็นโปรแกรมที่มีความน่าจะเป็นของการถ่ายทอด 1 ชั้น ดังนั้น การตัดสินใจตามกระบวนการนี้ จึงเป็นการพิจารณาผลจากการแก้ปัญหาโดยวิธีการโปรแกรมพลวัตเชิงสถิติ เมื่อมีทางเลือกหลายทาง แต่ละทางเลือกจะมีเมตริกซ์ของความน่าจะเป็นของการถ่ายทอด 1 ชั้น และมีเมตริกซ์ของผลตอบแทนหรือของค่าใช้จ่าย ของการถ่ายทอด 1 ชั้น เป้าหมายของปัญหานี้ก็คือ การพิจารณาทางเลือกที่ดีที่สุด ที่มีค่าคาดหวังของผลตอบแทนสูงสุด หรือค่าคาดหวังของค่าใช้จ่ายต่ำสุด. ของกระบวนการตลอดชั้นตอนที่มีจำนวนจำกัด

สมมติว่าเรามี k ทางเลือก มีเมตริกซ์ P^k และ R^k เป็นเมตริกซ์ของความน่าจะเป็นถ่ายทอด และของฟังก์ชันผลตอบแทนสำหรับทางเลือกที่ k , $k = 1, 2, \dots, M$

กำหนด $f_j(r)$ = ค่าคาดหวังของผลตอบแทนที่ดีที่สุด ของชั้นตอน $j, j+1, \dots, n$
 กำหนดว่า จุดหมายของระบบของการเริ่มต้นของชั้นที่ j คือ r

$$f_j(r) = \text{ค่าสูงสุด}_k \left[\sum_{s=0}^N p_{rs}^k [c_{rs}^k + f_{j+1}(s)] \right], j = 1, 2, \dots, n$$

ในเมื่อ $f_{n+1}(s) \equiv 0$ ทุกค่า s

และ c_{rs}^k, p_{rs}^k เป็นค่าของผลตอบแทน และของความน่าจะเป็นตามลำดับ จากจุดหมาย r ไป s ของทางเลือก k นั่นคือสมาชิกตัวที่ (r, s) ของ R^k และ P^k ตามลำดับ

ถ้า v_r^k เป็นค่าคาดหวังของผลตอบแทน ซึ่งเป็นผลจากการถ่ายทอดจากจุดหมาย r กำหนดว่า ทางเลือกเป็น k

$$\text{จะได้ } v_r^k = \sum_{s=0}^N p_{rs}^k c_{rs}^k \quad (5.22)$$

ฟังก์ชันสัมพัทธ์ต่อเนื่อง (recursive function) ของโปรแกรมพลวัต จะกำหนดได้โดย

$$f_n(r) = \text{ค่าสูงสุด}_k \{v_r^k\}$$

$$f_j(r) = \text{ค่าสูงสุด}_k \left[v_r^k + \sum_{s=0}^N p_{rs}^k f_{j+1}(s) \right] \quad (5.23)$$

$j = n-1, \dots, 2, 1$

ตัวอย่างที่ 5.8 จากผลการวิจัยของนักวิชาการเกษตร ทำการทดลองผลที่ได้จากการปลูกพืช
 เกษตรในเขตที่ดินแห่งหนึ่ง เมื่อเริ่มต้นการเพาะปลูกในแต่ละปี เขาจะทดสอบสภาพของดิน
 ที่ทำการเพาะปลูก และวัดปริมาณผลผลิตที่ได้ภายหลังการเก็บเกี่ยว สรุปได้ว่า ปริมาณผลผลิต
 ที่ได้จะขึ้นอยู่กับสภาพของดินที่ทำการเพาะปลูก ซึ่งเขาแยกเป็น 4 กรณี คือผลผลิตดี ปานกลาง
 พอใช้ และเลว จากการสังเกตตลอดปีการเพาะปลูก เขาถือว่าปริมาณผลผลิตในปีนี้จะขึ้นอยู่กับ
 สภาพของดินในปีก่อนเพียงอย่างเดียวเท่านั้น และปริมาณที่ได้ในปีนี้จะไม่ดีกว่าปีก่อน
 ซึ่งแสดงให้เห็นได้จากเมตริกซ์ของความน่าจะเป็นถ่ายทอดตลอดช่วงระยะเวลา 1 ปี จากจุดหมาย
 ของปริมาณผลผลิตหนึ่งไปยังจุดหมายอื่น ๆ

$$\begin{array}{c}
 \text{จุดหมายของระบบปีหน้า} \\
 \left[\begin{array}{ccccc}
 0 & 1 & 2 & 3 \\
 .2 & .4 & .3 & .1 \\
 0 & .2 & .5 & .3 \\
 0 & 0 & .5 & .5 \\
 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right] = P^1
 \end{array}$$

ในเมื่อจุดหมายของระบบ 0, 1, 2 และ 3 แสดงถึงปริมาณผลผลิต (สภาพของดิน) ดีปานกลาง พอใช้ และเลว ตามลำดับ

การวิจัยยังคงมีต่อไป โดยทดลองใส่ปุ๋ยก่อนการเพาะปลูก ไม่ว่าจะสภาพของดินจะเป็นอย่างไรก็ตาม ผลสรุปที่ได้ก็คือ ถ้าเขาไม่ใส่ปุ๋ยเข้าช่วย ความน่าจะเป็นถ่ายทอด จะยังคงเป็นเช่นที่กำหนดใน P^1 แต่ถ้าเขาใส่ปุ๋ยปรับสภาพของดิน ไม่ว่าจะมีความน่าจะเป็นถ่ายทอดตามที่กำหนดในเมตริกซ์ P^2 ดังนี้

$$\begin{array}{c}
 \text{จุดหมายของระบบปีหน้า} \\
 \left[\begin{array}{ccccc}
 0 & 1 & 2 & 3 \\
 .3 & .5 & .15 & .05 \\
 .1 & .3 & .4 & .2 \\
 .1 & .3 & .4 & .2 \\
 .05 & .1 & .6 & .25 \\
 0 & .05 & .4 & .55
 \end{array} \right] = P^2
 \end{array}$$

จากการนำผลผลิตที่ได้ไปจำหน่าย จะได้ผลตอบแทน (เมื่อหักต้นทุนและค่าใช้จ่ายต่าง ๆ แล้ว) ตามที่กำหนดในเมตริกซ์ R^1 เมื่อไม่ใส่ปุ๋ย และใน R^2 เมื่อใส่ปุ๋ยช่วยปรับสภาพดินทุกจุดหมาย ดังนี้

$$R^1 = \begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
 \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \left[\begin{array}{cccc}
 10 & 9 & 6 & 3 \\
 0 & 7 & 5 & 2 \\
 0 & 0 & 4 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & -1
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \end{array}
 , \quad
 R^2 = \begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
 \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \left[\begin{array}{cccc}
 8 & 7 & 5 & 1 \\
 7 & 6 & 4 & 0 \\
 8 & 5 & 3 & 0 \\
 7 & 3 & 1 & -1
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \end{array}$$

ถ้าเขาต้องการเพาะปลูกพืชชนิดนี้เป็นเวลา 3 ปี เขาควรจะใช้ปุ๋ยหรือไม่ใช้ปุ๋ยในปีใด จึงจะทำให้ได้ผลตอบแทนรวมสูงสุด

วิธีทำ กำหนด $k = 1, 2$ เป็นทางเลือกของการใช้ปุ๋ย และการไม่ใช้ปุ๋ย ในทุกสภาพของดินตามลำดับ

k^* เป็นทางเลือกที่ดีที่สุด มีค่า $f_j(r)$, $j = 3, 2, 1$
 ขั้นตอนที่ 3

r	$v_r^k = \sum_{s=0}^3 p_{rs}^k c_{rs}^k$		$f_3(r)$	k^*
	k = 1	k = 2		
0	$.2 \times 10 + .4 \times 9 + .3 \times 6 + .1 \times 3 = 7.7$	$.3 \times 8 + .5 \times 7 + .15 \times 5 + .05 \times 1 = 6.7$	7.7	1
1	$0 \times 0 + .2 \times 7 + .5 \times 5 + .3 \times 2 = 4.5$	$.1 \times 7 + .3 \times 6 + .4 \times 4 + .2 \times 0 = 4.1$	4.5	1
2	$0 \times 0 + 0 \times 0 + .5 \times 4 + .5 \times 1 = 2.5$	$.05 \times 8 + .1 \times 5 + .6 \times 3 + .25 \times 0 = 2.7$	2.5	2
3	$0 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0 + 1 \times (-1) = -1$	$0 \times 7 + .05 \times 3 + .4 \times 1 + .55 \times (-1) = 0$	0	2

ขั้นตอนที่ 2

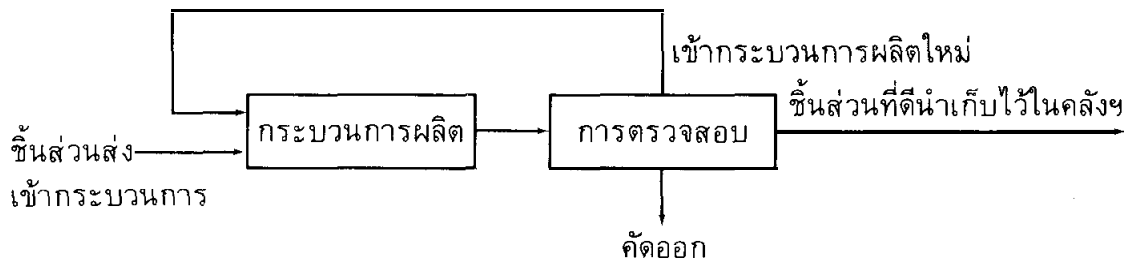
r	$v_r^k + \sum_{s=0}^3 p_{rs}^k f_3(s)$		$f_2(r)$	k^*
	k = 1	k = 2		
0	$7.7 + 1.54 + 1.8 + .81 + 0 = 11.85$	$6.7 + 2.31 + 2.25 + .405 + 0 = 11.665$	11.85	1
1	$4.5 + 0 + .9 + 1.35 + 0 = 6.75$	$4.1 + .77 + 1.35 + 1.08 + 0 = 7.3$	7.3	2
2	$2.5 + 0 + 0 + 1.35 + 0 = 3.85$	$2.7 + .385 + .45 + 1.62 + 0 = 5.155$	5.155	2
3	$-1 + 0 + 0 + 0 + 0 = -1$	$0 + 0 + .225 + 1.08 + 0 = 1.305$	1.305	2

ขั้นตอนที่ 1

r	$v_r^k + \sum_{s=0}^3 p_{rs}^k f_2(s)$		$f_1(r)$	k*
	k = 1	k = 2		
0	$7.7 + 2.37 + 2.92 + 1.5465 + .1305$ $= 14.667$	$7.7 + 3.555 + 3.65 + .77325 + .06525$ $= 14.7435$	4.1435	2
1	$4.5 + 0 + 1.46 + 2.5775 + .3915$ $= 8.929$	$4.1 + 1.185 + 2.19 + 2.062 + .261$ $= 9.798$	9.798	2
2	$2.5 + 0 + 0 + 2.5715 + .6525$ $= 5.73$	$2.7 + .5925 + .73 + 3.093 + .32625$ $= 7.4417$	7.4417	2
3	$1 + 0 + 0 + 0 + 1.305$ $= .305$	$1 + 0 + .365 + 2.062 + .71775$ $= 3.1447$	3.1447	2

ทางเลือกที่ดีที่สุดของนักวิชาการเกษตรก็คือ ในปีที่ 1 เขาควรใช้ปุ๋ยช่วยในการเพาะปลูก ไม่ว่าสภาพของดินจะเป็นอย่างไรก็ตาม ในปีที่ 2 เขาควรใช้ปุ๋ยเฉพาะกรณีที่สภาพของดิน ปานกลาง พอใช้ และเลว ปีที่ 3 เขาควรใช้ปุ๋ยเฉพาะกรณีที่สภาพของดิน พอใช้ หรือเลว นอกนั้นไม่ควรใช้ปุ๋ย ผลตอบแทนทั้งหมดที่ได้ในช่วง 3 ปี ก็คือ ถ้าปีแรกดินมีสภาพดี จะได้ค่าคาดหวังของผลตอบแทน 14.7435 ถ้าปีแรกดินอยู่ในสภาพปานกลาง ค่าคาดหวังของผลตอบแทน จะเท่ากับ 9.798 ถ้าปีแรกดินอยู่ในสภาพพอใช้ ค่าคาดหวังของผลตอบแทนจะเท่ากับ 7.4417 ถ้าปีแรกดินอยู่ในสภาพเลว ค่าคาดหวังของผลตอบแทนจะเท่ากับ 3.1447

ตัวอย่างที่ 5.9 โรงงานประกอบชิ้นส่วนที่สำคัญชนิดหนึ่งเพื่อเตรียมเข้ากระบวนการอื่นต่อไป คุณภาพของชิ้นส่วนนี้มีความสำคัญต่อการใช้อย่างยิ่ง จึงต้องมีการตรวจสอบทุกครั้งที่เกิดมา ได้ ถ้าคุณภาพตรงตามเกณฑ์กำหนด นั่นคือผ่านการตรวจสอบจะถูกนำไปเก็บไว้ในคลังฯ เพื่อรอการประกอบต่อไป แต่ถ้าคุณภาพไม่ตรงตามเกณฑ์กำหนด อาจจะคัดชิ้นส่วนนั้นออกไป หรืออาจจะนำกลับเข้ากระบวนการผลิตชิ้นส่วนใหม่ก็ได้ ผังของกระบวนการนี้ แสดงให้เห็นได้ตามรูปที่ (1)



เมื่อนำชิ้นส่วนเข้ากระบวนการผลิต (ไม่ว่าจะเป็นครั้งแรกหรือผ่านการตรวจแล้วนำมาเข้าใหม่ก็ตาม) จะมีโอกาส 85% ที่จะได้ชิ้นที่มีคุณภาพตรงตามมาตรฐาน 5% จะถูกตัดออกไปที่เหลือ 10% จะถูกนำเข้ากระบวนการใหม่ ชิ้นส่วนที่ผลิตเสร็จแล้วมีต้นทุนการผลิต 50 บาทต่อชิ้น (รวมค่าวัสดุและแรงงานด้วย) ค่าใช้จ่ายในการดำเนินงานและตรวจสอบจะเท่ากับ 10 บาทต่อชิ้นโดยประมาณ ชิ้นส่วนที่ถูกตัดออกจะมีราคา 5 บาทต่อชิ้น ในแต่ละงวดการผลิตโรงงานต้องการชิ้นส่วนที่มีมาตรฐานเก็บไว้ 1000 ชิ้น

โรงงานกำลังพิจารณาว่าควรจะมีการปรับปรุงเครื่องมือในการผลิตหรือไม่ โดยที่การปรับปรุงจะต้องเสียค่าใช้จ่าย 2,000 บาท คาดว่าการปรับปรุงจะสามารถลด % ชิ้นส่วนที่ตัดออกจาก 5 เหลือ 2% แต่จะเพิ่มจำนวนที่ต้องนำเข้ากระบวนการใหม่ จาก 10 เป็น 15%

ถ้าท่านเป็นผู้จัดการโรงงาน ท่านจะปรับปรุงเครื่องมือหรือไม่

จงหาว่าการปรับปรุงเครื่องมือจะช่วยให้การผลิตดำเนินไปอย่างประหยัด ควรจะผลิตให้ได้ชิ้นส่วนที่ดีมีคุณภาพได้มาตรฐานกี่ชิ้น จึงจะเหมาะสมที่สุด

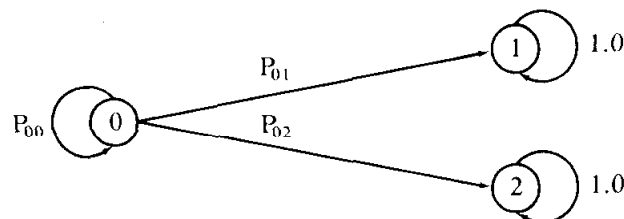
วิธีทำ สำหรับชิ้นส่วนแต่ละชิ้น เราพิจารณากระบวนการผลิตและการตรวจสอบเป็น กระบวนการมาร์คอฟ 3 สถานภาพ คือ

สถานภาพ 0 กำลังอยู่ในกระบวนการ หรือกำลังตรวจสอบ

สถานภาพ 1 ตัดออก

สถานภาพ 2 ผ่านการตรวจสอบ

จะเห็นได้ว่า สถานภาพ 1 และ 2 เป็นสถานภาพที่สิ้นสุด โดยมีสถานภาพ 0 เป็นสถานภาพถ่ายทอด แสดงให้เห็นได้ด้วยผังการถ่ายทอดอย่างง่าย ดังต่อไปนี้



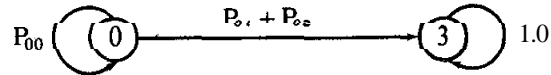
พิจารณาผลที่ได้ก่อนการปรับปรุงเครื่องมือ เรามี $P_{00} = 0.10$, $P_{01} = 0.05$, $P_{02} = 0.85$
 หาค่าความน่าจะเป็นของสถานภาพสิ้นสุด 1 และ 2 จะได้

$$P_{01}' = 0.05 + 0.10P_{01}' \quad \text{นั่นคือ } P_{01}' = 0.056$$

$$P_{02}' = 0.85 + 0.10P_{02}' \quad \text{นั่นคือ } P_{02}' = 0.944$$

เรารวมสถานภาพ 1 และ 2 ประกอบเป็นสถานภาพสิ้นสุด 3 จะได้ผังแสดงการถ่ายทอด

ดังนี้



ดังนั้น จำนวนครั้ง (ขั้น) ที่คาดว่าจะสิ้นสุด μ_{03} จะคำนวณได้จาก

$$\mu_{03} = 1 - 0.10\mu_{03} \quad \text{นั่นคือ } \mu_{03} = 1.111$$

จำนวนขั้นส่วนที่จะนำเข้ากระบวนการผลิตเริ่มต้น เพื่อให้ได้ขั้นส่วนที่ได้มาตรฐาน
 1000 ชิ้น จะเท่ากับ

$$1000/P_{02}' = 1000/0.944 = 1059$$

จำนวนขั้นส่วนที่คาดว่าจะถูกคัดออก จะเท่ากับ $1059P_{01}' = 1059(0.056) = 59$

ค่าใช้จ่ายจากการผลิตก่อนการปรับปรุงเครื่องมือ จะเท่ากับ

ต้นทุนการผลิตทั้งหมด + ค่าคาดหมายของค่าใช้จ่ายในการดำเนินการ - ค่าที่ได้จากขั้นส่วนคัดออก

$$(1059)(50) + (1059)(10)(1.111) - (5)(59) = 64,420.50$$

พิจารณาผลที่ได้ภายหลังการปรับปรุงเครื่องมือ มี $P_{00} = 0.15$, $P_{01} = 0.02$, $P_{02} = 0.83$

ดังนั้น $P_{01}' = 0.02/(1-0.15) = 0.024$, $P_{02}' = 0.83/(1-0.15) = 0.976$

และ $\mu_{03} = 1/(1-0.15) = 1.176$

เพื่อให้ได้ขั้นส่วนที่มีมาตรฐานครบ 1000 ชิ้น จำนวนขั้นส่วนที่จะส่งเข้ากระบวนการ
 เริ่มต้น จะเท่ากับ

$$1000/0.976 = 1025$$

ดังนั้น ค่าใช้จ่ายในการผลิตให้ได้ขั้นส่วนมาตรฐานครบ 1000 ชิ้น ภายหลังการปรับปรุง
 เครื่องมือ

$$(1025)(50) + (1025)(10)(1.176) - (1025)(0.024)(5) + 2000 = 65,181$$

เปรียบเทียบค่าใช้จ่ายในการผลิตทั้งหมดเพื่อให้ได้ขั้นส่วนมีมาตรฐาน 1000 ชิ้น จะเห็นว่า
 กระบวนการผลิตเดิม เสียค่าใช้จ่ายน้อยกว่า

จึงสรุปว่า ยังไม่ควรปรับปรุงเครื่องมือ

เพื่อให้การใช้เครื่องมือที่ปรับปรุงใหม่เป็นไปอย่างประหยัด อย่างน้อยที่สุด จะต้อง
มีค่าใช้จ่ายในการผลิต เพื่อให้ได้จำนวนชิ้นส่วนได้มาตรฐานเท่ากัน ทั้งก่อนและหลังการ
ปรับปรุง มีค่าเท่ากัน

สมมติเราต้องการให้ได้ชิ้นส่วนที่มีมาตรฐาน m ชิ้น

ดังนั้น ค่าใช้จ่ายในการผลิตเพื่อให้ได้ชิ้นส่วนมาตรฐานครบ m ชิ้น ก่อนการปรับปรุง
เครื่องมือ

$$= \frac{m}{0.944} [50 + (10)(1.111) - (5)(0.056)] = 64.44m$$

และ ค่าใช้จ่ายในการผลิตเพื่อให้ได้ชิ้นส่วนมาตรฐานครบ m ชิ้น ภายหลังจากปรับปรุง
เครื่องมือ

$$= \frac{m}{0.976} [50 + (10)(1.176) - (5)(0.024)] + 2000 = 63.16m + 2000$$

$$\text{จะได้ } 64.44m = 63.16m + 2000 \text{ หรือ } m = 1,562 \text{ ชิ้น}$$

นั่นก็คือ การปรับปรุงเครื่องมือใหม่ จะช่วยในการประหยัดค่าใช้จ่ายได้ ก็ต่อเมื่อ
เราต้องผลิตให้ได้ชิ้นส่วนมาตรฐานโดยเฉลี่ยมากกว่า 1,562 ชิ้น

แบบฝึกหัดที่ 5

1. บริษัทสั่งซื้อผลิตภัณฑ์ 6 ชิ้น ในราคาชิ้นละ 120 บาท ส่งไปจำหน่ายที่ร้านค้า 3 แห่ง ในราคาชิ้นละ 240 บาท ผลิตภัณฑ์ที่ร้านค้าใดจำหน่ายไม่หมด บริษัทจะรับซื้อคืนในราคาชิ้นละ 60 บาท ถ้าจำนวนอุปสงค์ของผลิตภัณฑ์ของร้านค้าแต่ละแห่ง เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงดังนี้

จำนวนอุปสงค์	ร้านค้า 1	ร้านค้า 2	ร้านค้า 3
1	0.6	0.5	0.2
2	0.3	0.1	0.6
3	0.1	0.4	0.2

จงหาว่า บริษัทควรจัดส่งผลิตภัณฑ์ไปจำหน่ายที่ร้านค้าแต่ละแห่งอย่างไร จึงจะดีที่สุดพิจารณาจากปัญหานี้ จะเห็นว่า ต้นทุนคงที่แต่ปริมาณขายผันแปรไปตามจำนวนอุปสงค์ของแต่ละร้านค้า การจัดส่งที่ดีที่สุด ก็คือ การจัดส่งที่ทำให้ได้กำไรมากที่สุด นั่นคือ การจัดส่งที่คาดว่าจะได้ปริมาณขายมากที่สุดนั่นเอง ในการวิเคราะห์ปัญหานี้ อาจจะใช้วิธีเดียวกันกับตัวอย่างที่ 5.1 หรืออาจใช้วิธีการหาค่าคาดหวังของปริมาณขายที่ได้จากการส่งผลิตภัณฑ์ไปจำหน่ายที่ร้านค้า j x_j ($j=1,2,3$) หน่วย เมื่อ $x_j = 0,1,2,3$ ตามลำดับ แล้วใช้วิธีการพลวัตในการหาค่าตอบที่ดีที่สุดต่อไป

ถ้าเราใช้วิธีการหาค่าคาดหวังของปริมาณขาย เราจะได้ผลสรุปดังนี้(ดูรายละเอียดของการคำนวณในหมายเหตุ)

ปริมาณที่ส่งไปขาย x_j	ค่าคาดหวังของปริมาณขาย($g(x_j)$)		
	ร้านค้า 1	ร้านค้า 2	ร้านค้า 3
1	240	240	240
2	372	390	444
3	450	522	540

ในการหาค่าตอบที่ดีที่สุดด้วยวิธีการพลวัต โดยที่จำนวนอุปสงค์สูงสุดของแต่ละร้านค้า เป็น 3 ถ้าเราใช้วิธีการคำนวณแบบรูดหน้า ในขั้นตอนที่ 1 เราไม่จำเป็นต้องส่งไปขายเกิน 3 ชิ้น นั่นคือ $x_j = x = 0,1,2,3$ การพิจารณาในขั้นตอนที่ 2 โดยที่จำนวนอุปสงค์สูงสุดของร้านค้า 3

ดังนั้น ปริมาณที่ส่งไปขายร้านค้า 1 และ 2 รวมกัน ควรจะมี อย่างน้อยที่สุด 3 แต่ไม่เกิน 6

นั่นคือ $x_1 + x_2 = 3, 4, 5, 6$ เราจะได้ผลการวิเคราะห์ในแต่ละขั้นตอน ดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 $f_1(x) = g_1(x_1)$, $d_1(x) = x_1$, $x = x_1 = 0, 1, 2, 3$

x	0	1	2	3
$f_1(x)$	0	240	372	450
$d_1(x)$	0	1	2	3

ขั้นตอนที่ 2 $f_2(x) = \text{ค่าสูงสุด}[g_2(x_2) + f_1(x - x_2)]$, $x_2 \leq x$, $3 \leq x \leq 6$, $x_2 = 0, 1, 2, 3$

$d_2(x) = \text{ค่า } x_2 \text{ ที่ดีที่สุด}$

x \ x ₂	0	1	2	3	$f_2(x)$	$d_2(x)$
3	0+450	240+372	390+240	522+0	630	2
4		240+450	390+372	522+240	762	2,3
5			390+450	522+372	894	3
6				522+450	972	3

ขั้นตอนที่ 3 $f_3(x) = \text{ค่าสูงสุด}[g_3(x_3) + f_2(x - x_3)]$, $x = 6$, $x_3 = 0, 1, 2, 3$

$d_3(x) = \text{ค่า } x_3 \text{ ที่ดีที่สุด}$

x \ x ₃	0	1	2	3	$f_3(x)$	$d_3(x)$
6	0+972	240+894	444+762	540+630	1206	2

ถ้า $d_3(x) = 2$ แล้ว $d_2(6-2) = d_2(4) = 2$ หรือ 3 ถ้า $d_2(4) = 2$ แล้ว $d_1(4-2) = d_1(2) = 2$

ถ้า $d_2(4) = 3$ แล้ว $d_1(4-3) = d_1(1) = 1$

สรุปได้ว่า มีคำตอบที่ดีที่สุด 2 ชุด ดังต่อไปนี้

บริษัทควรจัดส่งผลิตภัณฑ์ไปจำหน่ายแต่ละร้านค้า ร้านค้าละ 2 ชิ้น หรือ

จัดส่งผลิตภัณฑ์ไปจำหน่ายร้านค้า 1 1 ชิ้น ร้านค้า 2 3 ชิ้น และ ร้านค้า 3 2 ชิ้น หรือ

คาดว่าจะได้ปริมาณขายมากที่สุด = 1206 บาท

นั่นคือ คาดว่าจะได้กำไรมากที่สุด = $1206 - 6(120) = 482$ บาท

หมายเหตุ การหาค่าคาดหวังของปริมาณขายของแต่ละร้านค้า จะเห็นว่า ถ้าไม่ส่งไปขายร้านค้าใด ปริมาณขายจะเป็น 0 ถ้าส่งไปขาย 1 หรือ 2 หรือ 3 จะได้ค่าคาดหวังของปริมาณขายดังนี้

ปริมาณที่ส่งไปขาย	ค่าคาดหวังของปริมาณขายของร้านค้า j
j=1 : 1	$240(0.6+0.3+0.1) = 240$
2	$(240+60)(0.6)+2(240)(0.3+0.1) = 372$
3	$\{240+2(60)\}(0.6)+\{2(240)+60\}(0.3)+3(240)(0.1) = 450$
j=2 : 1	$240(0.5+0.1+0.4) = 240$
2	$(240+60)(0.5)+2(240)(0.1+0.4) = 390$
3	$\{240+2(60)\}(0.5)+\{2(240)+60\}(0.1)+3(240)(0.4) = 522$
j=3 : 1	$240(0.2+0.6+0.2) = 240$
2	$(240+60)(0.2)+2(240)(0.6+0.2) = 444$
3	$\{240+2(60)\}(0.2)+\{2(240)+60\}(0.6)+3(240)(0.2) = 540$

2. ในบรรดาโรงงานที่ผลิตผงซักฟอก จะมีการผลิตผงซักฟอกยี่ห้อใดยี่ห้อหนึ่งใน 2 ยี่ห้อ คือ เอ กับ บี ในแต่ละเดือนจะมีผู้บริโภคมงซักฟอก 2 ยี่ห้อนี้ 5 ล้านคน ทุกเดือน จากการสำรวจครั้งสุดท้าย พบว่า 80% ของผู้บริโภคมงซักฟอกเอ จะยังคงบริโภคยี่ห้อเอในเดือนต่อไป และ 40% ของผู้บริโภคมงซักฟอกบี จะเปลี่ยนไปบริโภคยี่ห้อเอในเดือนต่อไป
 - 2.1 ถ้าผู้บริโภคมงซักฟอกเอในเดือนแรก โอกาสที่จะบริโภคยี่ห้อเอในเดือนที่สาม จะมีกี่ %
 - 2.2 ถ้า 60% ของผู้บริโภคมงซักฟอกเอในเดือนแรก ที่เหลือใช้ยี่ห้อบี จงหาเปอร์เซ็นต์ของผู้บริโภคมงซักฟอกยี่ห้อบีในเดือนที่สี่
 - 2.3 ในระยะยาว ความน่าจะเป็นที่ผู้บริโภคมงซักฟอกเอจะยังคงบริโภคยี่ห้อเอต่อไป จะเป็นเท่าใด
 - 2.4 จงหาว่าผู้บริโภคมงซักฟอกเอในเดือนแรก จะใช้เวลาโดยเฉลี่ยกี่เดือน จึงจะเปลี่ยนไปบริโภคมงซักฟอกบี
 - 2.5 ถ้าต้นทุนการผลิตผงซักฟอกแต่ละยี่ห้อ เท่ากับ 60 บาทต่อกล่อง และราคาขายกล่องละ 120 บาท เหมือนกันทั้งสองยี่ห้อ ผู้บริโภคจะซื้อยี่ห้อใดยี่ห้อหนึ่งเดือนละ 1 กล่องเสมอ บริษัทโฆษณาหนึ่งได้เสนอการประกันต่อโรงงานผลิตผงซักฟอกเอ โดยประกัน

ว่า จะสามารถลดเปอร์เซ็นต์ของผู้บริโภคยี่ห้อเอที่เปลี่ยนไปบริโภคยี่ห้อบี จาก 20 % ให้เหลือเพียง 10% โดยคิดค่าโฆษณา 150 ล้านบาทต่อปี โรงงานผลิตผงซักฟอกเอ ควรจ้างบริษัทโฆษณานี้หรือไม่

ในการวิเคราะห์ปัญหานี้ ก่อนอื่น เราหาเมตริกซ์ของความน่าจะเป็นถ่ายทอด จะได้

$$\begin{array}{c} \text{เดือนที่สอง} \\ \text{เอ} \quad \text{บี} \\ \text{เดือนแรก} \quad \begin{array}{c} \text{เอ} \\ \text{บี} \end{array} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \end{array}$$

ใช้ข้อมูลในตารางนี้ ในการตอบปัญหาข้อ 2.1 – 2.4 ดังต่อไปนี้

2.1 ความน่าจะเป็นที่ผู้บริโภคยี่ห้อเอในเดือนแรกจะบริโภคยี่ห้อเอในเดือนที่สาม จะเท่ากับ

$$0.8(0.8) + 0.2(0.4) = 0.72$$

ผู้ที่บริโภคยี่ห้อเอในเดือนแรกจะบริโภคยี่ห้อเอในเดือนที่สาม จะเท่ากับ 72 %

2.2 หาเมตริกซ์ของความน่าจะเป็นถ่ายทอดของเดือนที่สาม จะได้

$$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.72 & 0.28 \\ 0.56 & 0.44 \end{bmatrix}$$

หาเมตริกซ์ของความน่าจะเป็นถ่ายทอดของเดือนที่สี่ จะได้

$$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.72 & 0.28 \\ 0.56 & 0.44 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.688 & 0.312 \\ 0.624 & 0.376 \end{bmatrix}$$

ในเดือนแรกมีผู้บริโภคผงซักฟอกเอ 60% ที่เหลือ 40% บริโภคผงซักฟอกบี ดังนั้น เปอร์เซ็นต์ของผู้บริโภคผงซักฟอกยี่ห้อบีในเดือนที่สี่

$$\begin{aligned} &= 100[0.6(0.312) + 0.4(0.376)] \\ &= 33.76 \% \end{aligned}$$

2.3 พิจารณาค่าความน่าจะเป็นในระยะยาวของยี่ห้อเอ(a_1) และของยี่ห้อบี(a_2) จะได้

$$a_1 = 0.8a_1 + 0.4a_2$$

$$a_2 = 0.2a_1 + 0.6a_2$$

$$\text{และ } a_1 + a_2 = 1$$

จากสองสมการแรก เราจะได้

$$0.2a_1 - 0.4a_2 = 0$$

แทนค่า $a_2 = 1 - a_1$ ในสมการนี้ จะได้

$$0.2a_1 - 0.4(1 - a_1) = 0 \text{ หรือ } a_1 = \frac{2}{3}$$

ความน่าจะเป็นที่ผู้บริโภคน้ำหอมจะยังคงบริโภคน้ำหอมต่อไปในระยะยาว = 0.67

2.4 พิจารณา $\mu_{AB} = 1 + p_{AA}\mu_{AB}$ จะได้

$$\mu_{AB} = 1 + 0.8\mu_{AB} \text{ หรือ } \mu_{AB} = 5$$

นั่นคือ ผู้ที่เริ่มต้นการบริโภคผงซักฟอกเองจะใช้เวลาโดยเฉลี่ย 5 เดือน จึงจะเปลี่ยนไปบริโภคผงซักฟอกบี

2.5 เปรียบเทียบกำไรที่ได้ต่อปีของผงซักฟอกเอ กรณีที่จ้างและไม่จ้างบริษัทโฆษณา

กำไรที่ได้จากการจำหน่ายผงซักฟอกแต่ละยี่ห้อ = $120 - 60 = 60$ บาทต่อกล่อง

กำไรที่ได้จากการจำหน่ายผงซักฟอกในแต่ละปี = $12(5)60 = 3,600$ ล้านบาท

เมื่อไม่มีการโฆษณาโรงงานผลิตผงซักฟอกเอจะได้กำไร = $\frac{2}{3}(3600) = 2,400$ ล้านบาทต่อปี

ตารางความน่าจะเป็นถ่ายทอดตามข้อเสนอของบริษัทโฆษณา กำหนดได้ดังนี้

	เอ	บี
เอ	0.9	0.1
บี	0.4	0.6

จะได้ $a_1 = 0.9a_1 + 0.4a_2$ หรือ $0.1a_1 - 0.4a_2 = 0$

และ $a_1 + a_2 = 1$

แก้สมการทั้งสอง จะได้ $a_1 = \frac{4}{5}$

เมื่อมีการโฆษณาโรงงานผลิตผงซักฟอกเอจะได้กำไร = $\frac{4}{5}(3600) - 150$

= 2,730 ล้านบาทต่อปี

นั่นคือ ถ้าจ้างบริษัทโฆษณา

โรงงานผลิตผงซักฟอกเอจะได้กำไรเพิ่มขึ้น = $2730 - 2400 = 330$ ล้านบาทต่อปี

สรุปได้ว่า โรงงานผลิตผงซักฟอกเอควรจ้างบริษัทโฆษณา

3. พ่อค้าต้องการส่งสินค้าที่มีอยู่ 5 ลอต ไปจำหน่ายที่ตลาด 3 แห่ง ความต้องการของสินค้าแต่ละแห่ง เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจง ดังนี้

จำนวนที่ต้องการ(ลอต)	0	1	2	3	4	5
ตลาด ก	0.1	0.2	0.3	0.2	0.1	0.1
ตลาด ข	0	0.1	0.3	0.4	0.1	0.1
ตลาด ค	0	0	0.2	0.4	0.3	0.1

ถ้ากำไรที่ได้จากการจำหน่ายในตลาดแต่ละแห่ง เท่ากับ 1,500 1,600 และ 1,450 บาท ต่อลอต ตามลำดับ พ่อค้าควรจัดส่งสินค้าไปจำหน่ายแต่ละตลาด อย่างไร จึงจะดีที่สุด

4. องค์การแห่งหนึ่งมีงานที่อยู่ในความรับผิดชอบ 3 โครงการ องค์การได้รับความช่วยเหลือจากต่างประเทศ ในรูปผู้เชี่ยวชาญ 2 คน ซึ่งคาดว่าจะช่วยให้งานในแต่ละโครงการได้ผลตามเป้าหมายและทันเวลา ความน่าจะเป็นที่งานในแต่ละโครงการจะประสบผลสำเร็จเมื่อมีผู้เชี่ยวชาญมาให้คำแนะนำ มีดังนี้

จำนวนผู้เชี่ยวชาญ	โครงการ 1	โครงการ 2	โครงการ 3
0	0.80	0.75	0.68
1	0.92	0.90	0.89
2	0.98	0.95	0.97

องค์การควรจัดสรรผู้เชี่ยวชาญ ให้แต่ละโครงการ อย่างไร จึงจะดีที่สุด

5. ปัญหาของโรงงาน ก็คือ การเสื่อมสภาพของเครื่องจักร ซึ่งจัดไว้ 5 สภาพ ตามประสิทธิภาพของการทำงาน ดังต่อไปนี้

สถานภาพ	0	1	2	3	4
ประสิทธิภาพ %	95-100	87-94	76-86	70-75	หยุดการดำเนินงาน

จะมีการตรวจสอบเครื่องจักรทุก ๆ สัปดาห์ แต่ครั้งที่ตรวจสอบจะจำแนกประเภทเครื่องจักรเป็น 5 สถานภาพ ตามตารางข้างต้น ถ้าเครื่องจักรใช้งานไม่ได้ จะต้องนำไปซ่อมแซมในวันหยุด ให้ทันใช้งานได้ในวันจันทร์ ภายหลังจากการซ่อมแซม เครื่องจักรจะมีประสิทธิภาพในการทำงาน 87-94% แต่ต้องเสียค่าใช้จ่ายในการซ่อม 6,000 บาท ถ้าความน่าจะเป็นถ่ายทอด กำหนดในตารางเมตริกซ์ ในหน้า

- 5.1 จงเขียนตารางเมตริกซ์ของความน่าจะเป็นถ่ายทอดนี้ให้สมบูรณ์

และอธิบายความหมายของ p_{13} และ p_{41}

5.2 ถ้ากำไรที่ได้จากสัปดาห์ก่อนของผลผลิตในแต่ละสถานภาพ เป็น 10,000 8,000 6,000 และ 4,000 จงคาดหมายกำไรต่อสัปดาห์ที่จะได้ในระยะยาว

6. บริษัทพิจารณาสื่อการโฆษณาระหว่าง วิทยุ โทรทัศน์ และหนังสือพิมพ์ ซึ่งมีค่าใช้จ่ายต่อสัปดาห์ เท่ากับ 5,000 20,000 และ 7,500 บาท ตามลำดับ บริษัทจำแนกปริมาณขายในแต่ละสัปดาห์เป็น 3 ประเภท คือ (1) พอใช้ (2) ดี และ (3) ดีที่สุด และสรุปได้ความน่าจะเป็นถ่ายทอดจากการใช้สื่อโฆษณาแต่ละชนิด ดังต่อไปนี้

	วิทยุ			โทรทัศน์			หนังสือพิมพ์				
	1	2	3	1	2	3	1	2	3		
1	[.4 .5 .1]			1	[.7 .2 .1]			1	[.2 .5 .3]		
2	[.1 .7 .2]			2	[.3 .6 .1]			2	[0 .7 .3]		
3	[.1 .2 .7]			3	[.1 .7 .2]			3	[0 .2 .8]		

ผลตอบแทนที่ได้ต่อสัปดาห์ (ล้านบาท) จากแต่ละกรณี ตามลำดับ กำหนดได้ดังนี้

	วิทยุ			โทรทัศน์			หนังสือพิมพ์				
	1	2	3	1	2	3	1	2	3		
1	[10 13 15]			1	[24 30 40]			1	[10 13 18]		
2	[7 10 17]			2	[20 24 42]			2	[8 11 20]		
3	[5 6 12]			3	[14 17 26]			3	[6 10 16]		

จงหานโยบายการโฆษณาที่ดีที่สุด