บทที่ 3
โปรแกรมเชิงจำนวนเต็ม

การหาคำตอบต่อปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น ในบางครั้งจะพบว่า เราได้คำตอบที่ไม่มีความหมายในทางปฏิบัติ เช่น กำหนดได้ว่า จะผลิตโต๊ะ $20\frac{2}{3}$ ตัว หรือใช้คนตรวจสอบคุณภาพสินค้า $5\frac{7}{8}$ คน เป็นต้น จะเห็นว่า คำตอบที่ได้นี้เป็นคำตอบที่เป็นไปไม่ได้ หากเราจะปรับค่านี้ให้เป็นค่าที่มีความหมาย โดยการปัดเศษ เช่น กำหนดว่า ผลิตโต๊ะ 20 ตัว หรือใช้คนตรวจสอบ 6 คน ก็ไม่อาจประกันได้ว่า จะได้คำตอบที่เป็นไปได้หรือคำตอบที่เป็นไปไม่ได้กันแน่ เทคนิคที่จะใช้เพื่อให้ได้คำตอบที่มีความหมายและเป็นไปได้ ก็คือ โปรแกรมเชิงจำนวนเต็ม (Integer Programming) ซึ่งเป็นโปรแกรมที่มีข้อกำกัดว่า ตัวแปรทุกตัวจะต้องมีค่าเป็นเลขจำนวนเต็มที่มากกว่าหรือเท่ากับ 0 ในทางปฏิบัติ ปัญหาจำนวนมากไม่ว่าจะเป็น ปัญหาโปรแกรมที่เป็นเส้นตรง หรือไม่เป็นเส้นตรงก็ตาม มักต้องการคำตอบที่มีค่าเป็นเลขจำนวนเต็ม ในที่นี้เราจะพูดเฉพาะปัญหาโปรแกรมเชิงจำนวนเต็มที่เป็นเส้นตรง วิธีการที่จะใช้ในการแก้ปัญหาประเภทนี้มีหลายวิธี เช่น วิธีการ cutting plane วิธีการ branch and bound วิธีการแจงนับ วิธีการขนส่ง แต่ละวิธีเหมาะสมที่จะใช้ในการแก้ปัญหาแต่ละลักษณะ ไม่มีวิธีใดที่จะมีประสิทธิภาพนำไปใช้กับปัญหาทุกแบบได้

3.1 ลักษณะปัญหาที่ใช้โปรแกรมเชิงจำนวนเต็ม

ปัญหาที่ใช้โปรแกรมเชิงจำนวนเต็ม ส่วนมากจะเป็นปัญหาทางด้านเศรษฐศาสตร์และธุรกิจ ซึ่งต้องการคำตอบที่เป็นเลขจำนวนเต็ม เพื่อความเข้าใจง่ายและสะดวกต่อการแปลความหมาย ตัวอย่างของปัญหาเหล่านี้ ได้แก่

3.1.1 ปัญหาค่าใช้จ่ายคงที่ (Fixed – Charge Problem)

มีการดำเนินงานทางด้านธุรกิจจำนวนมากที่จะต้องมีค่าใช้จ่ายคงที่หรือค่าใช้จ่ายในการ

ดำเนินงาน เช่น ในปัญหาการวางแผนการผลิตบางประเภท ที่มีการผลิตสินค้า N ชนิด ค่าใช้จ่ายในการผลิตสินค้าแต่ละชนิด อาจประกอบด้วยค่าใช้จ่ายคงที่ ซึ่งเป็นอิสระจากจำนวนผลิตและค่าใช้จ่ายผันแปรต่อหน่วย หรือในปัญหาการสั่งสินค้า N ชนิด เข้ามาใช้หรือจำหน่ายก็ตาม อาจจะต้องมีค่าใช้จ่ายในการสั่งของแต่ละชนิด ซึ่งไม่เกี่ยวข้องกับจำนวนและราคาต่อหน่วยของสินค้านั้น

สมมติว่าบริษัทต้องการผลิตหรือสั่งสินค้าเข้ามา N ชนิด แต่ละชนิดมีปริมาณ x_j หน่วย มีค่าใช้จ่ายในการผลิตหรือราคาของสินค้า j เป็น c_j บาทต่อหน่วย K_j เป็นค่าใช้จ่ายคงที่จากการเตรียมการผลิตหรือสั่งซื้อสินค้า j

สมมติว่า ความต้องการสินค้า j อยู่ระหว่าง a_j และ b_j และบริษัทต้องการผลิตหรือสั่งสินค้าเข้ามาให้เพียงพอกับความต้องการ แต่ให้มีค่าใช้จ่ายทั้งหมดต่ำสุด ดังนั้น ตัวแบบที่เหมาะสมก็คือ

ค่าต่ำสุด $Z = \sum_{j=1}^{N} (k_j + c_j x_j)$

โดยมีข้อจำกัด $a_j \leqslant x_j \leqslant b_j \quad j = 1,2,\ldots,N$ (3.1)

$x_j = 0,1,2,\ldots,$ ทุกค่า j

ในเมื่อ $k_j + c_j x_j = 0$ ถ้า $x_j = 0$

กรณีของการสั่งสินค้าเข้ามา ตัวแบบนี้ถือว่าไม่มีส่วนลดจากการสั่งสินค้าจำนวนมาก

จากตัวแบบนี้จะเห็นว่า ฟังก์ชันเป้าหมาย Z ไม่เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น เนื่องจากมีค่ากระโดด ตัวอย่างเช่น เมื่อ $x_1 = 0,\ k_1 + c_1x_1 = 0$ แต่เมื่อ $x_1 = d > 0,\ k_1 + c_1x_1 = k_1 + c_1d$ ดังนั้น เพื่อความสะดวกและง่ายต่อการจัดการ เราปรับตัวแบบนี้เสียใหม่ โดยการกำหนดตัวแปร y_j ดังนี้

$y_j = 0$ เมื่อ $x_j = 0$

$y_j = 1$ เมื่อ $x_j > 0$

และ $x_j \leqslant My_j$

เมื่อ $M > 0$ เป็นค่าโตพอสมควร ที่จะทำให้ $x_j \leqslant M$ เป็นข้อจำกัดที่อยู่เหนือ $x_j = b_j$ ตัวแบบ (3.1) นำมาเขียนได้ใหม่ ดังนี้

ค่าต่ำสุด $Z = \sum_{j=1}^{N} (c_jx_j + k_jy_j)$

โดยมีข้อจำกัด $a_j \leqslant x_j \leqslant b_j$ (3.2)

$x_j \leqslant My_j \qquad\qquad j = 1,2,\ldots,N$

$y_j \;\; 4 \;\; 1$

$x_j = 0,1,2,\ldots, \;\; y_j = 0, 1$ ทุกค่า j

ตัวอย่างที่ 3.1 โรงงานวางแผนว่า จะผลิตสินค้าในสัปดาห์นี้เป็นจำนวน 2,500 หน่วย โรงงานมีเครื่องจักร 3 เครื่องที่จะนำมาใช้ได้ เครื่องจักรแต่ละเครื่องมีความสามารถในการผลิตสินค้าได้ 800, 1000 และ 1500 หน่วยต่อสัปดาห์ ค่าใช้จ่ายในการเตรียมการ และค่าใช้จ่ายในการผลิตสินค้าโดยใช้เครื่องจักรแต่ละเครื่อง มีดังนี้

เครื่องจักร	1	2	3
ค่าเตรียมการ (บาท)	1500	4500	3000
ค่าผลิต (บาทต่อหน่วย)	150	30	75

จงเขียนตัวแบบของปัญหานี้

วิธีทำ ให้เครื่องจักร 1 ผลิตสินค้า x_1 หน่วย

เครื่องจักร 2 ผลิตสินค้า x_2 หน่วย

เครื่องจักร 3 ผลิตสินค้า x_3 หน่วย

กำหนด $y_j = 0$ เมื่อ $x_j = 0$

$y_j = 1$ เมื่อ $x_j > 0$ $\qquad j = 1,2,3$

จะได้

ค่าต่ำสุด $Z = 150x_1 + 30x_2 + 75x_3 + 1500y_1 + 4500y_2 + 3000y_3$

โดยมีข้อจำกัด

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 2500 \\
x_1 - 2600y_1 &\leqslant 0 \\
x_2 - 2600y_2 &\leqslant 0 \\
x_3 - 2600y_3 &\leqslant 0 \\
x_1 &\leqslant 800 \\
x_2 &\leqslant 1000 \\
x_3 &\leqslant 1500
\end{aligned}
$$

$$y_1 \leqslant 1$$
$$y_2 \leqslant 1$$
$$y_3 \leqslant 1$$

$x_j = 0,1,2,\ldots; y_j = 0, 1$ ทุกค่า j

[ในที่นี้เราเลือก M(2600) > 2500]

3.1.2 ปัญหาการจัดของ

ในการเดินทางเพื่อทำธุรกิจ ขยายการค้า หรือโฆษณาสินค้าใหม่ พนักงานขายต้องการที่จะนำตัวอย่างสินค้า N ชนิดไปโฆษณาขาย ปัญหาที่พนักงานขายประสบอยู่ก็คือข้อจำกัดในเรื่องน้ำหนัก หรือปริมาณของที่จุได้ ไม่ว่าจะเดินทางโดยรถยนต์ส่วนตัวหรือไม่ก็ตาม จึงจำเป็นต้องมาพิจารณาว่า ควรจะนำสินค้าชนิดใดไปบ้าง กี่ชิ้น จึงจะเกิดประโยชน์ที่สุด ประโยชน์ที่ได้อาจจะเป็นราคาที่แท้จริงของสินค้านั้น หรืออาจจะประมาณจากปริมาณขายทั้งหมดของสินค้าชนิดนั้น ก็ได้

สมมติว่า พนักงานขายต้องการนำสินค้า j ไป = x_j ชิ้น สินค้า j แต่ละชิ้นมีน้ำหนัก (หรือขนาด) w_j ผลตอบแทนที่จะได้จากการนำสินค้า j ไปหนึ่งชิ้นเท่ากับ c_j บาท ในการเดินทางครั้งนี้พนักงานขายสามารถนำของติดตัวไปได้เต็มที่ W หน่วยน้ำหนัก ปัญหาก็คือควรจะนำชนิดใดไป ในปริมาณเท่าใด จึงจะได้ผลตอบแทนสูงสุด

ตัวแบบของปัญหานี้ คือ

$$\text{ค่าสูงสุด} \quad z = \sum_{j=1}^{N} c_j x_j \tag{3.3}$$

$$\text{โดยมีข้อจำกัด} \quad \sum_{j=1}^{N} w_j x_j \leqslant W \tag{3.4}$$

$$x_j = 0,1,2,\ldots \text{ ทุกค่า } j \tag{3.5}$$

กรณีที่เขาต้องการนำสินค้าไปเป็นตัวอย่างชนิดละ 1 ชิ้น ตัวแบบที่ได้ จะประกอบด้วย (3.3), (3.4) และ

$$x_j = 0, 1 \text{ ทุกค่า } j \tag{3.6}$$

เราเรียกปัญหานี้ว่า **ปัญหาโปรแกรม** 0 – 1

ปัญหาประเภทนี้นำไปใช้ได้กับปัญหาการจัดกระเป๋าของนักเดินทาง ซึ่งจะมีข้อจำกัดในเรื่องน้ำหนัก ในขณะที่นักเดินทางต้องการจะนำของไปให้มากที่สุด หรือในปัญหาการไปค่าย

ซึ่งมีของจำเป็นที่จะต้องใช้หลายชนิด ก็ต้องมาเลือกดูว่า จะเอาอะไรไปได้บ้าง จึงจะไม่เกินกำลังของตน แต่ให้ได้ใช้ประโยชน์มากที่สุด นอกจากนี้อาจนำไปใช้กับปัญหาการส่งของ ปัญหาการจัดห้องแสดงสินค้า เป็นต้น

ตัวอย่างที่ 3.2 นายไทยต้องการนำสินค้า 3 ชนิด ไปจำหน่ายในที่แห่งหนึ่ง แต่มีข้อจำกัดในเรื่องน้ำหนักของที่เขาสามารถนำไปได้เต็มที่ 10 กิโลกรัม น้ำหนักสินค้าแต่ละชนิดเป็น 3, 4 และ 2 กิโลกรัมต่อหน่วย ตามลำดับ กำไรที่คาดว่าจะได้จากการจำหน่ายสินค้าแต่ละชนิดเท่ากับ 80, 112 และ 48 บาทต่อหน่วย ตามลำดับ นายไทยควรนำสินค้าใดไปบ้าง จึงจะเกิดผลดีที่สุด

วิธีทำ กำหนดว่า นายไทยนำสินค้าชนิดที่ 1 ไป = x_1 หน่วย

สินค้าชนิดที่ 2 ไป = x_2 หน่วย

สินค้าชนิดที่ 3 ไป = x_3 หน่วย

จะได้ตัวแบบ

ค่าสูงสุด $Z = 80x_1 + 112x_2 + 48x_3$

โดยมีข้อจำกัด $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leqslant 10$

$x_j(j = 1,2,3) = 0,1,2,\ldots$

ตัวอย่างที่ 3.3 นายรามต้องการส่งหนังสือสารานุกรมที่มีอยู่ 5 ประเภท ไปให้ห้องสมุดโรงเรียนแห่งหนึ่ง เนื่องจากเขามีเงินจำกัด จึงพยายามจัดส่งโดยเสียค่าขนส่งต่ำสุด แต่กำหนดว่าจะส่งหนังสือรวมกันให้มีน้ำหนักอย่างน้อยที่สุด 21 กิโลกรัม และให้ได้จำนวนอย่างน้อยที่สุด 30 เล่ม ค่าจัดส่ง น้ำหนักและจำนวนเล่มของสารานุกรมแต่ละประเภท กำหนดไว้ดังนี้

ประเภทของสารานุกรม	1	2	3	4	5
ค่าส่ง (บาท)	21	42	16	32	64
น้ำหนัก (กิโลกรัม)	7	14	4	8	16
จำนวนเล่ม	4	8	6	12	24

นายรามควรจัดส่งหนังสือประเภทใดไปบ้าง จึงจะเกิดผลดีที่สุด

วิธีทำ กำหนด $x_j = 1$ ถ้าส่งสารานุกรม j ไปให้

$x_j = 0$ ถ้าไม่ส่งสารานุกรม j ไป $\qquad j = 1,2,3,4,5$

เขียนตัวแบบได้ดังนี้

ค่าต่ำสุด $Z = 12x_1 + 42x_2 + 16x_3 + 32x_4 + 64x_5$

โดยมีข้อจำกัด $7x_1 + 14x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 16x_5 \geqslant 21$

$4x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 12x_4 + 24x_5 \geqslant 30$

$x_j = 0, 1$ ทุกค่า j

3.1.3 ปัญหาการลงทุน (Capital Budgeting Problem)

ในการดำเนินงาน ไม่ว่าจะเป็นของภาคเอกชนหรือของรัฐบาลก็ตาม บางครั้งจะต้องมีการลงทุ่นในหลาย ๆ โครงการพร้อมกัน แต่เนื่องจากความจำกัดในด้านงบประมาณ จึงจำเป็นต้องศึกษาถึงความเป็นไปได้ของแต่ละโครงการ ผลประโยชน์โดยรวมที่คาดว่าจะได้ทั้งในระยะสั้นและระยะยาว ความจำเป็นที่จะต้องลงทุนในโครงการนั้น ๆ โดยเฉพาะ ถ้าการลงทุนแยกเป็นระยะ ๆ การวิเคราะห์ถึงผลประโยชน์ที่จะได้รับ จะต้องคำนึงถึงค่าของเงินซึ่งเปลี่ยนแปลงกับเวลาต้องปรับค่าของเงินเป็นมูลค่าปัจจุบัน นำมารวมกันเป็นเงินที่มีมูลค่าปัจจุบันสุทธิ (Net Present Value NPV) ดังนั้น ในการลงทุนที่แบ่งการลงทุนของแต่ละโครงการเป็นระยะ ๆ การเลือกโครงการใด จึงพิจารณาที่ให้ผลตอบแทนที่มีมูลค่าปัจจุบันสุทธิดีที่สุด

สมมติ เรามีโครงการพิเศษที่เหมาะต่อการลงทุน N โครงการ แต่ละโครงการมีช่วงการลงทุน T ปี ในแต่ละปีเรามีงบประมาณการลงทุน B_i บาท การลงทุนในโครงการ j ปีที่ i จะต้องใช้เงินทุน a_{ij} บาท มูลค่าปัจจุบันสุทธิ (NPV) ของโครงการ j เท่ากับ v_j บาท เราควรจะเลือกโครงการใด จึงจะดีที่สุด

ในที่นี้ เราจะกำหนดตัวแปรตัดสินใจได้ดังนี้

กำหนด $x_j = 1$ ถ้าเลือกโครงการ j

$x_j = 0$ ถ้าไม่เลือกโครงการ j $\qquad j = 1,2,\ldots,N$

เขียนตัวแบบได้ดังนี้

ค่าสูงสุด $Z = \sum_{j=1}^{N} v_j x_j$

โดยมีข้อจำกัด $\sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j \leqslant B_i, \; i = 1,2,\ldots,T$ $\qquad$ (3.7)

$x_j = 0, 1$ ทุกค่า j

ตัวอย่างที่ 3.4 บริษัทกำลังพิจารณาการลงทุน 5 โครงการ ซึ่งต้องใช้เวลาจัดการ 3 ปี บริษัทมีงบประมาณการลงทุนปีละ 50 ล้านบาท จากการศึกษาและประเมินผลดีผลเสีย จากแต่ละโครงการ คาดหมายจำนวนเงินทุนในแต่ละปี และผลตอบแทนรวม NPV ของแต่ละโครงการปรากฏผลดังนี้

โครงการ	**เงินลงทุน (ล้านบาท)**			**NPV**
	ปีที่ 1	**ปีที่ 2**	**ปีที่ 3**	**(ล้านบาท)**
1	10	2	16	60
2	8	14	20	120
3	6	18	4	60
4	14	8	2	45
5	16	12	20	90

บริษัทควรเลือกโครงการใดจึงจะดีที่สุด

วิธีทำ กำหนด $x_j = 1$ ถ้าบริษัทเลือกโครงการ j

$x_j = 0$ ถ้าไม่เลือกโครงการ j $\qquad j = 1,2,3,4,5$

เขียนตัวแบบได้ดังนี้

ค่าสูงสุด $Z = 60x_1 + 120x_2 + 60x_3 + 45x_4 + 90x_5$

โดยมีข้อจำกัด $10x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 14x_4 + 16x_5 \leq 50$

$$2x_1 + 14x_2 + 18x_3 + 8x_4 + 12x_5 \leq 50$$

$$16x_1 + 20x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 20x_5 \leq 50$$

$$x_j (j = 1,2,3,4,5) = 0, 1$$

3.1.4 **ปัญหาการขนส่ง** (Transportation Problem)

ปัญหาการขนส่งเป็นปัญหาโปรแกรมจำนวนเต็มเชิงเส้น ที่มีลักษณะพิเศษ จัดเป็นปัญหาที่ถูกนำไปประยุกต์ใช้ในทางปฏิบัติอย่างแพร่หลายในปัจจุบันนี้ ที่ใช้มากที่สุดก็คือ ปัญหาเกี่ยวกับการส่งสินค้าหรือผลิตภัณฑ์จากที่แห่งหนึ่งไปยังอีกแห่งหนึ่ง เช่น ส่งจากโรงงานไปเก็บไว้ที่คลังสินค้า หรือไปให้ตัวแทนการค้าโดยตรง หรือส่งจากคลังสินค้าไปที่เขตการค้า

ส่งจากผู้ผลิตไปให้ผู้บริโภค ฯลฯ รวมไปถึงการตัดสินใจหรือวางแผนว่า โรงงานใดจะผลิตสินค้าในช่วงใด อย่างไร จึงจะเพียงพอกับจำนวนอุปสงค์ในขณะนั้น โดยมีเป้าหมายของการจัดส่งและผลิตว่า ให้มีค่าใช้จ่ายรวมกันต่ำสุด ตัวอย่างของปัญหาประเภทนี้ ได้แก่

บริษัทฝ่ายผลิตมีโรงงานผลิตสินค้าในเขตต่าง ๆ m แห่ง โรงงานในเขต i สามารถผลิตสินค้าได้เต็มที่ a_i หน่วย สินค้าที่ผลิตได้จากโรงงานแต่ละเขต จะถูกส่งไปที่ตลาดหรือศูนย์การค้า n แห่ง ความต้องการสินค้าในตลาดหรือศูนย์การค้า j เท่ากับ b_j หน่วย ถ้าอัตราค่าขนส่งจากโรงงานในเขต i ไปที่ตลาดหรือศูนย์การค้า j เท่ากับ c_{ij} บาทต่อหน่วย ถ้าบริษัทวางแผนการจัดส่งว่า จะส่งสินค้าจากโรงงานในเขต i ไปที่ตลาดหรือศูนย์การค้า j เป็นจำนวน x_{ij} หน่วย ปัญหาก็คือ x_{ij} ควรมีค่าเท่าใด จึงจะทำให้บริษัทเสียค่าใช้จ่ายในการจัดส่งต่ำสุด

ตัวแบบของปัญหานี้คือ

$$\text{ค่าต่ำสุด } Z = \sum_{i,j}^{m,n} c_{ij}x_{ij} \tag{3.8}$$

$$\text{โดยมีข้อจำกัด} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i,\ i = 1,2,\ldots,m \tag{3.9}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geqslant b_j,\ j = 1,2,\ldots,n \tag{3.10}$$

$$x_{ij} = 0, 1, 2, \ldots \text{ ทุกค่า } i \text{ และ } j$$

ข้อจำกัด (3.9) แสดงให้เห็นว่า ผลรวมของสินค้าจากแหล่งผลิตจะต้องไม่เกินจำนวนอุปทานหรือความสามารถในการผลิตของโรงงานนั้น ข้อจำกัด (3.10) แสดงให้เห็นว่า ผลรวมของสินค้าที่ตลาดหรือศูนย์การค้าได้รับ จะต้องเพียงพอกับจำนวนอุปสงค์ ชี้ให้เห็นว่า ผลรวมของจำนวนผลิตอย่างน้อยจะต้องเท่ากับ ผลรวมของจำนวนอุปสงค์ ถ้าผลรวมเท่ากัน กล่าวคือ

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{3.11}$$

ข้อจำกัด (3.9) และ (3.10) จะเปลี่ยนเป็น

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = 1,2,\ldots,m \tag{3.12}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = 1,2,\ldots,n \tag{3.13}$$

ปัญหาการขนส่งนี้จะเป็นปัญหาการขนส่งที่สมดุล หรือเรียกปัญหาการขนส่งมาตรฐาน

ในความเป็นจริง จำนวนของอุปสงค์ มักจะไม่เท่ากับจำนวนอุปทาน แต่ในแง่การนำตัวแบบไปใช้ เราเลือกตัวแบบที่สมดุล ตัวอย่างปัญหาขนส่ง ได้แก่

ตัวอย่างที่ 3.5 บริษัทฝ่ายผลิตมีโรงงานผลิตสินค้าที่เขต A, B และ C โรงงานในแต่ละเขตสามารถผลิตสินค้าได้ 200, 180 และ 170 หน่วย ตามลำดับ บริษัทต้องการส่งสินค้าไปจำหน่ายที่ตลาดการค้า 4 แห่ง ความต้องการสินค้าของตลาดแต่ละแห่งเท่ากับ 120, 150, 140 และ 140 หน่วย ตามลำดับ ค่าขนส่งสินค้ากำหนดในอัตราต่อไปนี้

ตลาดการค้า / โรงงาน	บาทต่อหน่วย			
	1	**2**	**3**	**4**
A	25	30	22	27
B	28	24	26	32
C	31	23	29	25

บริษัทต้องการจัดส่งให้มีค่าใช้จ่ายในการส่งต่ำสุด

วิธีทำ บริษัทวางแผนให้ โรงงาน A ส่งไปที่ตลาดการค้า j = x_{1j} หน่วย

โรงงาน B ส่งไปที่ตลาดการค้า j = x_{2j} หน่วย

โรงงาน C ส่งไปที่ตลาดการค้า j = x_{3j} หน่วย

$$j = 1,2,3,4$$

เขียนตัวแบบได้ดังนี้

ค่าต่ำสุด $Z = 25x_{11} + 30x_{12} + 22x_{13} + 27x_{14} + 28x_{21} + 24x_{22} + 26x_{23} + 32x_{24} + 31x_{31} + 23x_{32} + 29x_{33} + 25x_{34}$

โดยมีข้อจำกัด

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 200$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 180$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 170$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 120$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 150$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 140$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 140$$

$$x_{ij}(i = 1,2,3,\ j = 1,2,3,4) = 0,1,2,\ldots$$

หมายเหตุ ถ้าโรงงาน B ผลิตสินค้าได้ 200 หน่วย ข้อจำกัดที่ 1, 2 และ 3 จะเปลี่ยนเป็น

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leqslant 200$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leqslant 200$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leqslant 170$$

3.1.5 ปัญหาการแจกจ่ายงาน (Assignment Problem)

การทำงานในบางครั้งจะมีงานที่จะต้องทำพร้อม ๆ กัน ในเวลาเดียวกัน จึงต้องแบ่งงานกันทำ โดยมอบหมายความรับผิดชอบของบุคคลหรือกลุ่มคน ในงานประเภทที่อาศัยเครื่องจักรก็ต้องพิจารณาว่าจะใช้เครื่องจักรใดทำงานชิ้นใด ทั้งนี้ ต้องยึดผลประโยชน์ที่มีต่อส่วนรวมมากกว่าที่จะพิจารณาตัวบุคคลหรือเครื่องจักร คนแต่ละคนหรือเครื่องจักรแต่ละชนิด อาจจะสามารถทำงานทุกประเภทได้ แต่ประสิทธิภาพในการทำงานแตกต่างกันไป เป็นผลให้เวลาที่ใช้ในการทำงาน ผลงานที่ได้ออกมาแตกต่างกันไปด้วย ดังนั้น การแจกจ่ายงานออกไปจึงต้องพิจารณาว่า ควรให้คนหรือเครื่องจักรใดทำงานชิ้นไหน โดยไม่ซ้ำกัน จึงจะเหมาะสมที่สุดเกิดผลประโยชน์ต่อส่วนรวมมากที่สุด เช่น เสียเวลาทำงานรวมกันต่ำสุด ได้ปริมาณผลงานรวมกันสูงสุด เป็นต้น

ดังนั้น ถ้าเรามีงาน n ชิ้น ที่จะมอบหมายให้คนหรือเครื่องจักร m ชนิดทำ โดยไม่ซ้ำกัน ถ้าเราสามารถประมาณค่าใช้จ่ายที่คนหรือเครื่องจักร i ทำงานชิ้นที่ j แล้วเสร็จเป็นเงิน c_{ij} บาท เรากำหนดให้

$x_{ij} = 1$ ถ้าคนหรือเครื่องจักร i ทำงาน j

นอกนั้น $x_{ij} = 0,\ i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n$

จะได้ตัวแบบดังนี้

ค่าต่ำสุด $Z = \sum_{i,j}^{m,n} c_{ij}x_{ij}$

โดยมีข้อจำกัด $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$ (3.14)

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1$$

$x_{ij} = 0,1$ ทุกค่า i และ j

จะเห็นได้ว่า ปัญหาการแจกจ่ายงาน เป็นกรณีพิเศษของปัญหาขนส่ง เมื่อ $a_i = b_j = 1$ นั่นเอง

โดยทั่วไปเราจะพบว่า ตัวแบบของปัญหาโปรแกรมเชิงจำนวนเต็ม จะมีลักษณะเดียวกันกับปัญหาโปรแกรมเชิงเส้น ถ้าปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นใดมีคำตอบเป็นเลขจำนวนเต็ม ก็จัดเป็นปัญหาโปรแกรมเชิงจำนวนเต็มด้วย เราจึงคาดหวังว่า การหาคำตอบต่อปัญหาโปรแกรมเชิงจำนวนเต็ม ควรจะใช้วิธีการซิมเพลกซ์ ถ้าคำตอบที่ได้ไม่เป็นเลขจำนวนเต็ม เราค่อยปรับหาคำตอบที่เป็นเลขจำนวนเต็มที่ดีที่สุด ต่อไป

3.2 **วิธีการ** Cutting Plane

ให้เรามาพิจารณาการหาคำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาในตัวอย่างต่อไปนี้

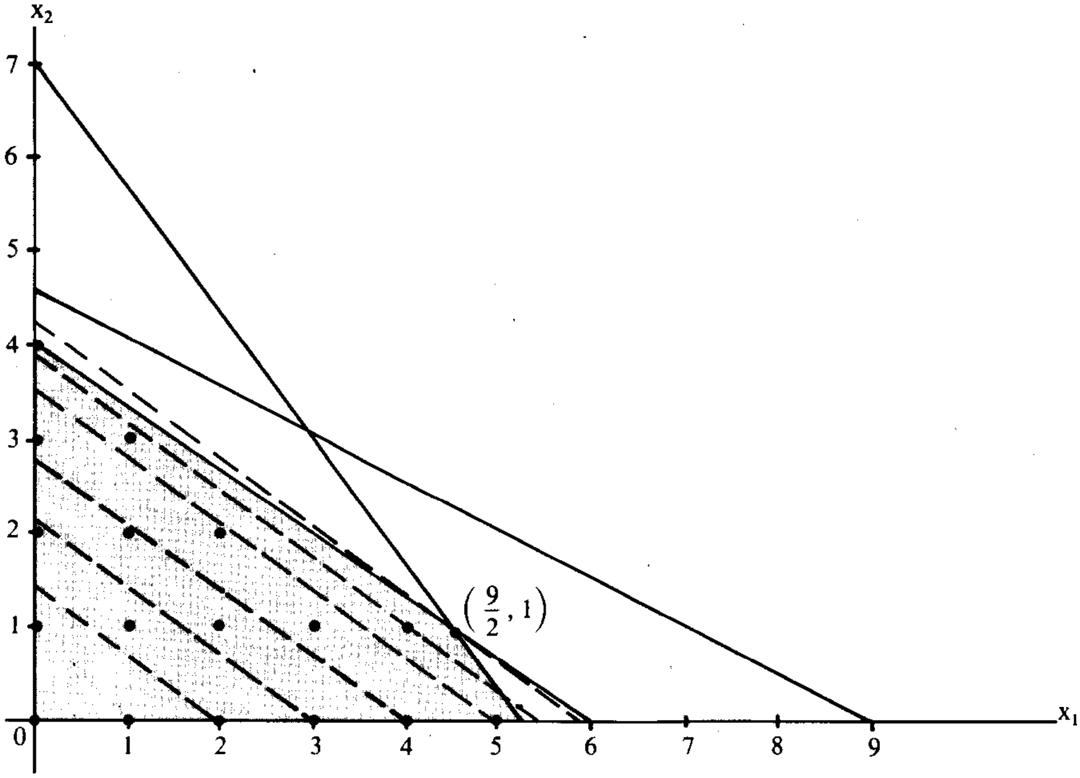
ตัวอย่างที่ 3.6

ค่าสูงสุด $Z = 7x_1 + 10x_2$

โดยมีข้อจำกัด
$$\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 12 \\
4x_1 + 3x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 21 \\
x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 9 \\
x_j(j = 1,2,3,4,5) &= 0,1,2,\dots
\end{aligned}$$

จงหาคำตอบที่ดีที่สุดด้วยวิธีกราฟ

วิธีทำ



จากกราฟจะเห็นว่า จุด $\left(\frac{9}{2}, 1\right)$ เป็นจุดที่ได้ค่า $Z_{สูงสุด}$ แต่ไม่ใช่คำตอบที่ดีที่สุด เนื่องจากค่าของ $x_1 = \frac{9}{2}$ ไม่เป็นเลขจำนวนเต็ม เมื่อเราพิจารณาจากกราฟ จะพบว่า มีจุดที่ให้คำตอบที่เป็นเลขจำนวนเต็ม 18 จุด แต่ละจุดมีค่าของ Z ดังนี้

(x_1, x_2)	(0, 0)	(0, 1)	(0, 2)	(0, 3)	(0, 4)	(1, 0)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)
Z	0	10	20	30	40	7	17	27	37
(x_1, x_2)	(2, 0)	(2, 1)	(2, 2)	(3, 0)	(3, 1)	(3, 2)	(4, 0)	(4, 1)	(5, 0)
Z	14	24	34	21	31	41	28	38	35

แสดงว่าจุดที่ได้ค่า $Z_{สูงสุด}$ คือจุด (3, 2) และเมื่อพิจารณาจากการเคลื่อนที่ Z จากกราฟ จะพบว่า เส้นของ Z (เส้น_______) เคลื่อนที่ผ่านจุดที่มีค่าเป็นจำนวนเต็ม ได้สูงสุดที่จุด (3, 2) สรุปได้ว่า คำตอบที่ดีที่สุดคือ $x_1 = 3, x_2 = 2$ ค่า $Z_{สูงสุด} = 41$

หมายเหตุ

ถ้าเราไม่กำหนดค่า x_j เป็นเลขจำนวนเต็ม ปัญหานี้จะเป็นปัญหาโปรแกรมเชิงเส้น คำตอบที่ดีที่สุด คือ $x_1 = 4\frac{1}{2}, x_2 = 1$ แต่เมื่อค่า x_j เป็นเลขจำนวนเต็ม และถ้าเราจะใช้วิธีการประมาณค่าโดยการปัดเศษ เช่นให้ $x_1 = 4, x_2 = 1$ จะพบว่า คำตอบที่ได้นี้ให้ค่า $Z = 38$ จึงไม่เป็นคำตอบที่ดีที่สุด แต่ถ้าเราปัดเศษ โดยให้ $x_1 = 5, x_2 = 1$ จะพบว่า เป็นคำตอบที่อยู่นอกบริเวณคำตอบ จึงเป็นคำตอบที่เป็นไปไม่ได้ สรุปได้ว่า การปรับค่าโดยการปัดเศษไม่อาจประกันได้ว่า จะได้คำตอบที่ต้องการ

ชี้ให้เห็นว่า หากเราจะใช้วิธีการซิมเพลกซ์ในการหาคำตอบต่อปัญหาการโปรแกรมเชิงจำนวนแล้วได้คำตอบเป็นเลขจำนวนเต็ม ก็ไม่มีปัญหาอะไร แต่ถ้าคำตอบที่ได้เป็นเลขเศษส่วนและเราประมาณค่าด้วยการปัดเศษ เราอาจจะได้คำตอบที่เป็นไปได้ แต่ไม่ใช่คำตอบที่ดีที่สุด หรืออาจจะได้คำตอบที่เป็นไปไม่ได้ก็ได้ ดังนั้น เราต้องหาวิธีการที่เหมาะสม และไม่ยุ่งยากเกินไปมาช่วยในการตัดสินซึ่งมีหลายวิธีการด้วยกัน หนึ่งในวิธีการเหล่านั้น คือ วิธีการ Cutting Plane

วิธีการ Cutting Plane เป็นวิธีการที่พยายามจะตัดหรือลดบริเวณของข้อจำกัดโดยไม่เกิดผลกระทบต่อคำตอบเชิงจำนวนเต็มที่เป็นไปได้ใด ๆ ใช้ข้อจำกัดที่มีค่าของตัวแปรเป็นเลขเศษส่วนเป็นตัวก่อให้เกิดข้อจำกัดใหม่ มีหลักเกณฑ์ว่า ตัวแปรทุกตัวจะต้องมีค่าเป็นเลขจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

ตัวอย่างเช่น เรามีสมการข้อจำกัด

$$x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1.5x_4 - 0.6x_5 = 18.3$$

เขียนสมการข้อจำกัดนี้เสียใหม่เป็น

$$(1+0)x_1 + (0)x_2 + (0)x_3 + (1+0.5)x_4 + (-1+0.4)x_5 = 18 + 0.3$$

หรือ

$$(0)x_1 + (0)x_2 + (0)x_3 + (0.5)x_4 + (0.4)x_5 = 0.3 + \left[18 - (1)x_1 - (1)x_4 + (1)x_5\right]$$

ถ้า x_1, x_2, x_3, x_4 และ x_5 ต่างมีค่าเป็นเลขจำนวนเต็ม ผลลัพธ์ทางซ้ายมือจะเป็นผลให้ได้ผลลัพธ์ทางขวาเป็นบวกด้วย แสดงว่าผลลัพธ์ที่ได้ใน [ ] อาจเป็น 0,1,2,3,... ชี้ให้เห็นว่าผลลัพธ์ทางซ้ายจะต้องมีค่าอย่างน้อยที่สุด 0.3 นั่นก็คือ

$$0.5x_4 + 0.4x_5 \geqslant 0.3$$

จะเป็นข้อจำกัดใหม่ที่เรียกว่า cut นั่นเอง

เราเปลี่ยนข้อจำกัดใหม่ให้เป็นสมการ นำไปเขียนเป็นแถวสุดท้ายของตาราง ทำซิมเพลกซ์

อัลกอริทึมต่อไป เมื่อไรที่ได้คำตอบที่ดีที่สุดเป็นเลขจำนวนเต็ม คำตอบที่ได้นั้นจะเป็นทางเลือกของเรา แต่ถ้าคำตอบที่ได้ยังเป็นเลขเศษส่วนอยู่ แถวหรือข้อจำกัดที่มีค่าตัวแปรเป็นเลขเศษส่วนจะก่อให้เกิดข้อจำกัดหรือ cut ใหม่ต่อไป ทำซิมเพลกซ์อัลกอริทึมจนกว่าจะได้คำตอบเป็นเลขจำนวนเต็มที่ดีที่สุด

ในที่นี้เราจะพูดถึงวิธีการของ Ralph Gomory ที่เรียกว่า Gomory's fractional cut ซึ่งมีขั้นตอนในการทำโกโมรีอัลกอริทึม ดังนี้

1. หาคำตอบต่อปัญหาด้วยวิธีการซิมเพลกซ์

2. ตรวจสอบคำตอบในตารางสุดท้าย

   2.1 ถ้าทุกคำตอบเป็นเลขจำนวนเต็ม นั่นคือคำตอบที่ดีที่สุด อ่านผลที่ได้

   2.2 ถ้ามีคำตอบใดเป็นเลขเศษส่วน เพิ่ม cut ที่ได้จากแถวใดแถวหนึ่ง ที่มีค่าของตัวแปรเป็นเลขเศษส่วน เข้าไปเป็นแถวสุดท้ายของตารางนั้น ทำต่อข้อ 3

3. ทำซิมเพลกซ์อัลกอริทึมต่อไป จนกว่าจะได้ตารางสุดท้าย ทำต่อข้อ 2

หมายเหตุ กรณีที่ใช้วิธีการซิมเพลกซ์ควบคู่ ต้องพยายามขจัดตัวแปรที่มีค่าเป็นลบออกไปเสียก่อน การเลือกตัวแปรเข้ามาในฐาน ต้องพิจารณาจากค่าต่ำสุด $(x_{0j}/-x_{rj}|x_{rj} < 0)$

ตัวอย่างที่ 3.7 จงหาคำตอบที่ดีที่สุดต่อปัญหาในตัวอย่างที่ 3.6 ใช้วิธีการ Cutting Plane

วิธีทำ ทำซิมเพลกซ์อัลกอริทึม จนถึงตารางที่ 3 ซึ่งจะเป็นตารางสุดท้าย จะได้

ตัวแปรฐาน		c_j	7	10	0	0	0
x_i	c_i	**คำตอบ**	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{a}_5$
x_2	10	1	0	1	$\frac{3}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
x_1	7	$\frac{9}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\bar{2}$	0
x_5	0	$\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	1
$Z = \frac{83}{2}$		s_j	7	10	$\frac{19}{6}$	$\frac{1}{6}$	0
		$c_j - s_j$	0	0	$-\frac{19}{6}$	$-\frac{1}{6}$	0

จากตารางที่ 3 นี้เราได้ค่า $Z_{\text{สูงสุด}}$ แล้ว แต่คำตอบที่ได้คือ ค่าของ x_1 และของ x_5 เป็นเลขเศษส่วน ซึ่งขัดแย้งกับข้อกำกัดเป็นเลขจำนวนเต็ม ดังนั้น ข้อจำกัดที่ 2 หรือ 3 เป็นข้อจำกัดที่ก่อให้เกิด cut ในที่นี้เราเลือกข้อจำกัด (แถว) ที่ 2 จะได้ว่า

$$(1+0)x_1 + (0)x_2 + (-1+0.5)x_3 + (0+0.5)x_4 + (0)x_5 = 4 + 0.5$$

ดังนั้น หาก x_1, x_2, x_3, x_4 และ x_5 เป็นเลขจำนวนเต็มบวก เราจะได้ข้อจำกัดใหม่ หรือ cut ดังนี้

$$0.5x_3 + 0.5x_4 \geqslant 0.5$$

หรือ

$$\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 - x_6 + x_7 = \frac{1}{2}$$

เมื่อ x_7 เป็นตัวแปรเทียม ดังนั้น เขียนสมการข้อจำกัดนี้ลงในตารางที่ 3 ทำซิมเพลกซ์-อัลกอริทึมต่อไป ปรากฏผลดังนี้

ตารางที่ 3 (1 cut)

ตัวแปรฐาน		c_j	7	10	0	0	0	0	-M	**ค่าที่เป็นไปได้**
x_i	c_i	**คำตอบ**	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{a}_5$	a_6	$\underline{a}_7$	θ_i
x_2	10	1	0	1	$\bar{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	
x_1	7	$\frac{9}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	9
x_5	0	$\frac{5}{2}$	0	0	$-\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	1	0	0	15
x_7	-- M	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	1	1
$Z = \frac{83}{2} - \frac{M}{2}$		s_j	7	10	$-\frac{M}{2} + \frac{19}{6}$	$-\frac{M}{2} + \frac{1}{6}$	0	M	$-M$	
		$c_j - s_j$	0	0	$\frac{M}{2} - \frac{19}{6}$	$\frac{M}{2} - \frac{1}{6}$	0	$-M$	0	

ตารางที่ 4

ตัวแปรฐาน x_i	c_i	c_j / คำตอบ	$\underline{a}_1$ (7)	$\underline{a}_2$ (10)	a3 (0)	$\underline{a}_4$ (0)	$\underline{a}_5$ (0)	$\underline{a}_6$ (0)	$\underline{a}_7$ (- M)
x_2	10	$\frac{4}{3}$	0	1	1	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
x_1	7	·4	1	0	- 1	0	0	1	- 1
x_5	0	$\frac{7}{3}$	0	0	- 1	0	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{3}$
x_4	0	1	0	0	1	1	0	- 2	2
$Z = \frac{124}{3}$		s_j	7	10	3	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
		$c_j - s_j$	0	0	- 3	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-M+\frac{1}{3}$

ยังมีตัวแปรบางตัวมีค่าเป็นเลขเศษส่วน เราจึงต้องสร้าง cut ใหม่ต่อไป ซึ่งจะได้ว่า $\frac{1}{3}x_6 + \frac{2}{3}x_7 \geqslant \frac{1}{3}$ หรือ $\frac{1}{3}x_6 + \frac{2}{3}x_7 - x_8 + x_9 = \frac{1}{3}$ เขียนต่อในแถวสุดท้าย จะได้

ตารางที่ 5

ตัวแปรฐาน		คำตอบ	7	10	0	0	0	0	- M	0	- M	θ_i
x_2	10	$\frac{4}{3}$	0	1	1	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	–
x_1	7	4	1	0	- 1	0	0	1	- 1	0	0	4
x_5	0	$\frac{7}{3}$	0	0	- 1	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	7
x_4	0	1	0	0	1	1	0	- 2	2	0	0	—
x_9	- M	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	- 1	1	1
$Z = -\frac{M}{3} + \frac{124}{3}$		s_j	7	10	3	0	0	$-\frac{M+1}{3}$	$-\frac{2M-1}{3}$	M	- M	
		$c_j - s_j$	0	0	-3	0	0	$\frac{M+1}{3}$	$-\frac{M+1}{3}$	- M	0	

ทำซิมเพลกซ์อัลกอริทึมต่อไป จะได้

ตารางที่ 6

ตัวแปรฐาน		คำตอบ	7	10	0	0	0	0	- M	0	$-M$
x_2	10	2	0	1	1	0	0	0	2	- 2	2
x_1	7	3	1	0	- 1	0	0	0	- 3	3	- 3
x_5	0	2	0	0	- 1	0	1	0	-1	1	- 1
x_4	0	3	0	0	1	1	0	0	6	- 6	6
x_6	0	1	0	0	0	0	0	1	2	- 3	3
Z = 41		s_j	7	10	3	0	0	0	- 1	1	-1
		$c_j - s_j$	0	0	- 3	0	0	0	1 - M	-1	$1 - M$

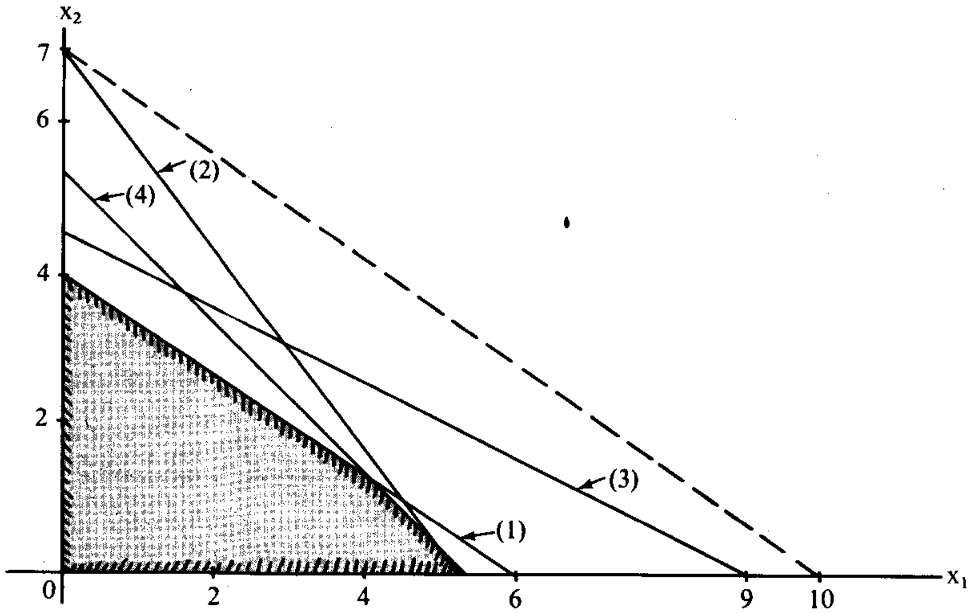
จากตารางนี้จะเห็นว่า ค่าตัวแปรทุกตัวเป็นจำนวนเต็ม สรุปได้ว่าคำตอบที่ดีที่สุด คือ $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $Z_{\text{สูงสุด}} = 41$

พิจารณาจากทั้งสอง cut เขียนเสียใหม่ในเทอมของค่า x_1 และ x_2 จะได้

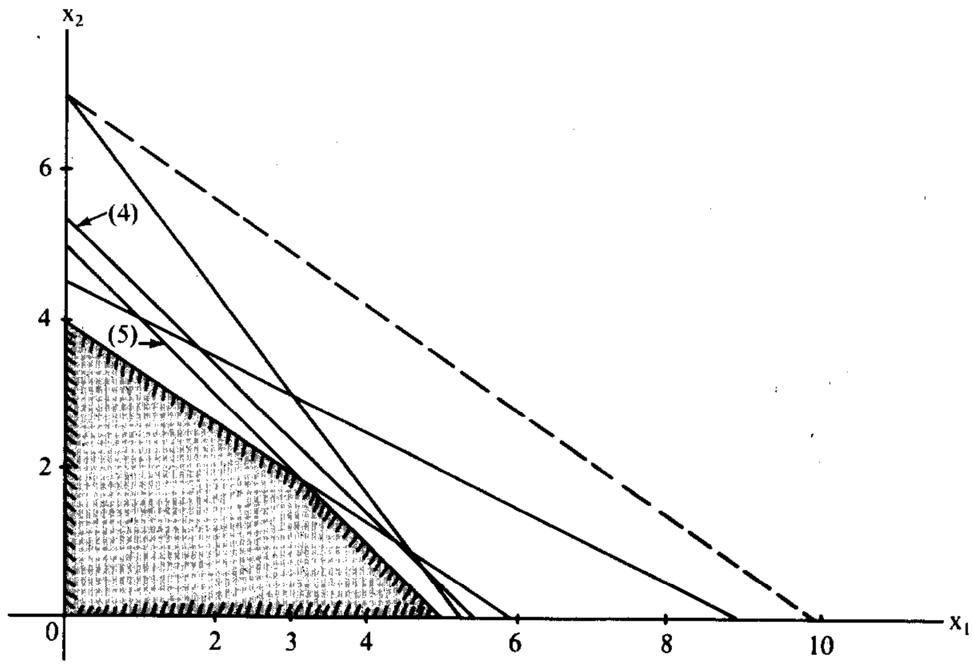
$$\frac{1}{2}(12 - 2x_1 - 3x_2) + \frac{1}{2}(21 - 4x_1 - 3x_2) \geqslant \frac{1}{2} \quad \text{นั่นคือ } 3x_1 + 3x_2 \leqslant 16 \qquad (4)$$

และ $$\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4\right) \geqslant \frac{1}{3} \quad \text{นั่นคือ } 3x_1 + 3x_2 \leqslant 15 \qquad (5)$$

แสดงให้เห็นได้ด้วยกราฟ ดังนี้



ผลที่ได้จากการเพิ่ม 1 cut



ผลที่ได้จากการเพิ่ม 2 cut

ตัวอย่างที่ 3.8

ค่าสูงสุด $Z = 3x_1 + 2x_2 + \frac{5}{2}x_3$

โดยมีข้อจำกัด

$$\frac{1}{4}x_1 + \frac{2}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_3 + x_4 = 15$$

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{10}x_2 + \frac{2}{5}x_3 + x_5 = 20$$

$$\frac{1}{4}x_1 + \frac{3}{10}x_2 + \frac{1}{5}x_3 + x_6 = 12$$

และ x_j เป็นเลขจำนวนเต็ม มากกว่าหรือเท่ากับ 0 ทุกค่า j

วิธีทำ หาคำตอบด้วยวิธีการซิมเพลกซ์ควบคู่

ตารางที่ 4 (1 cut)

		x_5	x_6	x_4
z	$\frac{247}{2}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_3	$\frac{25}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{25}{3}$	5
x_1	$\frac{76}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{8}{3}$	-4
x_2	$\frac{40}{3}$	$-\frac{10}{3}$	$\frac{20}{3}$	0
x_7	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0
$x_{oj}/-x_{4j}$		$\frac{33}{4}$	$\frac{3}{4}$	

คำอธิบาย

ตารางที่ 4 เป็นตารางสุดท้าย แต่คำตอบยังเป็นไปไม่ได้ เราจะเลือกข้อจำกัดใดก็ได้จากแถวที่ 2, 3, 4 มาสร้างข้อจำกัดใหม่ (cut) ซึ่งจะได้

$$\frac{2}{3}x_5 + \frac{2}{3}x_6 \geqslant \frac{1}{3} \quad \text{หรือ}$$

$$-\frac{2}{3}x_5 - \frac{2}{3}x_6 + x_7 = -\frac{1}{3}$$

เป็นสมการข้อจำกัดที่ 4 ใส่ลงในแถวที่ 5 ของตารางที่ 4

ตารางที่ 5 (2 cuts)

		x_5	x_7	x_4
Z	$\frac{493}{4}$	5	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
x_3	$\overline{2}$	10	$-\frac{25}{2}$	5
x_1	24	0	4	-4
x_2	10	-10	10	0
x_6	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	0
x_8	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0
$X_{0j}'/-X_{5j}'$			$\frac{3}{2}$	—

คำอธิบาย

ตารางที่ 5 เป็นตารางสุดท้ายของตารางที่ 4 เมื่อเพิ่ม 1 *cut* แต่คำตอบที่ได้ยังไม่เป็นจำนวนเต็ม เราจึงเลือกข้อจำกัดที่ 1 (แถวที่ 2) มาสร้างข้อจำกัดใหม่ จะได้

$$\frac{1}{2}x_7 \geqslant \frac{1}{2} \quad \text{หรือ} \quad -\frac{1}{2}x_7 + x_8 = -\frac{1}{2}$$

ซึ่งจะเป็นสมการข้อจำกัดใหม่ (ที่ 5) อยู่ในแถวที่ 6 ของตารางที่ 5

ตารางที่ 6

		x_5	x_8	x_4
Z	$\frac{245}{2}$	5	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_3	25	10	-25	5
x_1	20	0	8	-4
x_2	0	-10	20	0
x_6	2	1	-3	0
x_7	1	0	-2	0

คำอธิบาย

ตารางที่ 6 เป็นตารางสุดท้าย ที่ให้คำตอบเป็นเลขจำนวนเต็มที่ดีที่สุดแล้ว สรุปได้ว่า $x_1 = 20, x_3 = 25, x_6 = 2$ นอกนั้นเป็น 0 ได้ค่า $Z_{\text{สูงสุด}} = 122.5$

ตัวอย่างที่ 3.9 จงหาคำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาในตัวอย่างที่ 3.2

วิธีทำ เปลี่ยนอสมการข้อจำกัดเป็นสมการ จะได้ $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 10$ หาคำตอบโดยใช้ซิมเพลกซ์อัลกอริทึม

ตารางที่ 1

		x_1	x_2	x_3
Z	0	-80	112	-48
x_4	10	3	4	2

ตารางที่ 2

		x_1	x_4	x_3
Z	280	4	28	8
x_2	$\frac{5}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
x_5	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$x_{0j}/-x_{2j}$		$\frac{16}{3}$	112	16

ตารางที่ 3

		x_5	x_4	x_3
Z	$\frac{832}{3}$	$\frac{16}{3}$	$\frac{80}{3}$	$\frac{16}{3}$
x_2	2	1	0	0
x_1	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
x_6	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$x_{oj}/-x_{3j}$		8	80	8

ตารางที่ 4

		x_5	x_4	x_6
Z	272	0	24	8
x_2	2	1	0	0
x_1	0	-2	0	1
x_3	1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$

ตารางที่ 5

		x_6	x_4	x_3
Z	272	8	24	0
x_2	1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1
x_1	2	-2	1	2
x_5	1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

คำอธิบาย

ผลสรุปจากตารางที่ 1 จะได้ $x_2 = \frac{5}{2}$ เป็นตัวแปรฐานแทน x_4

ตารางที่ 2 ผลจากตารางที่ 1 กับ 1 cut (จากข้อจำกัดของ x_2) ผลสรุปก็คือ $x_1 = \frac{2}{3}$ เป็นตัวแปรฐาน แทน x_5

ตารางที่ 3 ผลจากตารางที่ 2 กับ 2 cuts (cut ที่ 2 มาจากข้อจำกัดของ x_1) ผลสรุปที่ได้มี 2 ทางคือ เลือก $x_3 = 1$ หรือ $x_5 = 1$ เป็นตัวแปรฐานแทนที่ x_6 ได้ผลตามตารางที่ 4 และ 5 ตามลำดับ

จะเห็นว่า คำตอบที่ได้จากตาราง 4 และ 5 เป็นเลขจำนวนเต็ม แสดงว่าได้คำตอบที่ดีที่สุดแล้ว และมี 2 ชุด คือ เอาสินค้าชนิดที่ 2 ไป 2 หน่วย ชนิดที่ 3 1 หน่วย หรือเอาสินค้าชนิดที่ 1 ไป 2 หน่วย ชนิดที่ 2 ไป 1 หน่วย ก็ได้ จะได้กำไร 272 บาท

3.3 วิธีการ Branch and Bound

อีกวิธีหนึ่งที่จะปรับคำตอบจากตารางซิมเพลกซ์สุดท้าย ซึ่งมีค่าเป็นเลขเศษส่วนหรือทศนิยม ให้เป็นเลขจำนวนเต็ม ก็คือ วิธีการ Branch and Bound เป็นวิธีการดูว่า คำตอบที่ไม่เป็นจำนวนเต็ม มีค่าอยู่ระหว่างเลขจำนวนเต็มอะไร แล้วแตกแขนงออกไป โดยให้ตัวแปรนั้นมีค่าต่ำกว่าเลขจำนวนน้อย กับมีค่ามากกว่าเลขจำนวนมากจากแต่ละแขนงพิจารณาดูว่าแขนงใดใช้ได้ ก็จะเป็นกรอบของมัน

เรามีขั้นตอนการหาคำตอบด้วยวิธีการ Branch and Bound ดังนี้

1. หาคำตอบต่อปัญหาด้วยวิธีการซิมเพลกซ์ จนได้ตารางสุดท้าย

2. ตรวจสอบคำตอบที่ได้ ถ้าเป็นเลขจำนวนเต็มหมด แสดงว่าได้คำตอบเชิงจำนวนที่ดีที่สุดแล้ว อ่านผลที่ได้จากตาราง ถ้ามีค่าใดเป็นเลขเศษส่วน (ทศนิยม) ให้ทำต่อข้อ 3.

3. เลือกตัวแปร 1 ตัวจากบรรดาตัวแปรที่มีค่าเป็นเลขเศษส่วน เช่น $x_i = c$ ปัญหาใน (1) จะก่อให้เกิดเป็นปัญหาใหม่ 2 ปัญหา คือ

   3.1 ปัญหาจาก (1) รวมกับข้อจำกัด $x_i \geqslant (c) + 1$

   3.2 ปัญหาจาก (1) รวมกับข้อจำกัด $x_i \leqslant (c)$

   ในเมื่อ (c) เป็นส่วนที่เป็นเลขจำนวนเต็มของ c

   ให้ทำต่อข้อ 1.

หมายเหตุ หากปัญหาในสายใดมีคำตอบที่เป็นไปไม่ได้ หรือได้คำตอบที่เป็นเลขจำนวนเต็มหมด เราจะหยุดการต่อปัญหา คำตอบที่ดีที่สุด จะได้จากปัญหาที่มีคำตอบเป็นเลขจำนวนเต็ม ที่มีค่า Z สูงสุดหรือต่ำสุด แล้วแต่กรณี

ตัวอย่างที่ 3.10 จงหาคำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาในตัวอย่างที่ 3.6 ด้วยวิธีการ Branch and Bound

วิธีทำ (ใช้ตารางย่อ และวิธีการซิมเพลกซ์ควบคู่) จากตารางซิมเพลกซ์สุดท้าย (ตารางที่ 1)

ตารางที่ 1

		x_3	x_4
Z	$\frac{83}{2}$	$\frac{19}{6}$	$\frac{1}{6}$
x_2	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
x_1	$\frac{9}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_5	$\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

คำตอบที่ได้จากตารางนี้ ยังไม่เป็นคำตอบที่ดีที่สุด ค่าของ x_1 และ x_5 ไม่เป็นเลขจำนวนเต็ม

เลือก $x_1 = \frac{9}{2}$ เป็นตัวก่อปัญหาใหม่ คือ

I ปัญหาเดิมรวมกับข้อจำกัด $x_1 \geqslant 5$

II ปัญหาเดิมรวมกับข้อจำกัด $x_1 \leqslant 4$

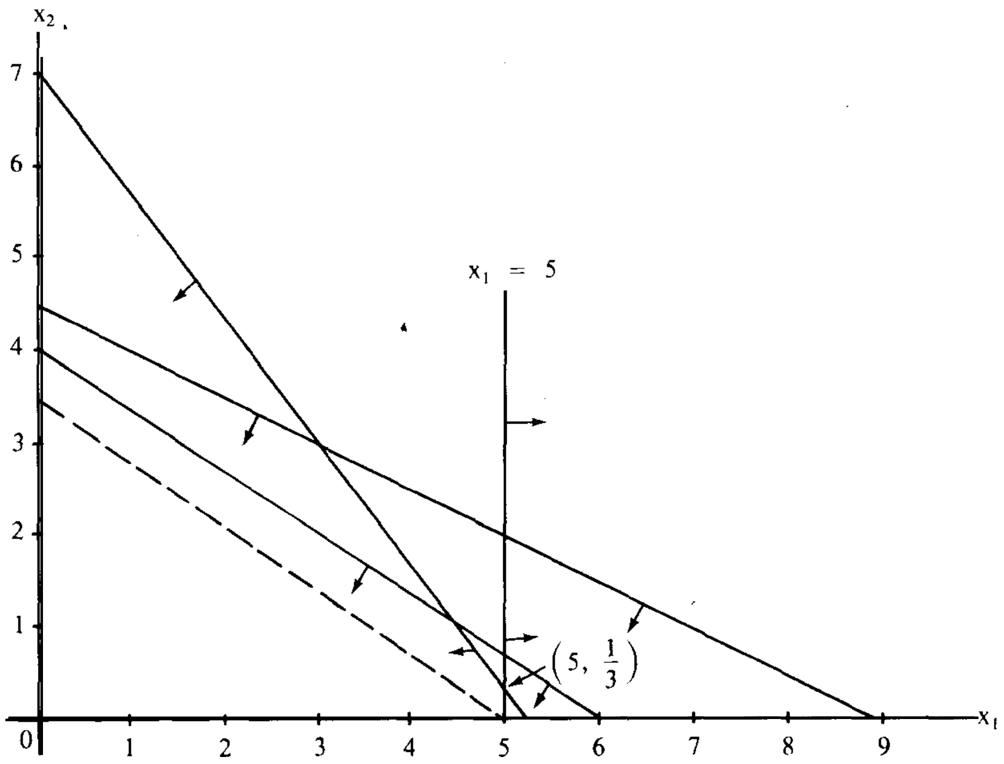
ตารางที่ 2

		x_3	x_4
Z	$\frac{83}{2}$	$\frac{19}{6}$	$\frac{1}{6}$
x_2	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
x_1'	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_5	$\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$
$\lvert x_0/x_{ij}<0\rvert$		$\frac{19}{3}$	—

ตารางที่ 2 เป็นตารางแรกของปัญหา I ได้มาจากการแทนค่า x_1' ด้วย $x_1 - 5$ ในตารางที่ 1 คำตอบที่ได้จากตารางที่ 2 เป็นคำตอบที่เป็นไปไม่ได้ เราปรับคำตอบใหม่ ซึ่งจะได้ x_3 เป็นตัวแปรฐานแทน x_1' ผลสรุปที่ได้จะปรากฏในตารางที่ 3 และกราฟรูปที่ 1

ตารางที่ 3

		x_1'	x_4
Z	$\frac{115}{3}$	$\frac{19}{3}$	$\frac{10}{3}$
x_2	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_3	1	-2	-1
x_5	$\frac{10}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$



รูปที่ 1 กราฟของปัญหา I

ผลจากตารางที่ 3 และกราฟรูปที่ 1 ชี้ให้เห็นว่า ยังไม่ได้คำตอบที่ดีที่สุด เราเลือก $x_2 = \frac{1}{3}$ เป็นตัวแปรที่ก่อให้เกิดปัญหาใหม่ต่อไปคือ

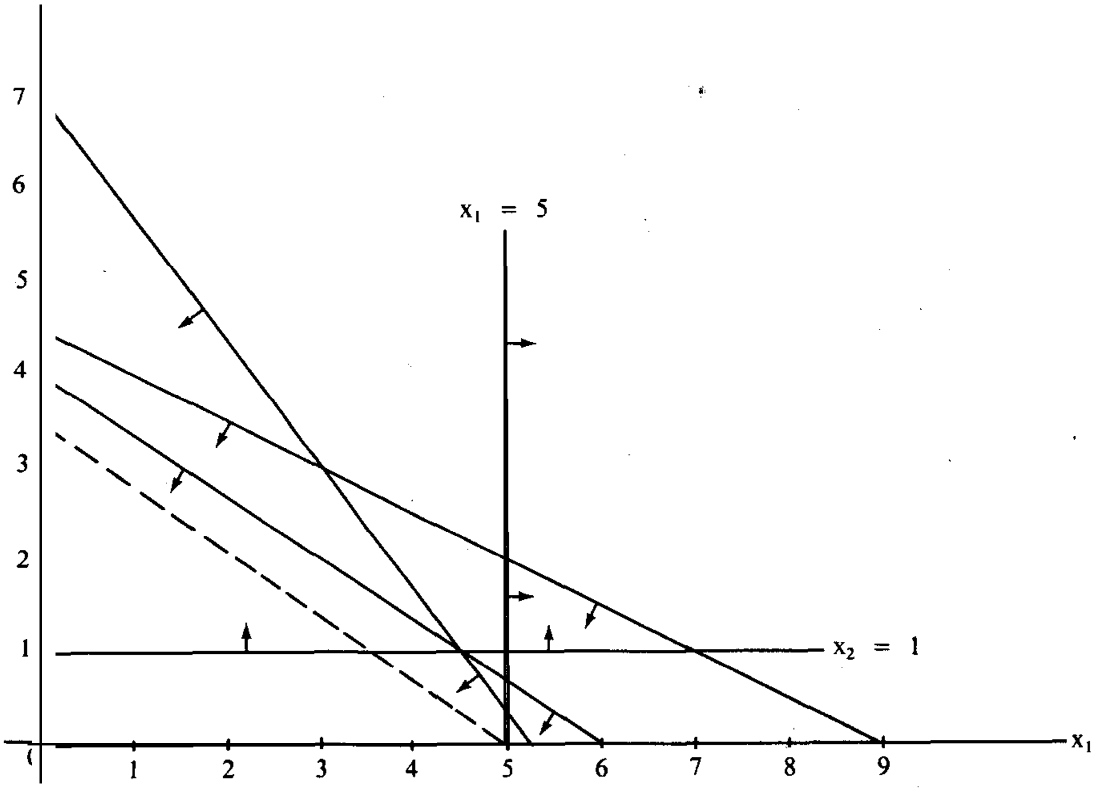
I(1) ปัญหาเดิม รวมกับ $x_1 \geqslant 5, x_2 \geqslant 1$

I(2) ปัญหาเดิม รวมกับ $x_1 \geqslant 5, x_2 \leqslant 0$

ตารางที่ 4 จะเป็นตารางแรกของปัญหา I(1) ซึ่งได้มาจากการแทนค่า x_2' ด้วย $x_2 - 1$ ในตารางที่ 3 แสดงให้เห็นด้วยกราฟรูปที่ 2

ตารางที่ 4

		x_1'	x_4
z	$-\frac{115}{3}$	$\frac{19}{3}$	$\frac{10}{3}$
x_2'	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_3	1	-2	-1
x_5	$\frac{10}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$



รูปที่ 2 กราฟของปัญหา I(1)

จากกราฟจะเห็นว่า ไม่มีบริเวณคำตอบที่เป็นไปได้ และจากตารางที่ 4 ค่าของ $x_2' < 0$ และเราไม่อาจจะปรับค่านี้ให้มากกว่า 0 ได้ ชี้ให้เห็นชัดว่า ปัญหา I(1) ไม่มีคำตอบที่เป็นไปได้

พิจารณาจากปัญหา I(2) จะพบว่า คำตอบที่เป็นไปได้และมีค่าเป็นเลขจำนวนเต็ม มีเพียงจุดเดียวคือ $x_1 = 5, x_2 = 0$ ได้ $Z = 35$

ให้เรามาพิจารณาปัญหา II ต่อไป

จากตารางที่ 1 เรามีสมการข้อจำกัด x_1 ว่า

$$x_1 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = \frac{9}{2}$$

ดังนั้น

$$4 - x_1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 4 - \frac{9}{2} = -\frac{1}{2}$$

ให้ $\bar{x}_1 = 4 - x_1$ จะได้

$$\bar{x}_1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 = -\frac{1}{2}$$

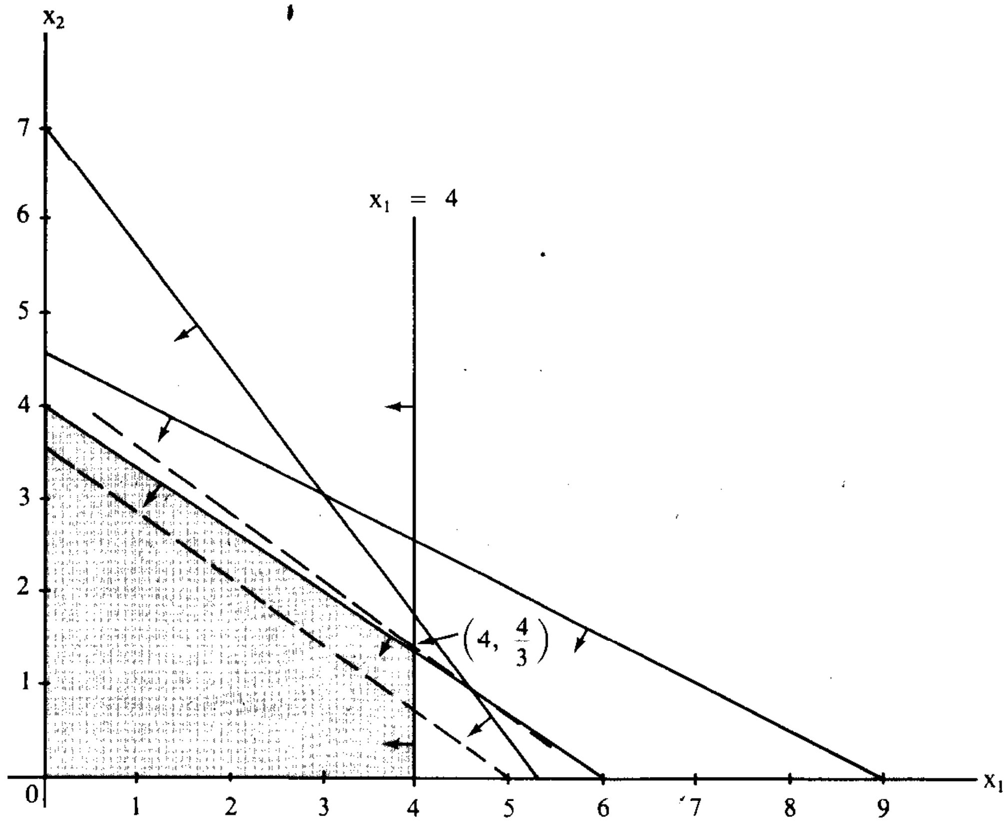
นำผลที่ได้จากตารางที่ 1 เมื่อแทนค่า $\bar{x}_1$ ด้วย $4 - x_1$ เขียนลงในตารางที่ 5 และปรับคำตอบใหม่ได้ผลตารางที่ 6 และกราฟรูปที่ 3

ตารางที่ 5

		x_3	x_4
Z	$\frac{83}{2}$	$\frac{19}{6}$	$\frac{1}{6}$
x_2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\bar{x}_1$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
x_5	$\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$
$\lvert x_0/x_2 \rvert < 0$		–	1

ตารางที่ 6

		x_3	x_1
Z	$\frac{124}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_2	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
x_4	1	-1	-2
x_5	$\frac{7}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$



รูปที่ 3 กราฟของปัญหา II

ผลจากตารางที่ 6 และกราฟรูปที่ 3 แสดงให้เห็นว่า ยังไม่ได้คำตอบที่ดีที่สุด เราเลือก $x_2 = \frac{4}{3}$ เป็นตัวแปรที่ก่อให้เกิดปัญหาใหม่ต่อไป คือ

II(1) ปัญหาเดิมรวมกับ $x_1 \leqslant 4, x_2 \geqslant 2$

II(2) ปัญหาเดิมรวมกับ $x_1 \leqslant 4, x_2 \leqslant 1$

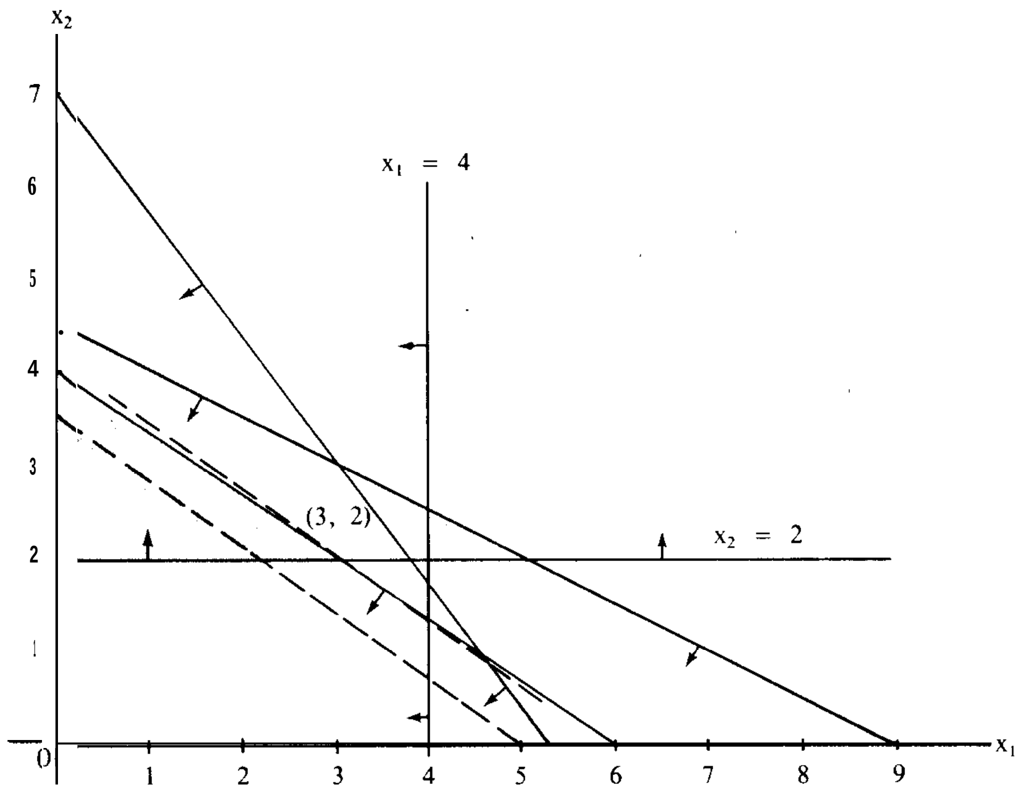
ตารางที่ 7 จะเป็นตารางแรกของปัญหา II(1) ซึ่งเป็นผลที่ได้จากการแทนค่า x_2' ด้วย $x_2 - 2$ ในตารางที่ 6 ปรับปรุงคำตอบในตารางที่ 7 จะได้ผลสรุปตามตารางที่ 8 และกราฟรูปที่ 4

ตารางที่ 7

		x_3	$\bar{x}_1$
Z	$\frac{124}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_2'	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
x_4	1	-1	-2
x_5	$\frac{7}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\lvert x_{0j}/x_{1j}<0 \rvert$		—	$\frac{1}{2}$

ตารางที่ 8

		x_3	x_2'
Z	41	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\bar{x}_1$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
x_4	3	-2	-3
x_5	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$



รูปที่ 4 กราฟของปัญหา II(1)

ผลจากตารางที่ 4 และกราฟ แสดงให้เห็นว่า ได้คำตอบที่ดีที่สุดแล้ว

สรุปได้ว่า คำตอบที่ดีที่สุดของปัญหา II(1) คือ $x_1 = 3(4-\bar{x}_1)$, $x_2 = 2(x_2'+2)$ ได้ค่า $Z = 7\times3+10\times2 = 41$ จะเห็นว่า เป็นคำตอบที่ดีกว่าคำตอบของปัญหา I(2)

พิจารณาปัญหาที่ II(2) ต่อไป

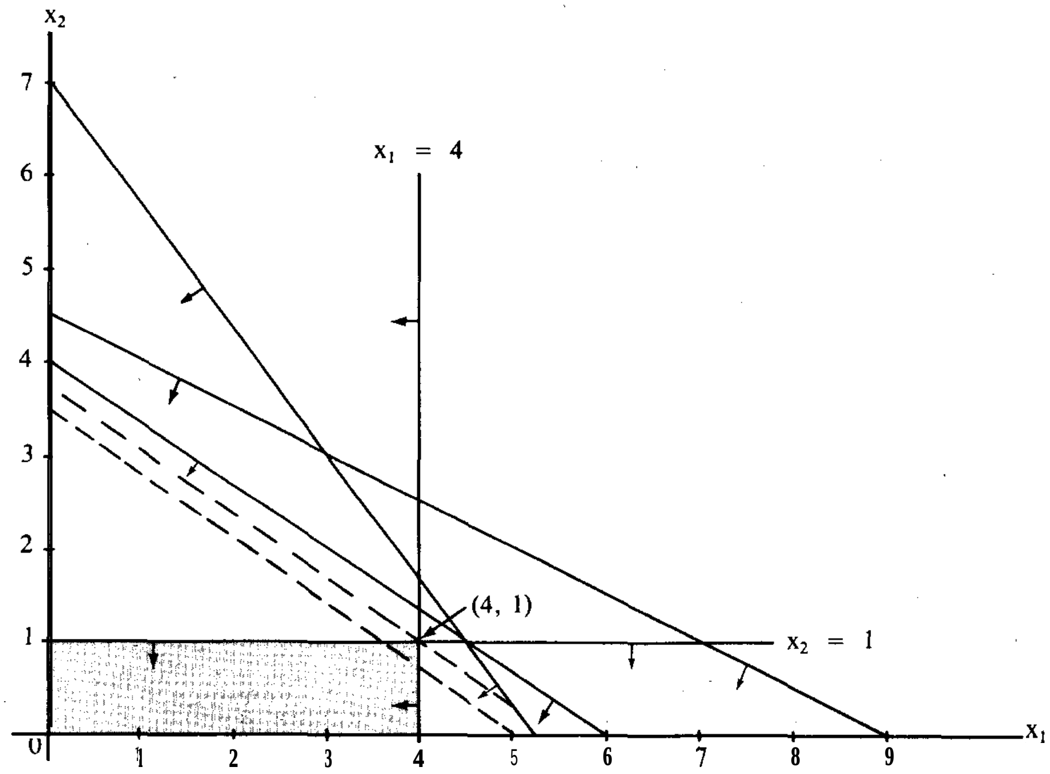
ตารางที่ 9 จะเป็นตารางแรกของปัญหา II(2) ซึ่งเป็นผลที่ได้จากการแทนค่า $\bar{x}_2$ ด้วย $1-x_2$ ในตารางที่ 6 ปรับปรุงคำตอบในตารางที่ 9 จะได้ผลสรุปตามตารางที่ 10 และกราฟรูปที่ 5

ตารางที่ 9

		x_3	$\bar{x}_1$
Z	$\frac{124}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\bar{x}_2$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
x_4	1	-1	-2
x_5	$\frac{7}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\lvert x_{0j}/x_{1j}<0\rvert$		10	—

ตารางที่ 10

		$\bar{x}_2$	$\bar{x}_1$
Z	38	10	7
x_3	1	-3	-2
x_4	2	-3	-4
x_5	3	-2	-1



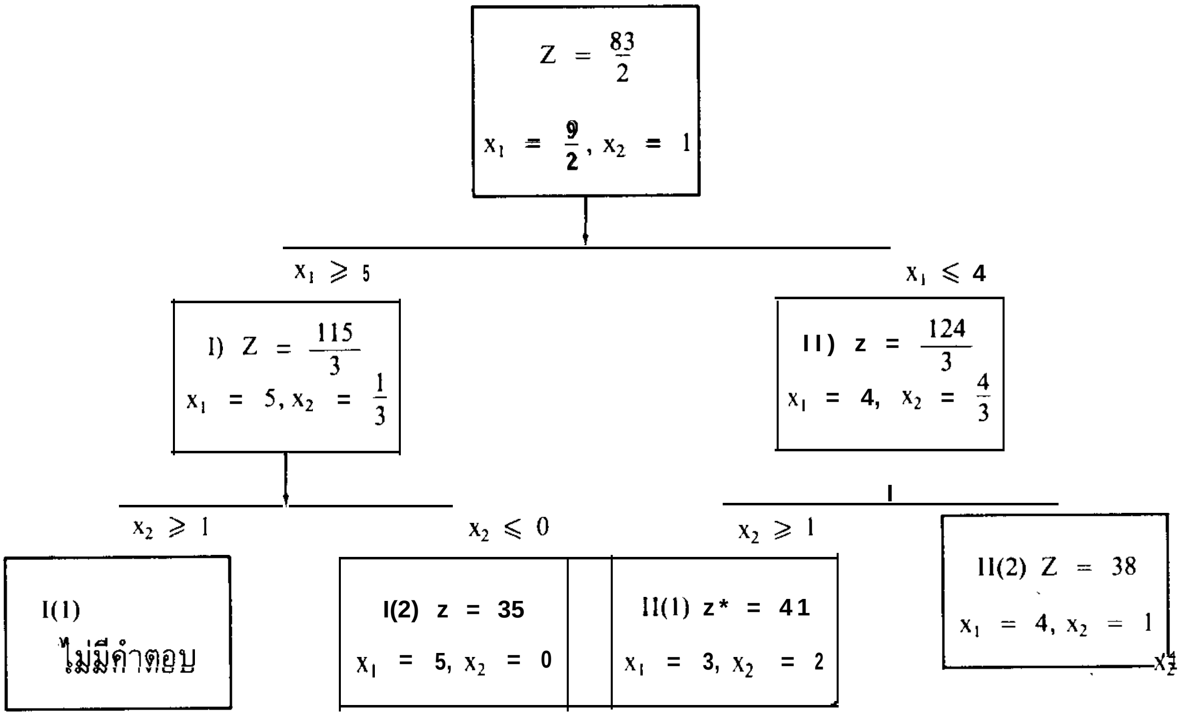
รูปที่ 5 กราฟของปัญหา II(2)

ผลจากตารางที่ 10 และกราฟรูปที่ 5 แสดงว่า ได้คำตอบดีที่สุด แล้วจะได้คำตอบคือ $x_1 = 4(4-\bar{x}_1)$, $x_2 = 1(1-\bar{x}_2)$, $Z = 7\times4+10\times1 = 38$ ซึ่งน้อยกว่า ค่า Z ของปัญหา II(1)

สรุปได้ว่า คำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาทั้งหมด ก็คือ

$$x_1 = 3, x_2 = 2, Z_{\text{สูงสุด}} = 41$$

เราสรุปการแตกแขนงของปัญหาด้วยผังภูมิต่อไปนี้



ตัวอย่างที่ 3.11 จงหาคำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาในตัวอย่างที่ 3.2 ด้วยวิธีการ Branch and Bound

วิธีทำ พิจารณาจากตารางซิมเพลกซ์สุดท้าย (ตารางที่ 2 เมื่อไม่มี cut ของตัวอย่างที่ 3.9) จะพบว่า $x_2 = \frac{5}{2}$ ดังนั้น เราพิจารณา

I ปัญหาเดิม รวมกับ $x_2 \geq 3$

II ปัญหาเดิม รวมกับ $x_2 \leq 2$

ปัญหาที่ I ($x_2' = x_2 - 3$)

		x_1	x_4	x_3
Z	280	4	28	8
x_2'	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

ไม่มีคำตอบที่เป็นไปได้

ปัญหาที่ II ($\bar{x}_2 = 2 - x_2$)

		x_1	x_4	x_3
Z	280	4	28	8
$\bar{x}_2$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$
$x_{0j}/-\bar{x}_{2j}$		$\frac{16}{3}$	112	16

ปัญหา II ตารางที่ 2

		$\bar{x}_2$	x_4	x_3
Z	$\frac{832}{3}$	$\frac{16}{3}$	$\frac{80}{3}$	$\frac{16}{3}$
x_1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

ผลที่ได้ ยังไม่เป็นจำนวนเต็มต่อปัญหา II ด้วย

II(1) เมื่อ $x_1 \geq 1$

และ II(2) เมื่อ $x_1 \leq 0$

ปัญหา II(1) ($x_1' = x_1 - 1$)

		$\bar{x}_2$	x_4	x_3
Z	$\frac{832}{3}$	$\frac{16}{3}$	$\frac{80}{3}$	$\frac{16}{3}$
x_1'	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$x_{0j}/-x_{1j}'$		4	—	—

ปัญหา II(2) ($\bar{x}_1 = -x_1$)

		$\bar{x}_2$	x_4	x_3
Z	$\frac{832}{3}$	$\frac{16}{3}$	$\frac{80}{3}$	$\frac{16}{3}$
$\bar{x}_1$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$x_{0j}/-x_{1j}'$		—	80	8

ปัญหา II(1) ตารางที่ 2

		x_1'	x_4	x_3
Z	$\frac{828}{3}$	4	28	8
$\bar{x}_2$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$

คำตอบยังไม่เป็นเลขจำนวนเต็ม

ปัญหา II(2) ตารางที่ 2

		$\bar{x}_2$	x_4	$\bar{x}_1$
Z	272	16	24	8
x_3	1	-2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$

ได้คำตอบดีที่สุดของปัญหา II(2) คือ

$x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 1, Z = 272$

ต่อปัญหา II(1) ต่อไป เป็นปัญหา

II(1ก) เมื่อ $\bar{x}_2 \geq 1$ นั่นคือ $2 - x_2 \geq 1$ หรือ $x_2 \leq 1$

และ II(1ข) เมื่อ $\bar{x}_2 \leq 0$ นั่นคือ $2 - x_2 \leq 0$ หรือ $x_2 \geq 2$

ปัญหา II(1ก) ($x_2^* = 1 - x_2 = \bar{x}_2 - 1$)

		x_1'	x_4	x_3
z	$\frac{828}{3}$	4	28	8
x_2^*	$-\frac{3}{4}$	0 $\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$
$x_{0j}/-x_{2j}^*$	$\frac{16}{3}$	112	16	

ปัญหา II(1ก) ตารางที่ 2

		x_2^*	x_4	x_3
Z	272	$\frac{16}{3}$	$\frac{80}{3}$	$\frac{16}{3}$
x_1'	1	$-\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

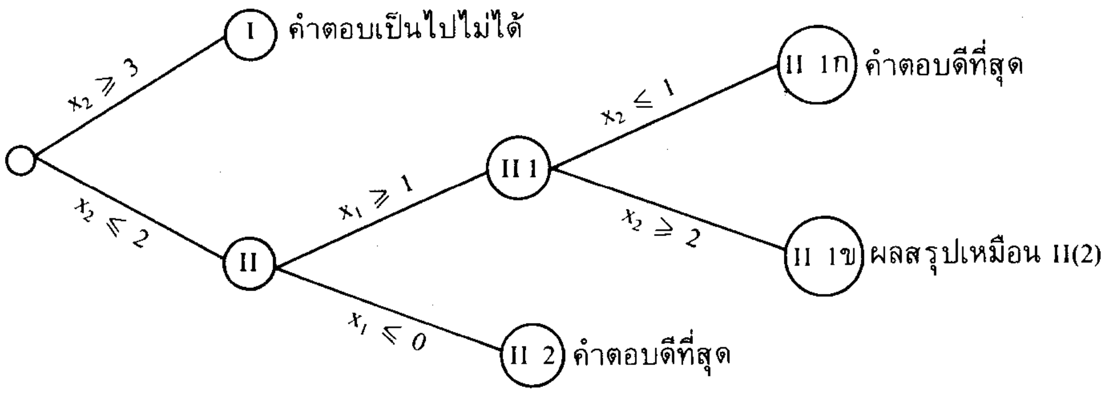
ได้คำตอบที่ดีที่สุดแล้ว

คำตอบทีดีของปัญหา II(1ก) คือ $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 0, Z = 272$

พิจารณาปัญหา II(1ข) สรุปได้ว่า $x_2 = 2$ ซึ่งเป็นผลของ II(2) เนื่องจากผลของปัญหา I ชี้ชัดว่า $x_2 > 2$ ไม่ได้

สรุปว่า คำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาเดิม ก็คือ พนักงานขาย อาจจะเอาสินค้าชนิดที่ 2 ไป 2 หน่วย ชนิดที่ 3 ไป 1 หน่วย หรือเอาชนิดที่ 1 ไป 2 หน่วย ชนิดที่ 2 ไป 1 หน่วย ก็ได้ จะได้กำไรสูงสุด 272 บาท

เราสรุปเป็นผังภูมิโดยย่อ ได้ดังนี้



ตัวอย่างที่ 3.12

ค่าต่ำสุด $Z = 2x_1 + x_2 + x_3$

โดยมีข้อจำกัด $3x_1 - 4x_2 - 6x_3 \leqslant 2$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 \leqslant 5$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant 11$$

$$x_1, x_2, x_3 = 0, 1, 2, \ldots$$

วิธีทำ เปลี่ยนข้อจำกัดที่ 1, 2 และ 3 เป็นสมการข้อจำกัด โดยใช้ตัวแปร slack x_4, x_5 และ x_6 ตามลำดับ ทำซิมเพลกซ์อัลกอริทึม จนถึงตารางสุดท้าย ได้ผลตามตารางที่ 1

ตารางที่ 1

		x_1	x_2	x_6
Z	$\frac{11}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
x_4	35	9	-1	-3
x_5	16	3	2	-1
x_3	$\frac{11}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

ผลที่ได้จากตารางนี้ ยังไม่เป็นคำตอบที่ดีที่สุด เนื่องจากค่าของ x_3 ไม่เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น เราต่อปัญหานี้ ด้วย

I ปัญหาเดิม รวมกับ $x_3 \geqslant 6$

และ II ปัญหาเดิม รวมกับ $x_3 \leqslant 5$

ตารางที่ 2 ตารางแรกของปัญหา I ($x_3' = x_3 - 6$)

		x_1	x_2	x_6
Z	$\frac{11}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
x_4	35	9	-1	-3
x_5	16	3	2	-1
x_3'	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0
$\lvert x_{0i}/x_{sj} < 0\rvert$		—	—	1

ตารางที่ 3 ตารางที่ 2 ของปัญหา I

		x_1	x_2	x_3'
Z	6	-2	-1	-1
x_4	38	3	-4	$-6'$
x_5	17	1	1	-2
x_6	1	-2	-1	-2

ได้คำตอบดีที่สุดคือ $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 6$, $Z = 6$

ตารางที่ 4 ตารางแรกของปัญหา II ($\bar{x}_3 = 5 - x_3$)

		x_1	x_2	x_6
Z	$\frac{11}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
x_4	35	9	-1	-3
x_5	16	3	2	-1
$\bar{x}_3$	$\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\lvert X_{0i}/X_{3j} < 0 \rvert$		1	1	—

ตารางที่ 5 ตาราง 2 ของปัญหา II

		x_1	$\bar{x}_3$	x_6
Z	6	0	-1	-1
x_4	36	11	-2	-4
x_5	14	-1	4	1
x_2	1	2	-2	-1

ได้คำตอบดีที่สุดคือ $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 5, Z = 6$

สรุปได้ว่า จะมีคำตอบที่ดีที่สุด 2 ชุด คือ $x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = 6$ กับ $x_1 = 0,\ x_2 = 1, x_3 = 5$ ค่า $Z_{\text{ต่ำสุด}} = 6$

3.4 การใช้วิธีการแจงนับ (Implicit Enumeration)

เป็นวิธีการหนึ่งที่ใช้ในการหาคำตอบต่อปัญหาโปรแกรมจำนวนเต็ม $0-1$ โดยการตรวจสอบกลุ่มของตัวแปรที่กำหนดค่าเป็น 0 หรือ 1 ทุก ๆ กลุ่มที่เป็นไปได้ การนำวิธีการ Implicit Enumeration ไปใช้ ก่อนอื่นต้องจัดตัวแบบให้อยู่ในรูปของ

ค่าต่ำสุด $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

โดยมีข้อจำกัด $Q_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i \geqslant 0,\ i = 1,2,\ldots,m$ (3.12)

$x_j = 0, 1$ ทุกค่า j

ในเมื่อ $c_j \geqslant 0$ ทุก $j = 1,2,\ldots,n$

ในการคำนวณเราจะแบ่งตัวแปรออกเป็น 2 กลุ่ม คือ

1) N เป็นเซตของตัวแปร x_j ที่ทราบค่าแล้ว (0 หรือ 1) คำตอบของตัวแปร x_j ทุกตัวใน N เรียกว่า **คำตอบบางส่วน** เราจะใช้ $j+$ แทน $x_j = 1$ และ $j-$ แทน $x_j = 0$

2) F เป็นส่วนเติมเต็มของ N นั่นคือเป็นเซตของตัวแปรที่เหลือ ซึ่งยังไม่ทราบค่า ตัวแปรทุกตัวใน F เรียกว่า **ตัวแปรอิสระ**

โดยทั่วไปที่จุดเริ่มต้น จะยังไม่มีคำตอบบางส่วน ดังนั้น ตัวแปรอิสระก็คือตัวแปร x_j ทุกตัวในตัวแบบนั่นเอง

เรามีขั้นตอนในการหาคำตอบบางส่วน ดังต่อไปนี้

1. จากคำตอบบางส่วนของ N ทำให้เป็นคำตอบที่สมบูรณ์โดยการกำหนดค่าของตัวแปรอิสระทุกตัวเป็น 0 คำนวณหาค่าของ

$$Q_i' = \sum_{j \in N} a_{ij}x_j - b_i$$

1.1 ถ้า $Q_i' \geqslant 0$ ทุก i แสดงว่า ได้คำตอบที่เป็นไปได้ คำนวณค่า Z ของคำตอบชุดนี้

1.2 ถ้ามีอย่างน้อยที่สุดหนึ่ง i ที่มี $Q_i' < 0$ ให้ทำต่อข้อ (2)

2. กำหนดตัวแปรอิสระทุกตัวให้มีค่าเป็น 1 คำนวณค่าของ

$$Q_i'' = Q_i' + \sum_{j \in F} a_{ij}$$

2.1 ถ้า $Q_i'' \geqslant 0$ ทุก i ให้ทำต่อข้อ 3.

2.2 ถ้ามีอย่างน้อยที่สุดหนึ่ง i ที่มี $Q_i'' < 0$ แสดงว่า เราไม่อาจต่อเติมคำตอบให้มีค่าจริงได้

3. กำหนดตัวแปรอิสระ x_ℓ มีค่าเป็น 1 คำนวณค่าของ

$$\begin{aligned} Q_i(l) &= |Q_i' + a_{il}| \quad \text{ถ้า } Q_i' + a_{il} < 0 \\ &= \quad 0 \quad\quad\quad \text{ถ้า } Q_i' + a_{il} \geq 0 \end{aligned}$$

เลือกตัวแปรอิสระ x_k ที่มี $Q_i(k)$ = ค่าต่ำสุด $\left[\sum_{i=1}^{m} Q_i(\ell)\right]$

เป็นตัวแปรที่เพิ่มเข้าไปในเซต N ซึ่งจะเป็นคำตอบบางส่วนที่เพิ่มเข้ามา และมี 2 ทาง

3.1 $k+$(หรือ $x_k = 1$) ทำต่อข้อ 1.

3.2 ตรวจสอบ ส.ป.ส. a_{ij} ของตัวแปรอิสระ x_j ที่เหลือ ในข้อจำกัด i ที่มี $Q_i' < 0$ ถ้า

$$\sum_{\substack{j \in F \\ j \neq k}} a_{ij} \geqslant -Q_i'$$

ถ้ามีบางค่า i เท่ากันพอดี แสดงว่า คำตอบที่เป็นไปได้ จะมีตัวแปรอิสระที่เหลือทุกตัวมีค่าเป็น 1 ถ้ามากกว่า ทุก $Q_i' < 0$ ให้เพิ่ม $k - (x_k = 0)$ ในคำตอบบางส่วน ทำต่อข้อ (1) นอกเหนือจากนี้แสดงว่า จะได้คำตอบเป็นไปไม่ได้

4. เปรียบเทียบค่า Z คำตอบทีมีค่า $Z_{\text{ต่ำสุด}}$ จะเป็นคำตอบดีที่สุด

ตัวอย่างที่ 3.13 จงหาคำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาจัดส่งของในตัวอย่างที่ 3.3

วิธีทำ จัดตัวแบบตาม (3.12) จะได้

ค่าต่ำสุด $Z = 21x_1 + 42x_2 + 16x_3 + 32x_4 + 64x_5$

โดยมีข้อจำกัด $7x_1 + 14x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 16x_5 - 21 \geqslant 0$

$4x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 12x_4 + 24x_5 - 30 \geqslant 0$

$x_j = 0, 1$ ทุก $j = 1,2,3,4,5$

ขั้นตอนในการหาคำตอบ มีดังต่อไปนี้

0) $\phi \quad F = \{1,2,3,4,5\}$

$Q_1' = -21 \Rightarrow Q_1'' = -21 + 7 + 14 + 4 + 8 + 16 = 28$

$Q_2' = -30 Q_2'' = -30 + 4 + 8 + 6 + 12 + 24 = 24$

หาค่า $Q_i(\ell)$ ได้

ℓ	1	2	3	4	5
$Q_1' + a_{1\ell}$	7-21	14-21	4-21	8-21	16-21
$Q_2' + a_{2\ell}$	4-30	8-30	6-30	12-30	24-30
$\sum_i Q_i(\ell)$	40	29	41	31	11

เลือกตัวแปร x_5 เข้ามา เลือก $x_5 = 1$ ไปที่ 1

พิจารณาค่าผลบวกของ ส.ป.ส. ของตัวแปรอิสระที่เหลือ

$$7 + 14 + 4 + 8 = 33 > -Q_1'$$

$$4 + 8 + 6 + 12 = 30 = -Q_2'$$

แสดงว่า $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ มีค่า $Z = 21+42+16+32 = 111$

1) 5+ $\quad F = \{1,2,3,4\}$

$$Q_1' = -21+16 = -5 \qquad Q_1'' = -5+7+14+4+8 = 28$$
$$\Rightarrow$$
$$Q_2' = -30+24 = -6 \qquad Q_2'' = -6+4+8+6+12 = 24$$

ℓ	1	2	3	4
$Q_1'+a_{1\ell}$	$7-5$	$14-5$	$4-5$	$8-5$
$Q_2'+a_{2\ell}$	$4-6$	$8-6$	$6-6$	$12-6$
$\sum_i Q_i(\ell)$	2	0	1	0

เราเลือกตัวแปร x_4 เข้ามา เนื่องจาก $c_4(32) < c_2(42)$

เลือก $x_4 = 1$ ไปที่ 2

พิจารณาค่าผลบวกของ ส.ป.ส. ตัวแปรอิสระที่เหลือ จะพบว่า

$$7+14+4 = 25 > -Q_1'$$
$$4+8+6 = 18 > -Q_2'$$

เลือก $x_4 = 0$ ไปที่ 3

2) 5+, 4+ $\quad F = \{1,2,3\}$

$$Q_1' = -21+16+8 = 3$$
$$Q_2' = -30+24+12 = 6$$

แสดงว่า ได้คำตอบที่เป็นไปได้ คือ

$x_4 = x_5 = 1$ นอกนั้นเป็น 0 ได้ค่า $Z = 32+64 = 96$

3) 5+, 4− $\quad F = \{1,2,3\}$

$$Q_1' = -21+16 = -5 \qquad Q_1'' = -5+7+14+4 = 20$$
$$\Rightarrow$$
$$Q_2' = -30+24 = -6 \qquad Q_2'' = -6+4+8+6 = 12$$

เลือก $x_2 = 0$ แต่เมื่อเราพิจารณา ส.ป.ส.ของ x_1 และของ x_3 จะพบว่า เราจะได้คำตอบที่เป็นไปได้ ก็ต่อเมื่อ เราเลือก

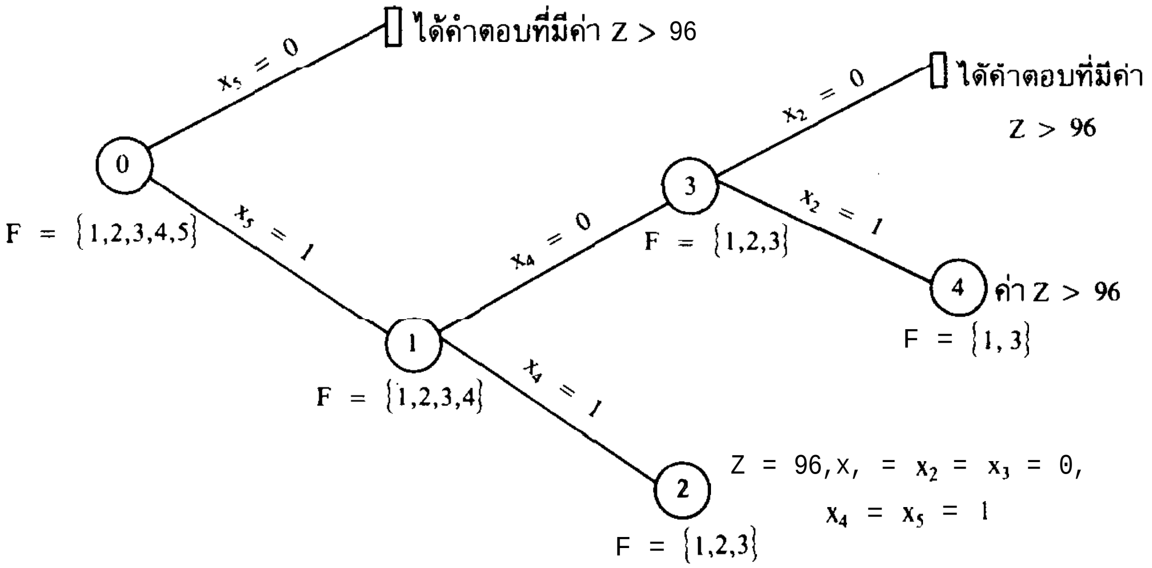
$x_1 = x_3 = 1$ เข้ามาใน N

แสดงว่า $x_1 = x_3 = x_5' = 1$ นอกนั้นเป็น 0 ได้ค่า $Z > 96$

สรุปว่า คำตอบที่ดีที่สุดคือ $x_4 = x_5 = 1$

นั่นคือ ควรส่งสารานุกรม 4 และ 5 ไปให้ เสียค่าใช้จ่ายต่ำสุด 96 บาท มีน้ำหนักรวมกัน 24 กิโลกรัม และโรงเรียนจะได้รับหนังสือ 36 เล่ม

เขียนผังแสดงการเพิ่มคำตอบบางส่วน และทำให้เป็นคำตอบที่สมบูรณ์ได้ดังนี้



ข้อสังเกต

1. ในขั้นตอนที่ 3 เราไม่เลือก $x_2 = 1$ เพราะจากขั้นตอน 1 ชี้ให้เห็นว่า คำตอบชุดที่มี $x_2 = 1$ จะมีค่า Z สูงกว่าคำตอบชุดที่มี $x_4 = 1$

2. ถ้าเราเลือก $x_k = 1$ เข้ามาในคำตอบบางส่วน ค่าของ Q_i'' จะไม่เปลี่ยนแปลง แต่ค่า Q_i' จะเปลี่ยนเป็น

$$Q_i' + a_{ik}$$

เช่น จาก 1. เรามี $Q_1' = -5, Q_2' = -6$ เมื่อเลือก $x_4 = 1$ ใน 2. จะได้ $Q_1' = -5+8 = 3$ และ $Q_2' = -6+12 = 6$

3. ถ้าเราเลือก $x_k = 0$ เข้ามาในคำตอบบางส่วน ค่าของ Q_i' และ $\sum_i Q_i(\ell)$ ของตัวแปรอิสระ x_ℓ ที่เหลือ จะไม่เปลี่ยนแปลง แต่ Q_i'' จะเปลี่ยนเป็น

$$Q_i'' - a_{ik}$$

เช่นจาก 1. เรามี $Q_1'' = 28$, $Q_2'' = 24$ เมื่อเลือก $x_4 = 0$ ใน 3. จะได้ $Q_1'' = 28-8 = 20$ และ $Q_2'' = 24-12 = 12$ ค่าอื่น ๆ คงเดิม

ให้เรามาศึกษาเพิ่มเติมจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 3.14 จงหาคำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาการลงทุน ในตัวอย่างที่ 3.4

วิธีทำ ก่อนอื่นเราเปลี่ยนตัวแบบในตัวอย่าง ที่ (3.4) มาเป็นตัวแบบ ตามรูปแบบ (3.12)

จากค่าสูงสุด Z เปลี่ยนเป็น ค่าต่ำสุด $(-Z)$

$$-Z = -60x_1 - 120x_2 - 60x_3 - 45x_4 - 90x_5 \text{ ให้เท่ากับ } Z_y$$

แต่ค่าของ c_j จะต้องมากกว่า 0 ทุก j ดังนั้น เรากำหนด

$$y_j = 1 - x_j, \quad j = 1,2,3,4,5$$

ตัวแบบจะเปลี่ยนเป็น

ค่าต่ำสุด $Z_y = 60y_1 + 120y_2 + 60y_3 + 45y_4 + 90y_5 - 375$

โดยมีข้อจำกัด $10y_1 + 8y_2 + 6y_3 + 14y_4 + 16y_5 - 4 \geqslant 0$

$$2y_1 + 14y_2 + 18y_3 + 8y_4 + 12y_5 - 4 \geqslant 0$$

$$16y_1 + 20y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 20y_5 - 12 \geqslant 0$$

$$y_j(j = 1,2,3,4,5) = 0, 1$$

ที่จุดเริ่มต้น เรามี

$Q_1' = -4,\quad Q_2' = -4,\quad Q_3' = -12$

$Q_1'' = 50,\quad Q_2'' = 50,\quad Q_3'' = 50$

$\sum_i Q_i(\ell) = 2,0,8,10,0$ ตามลำดับ $\ell = 1,2,3,4,5$ เปรียบเทียบค่า $c_2 = 120$ กับ $c_5 = 90$ ดังนั้นเราเลือก y_5

1) $5 + Q_i' > 0$ ทุก i จะได้คำตอบคือ $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 0$, $y_5 = 1$ ได้ค่า $Z_y = 90 - 375 = -285$

2) $5 - Q_i'' > 0$ ทุก i เลือก $y_2 = 0$ ไปที่ 3

3) $5-, 2- Q_i'' > 0$ ทุก i เลือก $y_1 = 1$ ไปที่ 4

4) 5 −, 2 −, 1 + จะได้คำตอบที่เป็นไปได้ก็ต่อเมื่อเลือก $y_3 = 1$ หรือ $y_4 = 1$ ซึ่งต่างก็ให้ค่า $Z > -285$

สรุปว่า คำตอบที่ดีที่สุดคือ $y_5 = 1$ นอกนั้นเป็น 0

นั่นก็คือ บริษัทควรเลือกลงทุนในโครงการที่ 1, 2, 3 และ 4 เท่านั้น จะได้ผลตอบแทนรวม 285 ล้านบาท

คำอธิบาย

1) เมื่อ $y_5 = 1$ เราได้

$Q_1' = -4+16 = 12, \quad Q_2' = -4+12 = 8, \quad Q_3' = -12+20 = 8$

แสดงว่าเป็นคำตอบที่สมบูรณ์แล้ว

2) เมื่อ $y_5 = 0$ ค่า Q_i' และ $\Sigma Q_i(f)$ จะคงเดิม

เราคำนวณเฉพาะ Q_i'' จะได้

$Q_1'' = 50-16 = 34, \quad Q_2'' = 50-12 = 38, \quad Q_3'' = 50-20 = 30$

เนื่องจาก $\Sigma Q_i(2)$ มีค่าต่ำสุด เราจึงเลือก y_2 เข้ามา

เราไม่เลือก $y_2 = 1$ เพราะคำตอบที่ได้จาก $y_2 = 1$ จะเป็นคำตอบสมบูรณ์ที่มีค่า $Z < -285$ (เหตุผลที่เราเลือก y_5 ในจุดแรกแทนที่จะเลือก y_2)

3) เมื่อ $y_5 = y_2 = 0$ ค่า Q_i' และ $\Sigma Q_i(f)$ จะคงเดิม เราคำนวณค่า Q_i'' ได้

$Q_1'' = 34-8 = 26, \quad Q_2'' = 38-14 = 24, \quad Q_3'' = 30-20 = 10$

เนื่องจาก $\Sigma Q_i(1)$ ต่ำสุด เราจึงเลือก $y_1 = 1$ เข้ามา

ที่ไม่เลือก $y_1 = 0$ ก็เพราะว่า เรามีตัวแปรเหลือ 2 ตัว คือ y_3 กับ y_4 ถึงแม้เราจะให้ $y_3 = y_4 = 1$ จะพบว่าเมื่อแทนค่าในข้อจำกัดที่ 3 จะได้

$$4+2 < -12$$

จึงเป็นคำตอบที่เป็นไปไม่ได้

4) เมื่อ $y_5 = y_2 = 0, y_1 = 1$ ค่าของ $Q_2' = -4+2 = -2$

แสดงว่า ยังไม่เป็นคำตอบที่สมบูรณ์ และจะได้คำตอบ ถ้าเลือก $y_3 = 1$ หรือ $y_4 = 1$ ซึ่งไม่ว่าจะเลือกค่าใดก็ตาม จะเห็นว่า $c_1+c_3 = 60+60 > 90(c_5)$ หรือ $c_1+c_4 = 60+45 > 90$ ทั้งสิ้น เป็นผลให้ได้ค่า $Z > -285$ จึงไม่ใช่คำตอบที่ดีที่สุด

3.5 การใช้วิธีขนส่งกับปัญหาการขนส่ง

พิจารณาจากตัวแบบปัญหาการขนส่ง จะพบว่า มีลักษณะเป็นปัญหาโปรแกรมจำนวนเต็มเชิงเส้น การหาคำตอบจึงอาจจะใช้วิธีการซิมเพลกซ์ก็ได้ แต่ในทางปฏิบัติ ปัญหาทั่วไปมีขนาดใหญ่ วิธีการซิมเพลกซ์ไม่ค่อยจะเหมาะ เพราะต้องทำซ้ำหลายครั้ง ใช้เวลามากกว่าจะได้คำตอบที่ดีที่สุด จึงได้มีการพัฒนาและปรับปรุงวิธีการต่าง ๆ ขึ้นมาใช้ โดยอาศัยแนวทางของวิธีการซิมเพลกซ์ วิธีการหนึ่งที่ใช้ได้ผลดีและเป็นที่นิยมใช้กันมาก คือวิธีการขนส่ง (Transportation method)

วิธีการขนส่งเป็นวิธีการแก้ปัญหาแบบเดียวกับวิธีการซิมเพลกซ์ เริ่มต้นจากการหาคำตอบที่เป็นไปได้ขั้นฐานชุดแรก แล้วมาตรวจสอบประเมินผลดูว่า ควรจะมีการปรับปรุงคำตอบต่อไปอย่างไรหรือไม่ วิธีการขนส่งเป็นกระบวนการที่มีเหตุผล และดำเนินการเป็นระบบทีละขั้นตอนในการพัฒนาปรับปรุงคำตอบ จนกว่าจะได้คำตอบที่ดีที่สุด นั่นก็คือคำตอบที่ทำให้ค่าใช้จ่ายในการจัดส่งต่ำสุด

หากเราพิจารณาปัญหาการขนส่งมาตรฐาน ที่มีสมการข้อจำกัด $m+n$ สมการ และมี mn ตัวแปร การหาคำตอบด้วยวิธีการขนส่ง เราจะต้องเปลี่ยนตัวแบบมาตรฐานของปัญหาการขนส่ง ให้อยู่ในรูปตาราง ที่เรียกว่าตารางการขนส่ง (transportation tableau) (ตารางที่ 3.1)

ตารางขนส่งที่ 3.1 (Tableau for Transportation Problem)

ปลายทาง / ต้นทาง	1	2				n	a_i
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	.....	c_{1j} x_{1j}		c_{1n} x_{1n}	a_1
1	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	.....	c_{2j} x_{2j}	.....	c_{2n} x_{2n}	a_2
.	.	.	.....	.	.....	.	
i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	.....	c_{ij} x_{ij}	.	c_{in} x_{in}	a_i
	.			....			
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	.....	c_{mj} x_{mj}	.....	c_{mn} x_{mn}	a_m
b_j	b_1	b_2		b_j		b_n	$\Sigma a_i = \Sigma b_j$

จากตารางที่ 3.1 จะมี m แถว n คอลัมน์ ช่อง (i, j) แต่ละช่องจะแสดงถึงสายขนส่งจาก i ไปยัง j จำนวนสินค้าหรือผลิตภัณฑ์ที่จะส่ง จะเท่ากับ x_{ij} หน่วย อัตราค่าขนส่งต่อหน่วย c_{ij} แสดงไว้ที่มุมบนด้านซ้ายของช่อง (i, j) สมการข้อจำกัด i แสดงด้วยผลบวกของจำนวน x_{ij} ในแถวที่ i จะเท่ากับ a_i, $i = 1,2,\ldots,m$ และสมการข้อจำกัด j แสดงด้วยผลบวกของจำนวน x_{ij} เท่ากับ b_j, $j = 1,2,\ldots,n$ ดังนั้น หากเราต้องการตรวจสอบว่า x_{ij} ที่ได้เป็นคำตอบที่เป็นไปได้ขั้นฐานหรือไม่ ก็สามารถตรวจสอบได้ง่าย ๆ โดยเพียงแต่บวกค่าของ x_{ij} ทุก ๆ ค่าที่อยู่ในแถว i และทุก ๆ ค่าที่อยู่ในคอลัมน์ j จำนวน $x_{ij} > 0$ ในตารางจะมีไม่เกิน $m+n-1$ นั่นก็คือ สามารถจัดสายขนส่งได้อย่างมากที่สุด $m+n-1$ สาย สำหรับค่าที่เป็น 0 ของ nonbasic variables x_{ij} จะไม่แสดงไว้ในตารางนี้ นี่ก็หมายความว่า หากมีช่องใดไม่แสดงจำนวนสินค้า แสดงว่าไม่มีการจัดส่งที่สายนั้น อย่างไรก็ตาม อาจจะมีตัวแปรฐาน x_{ij} บางตัวมีค่าเป็น 0 จะต้องแสดงค่านี้ในตารางด้วย เพื่อให้เห็นว่ามีการจัดส่งที่สายนั้น ซึ่งเราเรียกกรณีเช่นนี้ว่า ปัญหาการขนส่งมี degenerate basic feasible solution

3.5.1 การหาคำตอบฐานชุดแรก

เมื่อเรามีตารางการขนส่งแล้ว ขั้นต่อไปคือการหาคำตอบที่เป็นไปได้ขั้นฐานชุดแรก มีหลายวิธีสำหรับการหาคำตอบชุดแรก คำตอบที่ได้จะเป็นสายขนส่งที่ดีที่สุด หรือจะต้องปรับปรุงคำตอบใหม่ และการปรับปรุงจะใช้หลายตารางหรือไม่ ย่อมขึ้นอยู่กับการหาคำตอบชุดแรก วิธีหาคำตอบที่เป็นไปได้ขั้นฐานชุดแรกมีดังต่อไปนี้

การหาคำตอบขั้นฐานชุดแรกด้วยวิธีการ North – West Corner Rule

การหาคำตอบขั้นฐานชุดแรกด้วยวิธีการนี้ เริ่มต้นคำตอบแรกที่ช่องแรก นั่นก็คือ เริ่มจากจุดต้นทางที่ 1 ไปยังจุดปลายทางที่ 1 และหาคำตอบต่อไปตามแนวเส้นทแยงมุม วิธีการจะมีดังนี้

1. เรามี $i = 1,m$, $j = 1, n$
   เริ่มต้นด้วย $i = 1$, $j = 1$ นั่นคือพิจารณาช่อง (1, 1)
2. หาค่าต่ำสุดของ (a_i, b_j)
3. ก) ถ้า $a_i < b_j$ แสดงว่า จำนวนสินค้าในช่องนี้เท่ากับ a_i $i = i+1$ และ $b_j = b_j - a_i$
   ทำต่อข้อ 2

   ข) ถ้า $a_i > b_j$ แสดงว่าจำนวนสินค้าในช่องนี้เท่ากับ b_j $j = j+1$ และ $a_i = a_i - b_j$
   ทำต่อข้อ 2

ค) ถ้า $a_i = b_j$ เลือกทำตามวิธีของ ก หรือ ข ก็ได้ อย่างใดอย่างหนึ่ง

ทำซ้ำเช่นนี้ จนถึงแถวสุดท้าย ใส่ค่าในช่องที่เหลือตามจำนวนที่มีอยู่ในคอลัมน์นั้น ๆ เราจะได้คำตอบขั้นฐานชุดแรก ซึ่งก็คือ สายขนส่งชุดแรก มีจำนวน $m+n-1$ สาย

ตัวอย่างที่ 3.15 บริษัทราชามีโรงงานผลิตสินค้าที่เขตเอ เขตบี เขตซี และเขตดี โรงงานในแต่ละเขตสามารถผลิตสินค้าในแต่ละงวดได้ เป็นจำนวน 400, 500, 500 และ 600 หน่วย ตามลำดับ สินค้าที่ผลิตได้ในแต่ละงวดจะส่งไปจำหน่ายที่เขตการค้า 5 เขต จำนวนอุปสงค์ของสินค้าในแต่ละเขตการค้า เท่ากับ 300, 400, 400, 400 และ 500 หน่วยตามลำดับ อัตราค่าขนส่งสินค้าจากแต่ละโรงงานไปยังเขตการค้า กำหนดไว้ดังนี้

	อัตราค่าขนส่ง (บาทต่อหน่วย)				
โรงงาน	**เขตการค้า 1**	**เขตการค้า 2**	**เขตการค้า 3**	**เขตการค้า 4**	**เขตการค้า 5**
เขตเอ	5	7	6	8	4
เขตบี	9	6	3	10	7
เขตซี	12	10	8	6	11
เขตดี	7	5	6	2	9

จงจัดสายขนส่งโดยใช้วิธีการ North – West Corner Rule และคำนวณค่าใช้จ่ายทั้งหมดจากการจัดสายขนส่งแบบนี้

วิธีทำ

เขตการค้า / **โรงงาน**	1	2	3	4	5	**จำนวนสินค้าที่ผลิตได้**
เขตเอ	5 300	7 100	6	8	4	400
เขตบี	9	6 300	3 200	10	7	500
เขตซี	12	10	8 200	6 300	11	500
เขตดี	7	5	6	2 100	9 500	600
จำนวนอุปสงค์สินค้า	300	400	400	400	500	

อ่านผลจากตารางได้ดังต่อไปนี้

โรงงานเขตเอ ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 1 จำนวน 300 หน่วย ค่าขนส่ง (5)(300) = 1500 บาท
ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 2 จำนวน 100 หน่วย ค่าขนส่ง (7)(100) = 700 บาท
โรงงานเขตบี ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 2 จำนวน 300 หน่วย ค่าขนส่ง (6)(300) = 1800 บาท
ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 3 จำนวน 200 หน่วย ค่าขนส่ง (3)(200) = 600 บาท
โรงงานเขตซี ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 3 จำนวน 200 หน่วย ค่าขนส่ง (8)(200) = 1600 บาท
ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 4 จำนวน 300 หน่วย ค่าขนส่ง (6)(300) = 1800 บาท
โรงงานเขตดี ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 4 จำนวน 100 หน่วย ค่าขนส่ง (2)(100) = 200 บาท
ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 5 จำนวน 500 หน่วย ค่าขนส่ง (9)(500) = 4500 บาท
ค่าใช้จ่ายในการจัดส่งทั้งหมด จะเท่ากับ 12,700 บาท

ข้อสังเกต

จะเห็นได้ว่า จำนวนสายขนส่งทั้งหมดจะเท่ากับ $4+5-1 = 8$ สาย

ผลบวกของจำนวนสินค้าในแต่ละแถว จะเท่ากับ จำนวนที่ผลิตได้ของแถวนั้น

ผลบวกของจำนวนสินค้าในแต่ละคอลัมน์ จะเท่ากับ จำนวนอุปสงค์ของสินค้าในคอลัมน์นั้น

คำอธิบาย ขั้นตอนในการหาคำตอบ

เขียนตารางขนส่ง เริ่มต้นจัดสายขนส่งจากโรงงานในเขตเอไปยังเขตการค้า 1 นั่นก็คือหาคา x_{11}

i \ j	1	2	3	4	5	
1	5 (300)	7	6	8	4	~~400~~ 100
2	9	6	3	10	7	500
3	12	10	8	6	11	500
4	7	5	6	2	9	600
	300	400	400	400	500	

1. ค่าต่ำสุด (400, 300) = 300
   ดังนั้น $x_{11} = 300$
2. ขีดคอลัมน์ 1 ออก จำนวนสินค้าในแถว 1 จะมี 100 หน่วย

i \ j	2	3	4	5	
1	7 100	6	8	4	100
2	6	3	10	7	500
3	10	8	6	11	500
4	5	6	2	9	600
	~~400~~ 300	400	400	500	

1. ค่าต่ำสุด (100,400) = 100
   ดังนั้น x_{12} = loo
2. ขีดแถว 1 ออก จำนวนสินค้าในคอลัมน์ 2 เท่า กับ 300

i \ j	2	3	4	5	
2	6 300	3	10	7	~~500~~ 200
3	10	8	6	11	500
4	5	6	2	9	600
	300	400	400	500	

1. ค่าต่ำสุด (500, 300) = 300
   ดังนั้น x_{22} = 300
2. ขีดคอลัมน์ 2 ออก จำนวนสินค้าในแถว 2 จะเท่ากับ 200

i \ j	3	4	5	
2	3 200	10	7	200
3	8	6	11	500
4	6	2	9	600
	~~400~~ 200	400	500	

1. ค่าต่ำสุด (200, 400) = 200
   ดังนั้น x_{23} = 200
2. ขีดแถว 2 ออก จำนวนสินค้าในคอลัมน์ 3 จะเท่ากับ 200

i \ j	3	4	5	
3	8 200	6	11	~~500~~ 300
4	6	2	9	600
	200	400	500	

1. ค่าต่ำสุด (500, 200) = 200
   ดังนั้น x_{33} = 200
2. ขีดคอลัมน์ 3 ออก จำนวนสินค้าในแถว 3 จะเท่ากับ 300

i \ j	4	5	
3	6 (300)	11	300
4	2	9	600
	~~400~~ 100	500	

2 (100)	9 (500)	600
100	500	

1. ค่าต่ำสุด (300, 400) = 300
   ดังนั้น $x_{34} = 300$
2. ขีดแถว 3 ออก จำนวนสินค้าในคอลัมน์ 4 จะเท่ากับ 100

แถวนี้เป็นแถวสุดท้ายของตารางการขนส่ง ดังนั้น เรากำหนดค่าใน 2 ช่องสุดท้าย ตามจำนวนสินค้าที่มีอยู่ใน 2 คอลัมน์สุดท้าย

การหาคำตอบขั้นฐานชุดแรกโดยใช้วิธีการ Row Minima

การจัดสายขนส่งด้วยวิธีการนี้ จะทำทีละแถว เริ่มจากแถวที่ 1 เรียงลำดับเรื่อยไปจนถึงแถวสุดท้าย โดยยึดหลักค่าใช้จ่ายต่ำสุด ขั้นตอนการหาคำตอบมีดังต่อไปนี้

1. หาค่าต่ำสุดของอัตราขนส่งต่อหน่วย c_{1j} ในแถวแรก สมมติได้

$$c_{1p} = \underset{j}{\text{ค่าต่ำสุด}}\ c_{1j}$$

2. หาค่าต่ำสุด (a_1, b_p)
3. ก) ถ้า $a_1 < b_p$ แสดงว่า จำนวนสินค้าในช่องนี้ เท่ากับ a_1
   ขีดแถวที่ 1 ออก กลับไปทำขั้นที่ 1 ใหม่ โดยถือว่าแถวถัดไปเป็นแถวแรกของตาราง และมีสินค้าในคอลัมน์ p เท่ากับ $b_p - a_1$

   ข) ถ้า $a_1 > b_p$ แสดงว่า จำนวนสินค้าในช่องนี้ เท่ากับ b_p
   ขีดคอลัมน์ p ออก ยังคงทำแถวที่ 1 ด้วยวิธีการเดิม แต่จำนวนสินค้าที่มีอยู่ในแถวนี้ จะเท่ากับ $a_1 - b_p$

   ค) ถ้า $a_1 = b_p$ เลือกทำตามวิธีการ (ก) หรือ (ข) ก็ได้ ถือว่าจำนวนที่เหลือ 0 เป็นจำนวนที่มีการจัดส่งในทางทฤษฎี

ทำซ้ำวิธีการเดิม จนถึงแถวสุดท้าย เราใส่ค่าที่เหลือในคอลัมน์ลงในช่องว่างของคอลัมน์เดียวกัน จำนวนสายขนส่งที่ได้ จะเท่ากับ $m + n - 1$ สาย

แสดงให้เห็นได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 3.16 จงจัดสายขนส่งของปัญหาในตัวอย่างที่ 3.15 ด้วยวิธีการ Row Minima

วิธีทำ

โรงงาน \ เขตการค้า	1	2	3	4	5	จำนวนที่ผลิตได้
เขตเอ	5	7	6	8	4 (400)	400
เขตบี	9	6 (100)	3 (400)	10	7	500
เขตซี	12	10 (100)	8	6 (400)	11	500
เขตดี	7 (300)	5 (200)	6	2	9 (100)	600
จำนวนอุปสงค์	300	400	400	400	500	

อ่านผลจากตารางได้ดังต่อไปนี้

โรงงานเขตเอ ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 5 จำนวน 400 หน่วย ค่าขนส่ง (4)(400) = 1600 บาท

โรงงานเขตบี ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 2 จำนวน 100 หน่วย ค่าขนส่ง (6)(100) = 600 บาท

ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 3 จำนวน 400 หน่วย ค่าขนส่ง (3)(400) = 1200 บาท

โรงงานเขตซี ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 2 จำนวน 100 หน่วย ค่าขนส่ง(10)(100) = 1000บาท

ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 4 จำนวน 400 หน่วย ค่าขนส่ง (6)(400) = 2400 บาท

โรงงานเขตดี ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 1 จำนวน 300 หน่วย ค่าขนส่ง (7)(300) = 2100 บาท

ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 2 จำนวน 200 หน่วย ค่าขนส่ง (5)(200) = 1000 บาท

ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 5 จำนวน 100 หน่วย ค่าขนส่ง (9)(100) = 900 บาท

ค่าใช้จ่ายในการจัดส่งทั้งหมด จะเท่ากับ 10,800 บาท

คำอธิบาย ขั้นตอนในการหาคำตอบ

5	7	6	8	4 (400)	400
9	6	3	10	7	500
12	10	8	6	11	500
7	5	6	2	9	600
300	400	400	400	~~500~~ 100	

1. ค่าต่ำสุด (5,7,6,8,4) = 4
2. ค่าต่ำสุด (400,500) = 400
3. ดังนั้น x_{15} = 400

ขีดแถวที่ 1 ออก จำนวนสินค้าในคอลัมน์ 5 จะเท่ากับ 100

ทำแถวที่ 2 ต่อไป

9	6	3 (400)	10	7	~~500~~ 100
12	10	8	6	11	500
7	5	6	2	9	600
300	400	400	400	loo	

1. ค่าต่ำสุด (9,6,3,10,7) = 3
2. ค่าต่ำสุด (500, 400) = 400
3. ดังนั้น x_{23} = 400

   ขีดคอลัมน์ 3 ออก จำนวนสินค้าใน แถว 2 เท่ากับ 100

   ยังคงทำแถวที่ 2 ต่อไป

9	6 (100)	10	7	100
12	10	6	11	500
7	5	2	9	600
300	~~400~~ 300	400	loo	

I. ค่าต่ำสุด (9,6,10,7) = 6
2. ค่าต่ำสุด (loo, 400) = 100
3. ดังนั้น x_{22} = 100

   ขีดแถว 2 ออก จำนวนสินค้าในคอลัมน์ 2 จะเท่ากับ 300

   ทำแถวที่ 3 ต่อไป

12	10	6 (400)	11	~~500~~ 100
7	5	2	9	600
300	300	400	100	

I. ค่าต่ำสุด (12, 10, 6, 11) = 6
2. ค่าต่ำสุด (400, 500) = 400
3. ดังนั้น x_{34} = 400

   ขีดคอลัมน์ 4 ออก จำนวนสินค้าใน แถว 3 จะเท่ากับ 100 ทำแถว 3 do

~~12~~ 100	10 (100)	11
600	5	9
300	~~300~~ 200	100

1. ค่าต่ำสุด (12, 10, 11) = 10
2. ค่าต่ำสุด (100, 300) = 100
3. ดังนั้น x_{32} = 100

   ขีดแถวที่ 3 ออก จำนวนสินค้าใน คอลัมน์ 2 จะเท่ากับ 200

7 (300)	5 (200)	9 (100)	600
300	200	100	

ทำแถวที่ 4 ซึ่งเป็นแถวสุดท้ายต่อไป จะได้ว่า x_{41} = 300, x_{42} = 200, x_{45} = 100

หมายเหตุ

การใช้วิธีการ Row Minima จะถือหลักค่าใช้จ่ายต่ำสุดของแถวแรก ๆ เรียงลำดับไป เรื่อย ๆ จนถึงแถวสุดท้าย ในบางกรณี หากมีอัตราค่าขนส่งต่ำสุดปรากฏในคอลัมน์แรก ๆ เราจะ

ใช้วิธีการหาคำตอบจากคอลัมน์ทีละคอลัมน์ โดยเริ่มจากคอลัมน์แรก เสร็จแล้วทำต่อคอลัมน์ 2 เรื่อย ๆ ไปจนถึงคอลัมน์สุดท้าย

การหาคำตอบขั้นฐานชุดแรกโดยวิธีการ Matrix Minima หรือ Short – Cut

การหาคำตอบหรือการจัดสายขนส่งชุดแรกด้วยวิธีการนี้ ยึดหลักค่าใช้จ่ายต่ำสุด โดยจะพิจารณาจากช่องที่มีอัตราค่าขนส่งน้อยที่สุด ในบรรดาค่าต่าง ๆ ที่กำหนดไว้ในตาราง ขั้นตอนการหาคำตอบมีดังต่อไปนี้

1 พิจารณาอัตราค่าขนส่ง c_{ij} ในตารางทั้งหมด หาค่าที่ต่ำที่สุด สมมติได้

$$c'_{pq} = \underset{i,\ j}{\text{ค่าต่ำสุด}}\ c_{ij}$$

2. หาค่าต่ำสุดของ (a_p, b_q)

3. ก) ถ้า $a_p < b_q$ แสดงว่า จำนวนสินค้าในช่องนี้เท่ากับ a_p
ขีดแถว p ออก กลับไปทำขั้นที่ 1 ใหม่ โดยพิจารณาจากตารางที่เหลือ ซึ่งจะมีจำนวนสินค้าในคอลัมน์ q เท่ากับ $b_q - a_p$

ข) ถ้า $a_p > b_q$ แสดงว่า จำนวนสินค้าในช่องนี้ เท่ากับ b_q
ขีดคอลัมน์ q ออก จำนวนสินค้าในแถว p เหลืออยู่เท่ากับ $a_p - b_q$ กลับไปทำขั้นที่ 1 ใหม่ โดยพิจารณาจากช่องที่เหลือในตาราง

ค) ถ้า $a_p = b_q$ เลือกตามข้อ (ก) หรือ (ข) ก็ได้ อย่างใดอย่างหนึ่ง และถือว่ายังมีจำนวนเหลืออยู่ (0)

ทำซ้ำวิธีการเดิม จนกระทั่งเหลือเพียงแถวเดียวหรือคอลัมน์เดียว จำนวนสินค้าในช่องที่เหลือจะเท่ากับจำนวนที่เหลืออยู่ในคอลัมน์หรือแถวของช่องนั้น ๆ จำนวนสายขนส่งที่ได้จะเท่ากับ $m + n - 1$ สาย แสดงให้เห็นได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 3.17 จากปัญหาการขนส่งในตัวอย่างที่ 3.15 จงหาคำตอบชุดแรก นั่นก็คือ จัดสายขนส่งชุดแรก ด้วยวิธีการ Matrix Minima หรือที่เรียกว่า Short – Cut

วิธีทำ

โรงงาน \ เขตการค้า	1	2	3	4	5	จำนวนที่ผลิตได้
เขตเอ	5	7	6	8	4 400	400
เขตบี	9	6 100	3 400	10	7	500
เขตซี	12 300	10 100	8	6	11 100	500
เขตดี	7	5 200	6	2 400	9	600
จำนวนอุปสงค์	300	400	400	400	500	

อ่านผลจากตารางได้ดังต่อไปนี้

โรงงานเขตเอ ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 5 จำนวน 400 หน่วย ค่าขนส่ง(4)(400) = 1600 บาท

โรงงานเขตบี ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 2 จำนวน 100 หน่วย ค่าขนส่ง (6)(100) = 600 บาท

ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 3 จำนวน 400 หน่วย ค่าขนส่ง(3)(400) = 1200 บาท

โรงงานเขตซี ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 1 จำนวน 300 หน่วย ค่าขนส่ง(12)(300) = 3600บาท

ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 2 จำนวน 100 หน่วย ค่าขนส่ง(10)(100) = 1000บาท

ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 5 จำนวน 100 หน่วย ค่าขนส่ง(11)(100) = 1100บาท

โรงงานเขตดี ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 2 จำนวน 200 หน่วย ค่าขนส่ง(5)(200) = 1000 บาท

ส่งสินค้าไปที่เขตการค้า 4 จำนวน 400 หน่วย ค่าขนส่ง(2)(400) = 800 บาท

ค่าใช้จ่ายในการขนส่งทั้งหมด เท่ากับ 10,900 บาท

จะเห็นว่าจำนวนสายขนส่งที่ได้เท่ากับ 8 สาย

คำอธิบาย ขั้นตอนในการหาคำตอบ

เริ่มต้นจากการหาค่าของอัตราค่าขนส่ง c_{ij} ที่น้อยที่สุด อยู่ที่ช่องใด เราจะกำหนดสายขนส่งที่ช่องนั้นเป็นอันดับแรก ขั้นตอนการหาคำตอบขั้นฐานชุดแรก มีดังต่อไปนี้

5	7	6	8	4	400
9	6	3	10	7	500
12	10	8	6	11	500
7	5	6	2 400	9	~~600~~ 200
300	400	400	400	500	

1. c_{44} = ค่าต่ำสุด c_{ij} = 2
2. ค่าต่ำสุด (600, 400) = 400
3. จะได้ว่า x_{44} = 400

   ขีดคอลัมน์ 4 ออก จำนวนสินค้าที่เหลือในแถว 4 เท่ากับ 200

5	7	6	4	400
9	6	3 (400)	7	~~500~~ 100
12	10	8	11	500
7	5	6	9	200
300	400	400	500	

1. c_{23} = ค่าต่ำสุด c_{ij} = 3
2. ค่าต่ำสุด (500,400) = 400
3. จะได้ว่า x_{23} = 400

ขีดคอลัมน์ 3 ออก จำนวนสินค้าที่เหลือในแถว 2 เท่ากับ 100

5	7	4 (400)	400
9	6	7	100
12	10	11	500
7	5	9	200
300	400	~~500~~ 100	

1. c_{15} ค่าต่ำสุด $= c_{ij}$ 4
2. ค่าต่ำสุด (400, 500) = 400
3. จะได้ว่า x_{15}= 400

ขีดแถว 1 ออก จำนวนสินค้าที่เหลือในคอลัมน์ 5 เท่ากับ 100

9	6	7	100
12	10	11	500
7	5 (200)	9	200
300	~~400~~ 200	100	

1. c_{42} = ค่าต่ำสุดc_{ij} = 5
2. ค่าต่ำสุด (200, 400) = 200
3. จะได้ว่า x_{42} = 200

ขีดแถว 4 ออก จำนวนสินค้าในคอลัมน์ 2 จะเหลือเท่ากับ 200

9	6 (100)	7	100
12	10	11	500
300	~~200~~ 100	100	

1. c_{22}= ค่าต่ำสุด c_{ij} = 6
2. ค่าต่ำสุด (100, 200) = 100
3. จะได้ว่า x_{22}= 100

ขีดแถว 2 ออก จำนวนสินค้าในคอลัมน์ 2 จะเหลือเท่ากับ 100

12 (300)	10 (100)	11 (100)	500
300	100	100	

เหลือแถว 3 เป็นแถวสุดท้าย ใส่ค่าตามที่ปรากฏในคอลัมน์ จะได้ว่า

x_{31} = 300, x_{32} = 100, x_{35} = 100

การหาคำตอบขั้นฐานชุดแรกโดยใช้ Vogel's Method

วิธีการนี้จัดได้ว่า เป็นวิธีการที่มีประสิทธิภาพวิธีหนึ่ง มีลำดับขั้นการหาคำตอบดังต่อไปนี้

1. หาค่าผลต่างระหว่างอัตราค่าขนส่งต่ำสุดในแถว i กับค่าต่ำสุดถัดไปในแถวเดียวกัน ทุก ๆ แถว และหาค่าผลต่างระหว่าง อัตราค่าขนส่งต่ำสุดในคอลัมน์ j กับค่าต่ำสุดถัดไปในคอลัมน์เดียวกัน ทุก ๆ คอลัมน์

2. เปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จาก (1) เลือกค่าสูงสุด ดูว่าอยู่ในแถวหรือคอลัมน์ใด จัดจำนวนขนส่งในแถวหรือคอลัมน์นั้น ตรงช่องที่มีอัตราค่าขนส่งต่ำสุด สมมติเราได้

$$c_{tk} = \text{ค่าต่ำสุด } c_{ij}$$

เป็นอัตราค่าขนส่งในแถวหรือคอลัมน์ที่มีค่าสูงสุดของผลต่างนั้น

3. หาค่าต่ำสุด (a_t, b_k)

ก) ถ้า $a_t < b_k$ แสดงว่า จำนวนสินค้าในช่องนี้ เท่ากับ a_t
ขีดแถว t ออก จำนวนสินค้าในคอลัมน์ k จะเท่ากับ $b_k - a_t$ กลับไปทำขั้นที่ 1 ใหม่

ข) ถ้า $a_t > b_k$ แสดงว่า จำนวนสินค้าในช่องนี้ เท่ากับ b_k
ขีดคอลัมน์ k ออก จำนวนสินค้าในแถว t จะเท่ากับ $a_t - b_k$ กลับไปทำขั้นที่ 1 ใหม่

ค) ถ้า $a_t = b_k$ เลือกตาม (ก) หรือ (ข) อย่างใดอย่างหนึ่ง ถือว่าที่เหลือยังมีจำนวนสินค้าอยู่ (0)

ทำซ้ำวิธีการเดิม จนกระทั่งเหลือแถวเดียวหรือคอลัมน์เดียว ใส่จำนวนในช่องที่เหลือตามจำนวนที่มีในคอลัมน์ หรือแถวที่ช่องนั้นอยู่ จำนวนคำตอบหรือสายขนส่งที่ได้ จะเท่ากับ $m + n - 1$

ให้เรามาพิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 3.18 จากปัญหาการขนส่งในตัวอย่างที่ 3.15 จงหาคำตอบขั้นฐานชุดแรก นั่นก็คือ จัดสายขนส่งชุดแรก ด้วยวิธีการ Vogel's Method

วิธีทำ

เขตการค้า / **โรงงาน**	1	2	3	4	5	**จำนวนที่ผลิตได้**	**ผลต่าง**
เขตเอ	$\boxed{5}$	$\boxed{7}$	$\boxed{6}$	$\boxed{8}$	$\boxed{4}$ 400	400	1 1 1
เขตบี	$\boxed{9}$	$\boxed{6}$ 100	$\boxed{3}$ 400	$\boxed{10}$	$\boxed{7}$	500	3 3 1
เขตซี	$\boxed{12}$ 300	$\boxed{10}$ 100	$\boxed{8}$	$\boxed{6}$	$\boxed{11}$ 100	500	2 2 1
เขตดี	$\boxed{7}$	$\boxed{5}$ 200	$\boxed{6}$	$\boxed{2}$ 400	$\boxed{9}$	600	3 1 2
จำนวนอุปสงค์	300	400	400	400	500		
ผลต่าง	2 2 3	1 1 4	3	4	3 2 4		

จะเห็นว่า คำตอบหรือสายขนส่งที่ได้ เป็นคำตอบชุดเดียวกันกับการหาคำตอบด้วยวิธีการ Short Cut

คำอธิบาย ขั้นตอนในการหาคำตอบ

ในแต่ละแถว หาค่าผลต่างระหว่าง ค่าต่ำสุด c_{ij} กับค่าต่ำสุดถัดไปในแถว i เดียวกัน ทุก ๆ i และในแต่ละคอลัมน์ หาค่าผลต่างระหว่าง ค่าต่ำสุด c_{ij} ในคอลัมน์ j กับค่าต่ำสุดถัดไปในคอลัมน์เดียวกัน ปรากฏผลดังต่อไปนี้

							ผลต่างในแถว
	5	7	6	**8**	4	400	5 − 4 = 1
	9	6	3	**10**	7	500	6 − 3 = 3
	12	10	8	**6**	11	500	8 − 6 = 2
	7	5	6	**2** 400	9	~~600~~ 200	5 − 2 = 3
	300	400	400	**400**	500		
ผลต่างในคอลัมน์	7 − 5 = 2	6 − 5 = 1	6 − 3 = 3	**6 − 2 = 4**	7 − 4 = 3		