พิจารณาผลต่างทั้งหมด จะเห็นว่า 4 มีค่ามากที่สุด และเป็นค่าในคอลัมน์ 4 ซึ่งมี

$$c_{44} = \text{ค่าต่ำสุด } (8,10,6,2) = 2$$

ด้วยเหตุที่ ค่าต่ำสุด (600, 400) = 400 เพราะฉะนั้น x_{44} = 400 ขีดคอลัมน์ 4 ออก แถวที่ 4 จะมีจำนวนเหลืออยู่ 600 – 400 = 200 ทำขั้นที่ 1 ใหม่

						ผลต่างในแถว
	5	7	6	4	400	5 – 4 = 1
	9	6	3 400	7	~~500~~ 100	6 – 3 = 3
	12	10	8	11	500	10 – 8 = 2
	7	5	6	9	200	6 – 5 = 1
	300	400	400	500		
ผลต่างในคอลัมน์	2	1	3	3		

ในตอนแรกเราขีดคอลัมน์ออก เพราะฉะนั้น ค่าต่ำสุด 2 ค่าติดกันในแถวใด ๆ จะเปลี่ยนไป จึงต้องหาผลต่างใหม่ แต่ในคอลัมน์ยังคงค่าเดิม เราจึงไม่ต้องหาผลต่างใหม่ เปรียบเทียบผลต่างที่ได้ จะเห็นว่า 3 เป็นค่าสูงสุดมีหลายกลุ่ม แต่เมื่อเปรียบเทียบค่าของ c_{ij} ที่ได้จากแต่ละกลุ่ม จะเห็นว่า

$$c_{23} = \text{ค่าต่ำสุด}\{\text{ค่าต่ำสุด } (6,3,8,6), \text{ ค่าต่ำสุด } (4,7,11,9), \text{ ค่าต่ำสุด } (9,6,3,7)\} = 3$$

ดังนั้น เราจะได้ x_{23} = ค่าต่ำสุด (500, 400) = 400 ขีดคอลัมน์ 3 ออก แถวที่ 2 จะมีเหลือ 100 กลับไปทำขั้นที่ 1 ใหม่ นั่นก็คือหาผลต่างในแถวใหม่ สำหรับผลต่างในคอลัมน์ยังคงเดิม ดังต่อไปนี้

					ผลต่างในแถว
	5	7	4 400	400	5 − 4 = 1
	9	6	7	100	7 − 6 = 1
	12	10	11	500	11 − 10 = 1
	7	5	9	200	7 − 5 = 2
	300	400	~~500~~ 100		
ผลต่างในคอลัมน์	2	1	3		

จะเห็นว่า ผลต่างที่มีค่ามากที่สุดคือ 3 เป็นค่าในคอลัมน์ 5 ซึ่งมี c_{15} = ค่าต่ำสุด (4,7,11,9) = 4 เราจึงได้ x_{15} = ค่าต่ำสุด (400, 500) = 400 ขีดแถว 1 ออก ในคอลัมน์ 5 ต้องการอีก 100 กลับไปทำข้อ 1 ในที่นี้เราขีดแถว ดังนั้น ผลต่างของค่าต่ำสุดในแต่ละแถวคงเดิม แต่ค่าต่ำสุดของคอลัมน์จะเปลี่ยนไป จึงต้องคำนวณผลต่างใหม่ ดังต่อไปนี้

					ผลต่างในแถว
	9	6	7	100	7 − 6 = 1
	12	10	11	500	11 − 10 = 1
	7	5 200	9	200	7 − 5 = 2
	300	~~400~~ 200	100		
ผลต่างในคอลัมน์	9 − 7 = 2	6 − 5 = 1	9 − 7 = 2		

ผลต่างที่มีค่ามากที่สุดคือ 2 เลือกช่องที่มีอัตราค่าขนส่งต่ำที่สุด ในที่นี้คือ 5 ดังนั้น x_{42} = ค่าต่ำสุดระหว่าง 200 กับ 400 สรุปได้ว่า x_{42} = 200 ขีดแถว 4 ออก ในคอลัมน์ 2 ยังต้องการอีก 200 ทำต่อไปดังนี้

					ผลต่างในแถว
	9	6 100	7	100	7 − 6 = 1
	12	10	11	500	11 − 10 = 1
	300	~~200~~ 100	100		
ผลต่างในคอลัมน์	12 − 9 = 3	10 − 6 = 4	11 − 7 = 4		

ในขั้นนี้เราจะได้ x_{22} = ค่าต่ำสุด (100, 200) = 100 ขีดแถว 2 ออก คอลัมน์ 2 ยังต้องการอีก 100 เมื่อถึงขั้นนี้ จะเห็นว่า เหลือแถว 3 เพียงแถวเดียว เราจึงใส่ตามค่าที่มีอยู่ในคอลัมน์ ดังนี้

12 300	10 100	11 100	500
300	100	100	

นอกเหนือจากวิธีการดังกล่าวมาแล้ว ยังมีวิธีการหาคำตอบขั้นฐานชุดแรก อื่น ๆ อีก เช่นวิธีการตรวจสอบ วิธีการประมาณของ Russel เป็นต้น นักศึกษาสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากหนังสืออ้างอิงท้ายเล่ม วิธีการหาคำตอบขั้นฐานแต่ละวิธี เหมาะสมสำหรับลักษณะของปัญหาหนึ่ง ๆ วิธีการ North – West Corner Rule ยึดหลักการหาคำตอบตามแนวเส้นทแยงมุม โดยมีจุดเริ่มต้นที่ช่องบนมุมซ้ายสุดของตารางขนส่ง และไม่คำนึงถึงค่าใช้จ่ายแต่อย่างใด วิธีนี้จึงเหมาะที่จะใช้ในกรณีที่ค่าที่เราต้องการเลือก เช่น ค่าใช้จ่ายต่ำ ๆ อยู่ในแนวเส้นทแยงมุมของตาราง และใช้ได้เสมอไม่ว่าจะมีเป้าหมาย ต้องการค่าสูงสุดหรือต้องการค่าต่ำสุด สำหรับวิธีการอื่น ๆ ยึดหลักค่าใช้จ่ายต่ำสุด เราจึงต้องพิจารณาดูว่า อัตราค่าขนส่ง c_{ij} ที่มีค่าต่ำ ๆ อยู่กระจัดกระจายอย่างไร ควรจะใช้วิธีใด จึงจะสามารถนำช่องที่มีค่า c_{ij} ต่ำ ๆ มาใช้ได้ กรณีที่ตัวเลือกปรากฏมากกว่า 1 เราเลือกโดยอิสระ แต่ทั่วไปก็ต้องคำนึงถึงค่าใช้จ่ายเป็นหลัก หากเป้าหมายต้องการค่าสูงสุด เกณฑ์การพิจารณาก็ต้องเปลี่ยนเป็นยึดช่องที่มีอัตราค่าต่อหน่วยสูง ๆ

คำตอบที่หาได้จากแต่ละวิธีการ เป็นเพียงคำตอบชุดแรก ซึ่งยังบอกไม่ได้ว่าเป็นคำตอบที่ดีที่สุดหรือไม่ จะต้องตรวจสอบว่ายังมีคำตอบชุดอื่นที่ดีกว่านี้หรือไม่ ถ้ามีก็ต้องปรับปรุงคำตอบใหม่ จนกว่าจะเชื่อได้แน่ว่าเป็นคำตอบที่ดีที่สุด

3.5.2 การตรวจสอบว่าคำตอบที่ได้เป็นสายขนส่งที่ดีที่สุดหรือไม่

เมื่อเราได้คำตอบชุดแรก จะด้วยวิธีการใดก็ตาม ปัญหาที่ตามมาก็คือ จะรู้ได้อย่างไรว่าคำตอบที่ได้เป็นสายขนส่งที่ดีที่สุดหรือไม่ การตรวจสอบคำตอบที่ได้ทำได้เช่นเดียวกับวิธีการซิมเพลกซ์ นั่นคือ ตรวจสอบอัตราการเปลี่ยนแปลงของค่าขนส่งของตัวแปรนอกฐาน หรือสายขนส่งที่ไม่ได้ใช้ ถ้าไม่มีอัตราลดลง แสดงว่า ค่าใช้จ่ายในการขนส่งทั้งหมดต่ำสุดแล้ว เราได้สายขนส่งที่ดีที่สุด แต่ถ้ามีอัตราค่าขนส่งของตัวแปรนอกฐานหรือสายขนส่งไม่ใช้ใดมีค่าลดลง เราต้องปรับปรุงคำตอบใหม่ วิธีการตรวจสอบที่จะกล่าวถึงในที่นี้คือ

1. วิธีการ Stepping Stone
2. วิธีการ u – v หรือ MODI (Modified Distribution)

การตรวจสอบคำตอบด้วยวิธีการ Stepping Stone

อาศัยหลักเกณฑ์ของ loop โดยตรง แต่ละ loop จะประกอบด้วย สายขนส่งที่ไม่ได้ใช้ 1 สาย เป็นจุดเริ่มต้น กับสายขนส่งที่ใช้แล้วอย่างน้อยที่สุด 3 สาย นั่นก็คือ หากมีเซตที่เรียงลำดับกัน ของสายที่ไม่ได้ใช้ (i, j) กับสายที่ใช้แล้ว (ℓ, j), (ℓ, k), (p, k),...,(i, q) ประกอบกันเป็น loop หนึ่ง เราจะได้

$$c_{ij} - s_{ij} = c_{ij} - c^B_{\ell j} + c^B_{\ell k} - c^B_{pk} + \ldots - c^B_{iq}$$

ถ้าผลสรุปว่า จะต้องเปลี่ยนสายขนส่งมาที่ (i, j) จำนวนที่สาย (i, j) จะรับได้มากที่สุดเท่ากับ

$$\text{ค่าต่ำสุด } (x^0_{\ell j}, x^0_{pk}, \ldots, x^0_{iq})$$

สมมติ ค่าต่ำสุดที่ได้คือ x^0_{pk} คำตอบชุดใหม่ จะได้จาก

$$x^B_{ij} = x^0_{pk}, x^B_{\ell j} = x^0_{\ell j} - x^0_{pk}, x^B_{\ell k} = x^0_{\ell k} + x^0_{pk}, x_{pk} = 0, \ldots, x^B_{iq} = x^0_{iq} - x^0_{pk}$$

คำตอบอื่น ๆ ที่ไม่ได้อยู่ใน loop นี้ จะมีค่าคงเดิม

ขั้นตอนในการใช้วิธีการ Stepping Stone มีดังต่อไปนี้

(1) ตรวจสอบสายขนส่งที่ใช้แล้ว ในตารางขนส่ง จะต้องมีจำนวน $m + n - 1$ สาย

(2) พิจารณาสายขนส่งที่ไม่ได้ใช้แต่ละสาย คำนวณอัตราค่าใช้จ่ายที่ลดลง $(c_{ij} - s_{ij})$ ของสาย (i, j) ที่ไม่ได้ใช้ เปรียบเทียบกับสายที่ใช้แล้ว ใน loop หนึ่ง ๆ นั่นก็คือ เริ่มต้นจากสาย (i, j) ที่ไม่ได้ใช้ เคลื่อนไปตาม loop สลับเครื่องหมาย + และ – ของอัตราค่าขนส่ง c_{ij} ใน loop การเคลื่อนที่ตาม loop จะตามแถวก่อน หรือตามคอลัมน์ก่อน ก็ได้

(3) ตรวจสอบผลที่ได้จาก (2)

3.1 ถ้าอัตราค่าใช้จ่ายที่ลดลงต่อหน่วยของสาย (i, j) ที่ไม่ได้ใช้ มีค่าเป็นบวกหมดทุก ๆ สาย แสดงว่า ได้คำตอบอุตมะแล้ว อ่านผลที่ได้จากตารางขนส่ง จะได้สายขนส่งที่ดีที่สุด

3.2 ถ้ามีอัตราค่าใช้จ่ายที่ลดลงต่อหน่วย ของบางสายที่ไม่ได้ใช้ มีค่าเป็นลบ ให้ทำต่อข้อ (4)

(4) หาค่าต่ำสุดของอัตราค่าใช้จ่ายที่ลดลงต่อหน่วย $c_{ij} - s_{ij}$ สมมติได้

$$c_{rk} - s_{rk} = \text{ค่าต่ำสุด } (c_{ij} - s_{ij}) = c_{rk} - c_{rt} + c_{pt} - c_{pq} + \ldots - c_{\ell k}$$

(5) หาค่าต่ำสุด $(x^0_{rt}, x^0_{pq}, \ldots, x^0_{\ell k}) = x^0_{pq}$

เมื่อ x^0_{ij} เป็นคำตอบของ x^B_{ij} สายขนส่งที่ใช้ (i, j)

(6) เขียนตารางต่อไป จากการปรับคำตอบใหม่ โดยให้ (r, k) เป็นสายขนส่งที่ใช้ แทนที่สายขนส่งเดิม (p, q) และเปลี่ยนคำตอบของสายขนส่งที่เกี่ยวข้องกับสาย (r, k) นี้ โดยยึดหลักว่า หากมีการบวกค่าคงที่ใด ให้กับช่องในตารางขนส่งแถวใด จะต้องเอาค่าคงที่นั้นลบออกจากช่องที่อยู่ในแถวเดียวกัน ขณะเดียวกันต้องพิจารณาคอลัมน์ควบคู่กันไปด้วย หากในช่องของคอลัมน์ใดมีค่าคงที่นี้บวกเข้าไป จะต้องลบค่าคงที่นี้ออกจากช่องในคอลัมน์เดียวกัน สรุปได้ว่าการเปลี่ยนแปลงใด ๆ จะต้องอยู่ภายใต้เกณฑ์สมมติ $\Sigma_j x_{ij} = a_i$ และ $\Sigma_i x_{ij} = b_j$ นั่นคือใช้หลักการบวกและการลบ x^0_{pq} สลับกันไปตาม loop โดยเริ่มต้นที่สาย (r, k) สำหรับสายขนส่งอื่น ๆ ที่ไม่อยู่ใน loop นี้ มีคำตอบคงเดิม กลับไปทำข้อ 1

ตัวอย่างที่ 3.19 จงพิจารณาสายขนส่งที่จัดไว้ตามตารางข้างล่างนี้ ว่าเป็นสายขนส่งที่ดีที่สุดหรือไม่ เพราะเหตุใด

โรงงาน \ ศูนย์การค้า	X	Y	Z	# ที่ผลิตได้
A	[12] 500	[15] 200	[18]	700
B	[13]	[20] 400	[16] 300	700
C	[17]	[14]	[13] 600	600
# ที่ต้องการ	500	600	900	

สายขนส่งที่ดีที่สุด ควรจะเป็นอย่างไร

วิธีทำ ก่อนอื่นเราตรวจดูจำนวนสายขนส่ง พบว่ามี 5 = 3+3−1 สาย จากนั้นจึงตรวจสอบคำตอบด้วยวิธี Stepping Stone ปรากฏผลดังนี้

โรงงาน \ ศูนย์การค้า	X	Y	Z	# ที่ผลิตได้
A	[12] 500	[15] 200	[18] 7	700
B	[13] - 4	[20] 400	[16] 300	700
C	[17] 3	[14] −3	[13] 600	600
# ที่ต้องการ	500	600	900	

คำตอบที่ได้ยังไม่เป็นคำตอบดีที่สุด เพราะเรายังลดค่าใช้จ่ายลงได้อีก ถ้าเลือก BX หรือ CY จากตารางจะเห็นว่า ถ้าให้โรงงาน B ส่งสินค้าไปที่ศูนย์การค้า X 1 หน่วย ค่าใช้จ่าย

จะลดลง 4 บาท และถ้าให้โรงงาน C ส่งสินค้าไปที่ศูนย์การค้า Y 1 หน่วย ค่าใช้จ่ายจะลดลง 3 บาท ดังนั้น เราเลือกเปลี่ยนคำตอบมาที่ BX ซึ่งจะได้ผลสรุปตามตารางต่อไปนี้

ศูนย์การค้า / โรงงาน	X	Y	Z	# ที่ผลิตได้
A	[12] 100	[15] 600	[18] 3	700
B	[13] 400	[20] 4	[16] 300	700
C	[17] 7	[14] 1	[13] 600	600
# ที่ต้องการ	500	600	900	

จากตารางนี้ จะเห็นว่า ไม่มีอัตราการลดลงของค่าขนส่งของสายที่ไม่ใช้สายใดเลย แสดงว่าได้สายขนส่งที่ดีที่สุดแล้ว นั่นคือ

โรงงาน A ส่งให้ X 100 หน่วย ค่าใช้จ่าย = 1200 บาท

ส่งให้ Y 600 หน่วย ค่าใช้จ่าย = 9000 บาท

โรงงาน B ส่งให้ X 400 หน่วย ค่าใช้จ่าย = 5200 บาท

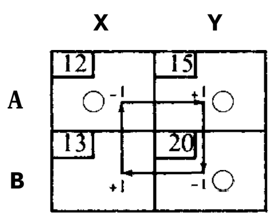
ส่งให้ Z 300 หน่วย ค่าใช้จ่าย = 4800 บาท

โรงงาน C ส่งให้ Z 600 หน่วย ค่าใช้จ่าย = 7800 บาท

ค่าใช้จ่ายในการขนส่งทั้งหมด = 28,000 บาท

คำอธิบาย การที่จะสรุปว่า คำตอบดีที่สุดหรือไม่ ต้องแสดงให้เห็นชัดด้วยการคำนวณอัตราการเปลี่ยนแปลงของค่าขนส่งสำหรับสายที่ไม่ใช้ พิจารณาตามสายที่เกี่ยวข้อง (loop) ดังนี้

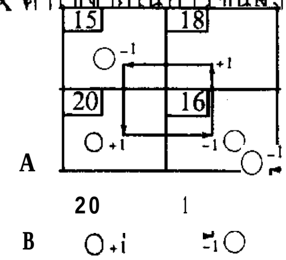
จากตารางแรก



BX เป็นสายที่ไม่ใช้ ส่วน AX, AY และ BY เป็นสายที่เลือกใช้ ซึ่งอยู่ใน loop เดียวกัน

ดังนั้น ถ้าให้ BX ส่งสินค้า 1 หน่วย AX จะต้องลดจำนวนลง 1 หน่วย เป็นผลให้ AY เพิ่มจำนวน 1 หน่วย และ BY ลดจำนวนลง 1 หน่วย การเพิ่มที่ BX 1 หน่วย จะทำให้ค่าใช้จ่ายเพิ่มขึ้น 13 บาท การลดลงของ AX 1 หน่วย จะทำให้ค่าใช้จ่ายลดลง 12 บาท การเพิ่มขึ้นของ AY 1 หน่วย จะทำให้ค่าใช้จ่ายเพิ่มขึ้น 15 บาท และการลดลงที่ BY 1 หน่วย จะทำให้ค่าใช้จ่ายลดลง 20 บาท สรุปว่า ค่าใช้จ่ายจะเปลี่ยนไป $= 13-12+15-20 = -4$

แสดงว่า ถ้าเราเลือกใช้ BX ค่าใช้จ่ายในการขนส่งจะลดลง 4 บาทต่อหน่วย

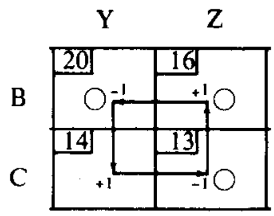


AZ เป็นสายที่ไม่ใช้ AY, BY และ BZ เป็นสายที่เลือกใช้ ซึ่งอยู่ใน loop เดียวกัน

ดังนั้น ถ้าให้ AZ ส่งสินค้า 1 หน่วย ต้องลดจำนวนสินค้าที่ AY 1 หน่วย เพิ่มจำนวนสินค้าที่ BY 1 หน่วย และลดจำนวนสินค้าที่ BZ 1 หน่วย เป็นผลให้ค่าใช้จ่ายเปลี่ยนไป

$$= 18-15+20-16 = 7$$

แสดงว่า ถ้าเราเลือกใช้ AZ ค่าใช้จ่ายในการขนส่งจะเพิ่มขึ้น 7 บาท/หน่วย เราจึงไม่เลือกใช้สายนี้



CY เป็นสายที่ไม่ใช้ ส่วน CZ, BZ และ BY เป็นสายที่เลือกใช้ ที่อยู่ใน loop เดียวกัน

ดังนั้น ถ้าให้ CY ส่งสินค้า 1 หน่วย จะต้องลดจำนวนที่ CZ 1 หน่วย เพิ่มจำนวนที่ BZ 1 หน่วย และลดจำนวนที่ BY 1 หน่วย เป็นผลให้ค่าใช้จ่ายเปลี่ยนไป

$$= 14-13+16-20 = -3$$

แสดงว่า ถ้าเราเลือกใช้ CY ค่าใช้จ่ายในการขนส่งจะลดลง 3 บาท/หน่วย

	X	Y	Z
A	12 −1	15 +1	18
B	13	20 −1	16 +1
C	17 +1	14	13 −1

CX เป็นสายที่ไม่ใช้ ส่วน AX, AY, BY, BZ และ CZ เป็นสายที่เลือกใช้ ที่อยู่ใน loop เดียวกัน ดังนั้น ถ้าให้ CX ส่งสินค้าเพิ่มขึ้น 1 หน่วย จะต้องลดจำนวนที่ AX 1 หน่วย เพิ่มจำนวนที่ AY 1 หน่วย ลดที่ BY 1 หน่วย เพิ่มให้ BZ 1 หน่วย และลดที่ CZ 1 หน่วย เป็นผลให้ค่าใช้จ่ายเปลี่ยนไป $= 17 - 12 + 15 - 20 + 16 - 13 = 3$

แสดงว่า ถ้าเราเลือกใช้ CX ค่าใช้จ่ายในการขนส่งจะเพิ่มขึ้น 3 บาท/หน่วย เราจึงไม่เลือกใช้สายนี้

จะเห็นว่า ค่าใช้จ่ายยังลดลงได้อีก ถ้าเราเลือก BX หรือ CY แต่ BX ให้อัตราการลดลงของค่าใช้จ่ายต่อหน่วยมากกว่า เราจึงเลือก BX ขั้นต่อไปก็ต้องพิจารณาว่า B จะส่งให้ X ได้มากที่สุดเท่าใด การหาจำนวนมากที่สุดก็ต้องพิจารณาสายที่เกี่ยวข้องกับ BX ดูว่าการเพิ่มขึ้นของ BX จะทำให้สายใดลดลง จำนวนมากที่สุดของ BX จะเป็นจำนวนที่พอดี ให้สายที่ถูกลดลงสายหนึ่งเป็น 0 ดังนั้น ถ้าพิจารณาตาม loop ของ BX จะเห็นว่าจำนวนมากที่สุดของ BX จะเท่ากับค่าต่ำสุด (500, 400) = 400

	X	Y
A	500 −400	200 +400 400
B	+ 400	-400

สรุปว่า ให้ BX = **400** หน่วย

AX = 500 − 400 = **100**

AY = 200 + 400 = **600**

BY = **400-400** = **0**

ผลสรุปทั้งหมด แสดงไว้ในตารางที่ 2

จากตารางที่ 2 เรายังสรุปไม่ได้เช่นกันว่า ดีที่สุดหรือไม่ ต้องคำนวณอัตราการเปลี่ยนแปลงของค่าใช้จ่ายต่อหน่วยของสายที่ไม่ใช้ทุกสาย คือ AZ, BY, CX และ CY ก่อน ตามวิธีการเช่นเดียวกับที่กล่าวมาแล้ว ซึ่งได้ผลสรุป ดังนี้

	X	Y	Z
A	12 ○	15 ○	18 $18-16+13-12 = 3$
B	13 ○	20 $20-13+12-15 = 4$	16 ○
C	17 $17-13+16-13 = 7$	14 $14-13+16-13+12-15 = 1$	13 I ○

จะเห็นว่า ไม่มีสายขนส่งไม่ใช้สายใดที่จะทำให้ค่าใช้จ่ายลดลงได้อีก กรณีเช่นนี้ เราสรุปได้ว่า เป็นตารางที่ให้คำตอบที่ดีที่สุด อ่านผลจากตาราง ซึ่งก็คือ สายขนส่งที่ดีที่สุด

กรณีที่นักศึกษาคำนวณค่าใช้จ่ายในการขนส่งจากตารางแรก นั่นคือ ค่าใช้จ่ายทั้งหมด

$$= 12 \times 500 + 15 \times 200 + 20 \times 400 + 16 \times 300 + 13 \times 60 = 29{,}600 \text{ บาท}$$

เมื่อเปลี่ยนมาใช้ BX จะพบว่า ค่าใช้จ่ายลดลง 4 บาทต่อหน่วย และจำนวนที่ B ส่งให้ X มากที่สุด 400 หน่วย แสดงว่า การใช้ BX จะทำให้ค่าใช้จ่ายในการขนส่งลดลงอีก $= 4 \times 400 = 1{,}600$ บาท

กรณีนี้ เราจะคำนวณค่าใช้จ่ายทั้งหมดของการจัดส่งตามตารางที่ 2 ได้เท่ากับ $29{,}600 - 1{,}600 = 28{,}000$ บาท

การตรวจสอบคำตอบด้วยวิธีการ u – v หรือ MODI

Dantzig ได้เสนอวิธีการคำนวณอัตราการเปลี่ยนแปลงของค่าใช้จ่ายต่อหน่วย $(c_{ij} - s_{ij})$ ซึ่งง่ายกว่าวิธีการ Stepping Stone โดยอาศัยหลักการของปัญหาคู่ จากปัญหาเดิมที่มีตัวแบบ (3.8), (3.12) และ (3.13) จะได้ปัญหาคู่มีตัวแบบ

$$\text{ค่าสูงสุด } Z' = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$$

$$\text{โดยมีข้อจำกัด } u_i + v_j \leqslant c_{ij},\ i = 1,2,\ldots,m,\ j = 1,2,\ldots,n$$

ไม่จำกัดเครื่องหมายของ u_i และ v_j

ในเมื่อ u_i และ v_j เป็นตัวแปรตัดสินใจของปัญหาคู่

ถ้า (k, t) เป็นสายขนส่งที่เราเลือกใช้ นั่นคือ $x_{kt} > 0$ อาศัยทฤษฎีและคุณสมบัติของปัญหาคู่ เราจะได้

$$u_k + v_t = c_{kt}$$

การตรวจสอบว่า สายขนส่งที่ได้จะดีที่สุดหรือไม่ ก็ต้องพิจารณาจากอัตราค่าใช้จ่ายที่เปลี่ยนแปลงไปต่อหน่วยของสาย (i, j) ทุกสายที่ไม่ได้ใช้ นั่นคือ หาค่าของ $c_{ij} - s_{ij}$ ซึ่งในที่นี้ต้องคำนวณจากค่า u_i และ v_j ปัญหาจึงอยู่ที่ว่า เราจะหา $c_{ij} - s_{ij}$ จากค่าของ u_i และ v_j ได้อย่างไร ดังที่ได้กล่าวมาแล้วว่า การคำนวณค่าของ $c_{ij} - s_{ij}$ จะต้องคำนวณตาม loop ของมัน โดยเริ่มต้นจากช่องที่มี nonbasic variable x_{ij} เคลื่อนที่ไปตามช่องที่มี basic variable x_{ij} นั่นก็คือ บวกและลบค่าของ c_{ij} สลับกันไป จากสายที่ไม่ได้ใช้ 1 สาย ไปตามสายที่ใช้แล้ว อย่างน้อยที่สุด 3 สาย ที่ประกอบกันเป็น loop เดียวกัน สมมติว่า เราจะพิจารณาค่าของ $c_{ij} - s_{ij}$ ของ nonbasic variable-x_{ij} โดยที่ x_{ij} นี้อยู่ใน loop เดียวกันกับ basic variables x^B_{ir}, $x^B_{qr}, \ldots, x^B_{ws}$, x^B_{wj} เพราะฉะนั้น

$$c_{ij} - s_{ij} = c_{ij} - c^B_{ir} + c^B_{qr} - \ldots + c^B_{ws} - c^B_{wj}$$

อาศัยผลที่ได้จากสมการของสายขนส่งที่ใช้ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} c_{ij} - s_{ij} &= c_{ij} - (u_i + v_r) + (u_q + v_r) - \ldots + (u_w + v_s) - (u_w + v_j) \\ &= c_{ij} - u_i - v_j \end{aligned}$$

จึงกล่าวได้ว่า หาก

$$c_{ij} - s_{ij} = c_{ij} - \quad - v_j \geqslant 0$$

ทุก ๆ i และ j

แสดงว่า เราได้คำตอบที่ดีที่สุดแล้ว ผลที่อ่านได้จากตารางจะเป็น สายขนส่งที่ดีที่สุด แต่ถ้ามี

$$c_{ij} - s_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j < 0$$

แสดงว่า เราต้องปรับคำตอบเสียใหม่

เราสรุปขั้นตอนของการตรวจสอบคำตอบที่ดีที่สุด โดยวิธีการ MODI หรือ $u - v$ method ได้ดังต่อไปนี้

1. ตรวจสอบสายขนส่งที่ใช้แล้ว จะต้องมี $m + n - 1$ สาย

2. เขียนสมการ $u_i + v_j = c_{ij}$ ทุก ๆ ช่อง (i, j) ที่มีการขนส่ง

3. จากระบบของสมการในข้อ (2) กำหนดค่าของ u_i หรือ v_j ตัวใดตัวหนึ่งเพียงตัวเดียวให้มีค่าคงที่ โดยทั่ว ๆ ไปนิยมให้เท่ากับ 0 แล้วคำนวณค่าของ u_i, v_j ที่เหลือ ในที่นี้ค่าของ u_i หรือ v_i อาจจะเป็นบวกหรือลบก็ได้

4. อาศัยค่าของ u_i และ v_j ทุกค่าที่คำนวณได้จาก (3) แทนค่าที่ได้นี้ใน $c_{ij} - u_i - v_j$ ทุกช่อง (i, j) ที่ไม่มีการขนส่ง

5. เปรียบเทียบค่าของ $c_{ij} - u_i - v_j$ ที่ได้จาก (4)

5.1 หากทุกค่าของ $c_{ij} - u_i - v_j \geqslant 0$ แสดงว่าได้คำตอบที่ดีที่สุดแล้ว

5.2 หากมีบางค่าของ $c_{ij} - u_i - v_j < 0$ ให้ทำต่อข้อ (6)

6. หาค่าต่ำสุดของ $(c_{ij} - u_i - v_j)$ สมมติได้

$$c_{qs} - u_q - v_s \;=\; \underset{i,\, j}{\text{ค่าต่ำสุด}}\; (c_{ij} - u_i - v_j)$$

7. สมมติว่าช่อง (q, s) อยู่ใน loop เดียวกันกับช่องที่มีการขนส่ง (q, t), (p, t),...,(w, s) หาค่าต่ำสุดของ $x^0_{qt},\ldots,x^0_{ws}$ สมมติได้

$$x^0_{qt} \;=\; \text{ค่าต่ำสุด}\; (x^0_{qt},\ldots,x^0_{ws})$$

8. เอาค่า x^0_{qt} ไปบวกและลบกับค่าที่อยู่ในช่องซึ่งอยู่ใน loop ดังกล่าว สลับกันไป โดยเริ่มต้นด้วยการบวกที่ช่อง (q, s) สำหรับคำตอบอื่น ๆ ที่ไม่ได้อยู่ใน loop นี้ จะมีค่าคงเดิม เขียนตารางใหม่กลับไปทำข้อ (1)

ตัวอย่างที่ 3.20 จงตรวจสอบสายขนส่งในตัวอย่างที่ 3.19 ด้วยวิธีการ u – v และหาสายขนส่งที่ดีที่สุด

วิธีทำ จากสายขนส่งที่จัดไว้ในตัวอย่างที่ 3.19 มีสายที่เลือกใช้คือ AX, AY, BY, BZ และ CZ ดังนั้น ถ้าเรากำหนด u_1, u_2, u_3 เป็นตัวแปรที่มาจากโรงงาน A, B, C ตามลำดับ และ v_1, v_2, v_3 เป็นตัวแปรจากศูนย์การค้า X, Y, Z ตามลำดับ เราจะได้

$$u_1 + v_1 = 12 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$u_1 + v_2 = 15 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$u_2 + v_2 = 20 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$u_2 + v_3 = 16 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$$u_3 + v_3 = 13 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

ให้ $u_1 = 0$ จะได้ $v_1 = 12$ และ $v_2 = 15$ เป็นผลให้ $u_2 = 20 - 15 = 5$

เมื่อ $u_2 = 5$ จะได้ $v_3 = 16 - 5 = 11$ เป็นผลให้ $u_3 = 13 - 11 = 2$

เราคำนวณค่า $c_{ij} - u_i - v_j$ ของสายที่ไม่ใช้ต่อไป คือ

AZ : $c_{13} - u_1 - v_3 = 18 - 0 - 11 = 7$

BX : $c_{21} - u_2 - v_1 = 13 - 5 - 12 = -4$

CX : $c_{31} - u_3 - v_1 = 17 - 2 - 12 = 3$

CY : $c_{32} - u_3 - v_2 = 14 - 2 - 15 = -3$

มีอัตราค่าใช้จ่ายลดลง ถ้าเลือก BX หรือ CY เราเลือก BX เพราะให้ค่าใช้จ่ายลดลงต่อหน่วยมากกว่า

เราปรับตารางใหม่ โดยเลือก BX เป็นสายขนส่งใหม่ แทนที่ BY จะได้ผลสรุปเช่นเดียวกับตารางที่ 2 ในตัวอย่าง 3.19

ตรวจสอบคำตอบจากตารางนี้ต่อไป เขียนสมการ $u_i + v_j = c_{ij}$ ของสาย (i, j) ที่ใช้

จะได้สมการ (1), (2), (4) และ (5) คงเดิม ส่วนสมการ (3) จะเปลี่ยนเป็น

$$u_2 + v_1 = 13 \qquad \text{..........(3)}'$$

ดังนั้น เมื่อเราให้ $u_1 = 0$ เราจะได้ $v_1 = 12$ และ $v_2 = 15$

เมื่อ $v_1 = 12$ จะได้ $u_2 = 13 - 12 = 1$ เป็นผลให้ $v_3 = 16 - 1 = 15$ และ $u_3 = 13 - 15 = -2$

แทนค่าที่ได้เหล่านี้ในสายที่ไม่มีการขนส่ง AZ, BY, CX และ CY จะได้ค่าตามลำดับ ดังนี้

$$c_{13} - u_1 - v_3 = 18 - 0 - 15 = 3$$

$$c_{22} - u_2 - v_2 = 20 - 1 - 15 = 4$$

$$c_{31} - u_3 - v_1 = 17 - (-2) - 12 = 7$$

$$c_{32} - u_3 - v_2 = 14 - (-2) - 15 = 1$$

จะเห็นว่า มีอัตราค่าใช้จ่ายเพิ่มขึ้นทุกสาย แสดงว่า ตารางที่ 2 เป็นตารางที่ให้คำตอบดีที่สุดแล้ว

หมายเหตุ

ในการคำนวณ เราจะแสดงค่าด้วยตาราง ดังนี้

ตาราง 1

i \ j	X	Y	Z	a_i	u_i
A	12 500	15 200	18 18 − 0 − 11 = 7	700	0
B	13 13 − 5 − 12 = −4	20 400	16 300	700	20-15 = 5
C	17 17 − 2 − 12 = 3	14 14 − 2 − 15 = −3	13 600	600	13 − 11 = 2
b_j	500	600	900		
v_j	12	15	16-5 = 11		

ตาราง 2

(BX = 400, AX = 500 − 400, AY = 200 + 400, BY = 400 − 400)

i \ j	X	Y	Z	a_i	u_i
A	12 100	15 600	18 18 − 0 − 15 = 3	700	0
B	13 400	20 20 − 1 − 15 = 4	16 300	700	13-12 = 1
C	17 17 + 2 − 12 = 7	14 14 + 2 − 15 = 1	13 600	600	13 − 15 = −2
b_j	500	600	900		
v_j	12	15	16 − 1 = 15		

จะเป็นตารางสุดท้าย อ่านผลจากตาราง ซึ่งจะให้คำตอบเช่นเดียวกับตัวอย่างที่ 3.19

3.5.3 ปัญหาการขนส่งที่ต้องการค่าสูงสุด

เมื่อเป้าหมายของฟังก์ชันเปลี่ยนเป็น ต้องการหาค่ามากที่สุด ภายใต้ข้อจำกัดเดิม การหาคำตอบและการตรวจสอบว่าเป็นคำตอบอุตมะ ยังคงใช้หลักเกณฑ์ในทำนองเดียวกัน แต่มีทิศทางตรงกันข้าม เป็นที่ทราบกันอยู่แล้วว่า เราอาจจะเปลี่ยนฟังก์ชันเป้าหมายจากที่ต้องการค่าสูงสุดให้กลายเป็น ต้องการหาค่าต่ำสุดได้ โดยการคูณฟังก์ชันนั้นด้วย −1 นั่นก็คือ

เปลี่ยนจาก หาค่าสูงสุดของ $Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$

กลายเป็น หาค่าต่ำสุดของ $(-Z) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (-c_{ij})x_{ij}$

ตามหลักเกณฑ์ที่เราใช้ในการหาคำตอบชุดแรก (ยกเว้นวิธีการ North – West corner rule) *ของปัญหาที่ต้องการค่าต่ำสุด เรายึดหลักของการเลือกสายขนส่งจากช่องที่มี อัตราค่าขนส่ง*ต่อหน่วย ต่ำ ๆ ในที่นี้ก็คือการเลือกช่องที่มีค่า $(-c_{ij})$ นั่นเอง ซึ่งก็เท่ากับว่า การเลือกสายขนส่งใช้แล้ว ของปัญหาที่ต้องการค่าสูงสุด ยึดหลักการเลือกช่องที่มี c_{ij} ค่าสูง ๆ และเช่นเดียวกันในการตรวจสอบว่าเป็นคำตอบอุตมะ เดิมเราตรวจดูว่า อัตราค่าใช้จ่ายที่ลดลงต่อหน่วย ในที่นี้คือ $-(c_{ij} - s_{ij})$ ของสายที่ไม่ได้ใช้ว่ายังมีค่าใดเป็นลบหรือไม่ หากเราได้

$$-(c_{ij} - s_{ij}) \geqslant 0$$

หมดทุกสายที่ไม่ได้ใช้ ก็แสดงว่าเราได้คำตอบอุตมะแล้ว

ซึ่งก็มีความหมายว่า กรณีของปัญหาที่ต้องการค่าสูงสุด เราจะสรุปว่า เป็นคำตอบอุตมะ ถ้าเรามี

$$c_{ij} - s_{ij} \leqslant 0$$

หมดทุกสายที่ไม่ได้ใช้ นั่นเอง

เราสรุปขั้นตอนการหาคำตอบที่ดีที่สุด ได้ดังนี้

3.5.3.1 การหาคำตอบชุดแรก

วิธีการ North – West Corner Rule ด้วยเหตุที่การหาคำตอบตามวิธีการ North – West Corner Rule เป็นการเลือกสายที่ใช้แล้ว ตามแนวเส้นทแยงมุมของตารางขนส่ง โดยไม่สนใจว่าจะมีค่าของ c_{ij} สูงหรือต่ำ ดังนั้น การหาคำตอบด้วยวิธีการนี้ เราจะได้คำตอบแบบเดียวกับกรณีของการหาค่าต่ำสุด นั่นก็คือ วิธีการหาคำตอบไม่เปลี่ยนแปลง ไม่ว่าจะเป็นการหาค่าต่ำสุดหรือการหาค่าสูงสุด ก็ตาม

วิธีการ Row Maxima มีขั้นตอนการหาคำตอบ ดังต่อไปนี้

1. หาค่าสูงสุดของ c_{ij} ที่อยู่ในแถวแรกของตาราง สมมติได้

$$c_{1p} = \text{ค่าสูงสุด } c_{1j}$$

2. หาค่าต่ำสุดของ (a_1, b_p)

3. *ก.* ถ้า $a_1 < b_p$ จะได้ว่า $x_{1p} = a_1$ *เอาค่า* a_1 *ลบออกจาก* b_p

ขีดแถว 1 ออก กลับไปทำขั้นที่ 1 ใหม่ โดยถือว่าแถวถัดไปเป็นแถวแรกของตาราง

ข. ถ้า $a_1 > b_p$ จะได้ว่า $x_{1p} = b_p$ เอาค่า b_p ลบออกจาก a_1
ขีดคอลัมน์ p ออก กลับไปทำขั้นที่ 1

ค. ถ้า $a_1 = b_p$ ขีดแถวหรือคอลัมน์อย่างใดอย่างหนึ่ง นั่นก็คือ ปฏิบัติตามข้อ ก หรือข้อ ข ก็ได้ แต่จำนวนที่เหลือ 0 ในแถวหรือคอลัมน์ที่ไม่ได้ขีดออก ถือว่ายังมีค่าอยู่ซึ่งเราจะได้คำตอบของตัวแปรฐานตัวถัดไป ที่จะทำหน้าที่เป็นตัวแปรฐานหุ่น เรียกสายขนส่งนี้ สายขนส่งหุ่น

ทำซ้ำตามวิธีการเดิมจนหมดทุกแถว ท้ายที่สุดเราจะได้สายขนส่ง $m+n-1$ สาย

ถ้าเราใช้วิธีการ Column Maxima จะมีวิธีการแบบเดียวกัน เพียงแต่ทำทีละคอลัมน์ โดยเริ่มต้นจากคอลัมน์ที่ 1 ตรงช่องที่มีค่า c_{i1} สูงสุด เมื่อไรที่ได้ผลรวมของคำตอบในคอลัมน์นั้นเท่ากับจำนวนที่ต้องการ จึงจะทำคอลัมน์ถัดไป โดยพิจารณาจากแถวที่ยังมีค่าอยู่ ทำเช่นนี้จนหมดทุกคอลัมน์

วิธีการ Matrix Maxima

1. พิจารณาค่า c_{ij} ในตาราง หาค่าสูงสุด สมมติได้

$$c_{pq} = \underset{i,\,j}{\text{ค่าสูงสุด}}\; c_{ij}$$

2. หาค่าต่ำสุดของ (a_p, b_q)

3. ก. ถ้า $a_p < b_q$ จะได้ว่า $x_{pq} = a_p$ เอาค่า a_p ลบออกจาก b_q ขีดแถวที่ p ออก

ข. ถ้า $a_p > b_q$ จะได้ว่า $x_{pq} = b_p$ เอาค่า b_q ลบออกจาก a_p ขีดคอลัมน์ q ออก

ค. ถ้า $a_p = b_q$ เลือกทำตามแบบ ก หรือแบบ ข ก็ได้อย่างใดอย่างหนึ่ง และถือว่า แถวหรือคอลัมน์ที่ไม่ได้ขีดออก ยังมีจำนวนเหลืออยู่ที่จะหาคำตอบได้ ซึ่งก็คือ 0

กลับไปทำข้อ 1

ทำซ้ำวิธีการเดิม จนกระทั่งเหลือเพียงแถวเดียวหรือคอลัมน์เดียว ใส่คำตอบในช่องนั้นตามค่าที่เหลืออยู่ จำนวนสายขนส่งที่ได้ทั้งหมด จะเท่ากับ $m+n-1$ สาย

วิธีการ Vogel

1. หาค่าผลต่างระหว่างค่า c_{ij} สูงสุด กับค่าถัดไปที่อยู่ในแถวเดียวกัน ทุก ๆ แถว และหาค่าผลต่างระหว่างค่า c_{ij} สูงสุด กับค่าถัดไปที่อยู่ในคอลัมน์เดียวกัน ทุก ๆ คอลัมน์

2. เปรียบเทียบผลต่างทุกค่าที่ได้จาก (1) เลือกค่ามากที่สุด ดูว่าค่านี้เป็นผลต่างของแถวใดหรือของคอลัมน์ใด ให้หาค่า c_{ij} สูงสุดที่อยู่ในแถวหรือในคอลัมน์ดังกล่าวนั้น สมมติเราได้ $c_{\ell k}$ เป็นค่าสูงสุดที่ว่านั้น

3. หาค่าต่ำสุดของ (a_ℓ, b_k)

4. ก. ถ้า $a_\ell < b_k$ จะได้ว่า $x_{\ell k} = a\ell$ เอาค่า a_ℓ ลบออกจาก b_k ขีดแถว 1 ออก

ข. ถ้า $a_\ell > b_k$ จะได้ว่า $x_{\ell k} = b_k$ เอาค่า b_k ลบออกจาก a_ℓ ขีดคอลัมน์ k ออก

ค. ถ้า $a_\ell = b_k$ ทำตามแบบ ก หรือแบบ ข ก็ได้ อย่างใดอย่างหนึ่ง และถือว่าแถวหรือคอลัมน์ที่เหลือยังมีจำนวนเหลืออยู่ที่จะหาคำตอบต่อไป

กลับไปทำข้อ 1

ทำซ้ำวิธีการเช่นนี้ จนกระทั่งเหลือเพียงแถวเดียวหรือคอลัมน์เดียว ใส่จำนวนตามช่องที่เหลือนั้น จำนวนคำตอบหรือสายขนส่งที่ได้ จะเท่ากับ $m + n - 1$ สาย

3.5.3.2 ตรวจสอบคำตอบเพื่อพิจารณาว่า ควรจะปรับคำตอบใหม่ หรือไม่

1. ตรวจสอบจำนวนสาย จะต้องเท่ากับ $m + n - 1$ สาย

2. คำนวณค่าของ $c_{ij} - s_{ij}$ ของสายที่ไม่ได้ใช้ จะใช้วิธีการ Stepping Stone หรือ u – v method ก็ได้

3. ถ้าค่าที่คำนวณได้จาก 2 เป็นลบหมดทุกค่า แสดงว่าคำตอบที่ได้เป็นคำตอบอุตมะ อ่านผลที่ได้จากตารางจะได้สายขนส่งที่ดีที่สุด

4. ถ้ามีค่าที่คำนวณได้จาก 2 บางค่าเป็นบวก เลือกค่าบวกที่มากที่สุด สมมติได้

$$c_{rk} - s_{rk} = \underset{i,\,j}{\text{ค่าสูงสุด}} \, (c_{ij} - s_{ij})$$

เปลี่ยนสายขนส่งจากสายที่ใช้แล้ว ที่เกี่ยวข้องกับสาย (r, k) นั่นก็คืออยู่ใน loop กับ (r, k) มาเป็นสาย (r, k) ให้มีจำนวนมากที่สุด โดยยึดหลักที่ว่า ผลรวมของคำตอบในแถวใดจะต้องเท่ากับจำนวนที่มีอยู่ในแถวนั้น และขณะเดียวกันจะต้องได้ผลรวมของคำตอบในคอลัมน์ใดจะต้องเท่ากับจำนวนที่คอลัมน์นั้นต้องการ กลับไปทำข้อ 1 ใหม่

ตัวอย่างที่ 3.21 บริษัท เอพีต้องการส่งสินค้าที่ผลิตจากโรงงาน 4 แห่งของบริษัท ไปให้ลูกค้าที่อยู่ในเขตต่าง ๆ 4 เขต ให้ได้กำไรมากที่สุด แต่ให้ลูกค้าในแต่ละเขตได้รับสินค้าครบตามจำนวนที่ต้องการ จำนวนสินค้าที่โรงงานผลิตได้ จำนวนสินค้าที่ลูกค้าต้องการ และผลกำไรที่ได้จากการจำหน่าย ในอัตราบาทต่อหน่วย กำหนดในตารางดังนี้

ลูกค้า	ก	ข	ค	ง	จำนวนที่ผลิตได้
โรงงาน : 1	16	15	17	20	240
2	12	23	22	19	180
3	18	22	14	12	150
4	21	15	16	18	230
จำนวนที่ต้องการ	200	175	175	250	

จงเขียนตารางที่ 1 ด้วยวิธี

fl) Row Maxima

ข) Short Cut

ค) Vogel

สรุปผลที่ได้จากแต่ละตาราง

จงหาว่า แผนการจัดส่งที่ดีที่สุด ควรจะเป็นอย่างไร

วิธีทำ

ก)

j / i	ก	ข	ค	ง	a_i
1	[16] −7	[15] −4	[17] −1	[20] 240	240
2	[12] −15	[23] 175 −	[22] 5 +	[19] −5	180
3	[18] 150	[22] +8	[14] +1	[12] −3	150
4	[21] 50 +	[15] −2	[16] − 170	[18] 10	230
b_j	200	175	175	250	

กำไรรวม = 15,585 บาท

คำตอบที่ได้จากตาราง ยังไม่เป็นคำตอบที่ดีที่สุด จะเห็นว่า ถ้าเราเลือกสาย 3ข จะมีกำไรเพิ่มขึ้นอีก 8 บาทต่อหน่วย จำนวนที่ส่งได้มากที่สุดของสายนี้เท่ากับ 150 หน่วย เป็นผลให้ได้กำไรเพิ่มขึ้นอีก $8 \times 150 = 1{,}200$ บาท

ถ้าจำนวนที่ 3ข เป็น 150 หน่วย จะไม่มีการจัดส่งที่สาย 3ก แต่ 4ก จะเพิ่มเป็น 200 4ค ลดลงเหลือ 20 2ค เพิ่มขึ้นเป็น 155 2ง ลดลงเหลือ 25 นอกนั้นคงเดิม กำไรรวม = 16,785 บาท จะได้ผลสรุปตามตารางสุดท้าย

ข)

i \ j	ก	ข	ค	ง	a_i
1	16 -7	15 -4	17 -1	20 240	240
2	12 -15	23 175 −	22 + 5	19 −5	180
3	18 −1	22 +7 +	14 − 150	12 −4	150
4	21 200	15 −2	16 20	18 10	230
b_j	200	175	175	250	

กำไรรวม = 15,735 บาท

คำตอบที่ได้จากตารางนี้ ยังไม่เป็นคำตอบที่ดีที่สุด จะเห็นว่า ถ้าเราเลือกสาย 3ข จะมีกำไรเพิ่มขึ้นอีก 7 บาทต่อหน่วย จำนวนที่จะส่งได้มากที่สุด 150 หน่วย จะได้กำไรเพิ่มขึ้นอีก 7×150 = 1,050 บาท

ผลสรุปที่ได้แสดงในตารางสุดท้าย

ค)

i \ j	ก	ข	ค	ง	a_i	ผลต่าง
1	16 −7	15 −2	17 1	20 240	240	3 4 5
2	12 −17	23 5 +	22 175 −	19 −7	180	1 4
3	18 −10	22 150	14 −7	12 −13	150	4 4
4	21 200	15 20 −	16 +2 +	18 10	230	3 3 3
b_j	200	175	175	250		
ผลต่าง	3 3 5	1 7 0	5	1 2 2		

กำไรรวม = **16,745** บาท

คำตอบที่ได้จากตารางนี้ ยังไม่ดีที่สุด จะเห็นว่า ถ้าเราเลือกสาย 4ค จะมีกำไรเพิ่มขึ้นอีก 2 บาทต่อหน่วย จำนวนที่ส่งได้มากที่สุดของสายนี้ = 20 หน่วย ซึ่งจะทำให้ได้กำไรเพิ่มขึ้นอีก 2×20 = 40 บาท รวมเป็น 16,785 บาท

ผลสรุปที่ได้ทั้งหมด ปรากฏในตารางสุดท้าย

i \ j	ก	ข	ค	ง	a_i
1	$\boxed{16}$ −7	$\boxed{15}$ −4	$\boxed{17}$ −1	$\boxed{20}$ 240	240
2	$\boxed{12}$ −15	$\boxed{23}$ 25	$\boxed{22}$ 155	$\boxed{19}$ −5	180
3	$\boxed{18}$ −8	$\boxed{22}$ 150	$\boxed{14}$ −7	$\boxed{12}$ −11	150
4	$\boxed{21}$ 200	$\boxed{15}$ −2	$\boxed{16}$ 20	$\boxed{18}$ 10	230
b_j	**200**	**175**	**175**	**250**	

กำไรรวม = 16,785 บาท

จากตารางสุดท้าย จะเห็นว่า ไม่มีอัตรากำไรเพิ่มขึ้นต่อหน่วย แสดงว่าเป็นตารางที่ให้คำตอบดีที่สุดแล้ว

แผนการจัดส่งที่ดีที่สุด ก็คือ

โรงงานที่ 1 ส่งสินค้าให้ลูกค้า ง 240 หน่วย

โรงงานที่ 2 ส่งสินค้าให้ลูกค้า ข 25 หน่วย

ให้ลูกค้า ค 155 หน่วย

โรงงานที่ 3 ส่งสินค้าให้ลูกค้า ข 150 หน่วย

โรงงานที่ 4 ส่งสินค้าให้ลูกค้า ก 200 หน่วย

ให้ลูกค้า ค 20 หน่วย

ให้ลูกค้า ง 10 หน่วย

ได้กำไรรวมกัน 16,785 บาท

หมายเหตุ การหาคำตอบชุดแรก จะใช้วิธีใดก็ได้ และเมื่อได้คำตอบแล้วต้องตรวจสอบทุก ๆ สายที่ไม่มีการขนส่ง ว่าควรจะมีการปรับปรุงหรือไม่ การตรวจสอบจะเลือกใช้วิธีการ u − v หรือ Stepping Stone ก็ได้

3.5.4 การประยุกต์ใช้ปัญหาขนส่ง

เท่าที่กล่าวมาแล้ว เราพูดถึงปัญหาขนส่งที่มีผลรวมของจำนวนผลิตเท่ากับผลรวมของจำนวนที่ต้องการ แต่ในทางปฏิบัติ ปัญหาจริงผลรวมของจำนวนที่ผลิตได้ มักจะไม่เท่ากับผลรวมของจำนวนที่ต้องการ การหาคำตอบในกรณีเช่นนี้ เรายังคงใช้วิธีการเดียวกัน คือ ต้องจัดตัวแบบให้สอดคล้องกับสมการข้อจำกัด (3.11) – (3.13) ดังนั้น

ถ้าผลรวมของจำนวนผลิต > ผลรวมของจำนวนที่ต้องการ

$$\Sigma_i a_i > \Sigma_j b_j$$

เราเพิ่มคอลัมน์หุ่น 1 คอลัมน์ จำนวนที่อยู่ในคอลัมน์จะแสดงถึงจำนวนสินค้าที่คงเหลือในโรงงาน หรือในคลังสินค้า ซึ่งเรียกว่า สินค้าคงคลัง อัตราค่าขนส่ง c_{ij} ในคอลัมน์นี้จะเป็น 0 อย่างไรก็ตาม ถ้าสินค้าเก็บไว้นาน โรงงานหรือคลังสินค้าต้องเสียค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาและอื่น ๆ ค่า $c_{ij} > 0$

ถ้าผลรวมของจำนวนผลิต < ผลรวมของจำนวนที่ต้องการ

$$\Sigma_i a_i < \Sigma_j b_j$$

เราเพิ่มแถวหุ่น 1 แถว จำนวนที่อยู่ในแถวนี้จะแสดงถึงจำนวนที่ขาดไปได้ไม่ครบตามที่ต้องการ ปกติการส่งสินค้าไม่ครบตามสั่งจะเกิดผลเสียกับผู้ผลิตหรือผู้ขาย เพราะลูกค้าอาจจะขาดความเชื่อถือ หันไปติดต่อกับผู้ผลิตรายอื่นได้ ดังนั้น ถ้าสินค้าขาดมือ ต้องคิดค่าเสียหายจากการส่งไม่ครบ หรือต้องหาทางแก้ไขอย่างอื่น เช่น ผลิตนอกเวลา หรือสั่งจากโรงงานอื่นไปให้ แต่ถ้าผู้ผลิตไม่คำนึงในเรื่องนี้ เราถือว่า c_{ij} ในแถวนี้เป็น 0

ตัวอย่างที่ 3.22 จากปัญหาขนส่งในตัวอย่าง 3.19

1) ถ้าโรงงาน C ผลิตสินค้าได้ 700 หน่วย ตารางขนส่งจะมีรูปแบบดังนี้

ศูนย์การค้า / โรงงาน	X	Y	Z	#คงเหลือ	# ผลิตได้
A	$\boxed{12}$	$\boxed{15}$	$\boxed{18}$	$\boxed{0}$	700
B	$\boxed{13}$	$\boxed{20}$	$\boxed{16}$	$\boxed{0}$	700
C	$\boxed{17}$	$\boxed{14}$	$\boxed{13}$	$\boxed{0}$	700
# ที่ต้องการ	500	600	900	100	

2) ถ้าลูกค้า X ต้องการสินค้า 600 หน่วย ตารางขนส่งจะมีรูปแบบดังนี้

ศูนย์การค้า / โรงงาน	X	Y	Z	# ผลิตได้
A	12	15	18	700
B	13	20	16	700
C	17	14	13	600
โรงงานหุ่น	0	0	0	700
# ที่ต้องการ	600	600	600	

ให้นักศึกษาตรวจสอบว่า คำตอบที่ได้จากตัวอย่าง 3.19 จะยังคงเป็นคำตอบที่ดีที่สุดหรือไม่ สำหรับปัญหาใน (1) และปัญหา (2) ถ้าไม่ใช่คำตอบที่ดีที่สุด ควรเป็นอย่างไร

ถ้าในปัญหา (1) มีค่าเก็บรักษาของแต่ละโรงงานเป็น 3, 6 และ 2 บาท ตามลำดับ จงหาสายขนส่งที่ดีที่สุด

ถ้าในปัญหา (2) คิดค่าเสียหายจากการที่ศูนย์การค้าแต่ละแห่งได้สินค้าไม่ครบจำนวนเป็น 25, 22 และ 24 บาทต่อหน่วย แผนการจัดส่งที่ดีที่สุด (ตัวอย่าง 3.19) จะเปลี่ยนแปลง ? อย่างไร

ปัญหาการขนส่งนอกจากจะนำไปใช้ในเรื่องการจัดส่งสินค้าหนึ่งชนิดจากแหล่งผลิตไปสู่แหล่งจำหน่ายแล้ว จะนำไปใช้กับปัญหาการจัดส่งสินค้ามากกว่า 1 ชนิด ใช้กับปัญหาการวางแผนการผลิต การจัดตารางการผลิตและการคงคลังเป็นงวด ๆ การจัดตารางการผลิตของเครื่องจักร ฯลฯ ในปัญหาเหล่านี้ อาจจะไม่มีการจำกัดชนิดของสินค้า ไม่จำกัดวิธีการจัดส่งหรือวิธีการดำเนินงาน แต่ในทางปฏิบัติจะพบว่า มันมีข้อจำกัดในเรื่องเหล่านี้ การจัดตารางขนส่งของข้อจำกัดเหล่านี้ จะใช้การกำหนดค่า $C = \pm M$ เมื่อ M เป็นค่าโตมาก เปรียบเทียบกับ C ตัวอื่น ๆ เช่น ในตัวอย่างที่ 3.22 ข้อ (1) ถ้าสายขนส่ง AZ ใช้ไม่ได้ หรือไม่มีการคมนาคมในสายนี้ เราจะกำหนด $c_{13} = M$ แทนที่จะเป็น 18 ถ้าในปัญหาข้อ (2) กำหนดว่า ศูนย์การค้า X จะต้องได้รับสินค้าครบตามจำนวนที่ต้องการ ค่า c_{41} จะเท่ากับ M แทนที่จะเป็น 0 เป็นต้น

ให้เรามาศึกษาตัวอย่างการใช้ปัญหาขนส่ง ต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 3.23 บริษัทไทยทำผลิตสินค้า 4 แบบ คือ ส1, ส2, ส3 และ ส4 ส่งไปให้ลูกค้า 3 ราย บริษัทมีโรงงานผลิตสินค้าที่ ก และ ข ความสามารถในการผลิตของแต่ละโรงงาน และจำนวนสินค้าที่ลูกค้าแต่ละรายต้องการ มีดังนี้

	สินค้า				
	ส1	ส2	ส3	ส4	รวม
โรงงาน : ก	**500**	700	400		1600
ข	300	200	400	600	1500
ลูกค้า : 1	500		400	**100**	**1000**
2	100	400	200	500	1200
3	ไม่จำกัดว่าเป็นแบบใด				900

ค่าขนส่งสินค้าคิดตามระยะทางในอัตรา 5 บาทต่อหน่วยต่อร้อยกิโลเมตร ระยะทางระหว่างโรงงานกับลูกค้า กำหนดในตาราง

	ระยะทาง (กิโลเมตร)		
	ลูกค้า 1	ลูกค้า 2	ลูกค้า 3
โรงงาน ก	320	480	640
โรงงาน ข	500	720	400

จงเขียนตารางขนส่ง

วิธีทำ

ลูกค้า		อัตราค่าขนส่ง (บาทต่อหน่วย)							3	# ผลิตได้
		1			2					
โรงงาน		a 1	a3	84	. a 1	82	ส3	ส4		
ก	ส1	16	M	M	24	M	M	M	32	500
	ส2	M	M	M	M	24	M	M	32	700
	ส3	M	16	M	M	M	24	M	32	400
ข	ส1	25	M	M	36	M	M	M	20	300
	ส2	M	M	M	M	36	M	M	20	200
	13	M	25	M	M	M	36	M	20	400
	ส4	M	M	25	M	M	M	36	20	600
# ต้องการ		500	400	100	loo	400	200	500	900	

หมายเหตุ ถ้าลูกค้ารายที่ 3 กำหนดแน่ชัดว่า ต้องการสินค้าแบบใดในจำนวนเท่าใด เราไม่จำเป็นต้องเขียนตารางรวม แต่จะแยกเขียนเป็น 4 ตาราง ตามแบบของสินค้า เช่น ลูกค้ารายที่ 3 ต้องการสินค้า ส1 เป็นจำนวน 200 หน่วย เราเขียนตารางขนส่งสำหรับสินค้าแบบ ส1 ได้ดังนี้

ลูกค้า / โรงงาน	อัตราค่าขนส่ง (บาทต่อหน่วย)			# ผลิตได้
	1	2	3	
n	16	24	32	500
ข	25	36	20	300
# ต้องการ	500	100	200	

เป็นต้น

ตัวอย่างที่ 3.24 บริษัทไทยวางแผนการผลิตและเก็บสินค้าคงคลังใน 4 เดือนข้างหน้า เพื่อสนองความต้องการของลูกค้าในแต่ละเดือน เท่ากับ 150, 180, 200 และ 240 หน่วย ตามลำดับ การจัดตารางการผลิตในแต่ละเดือน บริษัทต้องคำนึงถึง

1) ปริมาณที่จะผลิตในเดือนนั้น ซึ่งมีต้นทุนการผลิต 16 บาทต่อหน่วย

2) ปริมาณสินค้าที่เกินความต้องการในเดือนนั้น เป็นสินค้าคงคลัง ซึ่งมีค่าเก็บรักษา 2 บาทต่อหน่วยต่อเดือน

3) ในเดือนใดที่ไม่อาจผลิตได้ครบตามที่ต้องการ ลูกค้ายอมให้ส่งล่าช้าได้ แต่จะต้องลดราคาให้ 8 บาทต่อหน่วย ต่อการส่งช้าไป 1 เดือน

จากการประมาณ บริษัทคาดว่าจะสามารถผลิตสินค้าใน 4 เดือนข้างหน้าได้เป็นจำนวน 140, 160, 240 และ 260 หน่วย ตามลำดับ จงเขียนตารางขนส่ง กำหนดว่าก่อนการผลิตเดือนแรกและสิ้นสุดการผลิตในเดือนสุดท้าย ไม่มีสินค้าคงคลัง

วิธีทำ พิจารณาจากเงื่อนไข เราจะได้

$$c_{ij} \left| \begin{array}{ll} 16, & i = j \\ 16+2(j-i), & i < j \\ 16+8(i-j), & i > j \\ 0 & ,j > 4 \end{array} \right.$$

เขียนตารางขนส่งได้ดังนี้

	j / i	ส่ง 1	2	3	4	# ที่เหลือจากการผลิต	# ผลิตได้
ผลิต	1	16	18	20	22	0	140
	2	24	16	18	20	0	160
	3	32	24	16	18	0	240
	4	40	32	24	16	0	260
	# ต้องการ	150	180	200	240	30	800

หมายเหตุ

กรณีที่ไม่ยอมให้ส่งล่าช้า ค่าของ $c_{ij} = M, i > j$ ซึ่งจะเป็นลักษณะเดียวกันกับการจัดตารางการผลิตและจำหน่าย

นอกเหนือจากปัญหาเหล่านี้ นักศึกษาสามารถศึกษาการประยุกต์ใช้ปัญหาขนส่งได้จากหนังสืออ้างอิงท้ายเล่ม

3.6 ปัญหาการแจกจ่ายงาน

การหาคำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาการแจกจ่ายงานก็คือ การพิจารณาว่าควรจะมีการกระจายงานให้คนหรือเครื่องจักรทำอย่างไร โดยไม่ให้ซ้ำกัน อย่างมีประสิทธิภาพมากที่สุด นั่นก็คือให้งานทุกชิ้นสำเร็จไปได้ โดยเสียค่าใช้จ่ายในการทำงานทั้งหมด หรือใช้เวลารวมกันน้อยที่สุด ด้วยเหตุที่ปัญหาการมอบหมายงานเป็นกรณีพิเศษหนึ่งของปัญหาขนส่ง เราอาจจะแก้ปัญหาด้วยวิธีการขนส่งได้ แต่วิธีการนี้ค่อนข้างจะวุ่นวายและเสียเวลามากเกินไป ทั้งนี้เนื่องจากเราจะได้คำตอบเพียง m ค่า แสดงว่าเกิดกรณีของ degeneracy ขึ้น การแก้ degeneracy จำเป็นต้องใช้สายขนส่งหุ่นถึง $m-1$ สาย เพื่อให้ได้คำตอบครบตามกำหนดคือ $m+n-1$ หรือ $2m-1$ สายนั่นเอง หาก m มีค่าโต การกระทำเช่นนี้จะวุ่นวายมากขึ้น นอกจากนี้ คำตอบที่เราได้อาจจะเป็นคำตอบที่ดีที่สุด แต่การทดสอบจากการอาศัยสายขนส่งหุ่น อาจจะสรุปไม่ได้ว่าเป็นคำตอบที่ดีที่สุด ต้องทดสอบหลายตารางกว่าจะแน่ใจว่าได้คำตอบดีที่สุดแล้ว เราจึงไม่นิยมใช้วิธีการขนส่งกับปัญหาการจ่ายงาน

วิธีการที่จะนำมาใช้กับปัญหาการแจกจ่ายงานที่นิยมก็คือ วิธีการฮังกาเรียน (Hungarian method) และวิธีการ Branch and Bound

3.6.1 วิธีการฮังกาเรียนกับปัญหาการแจกจ่ายงาน

เป็นวิธีการที่อาศัยหลักเกณฑ์และข้อเท็จจริงว่า การบวกหรือการลบค่าคงที่กับค่าในแถวใดหรือในคอลัมน์ใด จะไม่ทำให้ปัญหาเปลี่ยนแปลงไป วิธีการฮังกาเรียนมีดังต่อไปนี้

กำหนด u_i เป็นค่าต่ำสุดของ c_{ij} ในแถว i, $i = 1,2,\ldots,m$

v_j เป็นค่าต่ำสุดของ $(c_{ij}-u_i)$ ในคอลัมน์ j, $j = 1,2,\ldots,m$

และ $w_{ij} = c_{ij}-u_i-v_j$ หรือ $c_{ij} = w_{ij}+u_i+v_j$

จะได้ว่า $$z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} (w_{ij} + u_i + v_j)x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} w_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} u_ix_{ij} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} v_jx_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} w_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} u_i\Big(\sum_{j=1}^{m} x_{ij}\Big) + \sum_{j=1}^{m} v_j\Big(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} w_{ij} \; x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{j=1}^{m} v_j$$

u_i และ v_j ต่างเป็นค่าคงที่ เพราะฉะนั้น $\sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{j=1}^{m} v_j$ = ค่าคงที่ K

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} w_{ij}x_{ij} + K$$

แสดงว่า Z จะมีค่าต่ำสุดได้ก็ต่อเมื่อ $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} w_{ij}x_{ij}$ มีค่าน้อยที่สุด

ด้วยเหตุที่ x_{ij} มีค่าเท่ากับ 0 หรือ 1 เท่านั้น และ $w_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j \geqslant 0$ เสมอ

ดังนั้น $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} w_{ij}x_{ij}$ จะมีค่าเป็นลบไม่ได้ นั่นก็คือ ค่าน้อยที่สุดของ $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} w_{ij}x_{ij}$ เท่ากับ 0 และ $w_{ij}x_{ij}$ จะมีค่าเป็น 0 ได้ก็ต่อเมื่อ $x_{ij} = 0$ และ/หรือ $w_{ij} = 0$

นั่นย่อมหมายความว่า หาก $x_{ij} = 1$ แล้ว w_{ij} ต้องเท่ากับ 0

สรุปได้ว่า Z จะมีค่าต่ำสุด เมื่อ $x_{ij} = 1$ แล้ว $w_{ij} = 0$

หรืออีกนัยหนึ่ง เรามอบหมายงานหรือจ่ายงาน ตรงช่องที่มี $w_{ij} = 0$ จึงจะดีที่สุด

ปัญหาที่อาจจะเกิดขึ้นก็คือ อาจจะมี $w_{ij} = 0$ อยู่ซ้ำกัน เราจึงต้องปรับปรุงวิธีการดังนี้ ลากเส้นตรงผ่านแถว หรือลากผ่านคอลัมน์ อย่างใดอย่างหนึ่ง ที่มีค่าของ w_{ij} บางตัวเป็น 0 ให้ได้จำนวนเส้นที่น้อยที่สุด นั่นก็คือ ลากผ่านแถวหรือคอลัมน์ที่มีจำนวนของ w_{ij} ที่เป็น 0 มากที่สุดเสียก่อน ถ้าได้จำนวนเส้นตรง = m เราจับคู่งานตรงช่องที่มี $w_{ij} = 0$ จะเป็นการจ่ายงานดีที่สุด แต่ถ้าได้จำนวนเส้นน้อยกว่า m ให้เราพิจารณาค่าของ w_{ij} ตรงช่องที่ไม่มีเส้นตรงลากผ่าน เลือกค่าต่ำสุด สมมติได้

$$w_0 = \min_{i,\, j} \text{ ค่าต่ำสุด } w_{ij}, \text{ ช่อง } (i,\ j) \text{ ไม่มีเส้นตรงลากผ่าน}$$

กำหนด $y_{ij} = w_{ij} - w_0$

จะพบว่ามี $y_{ij} < 0$ เมื่อ $w_{ij} = 0$

เพื่อมิให้มีค่า y_{ij} เป็นลบ เราบวก w_0 กับ y_{ij} ทุกค่าที่อยู่ในแถวที่มีเส้นตรงลากผ่าน และทุกค่าที่อยู่ในคอลัมน์ที่มีเส้นตรงลากผ่าน ผลลัพธ์ที่ได้จะไม่มี y_{ij} ตัวใดเป็นลบ สรุปได้ว่า เราจะได้

$y_{ij} = w_{ij} - w_0$ ทุกช่อง (i, j) ที่ไม่มีเส้นตรงลากผ่าน

$y_{ij} = w_{ij} + w_0$ ทุกช่อง (i, j) ที่มีเส้นตรง 2 เส้นตัดกัน

$y_{ij} = w_{ij}$ อื่น ๆ

และเราจะได้ว่า ค่าของ Z จะต่ำสุดก็ต่อเมื่อ $x_{ij} = 1$ แล้ว $y_{ij} = 0$

เราลากเส้นตรงผ่านแถว i หรือลากผ่านคอลัมน์ j อย่างใดอย่างหนึ่งที่มีค่า y_{ij} เป็น 0 ให้ได้จำนวนเส้นตรงน้อยที่สุด หากจำนวนเส้นตรงที่ได้เท่ากับ m เราจะได้คำตอบดีที่สุด หากจำนวนเส้นตรงน้อยกว่า m ทำซ้ำวิธีการเดิมจนกว่าจะได้จำนวนเส้นตรงเท่ากับ m

เราสรุปการหาคำตอบอุตมะหรือการจ่ายงานที่ดีที่สุด ด้วยวิธีการฮังกาเรียน ได้ดังต่อไปนี้

1. หาค่าต่ำสุดของ c_{ij} ในแถว i (หรือในคอลัมน์ j) ทุก ๆ แถว (คอลัมน์) แล้วนำค่าต่ำสุดที่ได้นี้ ลบออกค่า c_{ij} ทุก ๆ ค่าที่อยู่ในแถว (คอลัมน์) เดียวกัน

2. หาค่าต่ำสุดของผลลัพธ์ที่ได้จาก (1) ในคอลัมน์ j (แถว i) ทุก ๆ คอลัมน์ (แถว) แล้วนำค่าที่ได้ลบออกจากทุก ๆ ค่าที่อยู่ในคอลัมน์ (แถว) เดียวกัน

3. จากตารางของผลลัพธ์ที่ได้จาก (2) ลากเส้นตรงผ่านแถวหรือคอลัมน์ อย่างใดอย่างหนึ่งผ่านช่องที่มีค่าเป็น 0 ให้ได้จำนวนเส้นตรงน้อยที่สุด นั่นก็คือลากผ่านแถวหรือคอลัมน์ที่มีจำนวนช่องมีค่าเป็น 0 มากที่สุดเสียก่อน

4. นับจำนวนเส้นตรงที่ได้จาก (3)

4.1 ถ้าจำนวนเส้นตรงเท่ากับ m แสดงว่าได้คำตอบอุตมะแล้ว เราจับคู่งานกับเครื่องจักรตรงช่องที่มี 0 อยู่ โดยไม่ให้ซ้ำกัน (ทั่วไปจะเลือกแถวหรือคอลัมน์ที่มี 0 เพียงตัวเดียวก่อน) ผลที่ได้จะเป็นการมอบหมายงานหรือการจ่ายงานที่ดีที่สุด

4.2 ถ้าจำนวนเส้นตรง น้อยกว่า m ให้ทำต่อข้อ (5)

5. จากตารางในข้อ (4) พิจารณาค่าที่ไม่มีเส้นตรงลากผ่าน เลือกค่าที่น้อยที่สุด แล้วนำค่าที่ได้นั้นไปลบออกจากทุก ๆ ค่าที่ไม่มีเส้นตรงลากผ่าน ในขณะเดียวกันก็นำค่าที่ได้ บวกกับทุก ๆ ค่าที่มีเส้นตรง 2 เส้นตัดกัน ค่าที่เหลือนอกนั้นคงที่ ลากเส้นตรงผ่านแถวหรือคอลัมน์อย่างใดอย่างหนึ่ง ที่มีค่าเป็น 0 อยู่ ให้ได้จำนวนเส้นตรงน้อยที่สุด ทำต่อข้อ (4)

ตัวอย่างที่ 3.25 กำหนดตารางแสดงจำนวนหน่วยของสินค้าแต่ละชนิดที่ชำรุด จากการผลิตของเครื่องจักรแต่ละเครื่อง ดังต่อไปนี้

ชนิดของสินค้า	เครื่องจักร 1	เครื่องจักร 2	เครื่องจักร 3	เครื่องจักร 4
n	80	5	45	50
ข	65	15	83	85
ค	40	89	3	72
ง	10	64	70	20

ถ้าท่านเป็นผู้จัดการฝ่ายผลิต ท่านจะกำหนดให้เครื่องจักรใดผลิตสินค้าชนิดใด จึงจะดีที่สุด

วิธีทำ

คำอธิบาย ขั้นตอนในการคำนวณ

80 – 5	5 – 5	45 – 5	50 – 5
65 – 15	15 – 15	83 – 15	85 – 15
40 – 3	89 – 3	3 – 3	72 – 3
10 – 10	64 – 10	70 – 10	20 – 10

1. หาค่าต่ำสุดของแต่ละแถว แล้วนำค่าที่ได้ลบออกจากทุกค่าที่อยู่ในแถวเดียวกัน

75	0	40	45 – 10
50	0	68	70 – 10
37	86	0	69 – 10
0	54	60	10 – 10

2. จากตารางของผลลัพธ์ที่ได้ใน (1) หาค่าต่ำสุดในแต่ละคอลัมน์ แล้วนำค่าที่ได้นี้ไปลบออกจากทุกค่าที่อยู่ในคอลัมน์เดียวกัน

75	0	40	35
50	0	68	60
37	86	0	59
0	54	60	0

3. ลากเส้นตรงผ่านแถวหรือคอลัมน์ที่มีเลข 0 ให้ได้จำนวนเส้นน้อยที่สุด ดังนั้น เราลากเส้นตรงผ่านแถว 4 เนื่องจากมีจำนวน 0 มากที่สุด และลากผ่านคอลัมน์ 2 แถว 3 ตามลำดับ

ปรากฏว่าได้เส้นตรง 3 เส้น
แสดงว่า ยังไม่ได้คำตอบที่ดีที่สุด

	1	2	3	4
ก	40	0	5	0
ข	15	0	33	25
ค	37	121	0	59
ง	0	89	60	0

เพราะฉะนั้นเราเลือกค่าต่ำสุดของบรรดาค่าที่ไม่มีเส้นตรงลากผ่าน ในที่นี้คือ 35 เอา 35 ลบออกจากทุกค่าที่ไม่มีเส้นตรงลากผ่าน และเอา 35 ไปบวกทุกค่าที่มีเส้นตรง 2 เส้นตัดกัน นอกนั้นคงที่ ลากเส้นตรงใหม่ จะเห็นว่า ไม่ว่าเราจะลากโดยวิธีการใดก็ตามจะได้จำนวนเส้นตรงทั้งหมด 4 เส้น

กำหนดการผลิตที่ดีที่สุด คือ

เครื่องจักร	1	ผลิตสินค้า ง มีสินค้าชำรุด	10	ชิ้น
เครื่องจักร	2	ผลิตสินค้า ข มีสินค้าชำรุด	15	ชิ้น
เครื่องจักร	3	ผลิตสินค้า ค มีสินค้าชำรุด	3	ชิ้น
เครื่องจักร	4	ผลิตสินค้า ก มีสินค้าชำรุด	50	ชิ้น
		จำนวนสินค้าชำรุดทั้งหมด	78	ชิ้น

ปัญหาการแจกจ่ายงานเมื่อมีเป้าหมายที่ค่าสูงสุด

เมื่อเป้าหมายของฟังก์ชันเปลี่ยนเป็น

$$\text{ค่าสูงสุด } Z = \sum_{i,\, j} c_{ij}x_{ij}$$

เราทราบว่า $\text{ค่าสูงสุด } Z = \text{ค่าต่ำสุด } (-Z) = \sum_{i,\, j} (-c_{ij})x_{ij}$

ดังนั้น $u_i = \text{ค่าต่ำสุด}_{j} (-c_{ij}) = \text{ค่าสูงสุด } c_{ij}$

เป็นผลให้ $v_j = \text{ค่าต่ำสุด } (u_i - c_{ij})$

และ $w_{ij} = u_i - c_{ij} - v_j$

ในที่นี้ c_{ij} เป็นกำไรที่ได้ หรือผลผลิตที่ได้ ฯลฯ ของ i กับ j

เราสรุปขั้นตอนการมอบหมายงานหรือการจ่ายงาน ด้วยวิธีการฮังกาเรียน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 หาค่าสูงสุดของ c_{ij} ในแถว i (หรือคอลัมน์ j) แล้วนำค่าที่ได้ลบด้วยค่า c_{ij} ทุกค่าที่อยู่ในแถว i (หรือคอลัมน์ j) นั้น ทำเช่นนี้ทุกแถว (คอลัมน์)

สำหรับขั้นตอนที่ 2 ถึง 5 ทำวิธีการเดียวกันกับกรณีของเป้าหมายต้องการค่าต่ำสุด

ตัวอย่างที่ 3.26 โรงงานแห่งหนึ่งต้องการการผลิตสินค้า 5 ชนิด ให้ทันกำหนดภายในสัปดาห์นี้ โรงงานมีเครื่องจักรใช้ทำงาน 5 เครื่อง จึงจำเป็นต้องแจกจ่ายงานผลิตให้เครื่องจักรทำ ชนิดละเครื่อง จากประสบการณ์ทราบว่า การใช้เครื่องจักรแต่ละเครื่องผลิตสินค้าแต่ละชนิดจะได้ปริมาณผลผลิตดังต่อไปนี้

		สินค้า				
		A	B	C	X	P
	M_1	158	154	130	145	138
	M_2	140	158	155	180	151
เครื่องจักร	M_3	145	150	162	147	153
	M_4	180	178	155	165	161
	M_5	185	149	142	177	173

ถ้าท่านเป็นผู้จัดการโรงงาน ท่านจะจ่ายงานอย่างไรจึงจะเกิดผลดีที่สุด

วิธีทำ

27	24	32	35	35
45	20	7	0	22
40	28	0	33	20
5	0	7	15	12
0	29	20	3	0

คำอธิบาย

ได้จากการนำค่าสูงสุดในคอลัมน์ ลบด้วยทุกค่าที่อยู่ในคอลัมน์นั้น

3	0	8	11	11
45	20	7	0	22
40	28	0	33	20
5	0	7	15	12
0	29	20	3	0

แถวแรกได้จากค่าทุกค่าในแถวแรก ตารางแรกลบด้วย 24 ลากเส้นผ่านคอลัมน์ 2 แถว 4, 2 และลากเส้นผ่านคอลัมน์ 2 แถว 5, 2 และ 3 ได้จำนวนเส้น = 4

0	0	5	8	8
45	23	7	0	22
40	31	0	33	20
2	0	4	12	9
0	32	20	3	0

ได้จากตารางที่ 2 จากการเอา 3 ลบออกจากทุกค่าที่ไม่มีเส้นตรง และบวกทุกค่าที่มี 2 เส้นตัดกัน

ใช้เครื่องจักร	M_1	ผลิตสินค้า	A	ได้ปริมาณผลผลิต	158	ชิ้น
เครื่องจักร	M_2	ผลิตสินค้า	X	ได้ปริมาณผลผลิต	180	ชิ้น
เครื่องจักร	M_3	ผลิตสินค้า	C	ได้ปริมาณผลผลิต	162	ชิ้น
เครื่องจักร	M_4	ผลิตสินค้า	B	ได้ปริมาณผลผลิต	178	ชิ้น
เครื่องจักร	M_5	ผลิตสินค้า	P	ได้ปริมาณผลผลิต	173	ชิ้น
				ปริมาณผลผลิตทั้งหมด =	851	ชิ้น

เราจะเห็นได้ว่า การพิจารณาการมอบหมายงานหรือการจ่ายงานที่เหมาะสมที่สุด ไม่ว่าจะมีเป้าหมายต้องการหาค่าสูงสุด หรือต้องการหาค่าต่ำสุดก็ตาม เราใช้วิธีการฮังกาเรียน ซึ่ง D. Konig นักคณิตศาสตร์ชาวฮังการีเป็นผู้คิดขึ้นมา เมื่อเป้าหมายต่างกัน วิธีการนี้จะกำหนดขั้นที่ 1 ต่างกัน กล่าวคือ หากต้องการหาค่าสูงสุด เราจะเริ่มด้วยค่าสูงสุด แต่ถ้าต้องการค่าต่ำสุด เราก็จะเริ่มต้นด้วยค่าต่ำสุด นอกนั้นเหมือนกัน

ปัญหาการมอบหมายงานที่ไม่สมดุล

ปัญหาเท่าที่กล่าวมาแล้ว เราพูดถึงในกรณีปัญหาการมอบหมายงานที่สมดุล กล่าวคือ มีจำนวนงานเท่ากับจำนวนคนหรือเครื่องจักร แต่ปัญหาโดยทั่ว ๆ ไปนั้น จำนวนคนหรือจำนวนเครื่องจักรไม่จำเป็นต้องเท่ากับจำนวนงานก็ได้ การแก้ปัญหายังคงใช้วิธีการฮังกาเรียนอยู่ แต่ต้องปรับปัญหาให้เป็นปัญหาที่สมดุล หรือปัญหามาตรฐานเสียก่อน กรณีที่มีจำนวนคนหรือเครื่องจักรมากกว่าจำนวนงาน การมอบหมายงานหรือการจ่ายงาน ก็จะมุ่งให้งานทุก ๆ ชิ้นสำเร็จไปได้ โดยใช้เวลาหรือให้เสียค่าใช้จ่ายรวมกันต่ำที่สุด จึงต้องพิจารณาว่า ควรจะให้คนหรือเครื่องจักรใดบ้างทำงานเหล่านี้ และจะให้คนหรือเครื่องจักรใดไม่ต้องทำงาน วิธีการพิจารณาทำได้โดยการเพิ่มงานให้เท่ากับจำนวนคนหรือเครื่องจักร งานที่เพิ่มเข้ามาเป็นงานหุ่น เวลาหรือค่าใช้จ่ายในการทำงานหุ่นนี้จะเป็น 0 หากกำหนดให้คนหรือเครื่องจักรใดทำงานหุ่นนี้ แสดงว่าคนหรือเครื่องจักรนั้นไม่ต้องทำงานในงวดนี้

ทำนองเดียวกัน หากมีจำนวนงานมากกว่าจำนวนเครื่องจักรหรือคน การมอบหมายงานหรือการจ่ายงาน มุ่งพิจารณาว่า ควรจะทำงานใดก่อนบ้าง โดยใช้เครื่องจักรทุกเครื่องหรือคนทุกคนทำ ให้ใช้เวลาหรือให้เสียค่าใช้จ่ายรวมกันต่ำสุด และจะมีงานชิ้นใดบ้างที่รอทำในตอนหลัง วิธีการพิจารณาการมอบหมายงานหรือการจ่ายงานที่เหมาะสม ต้องเพิ่มจำนวนคนหรือเครื่องจักรให้เท่ากับจำนวนงาน คนหรือเครื่องจักรที่เพิ่มเข้ามา จะเป็นคนหรือเครื่องจักรหุ่น เวลาหรือค่าใช้จ่ายที่คนหรือเครื่องจักรหุ่นใช้ในการทำงานแต่ละชิ้น จะเท่ากับ 0 หมด หากกำหนดให้คนหรือเครื่องจักรหุ่นทำงานชิ้นใด แสดงว่างานชิ้นนั้นต้องทำในช่วงหลังเมื่องานที่จ่ายออกไปในช่วงแรกเสร็จสิ้นไปแล้ว

ตัวอย่างที่ 3.27 ในปัญหาการจัดผู้ควบคุมงาน 4 คน ให้ควบคุมการทำงานของเครื่องจักร 5 ประเภท ประเภทละ 1 คน แต่จะต้องไม่จัดให้นาย ก ควบคุมการทำงานของเครื่องจักรประเภทที่ 2 และนาย จ. จะไม่ควบคุมการทำงานของเครื่องจักรประเภทที่ 4 ค่าใช้จ่าย (พันบาท) จากการจัดให้ควบคุมการดำเนินงาน กำหนดในตาราง ดังนี้

		เครื่องจักร				
		1	2	3	4	5
ผู้ควบคุมงาน	นาย ก	2	–	2	5	6
	นาย ข	8	2	3	–	7
	นาย ค	1	5	4	3	2
	นาย ง	2	5	7	9	7

ควรมีการจ่ายงานอย่างไร จึงจะเกิดผลดีที่สุด

วิธีทำ

(1)

2	M	2	5	6
8	2	3	M	7
1	5	4	3	2
2	5	7	9	7
0	0	0	0	0

(2)

0	M	0	3	4
6	0	1	M	5
0	4	3	2	1
0	3	5	7	5
0	0	0	0	0

(3)

0	M	0	2	3
6	0	1	M	4
0	4	3	1	0
0	3	5	6	4
1	1	1	0	0

การจัดการควบคุมที่ดีที่สุด

นาย ก คุมเครื่องจักร 3

นาย ข คุมเครื่องจักร 2

นาย ค คุมเครื่องจักร 5

นาย ง คุมเครื่องจักร 1

สำหรับเครื่องจักรประเภทที่ 4 ไม่ได้จัดผู้ควบคุมงาน

ค่าใช้จ่ายจากการจัดผู้ควบคุมงานเครื่องจักร = 2+2+2+2 = 8 พันบาท

ข้อสังเกต

1. ปัญหานี้มีจำนวนแถวน้อยกว่าจำนวนคอลัมน์ เราจึงเพิ่มแถวที่ 5 เข้ามาเป็นแถวหุ่น ค่าใช้จ่ายในแถวนี้เป็น 0 หมด

2. ปัญหานี้จัดเป็นปัญหาที่มีข้อจำกัดในการจ่ายงาน เช่นเดียวกับปัญหาขนส่ง เราจะพบว่าในทางปฏิบัติ คนหรือเครื่องจักรบางเครื่องอาจจะทำงานบางชิ้นไม่ได้ คำตอบอุตมะหรือคำตอบที่เป็นทางเลือกที่ดีที่สุดจะต้องไม่มีการขนส่งที่สายดังกล่าว หรือไม่มีการจับคู่คนหรือเครื่องจักรกับงานที่ทำไม่ได้นี้ หนทางที่จะขจัดออกไปได้ก็โดยการกำหนดค่า c_{ij} ตรงช่องที่ห้ามใช้นี้ ให้มีค่าสวนทางกับความต้องการของเรา จนไม่อาจจะเลือกเข้ามาในคำตอบฐานได้ นั่นก็คือ หากเป้าหมายของฟังก์ชัน ต้องการหาค่าต่ำสุด เราจะกำหนดค่า c_{ij} ตรงช่องที่ห้ามใช้เป็น $+M$ และกำหนดค่าเป็น $-M$ ถ้าเป้าหมายของฟังก์ชันเป็นค่าสูงสุด ในเมื่อ M เป็นค่าที่มากที่สุด เมื่อเปรียบเทียบกับค่าอื่น ๆ ที่มี เช่น เราอาจกำหนด M เท่ากับ 1000 เมื่อค่าอื่น ๆ ที่มี มีค่าไม่เกิน 20 เป็นต้น การหาคำตอบที่ดีที่สุดเราใช้วิธีการดังที่กล่าวมาแล้วข้างต้น

3.6.2 วิธีการ Branch and Bound กับปัญหาการแจกจ่ายงาน

การใช้วิธีการ Branch and Bound ในการหาคำตอบที่ดีที่สุดต่อปัญหาการแจกจ่ายงานจะมีลำดับขั้นตอนดังนี้

1. หาค่าต่ำสุดของ c_{ij} ในแต่ละคอลัมน์ j ทุกคอลัมน์ นำค่าที่ได้มารวมกัน ค่านี้จะเป็นขีดจำกัดล่างของค่า Z

2. จาก $k = 1, m-1$ คำนวณค่าของ

$$c_{pk} + \sum_{j=k+1}^{m} \left[\underset{i}{\text{ค่าต่ำสุด}}\, c_{ij}\right] \text{ ทุก ๆ แถว } i,\ i \neq p$$

3. เปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จาก (2) ในแต่ละแถว หากได้

$$c_{rk} + \sum_{j=k+1}^{n} [\text{ค่าต่ำสุด } c_{ij}] \quad i \neq r$$

มีค่าน้อยที่สุด แสดงว่าเราได้ $x_{rk} = 1$ ขีดแถว r ออก ให้ $k = k+1$ และ

$c_{pk} = c_{rk} + c_{pk}, \; p \neq r$ ทำต่อข้อ (2)

4. ทำซ้ำด้วยวิธีการนี้เรื่อย ๆ จนถึง $k = n-1$ จะสิ้นสุดกระบวนการ

การจ่ายงานที่ดีที่สุด จะได้จาก $x_{rk} = 1$ ของทุก ๆ r และ k

หมายเหตุ 1. r ในแต่ละครั้งต้องไม่ซ้ำกัน

2. ถ้าค่าต่ำสุดของ c_{ij} ที่ได้จากแต่ละคอลัมน์ ไม่มีค่าใดอยู่ซ้ำแถวกัน

เราหยุดการคำนวณ และจ่ายงานตรงช่องที่มี c_{ij} ต่ำสุด ให้เรามาศึกษาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 3.28 จงหาคำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาการจ่ายงานในตัวอย่าง 3.25

วิธีทำ หาผลบวกของค่าต่ำสุดในแต่ละคอลัมน์ได้เท่ากับ $10+5+3+20 = 38$ แสดงว่าผลบวกที่จะได้ต้องไม่ต่ำกว่าค่านี้

เลือกการจ่ายงานที่ดีที่สุด สำหรับเครื่องจักร k เมื่อ k = 1,2,3,4 ตามลำดับ ปรากฏผลดังนี้

k	การจ่ายงาน	$c_{pk} + \sum_{j=k+1}^{4}$ (ค่าต่ำสุด c_{ij})	การจ่ายงานที่เลือก
1	ก1	$80+15+3+20 = 118$	ง1
	ข1	$65+5+3+20 = 93$	$c_{41} = 10$
	ค1	$40+5+45+20 = 110$	
	ง1	$10+5+3+50 = 68$*	
2	ก2	$10+5+3+72 = 90$	ข2
	ข2	$10+15+3+50 = 78$*	$c_{41}+c_{22} = 10+15 = 25$
	ค2	$10+89+45+50 = 194$	
3	ก3, ค4	$25+45+72 = 142$	ค3, ก4
	ค3, ก4	$25+3+50 = 78$*	

ผลสรุปที่ได้ จะเป็นเช่นเดียวกับตัวอย่างที่ 3.25

(ดูการกำหนดการผลิตที่ดีที่สุด ในตัวอย่างที่ 3.25)

หมายเหตุ การคำนวณในแต่ละขั้นตอน อาจจะไม่รวม c_{rk} เข้าไปก็ได้ แต่จะต้องคำนวณค่า Z จากผลบวกของ c_{rk} ทุก r

กรณีที่มีฟังก์ชันเป้าหมายเป็น

$$\text{ค่าสูงสุด } Z = \sum_{i,\, j} c_{ij}x_{ij}$$

ขั้นตอนในการคำนวณจะเป็นแบบเดียวกัน โดยเปลี่ยนจากการหาค่าต่ำสุด เป็นการหาค่าสูงสุด

สำหรับกรณีที่มีจำนวนงานไม่เท่ากับจำนวนเครื่องจักร เราไม่จำเป็นต้องทำให้เท่ากันเหมือนวิธีการฮังกาเรียน เพียงแต่ว่าถ้า จำนวนงาน > จำนวนเครื่องจักร k จะแสดงถึงเครื่องจักร k ถ้า จำนวนงาน < จำนวนเครื่องจักร k จะแสดงถึงงานชิ้นที่ k ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 3.29 บริษัทพีและสหายมีงานพิเศษที่จะต้องทำพร้อม ๆ กัน 5 ชิ้น บริษัทมีหัวหน้างานที่จะรับผิดชอบในการทำงานเหล่านี้ 6 คน ผู้บริหารของบริษัทจึงต้องพิจารณาว่า ควรจะมอบหมายงานอย่างไร จึงจะมีประสิทธิภาพมากที่สุด ผลจากการประเมินของหัวหน้างานแต่ละคน คาดว่าจะได้กำไรจากการทำงาน ดังตารางต่อไปนี้

	กำไร (ล้านบาท)				
หัวหน้างาน	**งานชิ้นที่ 1**	**งานชิ้นที่ 2**	**งานชิ้นที่ 3**	**งานชิ้นที่ 4**	**งานชิ้นที่ 5**
บี	4.8	**5.1**	5.7	**5.6**	5.3
ซี	**5.0**	5.4	5.6	5.8	5.5
ดี	5.8	6.1	6.0	5.5	5.1
จี	6.0	5.7	5.4	6.0	5.9
ที	5.8	5.4	4.9	5.2	5.0
วี	5.5	6.2	5.6	4.9	**5.1**

วิธีทำ (ในที่นี้ ไม่รวมค่า c_{rk} ใน c_{pk})

งานชิ้นที่ k	หัวหน้างาน	$c_{pk} + \sum_{j=k+1}^{5}$ (ค่าต่ำสุด c_{ij})	การจ่ายงานที่ดีที่สุด
	บี	4.8 + 6.2 + 6.0 + 6.0 + 5.9 = 28.9	1 ที
	ซี	5.0 + 6.2 + 6.0 + 6.0 + 5.9 = 29.1	c_{51} = 5.8
	ดี	5.8 + 6.2 + 5.7 + 6.0 + 5.9 = 29.6	
	8	6.0 + 6.2 + 6.0 + 5.8 + 5.7 = 29.1	
	ที	5.8 + 6.2 + 6.0 + 6.0 + 5.9 = 29.9*	
	วี	5.5 + 6.1 + 6.0 + 6.0 + 5.9 = 29.5	
2	บี	5.1 + 6.0 + 6.0 + 5.9 = 23.0	2วี
	ซี	5.4 + 6.0 + 6.0 + 5.9 = 23.3	c_{52} = 6.2
	ดี	6.1 + 5.7 + 6.0 + 5.9 = 23.7	
	จี	5.7 + 6.0 + 5.8 + 5.7 = 23.2	
	วี	6.2 + 6.0 + 6.0 + 5.9 = 24.1*	
3	บี	5.7 + 6.0 + 5.9 = 17.6	3 ดี
	ซี	5.6 + 6.0 + 5.9 = 17.5	c_{33} = 6.0
	ดี	6.0 + 6.0 + 5.9 = 17.9*	
	จี	5.4 + 5.8 + 5.7 = 16.9	
4	บี	5.6 + 5.9 = 11.5	4 ซี
	ซี	5.8 + 5.9 = 11.7'	c_{24} = 5.8
	จี	6.0 + 5.5 = 11.5	
5	บี	5.3	5 จี
	จี	5.9*	c_{45} = 5.9

สรุปว่า การจ่ายงานที่ดีที่สุด คือ

ให้ซีรับผิดชอบงานชิ้นที่ 4 กำไรที่คาดว่าจะได้ เท่ากับ 5.8 ล้านบาท

ดีรับผิดชอบงานชิ้นที่ 3 กำไรที่คาดว่าจะได้ เท่ากับ 6.0 ล้านบาท

จีรับผิดชอบงานชิ้นที่ 5 กำไรที่คาดว่าจะได้ เท่ากับ 5.9 ล้านบาท

ทีรับผิดชอบงานชิ้นที่ 1 กำไรที่คาดว่าจะได้ เท่ากับ 5.8 ล้านบาท

วีรับผิดชอบงานชิ้นที่ 2 กำไรที่คาดว่าจะได้ เท่ากับ 6.2 ล้านบาท

ผลรวมของกำไรที่บริษัทคาดว่าจะได้จากการทำงาน 5 ชิ้นนี้ จะเท่ากับ 29.7 ล้านบาท

ให้นักศึกษาหาคำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาในตัวอย่างนี้ ด้วยวิธีการ Hungarian และของปัญหาในตัวอย่างที่ 3.26 และ 3.27 ด้วยวิธีการ Branch and Bound

แบบฝึกหัดที่ 3

1. หาค่าสูงสุด $Z = 150x_1 + 120x_2 + 132x_3$

โดยมีข้อจำกัด

$$10x_1 + 6x_2 + 8x_3 + x_4 = 324$$

$$5x_1 + 8x_2 + 8x_3 + x_5 = 242$$

$$5x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_6 = 195$$

$$x_j\ (j=1,2,\ldots,6) = 0,1,2,\ldots\ldots\ldots$$

กำหนดตารางซิมเพลกซ์ที่ 4 ดังนี้

		x_5	x_4	x_6
Z			11	5
x_1	$\frac{104}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$
x_3		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{5}{12}$
x_2		0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

จงตรวจสอบคำตอบที่ได้จากตารางนี้ ว่า เป็นคำตอบที่ดีที่สุด หรือไม่ ถ้าไม่ใช่ จงหาคำตอบดีที่สุด

ในการตรวจสอบคำตอบ ก่อนอื่น เราหาค่า x_{05} แล้วหาค่าของ x_{20} , x_{30} และ Z

ถ้า x_{04} เป็นลบ เราต้องทำตารางต่อไป นอกนั้น พิจารณาค่าของ x_{i0} ทุกค่า i จะเห็นว่า คำตอบที่ได้ ไม่เป็นเลขจำนวนเต็ม เราต้องปรับคำตอบใหม่ โดยใช้วิธีการ Cutting Plane หรือ Branch and Bound ทำตารางต่อไป จนกว่าจะได้ทุกคำตอบเป็นเลขจำนวนเต็ม

ในที่นี้ เราได้

$$x_{05} = s_5 - c_5 = [150(-\frac{1}{5}) + 132(\frac{1}{4}) + 120(0)] - 0 = 3$$

หาค่าของ x_{20} , x_{30} และ Z จากการแก้สมการ ต่อไปนี้

$$10(\frac{104}{5}) + 6x_2 + 8x_3 = 324 \qquad (1)$$

$$5(\frac{104}{5}) + 8x_2 + 8x_3 = 242 \qquad (2)$$

(2) – (1) จะได้ $-5(\frac{104}{5})+2x_2=-82$ หรือ $x_2 = 11$

x_2 ใน (1) จะได้ $x_3 = \frac{1}{8}(324-208-66) = \frac{25}{4}$

สรุปว่า เราได้ $x_{20} = 11$, $x_{30} = \frac{25}{4}$ และ

$$z = 150(\frac{104}{5}) + 120(11) + 132(\frac{25}{4}) = 5,265$$

พิจารณาจากคำตอบที่ได้ จะเห็นว่า ไม่เป็นเลขจำนวนเต็ม จึงต้องปรับคำตอบต่อไป โดยใช้วิธีการ Cutting Plane ดังต่อไปนี้

สร้าง Cut จากแถวที่ 1 ได้ผลสรุปดังนี้

		x_5	x_4	x_6
Z	5,265	3	11	5
x_1	$\frac{104}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$
x_3	$\frac{25}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{5}{12}$
x_2	11	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
x_7	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{2}{15}$	$-\frac{2}{15}$
$\lvert x_{0j}/x_{4j}\rvert$		$\frac{15}{4}$	$\frac{165}{2}$	$\frac{75}{2}$

ปรับตารางต่อไป โดยให้ x_5 เป็นตัวแปรฐานแทนที่ x_7 จะได้ผลสรุปดังนี้

		x_4	x_6	x_7
Z	5262	$\frac{21}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{15}{4}$
x_1	21	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{4}$
x_3	6	$\frac{1}{24}$	$-\frac{11}{24}$	$\frac{5}{16}$
x_2	11	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	0
x_4	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{5}{4}$

คำตอบที่ได้เป็นเลขจำนวนเต็ม สรุปได้ว่า เราได้คำตอบดีที่สุด คือ

$x_1 = 21$, $x_2 = 11$, $x_3 = 6$, $x_4 = 1$ นอกนั้นเป็น 0 ให้ค่า $Z_{\text{สูงสุด}} = 5{,}262$

2. หาค่าสูงสุด $Z = 180x_1 + 92x_2 + 156x_3$

โดยมีข้อจำกัด

$$10x_1 + 6x_2 + 8x_3 + x_4 = 324$$

$$9x_1 + 5x_2 + 8x_3 + x_5 = 280$$

$$x_j\ (j=1,2,\ldots,5) = 0,1,2,\ldots\ldots\ldots$$

จงหาคำตอบดีที่สุดของปัญหานี้

ใช้วิธีการซิมเพลกซ์ในการหาคำตอบ โดยใช้วิธีการ Cutting Plane ในการปรับคำตอบให้เป็นเลขจำนวนเต็ม ดังต่อไปนี้

ตารางที่ 1

		x_1	x_2	x_3	θ_i 's
z	0	-180	-92	-156	
x_4	324	10	6	8	32.4
x_5	280	9	5	8	31.1

ตารางที่ 2

		x_2	x_3	x_5
Z	5600	8	4	20
x_4	$\frac{116}{9}$	$\frac{4}{9}$	$-\frac{8}{9}$	$\frac{10}{9}$
x_1	$\frac{280}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{1}{9}$
x_6	$-\frac{8}{9}$	$-\frac{4}{9}$	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{8}{9}$
$\lvert x_{0j} / x_{3j} \rvert$		18	36	$\frac{45}{2}$

ตารางที่ 3

		x_3	x_5	x_6
z	5584	2	4	18
x_4	12	-1	-2	1
x_1	30	$\frac{3}{4}$	-1	$\frac{5}{4}$
x_2	2	$\frac{1}{4}$	2	$-\frac{9}{4}$

ได้คำตอบดีที่สุด นั่นคือ

$x_1 = 30$, $x_2 = 2$, $x_4 = 12$ นอกนั้นเป็น 0 ให้ค่า $Z_{สูงสุด} = 5,584$

3. หาค่าต่ำสุด $Z = 52x_1 + 60x_2 + 98x_3 + 45x_4 + 38x_5$

โดยมีข้อจำกัด

$$14x_1 + 11x_2 + 28x_3 + 13x_4 + 12x_5 - 25 \geq 0$$

$$15x_1 + 12x_2 + 26x_3 + 10x_4 + 9x_5 - 25 \geq 0$$

$$x_j \ (j = 1,2,3,4,5) = 0 \text{ หรือ } 1$$

จงหาคำตอบดีที่สุดจากคำตอบบางส่วนที่กำหนดให้ ดังต่อไปนี้

3.1) 1– , 3+

3.2) 1+ , 3–

ในการหาคำตอบ เราใช้วิธีการแจงนับ ดังต่อไปนี้

เริ่มต้นด้วยการกำหนดค่า $Z = \sum_j c_j$ พิจารณาจากคำตอบบางส่วนใน N

คำนวณหาค่า $Q_i' = \sum_{j+\in N} a_{ij}$ ไปที่ 1

1. ถ้า $Q_i' \geq 0$ ทุก i แสดงว่า คำตอบบางส่วนใน N เป็นคำตอบที่เป็นไปได้ หาผลรวมของ c_j ทุกค่า j+ ที่อยู่ใน N ให้ผลลัพธ์ที่ได้ = Z_b ถ้า $Z_b < Z$ ให้ $Z = Z_b$ นอกนั้นคงเดิม

   ถ้า $Q_i < 0$ ทำต่อข้อ 2

2. คำนวณค่าของ $Q_i'' = Q_i' + \sum_{j\in F} a_{ij}$ ไปที่ 3

3. ถ้า $Q_i'' \geq 0$ ใส่ j+ ทุกค่า j ที่อยู่ใน F ลงใน N จะได้คำตอบที่เป็นไปได้ คำนวณหาค่า Z ของคำตอบชุดนี้ ถ้าได้ผลลัพธ์น้อยกว่า Z ให้ Z = Zของคำตอบชุดนี้ นอกนั้นคงเดิม

   ถ้า $Q_i'' > 0$ ไปที่ 4 ถ้า $Q_i'' < 0$ หยุด แสดงว่าได้คำตอบที่เป็นไปไม่ได้

4. คำนวณค่าของ $Q_i' + a_{il}$ ทุกค่า i ให้

$$Q_i(l) = |Q_i' + a_l| \quad \text{ถ้า } Q_i' + a_{il} < 0$$
$$= 0 \quad \text{ถ้า } Q_i' + a_{il} \geq 0$$

   หาค่าของ $\sum_i Q_i(l)$ ให้

$$\sum_i Q_i(k) = \min_l \sum_i Q_i(l)$$

   เพิ่ม k+ ลงใน N ไปที่ 5 และเพิ่ม k- ลงใน N ไปที่ 6

   ถ้า $\sum_i Q_i(t) = \sum_i Q_i(k) = 0$ ไปที่ 7

5. ให้ $Q_i' = Q_i' + a_{ik}$ ไปที่ 1

6. ให้ $Q_i' = Q_i'$ และ $Q_i'' = Q_i'' - a_{ik}$ ไปที่ 3

7.

   ถ้า $c_k < c_t$ เพิ่ม k+ ลงใน N ไปที่ 5 และเพิ่ม t- , k- ลงใน N ไปที่ 8

8. ให้ $Q_i' = Q_i'$ และ $Q_i'' = Q_i'' - a_{ik} - a_{it}$ ไปที่ 3

จาก algorithm ที่กำหนดนี้ เรานำไปใช้หาคำตอบที่ดีที่สุดได้ดังต่อไปนี้

3.1) 1- , 3+

$Q_1' = -25 + 28 = 3$, $Q_2' = -25 + 26 = 1$

$Q_i' > 0$, I=1,2 แสดงว่าคำตอบชุดนี้เป็นคำตอบที่เป็นไปได้ นั่นคือ

$x_3 = 1$ นอกนั้นเป็น 0 ให้ค่า $Z = 98$

3.2) 1+ , 3-

$Q_1' = -25 + 14 = -11$, $Q_2' = -25 + 15 = -10$

$Q_1'' = -11 + 11 + 13 + 12 > 0$, $Q_2'' = -10 + 12 + 10 + 9 > 0$

หาค่า $Q_i(I)$, I=2,4,5 ; i=1,2

I	2	4	5
$Q_1' + a_{1I}$	0	2	1
$Q_2' + a_{2I}$	2	0	-1
$\sum_i Q_i(I)$	0	0	1

เลือก 2+ หรือ 4+ จะให้คำตอบที่เป็นไปได้ แต่ $c_2(60) > c_4(45)$ เราจึงเลือก 4+

และ 2- , 4- จะให้คำตอบ 2 ชุด ดังต่อไปนี้

<u>ชุดแรก</u> 1+ , 3- , 4+ จะเป็นคำตอบที่เป็นไปได้ นั่นคือ

$x_1 = x_4 = 1$ นอกนั้นเป็น 0 ให้ค่า $Z = 52 + 45 = 97 < 98$ เป็นคำตอบที่ดีกว่าคำตอบในข้อ 3.1

<u>ชุดที่สอง</u> 1+ , 3- , 2- , 4- , 5+

ให้คำตอบที่เป็นไปไม่ได้

สรุปว่า คำตอบที่ดีที่สุด คือ

$x_1 = x_4 = 1$ นอกนั้นเป็น 0 ให้ค่า $Z_{\text{ต่ำสุด}} = 97$

4. หาค่าต่ำสุด $Z = 70x_1 + 28x_2 + 16x_3 + 34x_4 + 21x_5$

โดยมีข้อจำกัด

$$16x_1 + 14x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 7x_5 - 21 \geq 0$$

$$24x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 12x_4 + 4x_5 - 30 \geq 0$$

$$x_j\ (j = 1, 2, 3, 4, 5) = 0 \text{ หรือ } 1$$

จงหาคำตอบดีที่สุดจากคำตอบบางส่วน ที่กำหนดให้ ดังต่อไปนี้

4.1) 1+

4.2) 1-

จากคำตอบบางส่วนที่กำหนดให้ ทำให้เป็นคำตอบที่เป็นไปได้ หาคำตอบดีที่สุดจากคำตอบชุดที่มีค่า Z น้อยที่สุด ตามขั้นตอน ดังต่อไปนี้

4.1) 1+

$Q_1' = -21 + 16 = -5$, $Q_2' = -30 + 24 = -6$

$Q_1'' = -5 + 14 + 4 + 8 + 7 > 0$, $Q_2'' = -6 + 8 + 6 + 12 + 4 > 0$

หาค่า $Q_i(l)$, $l=2,3,4,5$; $i=1,2$

l	2	3	4	5
$Q_1' + a_{1l}$	9	-1	3	2
$Q_2' + a_{2l}$	2	0	6	-2
$\sum_i Q_i(l)$	0	1	0	2

เลือก 2+ หรือ 4+ จะให้คำตอบที่เป็นไปได้ แต่ $c_2(28) < c_4(34)$ เราจึงเลือก 2+ และ 2- , 4- จะได้คำตอบสองชุด ดังต่อไปนี้

<u>ชุดแรก</u> ใส่ 2+ ในเซทของคำตอบบางส่วน จะได้คำตอบที่เป็นไปได้ คือ

$x_1 = x_2$ นอกนั้นเป็น 0 ให้ค่า $Z = 70 + 28 = 98$

<u>ชุดที่สอง</u> ใส่ 2- , 4- ในเซทของคำตอบบางส่วน หาค่า Q_i'' ต่อไป จะได้

$Q_1'' = -5 + 4 + 7 > 0$, $Q_2'' = -6 + 6 + 4 > 0$

พิจารณาค่า $Q_i(l)$, $l=3,5$; $i=1,2$ จะเห็นว่า $Q_1(3)$ และ $Q_2(5)$ มีค่ามากกว่า 0 แสดงว่า เราต้องใส่ 3+ , 5+ ในเซทของคำตอบบางส่วน จึงจะได้คำตอบที่เป็นไปได้ คือ

$x_1 = x_3 = x_5 = 1$ นอกนั้นเป็น 0 ให้ค่า $Z = 70 + 16 + 21 = 97$

ให้ค่า Z น้อยกว่าคำตอบที่เป็นไปได้ชุดแรก แสดงว่า คำตอบที่เป็นไปได้ชุดที่สองดีกว่า

4.2) 1-

$Q_1' = -21$, $Q_2' = -30$

$Q_1'' = -21 + 14 + 4 + 8 + 7 > 0$, $Q_2'' = -30 + 8 + 6 + 12 + 4 = 0$

แสดงว่า เราต้องกำหนดตัวแปรอิสระทุกตัวเป็น 1 จึงจะได้คำตอบที่เป็นไปได้ คือ

$x_1 = 0$, $x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 1$ ให้ค่า $Z = 28 + 16 + 34 + 21 = 99$

ให้ค่า Z มากกว่าคำตอบที่เป็นไปได้ชุดที่สองใน (4.1)

แสดงว่า คำตอบที่เป็นไปได้ที่ดีที่สุด คือ

$x_1 = x_3 = x_5 = 1$ นอกนั้นเป็น 0 ให้ค่า $Z_{\text{ต่ำสุด}} = 97$

5. กำหนดตารางแสดงจำนวนสินค้าที่โรงงานผลิตได้ ความจุของคลังสินค้า และอัตราค่าขนส่งสินค้าจากโรงงานไปเก็บไว้ที่คลังสินค้า ดังต่อไปนี้

คลังสินค้า / โรงงาน	อัตราค่าขนส่ง (บาท / หน่วย) A	B	C	D	จำนวนที่ผลิตได้ (หน่วย)
1	5	3	7	4	2400
2	6	9	2	8	1800
3	3	4	5	6	1800
ความจุ (หน่วย)	1200	1300	1500	2000	

5.1 จงเขียนตารางสายขนส่งชุดแรก ใช้วิธีการ North West Corner Rule หรือ Row Minima หรือ Short Cut

5.2 จากตารางสายขนส่งชุดแรก ถ้าให้โรงงานที่ 3 ส่งสินค้าไปเก็บไว้ที่คลังสินค้า B จะส่งได้มากที่สุดเท่าใด และมีผลกระทบต่อสายขนส่งใด อย่างไรบ้าง

5.3 จงหาสายขนส่งที่ดีที่สุด

5.4 ถ้าโรงงานที่ 2 ผลิตสินค้าได้ 2000 หน่วย สายขนส่งที่ได้จาก (5.3) จะเปลี่ยนแปลงหรือไม่ อย่างไร

การเขียนตารางสายขนส่งชุดแรก นักศึกษาจะเลือกใช้วิธีใดก็ได้ แต่ละวิธีจะให้สายขนส่ง และผลจากการเปลี่ยนแปลงสายขนส่งมาที่ 3B ดังต่อไปนี้

วิธีการ North West Corner Rule

คลังสินค้า	A	B	C	D	จำนวนที่ผลิต
โรงงาน 1	5 1200	3 1200	7	4	2400
2	6	9 100	2 1500	8 200	1800
3	3	4	5	6 1800	1800
ความจุ	1200	1300	1500	2000	

ค่าขนส่งทั้งหมด = 5(1200)+3(1200)+9(100)+2(1500)+8(200)+6(1800) บาท

= 25,900 บาท

ถ้าให้โรงงานที่ 3 ส่งสินค้าไปเก็บไว้ที่คลังสินค้า B จะทำให้ค่าขนส่งเปลี่ยนแปลงไป

= 4 – 9 + 8 – 6 = -3 บาท /หน่วย

นั่นคือ ค่าขนส่งจะลดลงอีก 3 บาท/หน่วย

โรงงานที่ 3 ส่งสินค้าไปเก็บไว้ที่คลังสินค้า B ได้มากที่สุด

= ค่าต่ำสุด(100 , 1800) = 100 หน่วย

ยกเลิกการส่งสินค้าจากโรงงานที่ 2 ไปยัง B

เพิ่มปริมาณสินค้าที่ส่งจากโรงงานที่ 2 ไป D เป็น 200+100 = 300 หน่วย

ลดปริมาณสินค้าที่ส่งจากโรงงานที่ 3 ไป D เหลือเพียง 1800 – 100 = 1700

นอกนั้นคงเดิม จะทำให้ค่าขนส่งทั้งหมดลดลงเป็น 25,900-3(100) = 25,600 บาท

วิธีการ Row Minima

คลังสินค้า	A	B	C	D	จำนวนที่ผลิต
โรงงาน 1	$\boxed{5}$	$\boxed{3}$ 1300	$\boxed{7}$	$\boxed{4}$ 1100	2400
2	$\boxed{6}$ 300	$\boxed{9}$	$\boxed{2}$ 1500	$\boxed{8}$	1800
3	$\boxed{3}$ 900	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$ 900	1800
ความจุ	1200	1300	1500	2000	

ค่าขนส่งทั้งหมด = 3(1300)+4(1100)+6(300)+2(1500)+3(900)+6(900) บาท

= 21,200 บาท

ถ้าให้โรงงานที่ 3 ส่งสินค้าไปเก็บไว้ที่คลังสินค้า B จะทำให้ค่าขนส่งเปลี่ยนแปลงไป

= 4 – 3 + 4 – 6 = -1 บาท / หน่วย

นั่นคือ ค่าขนส่งจะลดลงอีก 1 บาท/หน่วย

โรงงานที่ 3 ส่งสินค้าไปเก็บไว้ที่คลังสินค้า B ได้มากที่สุด

= ค่าต่ำสุด(1300 , 900) = 900 หน่วย

ยกเลิกการส่งสินค้าจากโรงงานที่ 3 ไปยัง D

เพิ่มปริมาณสินค้าที่ส่งจากโรงงานที่ 1 ไป D เป็น 1100+900 = 2000 หน่วย

ลดปริมาณสินค้าที่ส่งจากโรงงานที่ 1 ไป B เหลือเพียง 1300 – 900 = 400

นอกนั้นคงเดิม จะทำให้ค่าขนส่งทั้งหมดลดลงเป็น 21,200-(900) = 20,300 บาท

วิธีการ Short Cut

คลังสินค้า	A	B	C	D	จำนวนที่ผลิต
โรงงาน 1	5	3 1300	7	4 1100	**2400**
2	6	9	2 1500	8 300	**1800**
3	3 1200	4	5	6 600	**1800**
ความจุ	1200	1300	1500	**2000**	

ค่าขนส่งทั้งหมด = 3(1300)+4(1100)+2(1500)+8(300)+3(1200)+6(600) บาท

= 20,900 บาท

ถ้าให้โรงงานที่ 3 ส่งสินค้าไปเก็บไว้ที่คลังสินค้า B จะทำให้ค่าขนส่งเปลี่ยนแปลงไป

= 4 – 3 + 4 – 6 = -1 บาท / หน่วย

นั่นคือ ค่าขนส่งจะลดลงอีก 1 บาท/หน่วย

โรงงานที่ 3 ส่งสินค้าไปเก็บไว้ที่คลังสินค้า B ได้มากที่สุด

= ค่าต่ำสุด(1300 , 600) = 600 หน่วย

ยกเลิกการส่งสินค้าจากโรงงานที่ 3 ไปยัง D

เพิ่มปริมาณสินค้าที่ส่งจากโรงงานที่ 1 ไป D เป็น 1100+600 = 1700 หน่วย

ลดปริมาณสินค้าที่ส่งจากโรงงานที่ 1 ไป B เหลือเพียง 1300 – 600 = 700

นอกนั้นคงเดิม จะทำให้ค่าขนส่งทั้งหมดลดลงเป็น 20,900-(600) = 20,300 บาท

การหาสายขนส่งที่ดีที่สุด ต้องตรวจสอบสายขนส่งชุดแรก ปรับตารางใหม่ถ้าลดค่าขนส่งลงได้อีก ตรวจสอบจนกว่าค่าขนส่งทั้งหมดจะลดลงไม่ได้อีกแล้ว อ่านผลที่ได้จะเป็นสายขนส่งดีที่สุด ในที่นี้ เราจะได้สายขนส่งดีที่สุด 2 ชุด ซึ่งจะเป็นตารางที่ 2 ของวิธีการ Row Minima **และ** Short Cut

จากสายขนส่งชุดแรกที่จัดด้วยวิธีการ Short Cut ตรวจสอบและปรับสายขนส่งพร้อมด้วยการตรวจสอบใหม่ ดังต่อไปนี้

คลังสินค้า	A	B	C	D	u_i
โรงงาน 1	[5] +4	[3] 1300	[7] +9	[4] 1100	0
2	[6] +1	[9] +2	[2] 1500	[8] 300	**4**
3	[3] 1200	[4] -1	[5] +5	[6] 600	2
v_j	1	3	-2	4	

ค่าขนส่งทั้งหมด = **20,900** บาท

<u>ตารางที่ 2</u>

คลังสินค้า	A	B	C	D	u_i
โรงงาน 1	[5] +3	[3] 700	[7] +9	[4] 1700	0
2	[6] 0	[9] +2	[2] 1500	[8] 300	4
3	[3] 1200	[4] 600	[5] +6	[6] +1	1
v_j	2	3	-2	4	

จะเป็นสายขนส่งที่ดีที่สุด และจะมี 2 ชุด นั่นคือ

โรงงานที่ 1 ส่งสินค้าไปเก็บที่คลังสินค้า B 700 หน่วย เก็บที่คลังสินค้า D 1700 หน่วย

โรงงานที่ 2 ส่งสินค้าไปเก็บที่คลังสินค้า C 1500 หน่วย เก็บที่คลังสินค้า D 300 หน่วย

โรงงานที่ 3 ส่งสินค้าไปเก็บที่คลังสินค้า A 1200 หน่วย เก็บที่คลังสินค้า B 600 หน่วย

ค่าขนส่งทั้งหมด = 20,900 – 600 = 20,300

สายขนส่งดีที่สุดอีกชุดหนึ่ง จะได้จากการปรับตารางที่ 2 โดยเลือกสาย 2A แทนที่ 2D ค่าขนส่งทั้งหมดคงเดิม (สายขนส่งนี้จะเป็นตารางที่ 2 ถ้าเราใช้วิธีการ Row Minima) จะได้สายขนส่ง ดังนี้

โรงงานที่ 1 ส่งสินค้าไปเก็บที่คลังสินค้า B 400 หน่วย เก็บที่คลังสินค้า D 2000 หน่วย
โรงงานที่ 2 ส่งสินค้าไปเก็บที่คลังสินค้า A 300 หน่วย เก็บที่คลังสินค้า C 1500 หน่วย
โรงงานที่ 3 ส่งสินค้าไปเก็บที่คลังสินค้า A 900 หน่วย เก็บที่คลังสินค้า B 900 หน่วย

ถ้าโรงงานที่ 2 ผลิตสินค้าได้ 2000 หน่วย จะเห็นว่า ปริมาณสินค้าที่ผลิตได้ทั้งหมดจะมากกว่าปริมาณสินค้าที่คลังสินค้าทั้งสี่จะเก็บได้ จึงมีสินค้าคงเหลือที่โรงงานอย่างน้อย 1 แห่ง ถ้าเราพิจารณาจากตารางที่ 2 ซึ่งเป็นตารางสุดท้าย ในกรณีที่ โรงงานที่ 2 ผลิตสินค้าได้ 2000 หน่วย จะมีสินค้าคงเหลือ 200 หน่วย ตรวจสอบผลที่ได้จากตาราง ปรากฏผลดังนี้

คลังสินค้า	A	B	C	D	ปริมาณที่เหลือ	u_i
โรงงาน 1	5 +3	3 700	7 +9	4 1700	0 +4	0
2	6 0	9 +2	2 1500	8 300	0 200	4
3	3 1200	4 600	5 +6	6 +1	0 +3	1
v_j	2	3	-2	4	-4	

ยังคงเป็นตารางที่ดีที่สุด แสดงว่า แผนการจัดส่งสินค้าไปเก็บที่คลังสินค้าคงเดิม แต่จะมีสินค้าคงเหลือที่โรงงานที่ 2 200 หน่วย

6. กำหนดตารางแสดงเวลาที่ใช้ในการผลิตสินค้า 4 ชนิด ของเครื่องจักร 4 เครื่อง ดังนี้

	เวลาที่ใช้ในการผลิต(ชั่วโมง)			
เครื่องจักร	สินค้า A	สินค้า B	สินค้า C	สินค้า D
M1	25	30	31	28
M2	22	27	27	24
M3	34	31	35	32
M4	29	25	28	28

ในแต่ละงวดการผลิต เครื่องจักรแต่ละเครื่องผลิตสินค้าได้ไม่เกิน 1 ชนิด โรงงานควรจัดให้เครื่องจักรใดผลิตสินค้าชนิดใด จึงจะดีที่สุด

ปัญหาการจ่ายงานนี้ เป็นเรื่องเกี่ยวกับเวลา จึงเป็นเรื่องของค่าต่ำสุด เราจะเริ่มต้นการคำนวณจาก Row ไป Column หรือจาก Column ไป Row ก็ได้ ในที่นี้ เริ่มต้นจาก Row ไป Column ปรากฏผล ดังต่อไปนี้

c_{ij}

				u_i
25	30	31	28	25
22	27	27	24	22
34	31	35	32	31
29	25	28	28	25

$c_{ij} - u_i$

	0	5	6	3
	0	5	5	2
	3	0	4	1
	4	0	3	3
v_j	0	0	3	1

$c_{ij} - u_i - v_j$

0	5	3	2
0	5	2	1
3	0	1	0
4	0	0	2

0	4	2	1
0	4	1	0
4	0	1	0
5	0	0	2

ไม่สามารถลากเส้นตรง ได้ต่ำกว่า 4 เส้น แสดงว่าเป็นตาราง สุดท้าย อ่านผลที่ได้ดังนี้

โรงงานควรจัดให้เครื่องจักร M1 ผลิตสินค้า A

ให้เครื่องจักร M2 ผลิตสินค้า D

ให้เครื่องจักร M3 ผลิตสินค้า B

ให้เครื่องจักร M4 ผลิตสินค้า C

ใช้เวลาในการผลิตสินค้าทั้งสี่ชนิด = 25 + 24 + 31 + 28 = 108 ชั่วโมง

7. หาค่าสูงสุด $z = 5x_1 + 5x_2$

โดยมีข้อจำกัด

$$4x_1 + 10x_2 \leq 32$$

$$3x_1 + 11x_2 \leq 33$$

$$6x_1 + 5x_2 \leq 30$$

$$x_1, x_2 = 0, 1, 2, \ldots$$

8. หาค่าสูงสุด $Z = 75x_1 + 60x_2 + 15x_3$

โดยมีข้อจำกัด

$$10x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 200$$

$$5x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 80$$

$$x_1, x_2, x_3 = 0, 1, 2, \ldots$$

9. บริษัทขนส่งสินค้า มีรถบรรทุกสินค้าที่มีความจุ 109 ลูกบาศก์เมตร บรรทุกได้เต็มที่ 112 กิโลกรัม บริษัทมีสินค้า 4 ประเภท ที่จะต้องพิจารณาส่งให้ลูกค้าทางรถบรรทุก สินค้าแต่ละประเภทมีขนาด(ลูกบาศก์เมตร) น้ำหนัก(กิโลกรัม) และราคาขาย(บาท)ต่อหน่วย ดังนี้

ประเภทสินค้า	1	2	3	4
ขนาด	1	7	6	5
น้ำหนัก	5	7	3	2
ราคาขาย	32	49	48	40

บริษัทควรส่งสินค้าประเภทใด เป็นปริมาณเท่าใด จึงจะดีที่สุด

10. จงหาคำตอบดีที่สุดของปัญหาข้อ 12 ในแบบฝึกหัดที่ 1

11. โรงงานอุตสาหกรรมมีเครื่องจักรที่ผลิตสินค้า 3 ประเภท แต่ละประเภทสามารถนำไปใช้ผลิตสินค้าชนิดใดของโรงงานก็ได้ ในงวดการผลิตหนึ่ง ๆ โรงงานจะผลิตสินค้า ก 70 หน่วย สินค้า ข 150 หน่วย สินค้า ค 100 หน่วย และสินค้า ง 120 หน่วย เครื่องจักรประเภทแรกสามารถผลิตสินค้าได้รวมกัน 130 หน่วย เครื่องจักรประเภทที่สองผลิตได้เต็มที่ 210 หน่วย เครื่องจักรประเภทที่สามผลิตได้เต็มที่ 100 หน่วย ค่าใช้จ่ายในการผลิต(บาท/หน่วย) ของสินค้าแต่ละชนิดกำหนดไว้ดังนี้

เครื่องจักร	สินค้า ก	สินค้า ข	สินค้า ค	สินค้า ง
ประเภทที่ 1	20	15	18	12
ประเภทที่ 2	11	13	20	25
ประเภทที่ 3	16	23	18	14

โรงงานควรจัดตารางการผลิตอย่างไร จึงจะเกิดผลดีที่สุด

ถ้าเครื่องจักรประเภทที่ 1 ใช้ผลิตสินค้า ข ไม่ได้ และเครื่องจักรประเภทที่ 3 ใช้ผลิตสินค้า ง ไม่ได้ ตารางการผลิตที่เหมาะสมจะเปลี่ยนแปลงหรือไม่ อย่างไร

12. บริษัทผลิตผลไม้กระป๋องมีโรงงานผลิต 2 แห่ง มีชาวไร่ 4 ราย เป็นผู้ป้อนผลไม้สู่โรงงานเป็นประจำ ในปริมาณและราคา ต่อไปนี้

นาย ก 1,500 กิโลกรัม ๆ ละ 10 บาท

นาย ข 2,400 กิโลกรัม ๆ ละ 9 บาท

นาย ค 3,000 กิโลกรัม ๆ ละ 8 บาท

นาย ง 3,200 กิโลกรัม ๆ ละ 8 บาท

อัตราค่าขนส่งผลไม้(บาทต่อกิโลกรัม) จากชาวไร่สู่โรงงาน มีดังนี้

โรงงาน	1	2
นาย ก	2.0	2.5
นาย ข	1.0	1.5
นาย ค	2.5	4.0
นาย ง	5.0	3.0

ในแต่ละงวดการผลิต โรงงาน 1 ต้องการผลไม้ที่จะใช้ในการผลิต 5,000 กิโลกรัม โดยมีต้นทุนในการผลิต กิโลกรัมละ 25 บาท โรงงาน 2 ต้องการผลไม้ที่จะใช้ในการผลิต 5,500 กิโลกรัม โดยมีต้นทุนในการผลิต กิโลกรัมละ 20 บาท บริษัทควรวางแผนการจัดซื้อและการผลิตอย่างไร จึงจะดีที่สุด

13. องค์การแห่งหนึ่งมีงานเร่งด่วนที่จะต้องทำพร้อม ๆ กัน 4 ชิ้น มีพนักงานที่จะทำงานทั้ง 4 ให้สำเร็จได้ แต่ใช้เวลาในการทำงานแล้วเสร็จต่างกัน จากการคาดคะเนระยะเวลาที่ใช้ในการทำงานให้เสร็จได้ของพนักงานแต่ละคน ปรากฏผลดังนี้

งาน / พนักงาน	จำนวนวัน			
	ชิ้นที่ 1	ชิ้นที่ 2	ชิ้นที่ 3	ชิ้นที่ 4
นาย ก	15	10	4	15
นาย ข	17	17	7	20
นาย ค	15	15	10	22
นาย ง	22	9	12	9

องค์การควรจ่ายงานอย่างไร จึงจะเกิดผลดีที่สุด

14. บริษัทได้รับงานพิเศษ 3 ชิ้น ที่จะต้องทำในเวลาเดียวกัน บริษัทมีทีมงาน 4 ทีมที่จะทำงานเหล่านี้ได้ แต่ละทีมงานได้เสนอจำนวนคน-เวลา ที่คาดว่าจะใช้ในการออกแบบ พัฒนางาน และการปฏิบัติงาน ดังต่อไปนี้

งาน / ทีมงาน	การออกแบบ-พัฒนา คน-วัน			เวลาปฏิบัติงาน คน-วัน		
	งาน ก	งาน ข	งาน ค	งาน ก	งาน ข	งาน ค
1	8	6	9	3	3	5
2	6	3	7	5	9	8
3	5	2	–	6	9	–
4	7	4	6	6	8	7

ค่าใช้จ่ายในการออกแบบ-พัฒนางานเท่ากับ 2,000 บาทต่อคน-วัน

ค่าใช้จ่ายในการปฏิบัติงาน เท่ากับ 1,500 บาทต่อคน-วัน

14.1 บริษัทควรมอบหมายให้ทีมงานใด รับงานพิเศษชิ้นใดไปทำ จึงจะเหมาะสมที่สุด

14.2 ถ้าผลตอบแทนที่ได้จากงานแต่ละชิ้นเท่ากับ 30,000 บาท 28,000 บาท และ 35,000 บาท ตามลำดับ บริษัทควรจ่ายงานอย่างไร จึงจะดีที่สุด