บทที่ 2
โปรแกรมเชิงเส้น

โปรแกรมเชิงเส้น (Linear Programming) หรือที่เรียกสั้น ๆ ว่า LP เป็นเทคนิคที่สำคัญและนิยมใช้กันมากในบรรดาโปรแกรมเชิงคณิตศาสตร์ โปรแกรมเชิงเส้นจะถูกนำมาช่วยในการแก้ปัญหาที่เราไม่สามารถแก้ได้ด้วยตัวเราเอง เพราะเสียเวลานาน และยุ่งยากเกินไป ซึ่งอาจจะทำให้ผิดพลาดได้ง่าย LP จะมีประโยชน์ในการแก้ปัญหาที่มีทางเลือกมากมาย แต่การเกิดขึ้นของทางเลือกเหล่านั้นอยู่ภายใต้สภาวะที่แน่นอน การใช้เทคนิค LP จึงจำเป็นต้องเรียนรู้ถึงลักษณะปัญหาที่ใช้ LP และวิธีการแก้ปัญหานั้นเพื่อให้ได้ทางเลือกที่ดีที่สุด

2.1 ลักษณะของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น
(Linear Programming Problem : LPP)

เราอาจนิยาม LP ว่า เป็นเทคนิคเชิงคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการจัดสรรหรือแจกจ่ายทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัด ให้เกิดผลดีที่สุด ตรงตามวัตถุประสงค์ที่วางไว้ นักคณิตศาสตร์อาจให้นิยามว่า LP เป็นวิธีการแก้ปัญหาภายใต้ข้อบังคับต่าง ๆ โดยมีเป้าหมายว่า ต้องการให้ได้ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน นักเศรษฐศาสตร์นิยามไว้ว่า LP เป็นวิธีการจัดสรรทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัดให้สอดคล้องกับกฎของอุปสงค์และอุปทาน นักธุรกิจมอง LP ในแง่ของเครื่องมืออย่างหนึ่งที่ใช้ในปัญหาการวิเคราะห์กิจกรรมทางด้านธุรกิจ เพื่อการวิจัยและพัฒนาให้เป็นไปตามเป้าหมายที่กำหนดไว้ อย่างไรก็ตาม LP จะเกิดขึ้นได้ก็ต่อเมื่อมีการจำกัดของทรัพยากร ปัญหาในชีวิตจริงมักจะมีข้อจำกัดเสมอ ตัวอย่างเช่น โรงงานอุตสาหกรรมสามารถผลิตสินค้าได้หลายชนิด สินค้าแต่ละชนิดใช้วัตถุดิบไม่เหมือนกันและมีปริมาณต่างกัน เวลาที่ใช้ในการผลิต ขั้นตอนการผลิตก็แตกต่างกันออกไป แรงงานที่ใช้จึงไม่เท่ากัน ทั้งวัตถุดิบและแรงงานมีปริมาณจำกัด จำนวนวัตถุดิบอาจแปรผันไปตามฤดูกาล เวลาที่ใช้ในการผลิตขึ้นอยู่กับความสามารถของเครื่องจักร หากต้องการเพิ่มผลผลิตก็ต้องสต๊อควัตถุดิบไว้มากยิ่งขึ้น ต้องมีที่เก็บเพียงพอ

นั่นคือต้องขยายที่เก็บวัตถุดิบอีก และต้องเพิ่มปริมาณแรงงาน เช่น เพิ่มเครื่องจักรหรือขยายเวลาการทำงาน เป็นต้น นอกจากนี้ยังมีข้อจำกัดเกี่ยวกับการขายซึ่งอาจแปรผันไปตามฤดูกาลหรือปริมาณขายของสินค้าต่าง ๆ บางชนิดอาจขายได้ในปริมาณจำกัด แต่บางชนิดขายได้ไม่จำกัด กำไรที่ได้จากการจำหน่ายสินค้าแต่ละชนิด ขึ้นอยู่กับต้นทุนการผลิต ค่าขนส่งหรืออื่น ๆ กำไรของสินค้าแต่ละชนิดจึงไม่เท่ากัน ปัญหามีอยู่ว่าเราจะเลือกผลิตสินค้าชนิดใด อย่างไรจึงจะได้กำไรมากที่สุด การผลิตเพื่อให้ได้กำไรสูงสุดก็คือเป้าหมายของโรงงานอุตสาหกรรมนี้ การใช้ LP ในการแก้ปัญหาจึงต้องศึกษารายละเอียดและทำการวิเคราะห์ปัญหาที่เกิดขึ้น จะต้องรู้ว่าข้อจำกัดของปัญหาที่ประสบอยู่มีอะไรบ้าง มีขอบเขตและเงื่อนไขอย่างไร เป้าหมายที่ต้องการคืออะไร ต้องการค่าสูงสุดหรือต้องการค่าต่ำสุด อาศัยเงื่อนไขของข้อจำกัดและเป้าหมายที่กำหนดไว้ นำมาวิเคราะห์หาตัวแปรที่จะใช้ในการตัดสินใจ (decision variable) ดูว่าตัวแปรเหล่านี้มีอะไรบ้าง สามารถนำมาเขียนเป็นรูปสมการหรืออสมการเชิงเส้นของข้อจำกัด และฟังก์ชันเป้าหมายได้หรือไม่ และมีข้อกำหนดว่าตัวแปรเหล่านี้จะต้องมีค่าเป็นบวกเสมอ เราจึงให้นิยามของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น (LPP) และตัวแบบของปัญหาดังต่อไปนี้

ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น (LPP) ก็คือ ปัญหาเกี่ยวกับการใช้หรือการจัดสรรทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัด ให้บรรลุถึงเป้าหมายที่วางไว้อย่างมีประสิทธิภาพ เป้าหมายจะเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของตัวแปร เรียกว่า ฟังก์ชันเป้าหมาย (objective function) กำหนดในเทอมของการหาค่าสูงสุด หรือการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน โดยมีข้อจำกัดเกี่ยวกับการใช้หรือการจัดสรรทรัพยากรอันได้แก่ กำลังคน เงินทุน วัตถุดิบ เครื่องจักร ทรัพย์สินต่าง ๆ ฯลฯ ซึ่งเขียนเป็นสมการหรืออสมการเชิงเส้น ตัวแบบของปัญหาเขียนได้ดังนี้

หาค่าสูงสุด (หรือหาค่าต่ำสุด) $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ (2.1)

โดยมีข้อจำกัด

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\{\leqslant, \geqslant, =\} b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\{\leqslant, \geqslant, =\} b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\{\leqslant, \geqslant, =\} b_m \end{aligned} \quad (2.2)$$

และ $x_j(j = 1,2, \ldots, n) \geqslant 0$ (2.3)

หรือเขียนแบบย่อได้ดังนี้

หาค่าสูงสุด $P = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$ (2.1)’

โดยมีข้อจำกัด $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \{\leqslant, \geqslant, =\} b_i, i = 1, 2, \ldots m$ **(2.2)'**

และ $x_j \geqslant 0, j = 1,2,3,\ldots,n$ (2.3)′

ในเมื่อ m = จำนวนทรัพยากรที่จะนำมาใช้หรือที่ต้องการ

n = จำนวนกิจกรรมที่จะทำ

a_{ij} = จำนวนหน่วยของทรัพยากร i ที่มีหรือที่จะใช้ในกิจกรรม j หนึ่งหน่วย

b_i = จำนวนหน่วยของทรัพยากร i ที่มีหรือที่ต้องการให้มี

c_j = ผลตอบแทนหรือค่าใช้จ่ายจากกิจกรรม j หนึ่งหน่วย

x_j = จำนวนหน่วยของกิจกรรม j

ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นมีหลายขนาด ตั้งแต่ปัญหาขนาดเล็ก มีตัวแปรหรือข้อจำกัดไม่เกิน 5 เป็นปัญหาง่าย ๆ ซึ่งเราอาจพบได้ในชีวิตประจำวัน และเราสามารถหาคำตอบได้ด้วยตัวเราโดยไม่ต้องใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ ปัญหาขนาดกลาง มีตัวแปรและข้อจำกัดเป็นจำนวนร้อย เราพอจะแก้ปัญหานี้ได้ แต่ต้องใช้เวลามากและอาจจะเกิดข้อผิดพลาดได้ง่าย หรือหาคำตอบได้ไม่ทันการ โดยทั่วไปจึงต้องใช้เครื่องคอมพิวเตอร์เข้ามาช่วย นอกจากนี้ก็มีปัญหาขนาดใหญ่ มีจำนวนตัวแปรนับพันและข้อจำกัดอีกมากมายจนเราไม่สามารถแก้ปัญหาเองได้ ต้องใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ในการแก้ปัญหาเท่านั้น อย่างไรก็ตามวิธีการหาคำตอบยังคงใช้หลักการเดียวกัน เพื่อที่จะให้เข้าใจถึงปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น และการสร้างตัวแบบของปัญหานั้น ๆ จะขอเริ่มด้วยปัญหาขนาดเล็ก ให้เรามาพิจารณาตัวอย่างปัญหาต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2.1 บริษัทสยามสั่งชิ้นส่วนเครื่องจักรมาประกอบเองที่โรงงาน 2 แห่งในเขต ก และเขต ข บริษัทกำหนดว่าจะต้องประกอบเครื่องจักรประเภทที่ 1 ให้ได้อย่างน้อยที่สุด 5,000 ประกอบเครื่องจักรประเภทที่ 2 และ 3 ไม่เกิน 24,000 และ 30,000 ตามลำดับ ในแต่ละวันโรงงานในเขต ก สามารถประกอบเครื่องจักรแต่ละประเภทได้ 20, 40 และ 40 ตามลำดับ ในขณะที่โรงงานในเขต ข สามารถประกอบได้ 10, 30 และ 50 ตามลำดับ โรงงานในเขต ก เสียค่าใช้จ่ายในการประกอบเครื่องจักรวันละ 72,000 บาท ส่วนโรงงานในเขต ข เสียค่าใช้จ่ายวันละ 48,000 บาท บริษัทสยามควรจะวางแผนการประกอบเครื่องจักรอย่างไร จึงจะทำให้บริษัทเสียค่าใช้จ่ายทั้งหมดน้อยที่สุด แต่สามารถประกอบเครื่องจักรแต่ละประเภทได้ตามที่กำหนดไว้ จงเขียนตัวแบบของปัญหานี้

วิธีทำ ข้อมูลในตัวอย่างนี้ เกี่ยวกับผลงานและค่าใช้จ่ายในแต่ละวันของโรงงานทั้งสอง ดังนั้น กิจกรรมที่ต้องกระทำก็คือ การวางแผนกำหนดระยะเวลาของการดำเนินงาน เพื่อให้ได้ผลงาน คือเครื่องจักรประเภทต่าง ๆ ครบตามต้องการ แต่ให้เสียค่าใช้จ่ายต่ำสุด เราจึงกำหนดตัวแปรตัดสินใจ และเขียนตัวแบบได้ดังนี้

บริษัทจะประกอบเครื่องจักรที่โรงงาน ก = x_1 วัน

ประกอบที่โรงงาน ข = x_2 วัน

ค่าต่ำสุด $Z = 72000x_1 + 48000x_2$

โดยมีข้อจำกัด

$$20x_1 + 10x_2 \geqslant 5000$$

$$40x_1 + 30x_2 \leqslant 24000$$

$$40x_1 + 50x_2 \leqslant 30000$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

ตัวอย่างที่ 2.2 องค์การรัฐวิสาหกิจแห่งหนึ่งวางแผนไว้ว่า ในปีหนึ่ง ๆ จะต้องทำงานตามแผนเอและแผนบีให้ได้จำนวนมากที่สุด 3,000 ชิ้นในแต่ละแผน องค์การแบ่งการทำงานในแต่ละแผนออกเป็น 2 งวด งานที่ทำได้ในงวดแรกตามแผนเอและแผนบี จะทำกำไรให้กับองค์การโดยเฉลี่ย 50 และ 45 บาทต่อชิ้น ตามลำดับ ส่วนงานที่ทำในงวดที่ 2 จะทำกำไรให้โดยเฉลี่ย 100 และ 88 บาทต่อชิ้น ตามลำดับ การทำงานในแต่ละแผนต้องอาศัยการทำร่วมกันของ 2 แผนก แต่ละแผนกสามารถทำงานได้ในแต่ละงวด 12,000 และ 15,000 ชั่วโมง ตามลำดับ การทำงานตามแผนเอและแผนบี ในแผนกที่ 1 ใช้เวลาโดยเฉลี่ย 5, 6 ชั่วโมงต่อชิ้น ตามลำดับ ส่วนในแผนกที่ 2 ใช้เวลาโดยเฉลี่ย 3 และ 1 ชั่วโมง ตามลำดับ องค์การควรทำงานในแต่ละงวดอย่างไรจึงจะได้งานตามแผนที่วางไว้ และทำให้องค์การได้กำไรรวมทั้งปีมากที่สุด จงเขียนตัวแบบของปัญหานี้

วิธีทำ ข้อมูลในตัวอย่างนี้แสดงถึง เวลาที่จะนำมาใช้ทำงานได้ในแต่ละงวดของทั้ง 2 แผนก และรายละเอียดในการทำงานตามแผนเอและแผนบี กิจกรรมในที่นี้จึงเป็นปริมาณงานที่ต้องกระทำตามแผนเอและแผนบีในแต่ละงวด เนื่องจากผลตอบแทนของงานในแผนเดียวกัน ของแต่ละงวดไม่เท่ากัน ดังนั้น การกำหนดปริมาณงานในแผนเดียวกันของแต่ละงวดย่อมไม่เท่ากัน เรากำหนดตัวแปรตัดสินใจและเขียนตัวแบบได้ดังนี้

องค์การทำงานในงวดแรกตามแผนเอ = x_1 ชิ้น

งานงวดแรกตามแผนบี = x_2 ชิ้น

ทำงานงวดที่ 2 ตามแผนเอ = x_3 ชิ้น

ทำงานงวดที่ 2 ตามแผนบี = x_4 ชิ้น

ค่าสูงสุด $Z = 50x_1 + 45x_2 + 100x_3 + 88x_4$

โดยมีข้อจำกัด

$$
\begin{aligned}
x_1 \quad + x_3 \quad &\leq 3000 \\
x_2 \quad + x_4 &\leq 3000 \\
5x_1 + 6x_2 \quad &\leqslant 12000 \\
3x_1 + x_2 \quad &\leqslant 15000 \\
5x_3 + 6x_4 &\leqslant 12000 \\
3x_3 + x_4 &\leqslant 15000 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqslant 0
\end{aligned}
$$

ตัวอย่างที่ 2.3 โรงงานเคมีภัณฑ์ต้องการเตรียมสารเคมี X จำนวน 120 กิโลกรัม เพื่อใช้ในการผลิตขั้นต่อไป โดยมีเกณฑ์กำหนดว่า สารเคมี X ที่ผลิตได้จะต้องมีส่วนประกอบของสารเอ อย่างน้อยที่สุด 4.5 กิโลกรัม มีสารบีระหว่าง 30 ถึง 60 กิโลกรัม แผนกเตรียมสารเคมี X เลือกใช้วัตถุดิบ P, Q และ R ซึ่งมีส่วนประกอบและราคา ดังนี้

ส่วนประกอบ \ **วัตถุดิบ**	P	Q	R
สารเอ	3%	4%	4%
สารบี	50%	20%	5%
ราคา (บาท/100 กิโลกรัม)	42	67	12

การนำวัตถุดิบแต่ละชนิดมาใช้ในการผลิตสารเคมี X จะต้องเสียค่าใช้จ่ายในการผลิต 8 บาทต่อร้อยกิโลกรัม การผลิตสารเคมี X อาจจะใช้สารเอรวมกับวัตถุดิบที่เลือกใช้ โดยตรงก็ได้ เพื่อให้ได้ส่วนประกอบของสารเอตามเกณฑ์ที่ต้องการ แต่ราคาของสารเอค่อนข้างแพง คือกิโลกรัมละ 100 บาท

ถ้าท่านเป็นผู้เตรียมสารเคมี X ท่านจะตัดสินใจอย่างไร จึงจะเกิดผลดีที่สุด จงเขียนตัวแบบของปัญหานี้

วิธีทำ จะเห็นว่า การเตรียมสารเคมี X อาจใช้วัตถุดิบ และ/หรือสารเอ ก็ได้ ส่วนประกอบและราคาของวัตถุดิบ กำหนดในค่าต่อร้อย เราจึงกำหนดตัวแปรตัดสินใจ ดังนี้

กำหนดว่า เลือกใช้วัตถุดิบ P = x_1 ร้อยกิโลกรัม

เลือกใช้วัตถุดิบ Q = x_2 ร้อยกิโลกรัม

เลือกใช้วัตถุดิบ R = x_3 ร้อยกิโลกรัม

เลือกใช้สารเอ = x_4 กิโลกรัม

การใช้วัตถุดิบในการผลิตสารเคมี X จะมีค่าใช้จ่าย 2 ประเภทคือ ราคาของวัตถุดิบนั้น กับค่าใช้จ่ายในการผลิต ส่วนสารเอจะมีเพียงราคาอย่างเดียวเท่านั้น ดังนั้น ต้นทุนการผลิตทั้งหมด จึงเท่ากับ

$$Z = (42+8)x_1 + (67+8)x_2 + (12+8)x_3 + 100x_4 \quad \text{บาท}$$

เขียนตัวแบบของปัญหาได้ดังนี้ :

$$\text{ค่าต่ำสุด} \quad Z = 50x_1 + 75x_2 + 20x_3 + 100x_4$$

$$\begin{aligned}
\text{โดยมีข้อจำกัด} \quad 100x_1 + 100x_2 + 100x_3 + x_4 &= 120 \\
3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 &\geqslant 4.5 \\
50x_1 + 20x_2 + 5x_3 &\geqslant 30 \\
50x_1 + 20x_2 + 5\% &\leqslant 60 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqslant 0
\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2.4 บริษัทโฆษณาวางแผนในการทำแคมเปญโฆษณาสินค้าใหม่ โดยใช้สื่อการโฆษณาทางโทรทัศน์ วิทยุและหนังสือพิมพ์ และจะทำแคมเปญโฆษณาทางโทรทัศน์ 2 ชุด บริษัทมีงบประมาณที่จะใช้ในการทำโฆษณาครั้งนี้ K บาท และกะว่าจะวางแผนโฆษณาเพื่อเจาะตลาดลูกค้าวัยรุ่น คาดว่าจะสามารถดึงลูกค้าได้อย่างน้อย M คน การทำโฆษณาทางโทรทัศน์จะใช้งบประมาณไม่เกิน N บาท และการโฆษณาสำหรับชุดแรกอย่างน้อยที่สุด t_1 ครั้ง ชุดที่ 2 จะทำการโฆษณาอย่างน้อยที่สุด t_2 ครั้ง สำหรับการโฆษณาทางวิทยุและหนังสือพิมพ์ไม่จำกัดจำนวนครั้ง จากการศึกษาตลาด บริษัทสามารถคาดคะเนผลที่ได้โดยเฉลี่ยต่อการโฆษณาต่าง ๆ ในแต่ละครั้งได้ดังนี้

	โทรทัศน์ ชุดแรก	โทรทัศน์ ชุดที่ 2	วิทยุ	หนังสือพิมพ์
ค่าใช้จ่าย (บาท)	c_1	c_2	c_3	c_4
จำนวนลูกค้าที่มีกำลังซื้อสูง(คน)	p_1	p_2	p_3	p_4
จำนวนลูกค้าวัยรุ่น (คน)	a_1	a_2	a_3	a_4

แผนการโฆษณาควรจะเป็นอย่างไร จึงจะสามารถดึงลูกค้าที่มีกำลังซื้อสูงได้มากที่สุด

วิธีทำ กำหนดว่า บริษัททำแคมเปญโฆษณา ดังต่อไปนี้

โฆษณาทางโทรทัศน์ชุดแรก x_1 ครั้ง

ชุดที่สอง x_2 ครั้ง

โฆษณาทางวิทยุ x_3 ครั้ง

โฆษณาทางหนังสือพิมพ์ x_4 ครั้ง

เขียนตัวแบบได้ดังนี้

ค่าสูงสุด $Z = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4$

โดยมีข้อจำกัด
$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \leqslant K$$
$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 \geqslant M$$
$$c_1x_1 + c_2x_2 \leqslant N$$
$$x_1 \geqslant t_1$$
$$x_2 \geqslant t_2$$
$$x_3 \geqslant 0$$
$$x_4 \geqslant 0$$

2.2 เทคนิคและวิธีการในการหาคำตอบต่อปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น

การวิเคราะห์เพื่อหาคำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น เป็นการพิจารณาจากบรรดาคำตอบทั้งหลายที่เป็นไปได้ ภายใต้เงื่อนไขของข้อจำกัด และคำตอบไม่มีค่าเป็นลบ คำตอบที่ให้ค่าของ Z สูงสุด (หรือต่ำสุด) จะเป็นคำตอบที่ดีที่สุด (optimal solution) ปัญหาอยู่ที่ว่า เราควรจะเลือกใช้เทคนิคหรือวิธีการใด จึงจะง่ายและสะดวก เทคนิคหรือวิธีการที่สำคัญและนิยมใช้กันแพร่หลาย ได้แก่

2.2.1 วิธีกราฟ การใช้กราฟแสดงบริเวณคำตอบที่เป็นไปได้ เหมาะสมกับปัญหาที่มีตัวแปรตัดสินใจไม่เกิน 2 ตัวแปร การหาคำตอบต่อปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นของตัวแปร x_1 กับ x_2 เรากำหนดแกนนอนแทนค่าของ x_1 และแกนตั้งแทนค่าของ x_2 ในเมื่อ x_1 และ x_2 แสดงถึงจำนวนที่มีความหมายแท้จริง ค่าของมันจะต้องไม่เป็นลบ เราจึงสนใจค่าของ x_1 และ x_2 ที่อยู่ในส่วนที่ 1 เท่านั้น

การเขียนกราฟของข้อจำกัดที่แสดงถึงจำนวนทรัพยากรที่มีอยู่ เช่น

$$2x_1 + 3x_2 \leqslant 90$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

ในการเขียนกราฟ เราจะแยกพิจารณาข้อจำกัดเป็น 2 ส่วน คือส่วนที่เป็นอสมการ (น้อยกว่า) กับส่วนที่เป็นสมการ ดังนั้น คำตอบที่ได้จากข้อจำกัดนี้ จะเป็นจุดทุกจุดบนเส้นตรง

$$2x_1 + 3x_2 = 90$$

และจุดทุกจุดบนระนาบ

$$2x_1 + 3x_2 < 90$$

สมการ $2x_1 + 3x_2 = 90$ แสดงให้เห็นได้ด้วยกราฟเส้นตรงที่ลากเชื่อมต่อระหว่างจุด 2 จุดใด ๆ ซึ่งได้มาจากสมการนี้ เช่น เมื่อเรากำหนด $x_1 = 0$ เราจะได้

$$2(0) + 3x_2 = 90 \text{ หรือ } x_2 = \frac{90}{3} = 30$$

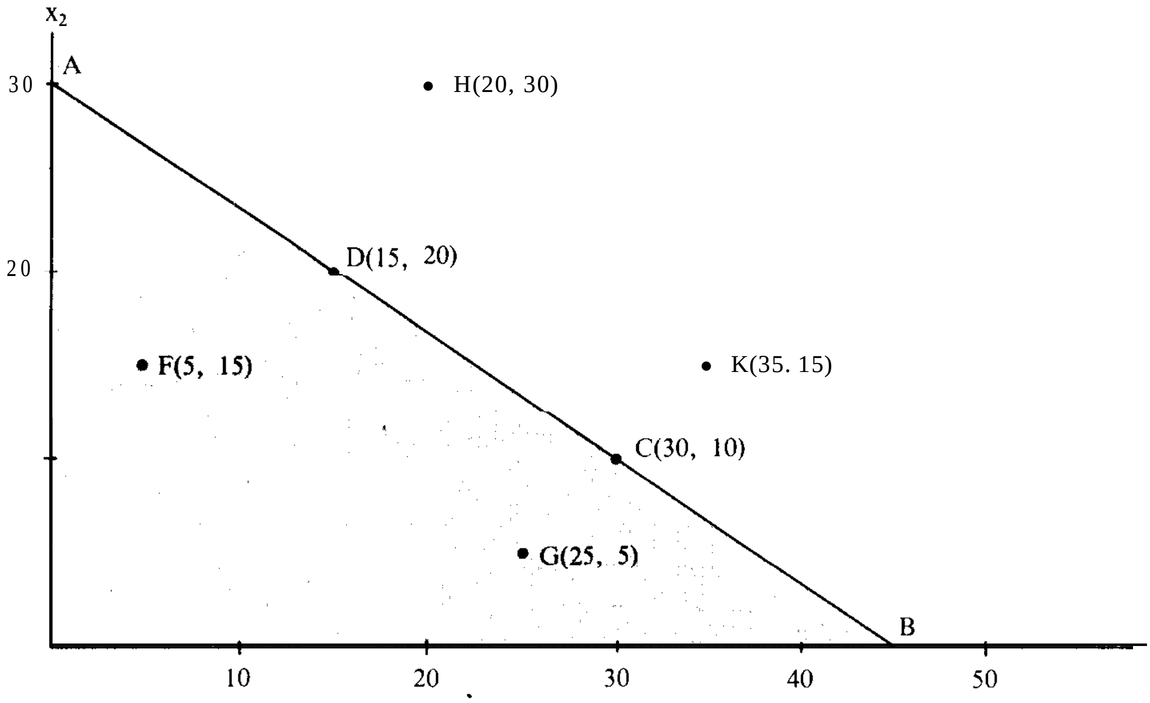
จุดของคำตอบนี้คือจุด A(0, 30)

เมื่อเรากำหนด $x_2 = 0$ เราจะได้

$$2x_1 + 3(0) = 90 \text{ หรือ } x_1 = \frac{90}{2} = 45$$

จุดของคำตอบนี้คือจุด B(45, 0)

ลากเส้นตรง AB จะได้กราฟดังรูป



จากกราฟจะเห็นว่า ค่าของ x_1 และ x_2 ที่เป็นคำตอบที่เป็นไปได้คือ ทุกค่าที่อยู่บนเส้นรอบรูปและภายในรูปสามเหลี่ยม OAB จุดทุกจุดบนเส้นตรง AB แสดงถึงค่าของ x_1 และ x_2 ที่ทำให้ $2x_1 + 3x_2 = 90$ มีความหมายว่า ทรัพยากรถูกนำไปใช้หมดพอดี ตัวอย่างเช่น คำตอบที่จุด A, B, C และ D ถ้าเราเลือกคำตอบที่จุด C แสดงว่าเราทำกิจกรรมที่ 1 30 หน่วย และทำกิจกรรมที่ 2 10 หน่วย จำนวนทรัพยากรที่นำไปใช้ จะเท่ากับ $2(30) + 3(10) = 90$

จุดทุกจุดภายในสามเหลี่ยม OAB เช่นจุด F, G ฯลฯ แสดงให้เห็นว่า การเลือกทำกิจกรรมของเรา ไม่ได้ใช้ทรัพยากรทั้งหมด นั่นคือ

$$2x_1 + 3x_2 < 90$$

หากเราเลือกคำตอบที่จุด G แสดงว่า เราทำกิจกรรมที่ 1 25 หน่วย ทำกิจกรรมที่ 2 5 หน่วย จำนวนทรัพยากรที่ถูกใช้ไปจะเท่ากับ $2(25) + 3(5) = 65$ ยังคงมีทรัพยากรเหลืออยู่เท่ากับ $90 - 65 = 25$

สำหรับจุดทุกจุดนอกรูป เช่น จุด H และ K เป็นต้น เป็นจุดคำตอบที่เป็นไปไม่ได้ เราไม่อาจเลือกจุดคำตอบเหล่านี้ได้ เนื่องจากมีจำนวนทรัพยากรไม่พอที่จะทำกิจกรรมได้

การเขียนกราฟของข้อจำกัดที่กำหนดเกณฑ์ขั้นต่ำของการใช้ทรัพยากร หรือกำหนดคุณสมบัติขั้นต่ำ เช่น

$$4x_1 + x_2 \geqslant 48$$

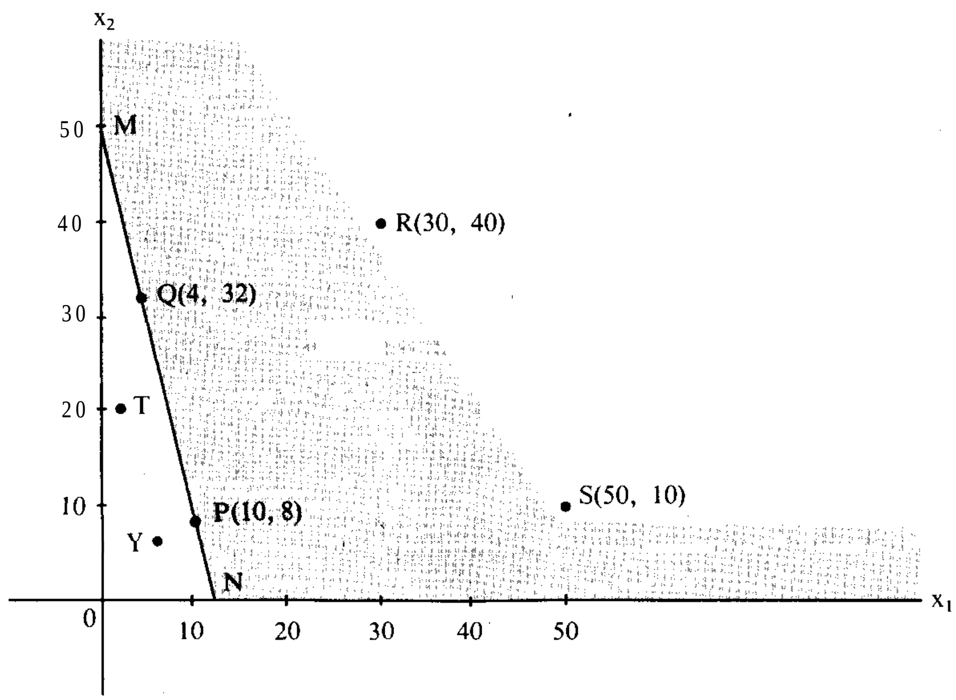
เราใช้วิธีการเดียวกัน คือ แยกข้อจำกัดเป็นสมการ $4x_1 + x_2 = 48$ และอสมการ $4x_1 + x_2 > 48$

เขียนกราฟเส้นตรง ดังนี้

ให้ $x_1 = 0$ จะได้ $4(0) + x_2 = 48$ หรือ $x_2 = 48$ เป็นจุด M(0, 48)

ให้ $x_2 = 0$ จะได้ $4x_1 + 0 = 48$ หรือ $x_1 = \frac{48}{4} = 12$ เป็นจุด N(12, 0)

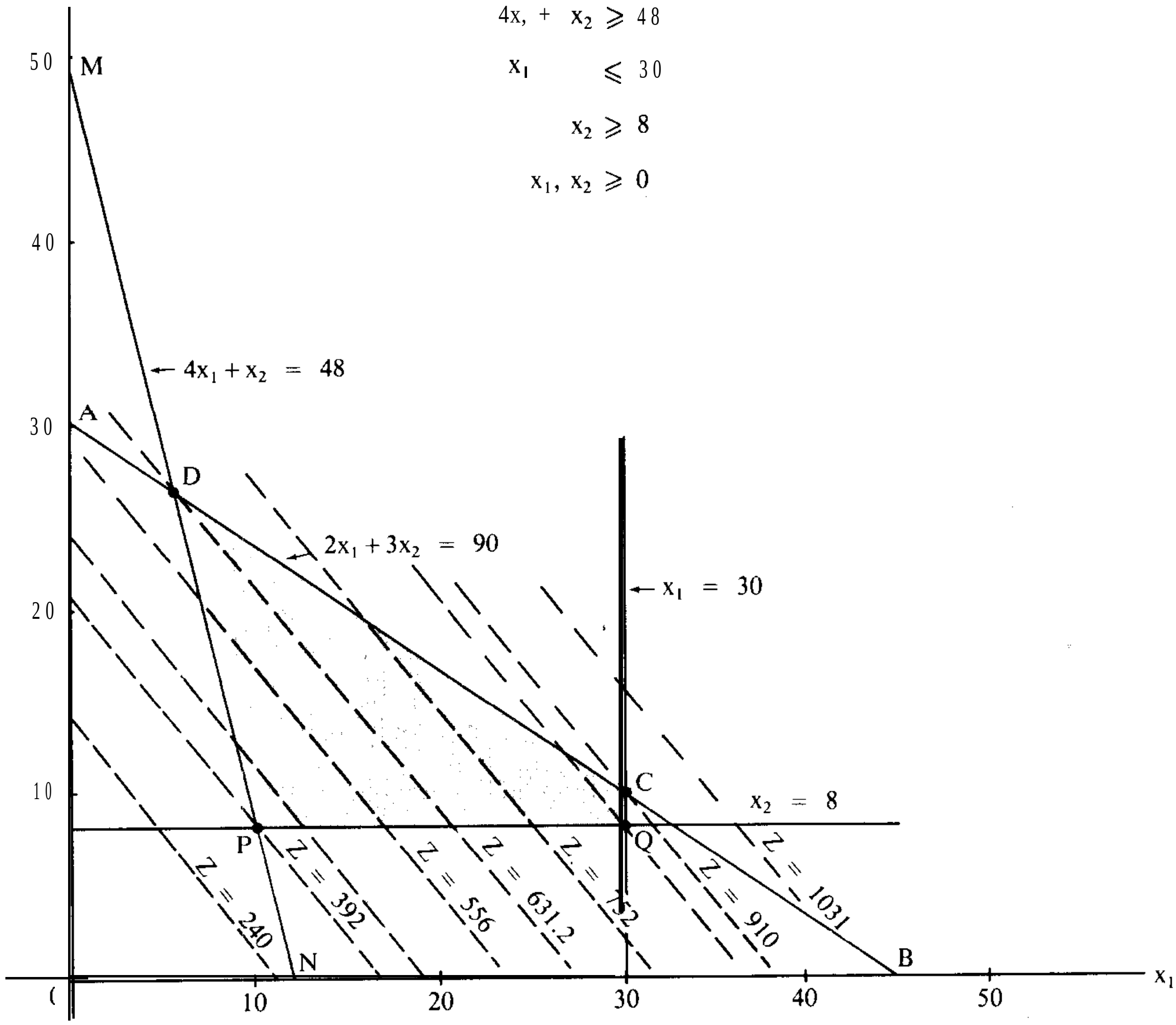
ลากเส้นตรง MN จุดทุกจุดบนเส้นตรง MN จะแสดงถึงคำตอบที่ทำให้เกิดมาตรฐานต่ำสุด เท่ากับ 48 และจุดทุกจุดเหนือเส้นตรง MN จะแสดงถึงคำตอบที่ทำให้เกิดคุณสมบัติมากกว่า 48 หากเราพิจารณาเฉพาะคำตอบที่มีความหมาย นั่นคือ $x_1 \geqslant 0$ และ $x_2 \geqslant 0$ ด้วย จะได้กราฟดังรูป



หากเลือกคำตอบที่จุด P หรือ Q เราจะได้ค่ามาตรฐานเท่ากับ 48 ถ้าคำตอบอยู่ที่จุด S หรือ R จะได้ค่ามาตรฐานมากกว่า 48 ตัวอย่างเช่น เลือกคำตอบที่จุด S แสดงว่าเราเลือก $x_1 = 50, x_2 = 10$ คุณสมบัติที่ได้จะเท่ากับ $4(50) + 10 = 210$ นั่นคือมีคุณสมบัติเกินมาตรฐานขั้นต่ำ เท่ากับ $210 - 48 = 162$ คำตอบที่จุด T, Y และทุกจุดในสามเหลี่ยม OMN เป็นคำตอบที่ใช้ไม่ได้ เนื่องจากเป็นคำตอบที่ทำให้เกิดคุณสมบัติต่ำกว่ามาตรฐาน

เมื่อมีข้อจำกัดมากกว่า 1 เราลากเส้นตรงของสมการข้อจำกัดทุกสมการ บริเวณร่วมกันของทุกข้อจำกัด จะเป็นบริเวณคำตอบที่เป็นไปได้ ซึ่งเป็นคำตอบของทุกข้อจำกัด ตัวอย่างเช่น รูป CDPQ จะเป็นบริเวณคำตอบที่เป็นไปได้ของข้อจำกัด

$$2x_1 + 3x_2 \leqslant 90$$
$$4x_1 + x_2 \geqslant 48$$
$$x_1 \leqslant 30$$
$$x_2 \geqslant 8$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0$$



ถ้าเรามีฟังก์ชัน $Z = 24x_1 + 19x_2$ เส้นตรงทุกเส้นที่มีความลาดชันเป็น $-\frac{24}{19}$ ในกราฟคือเส้น__________ ที่ขนานกันทุกเส้น จะเป็นฟังก์ชัน Z ที่มีค่าต่าง ๆ กัน จากกราฟเราจะเห็นว่าค่าของ Z โตขึ้น เมื่อเส้นนี้เลื่อนออกไป และจะมีค่าลดลงเมื่อเส้นนี้เลื่อนเข้าใกล้จุด 0 และจะเห็นว่า Z มีค่าต่ำสุดที่จุด P(Z = 392) มีค่าสูงสุดที่จุด C (Z = 910) แม้ว่า Z = 240 จะต่ำกว่า Z_P และ Z = 1031 จะสูงกว่า Z_C ก็ตาม แต่ค่าเหล่านี้ใช้ไม่ได้ เนื่องจากคำตอบที่ได้เป็นคำตอบ

ที่มีคุณสมบัติไม่ครบทุกข้อจำกัด นั่นคือเป็นคำตอบที่เป็นไปไม่ได้ (infeasible solution) สรุปว่า คำตอบที่ทำให้ได้ค่า Z สูงสุด หรือค่า Z ต่ำสุด จะอยู่ที่จุดยอดมุมของบริเวณคำตอบที่เป็นไปได้ ดังนั้น แทนที่เราจะมาพิจารณาคำตอบที่เป็นไปได้นับจำนวนไม่ถ้วน เราก็จะพิจารณาเฉพาะคำตอบที่เป็นไปได้ขั้นฐาน (basic feasible solution) ซึ่งก็คือคำตอบที่จุดยอดมุมนั่นเอง นั่นก็คือ ลดจำนวนพิจารณาจากจำนวนนับไม่ถ้วนมาเป็นจำนวนที่นับได้ เนื่องจากคำตอบที่ดีที่สุด (optimal solution) จะอยู่ที่จุดยอดมุมเสมอ สรุปได้ว่า ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นที่มีตัวแปรไม่เกิน 2 ตัว หรือมีตัวแปรมากกว่า 2 ตัวแต่สามารถแปลงให้มีตัวแปรไม่เกิน 2 ได้ ซึ่งมีตัวแบบเป็น

ค่าสูงสุด (หรือค่าต่ำสุด) ของ $Z = c_1x_1 + c_2x_2$

โดยมีข้อจำกัด $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 (\leqslant, \geqslant) b_i, i = 1, 2, \ldots, m$

และ $x_1 \geqslant 0$

$x_2 \geqslant 0$

เราหาคำตอบที่ดีที่สุด (optimal solutions) ด้วยวิธีกราฟได้ตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

1) ลากเส้นตรงเชื่อมระหว่างจุด $\left(\frac{b_i}{a_{i1}}, 0\right)$ กับ $\left(0, \frac{b_i}{a_{i2}}\right)$ ทุก ๆ $i = 1,2,\ldots,m$ เส้นตรงเหล่านี้จะแสดงขอบเขตสูงสุดของการใช้ทรัพยากร (ข้อจำกัดอยู่ในรูป $\leqslant$) หรือขอบเขตต่ำสุดตามที่กำหนดไว้ (ข้อจำกัดอยู่ในรูป $\geqslant$)

2) หาบริเวณร่วมกันของข้อจำกัดทุกข้อที่มี ซึ่งก็คือบริเวณในส่วนที่ 1 ล้อมรอบด้วยเส้นตรงจาก (1) บริเวณนี้คือบริเวณคำตอบที่เป็นไปได้ (feasible region)

3) ลากเส้นตรงที่มีความลาดชันเท่ากับ $-c_1/c_2$ (คือเส้น----------) เลื่อนเส้นตรงนี้ในแนวขนานในบริเวณคำตอบที่เป็นไปได้ เส้นขนานเหล่านี้จะแสดงค่าของกำไร (isoprofit) หรือค่าใช้จ่าย (isocost) ที่คำตอบต่าง ๆ

หากต้องการค่า Z สูงสุด เลื่อนเส้นขนานไปข้างบน

หากต้องการค่า Z ต่ำสุด เลื่อนเส้นขนานลงมาข้างล่าง

จุดสุดท้ายที่เส้นขนานเหล่านี้ลากผ่านก่อนที่จะพ้นบริเวณคำตอบที่เป็นไปได้ จะเป็นจุดยอดมุมที่เรียกว่าจุดอุตมะ เราจะได้คำตอบที่ดีที่สุด (optimal solutions)

ข้อสังเกต หากคำตอบนี้อยู่บนเส้นตรงของข้อจำกัด p และ q คำตอบที่ดีที่สุดก็คือคำตอบที่ได้จากการแก้สมการ

$$a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 = b_p$$

และ $$a_{q1}x_1 + a_{q2}x_2 = b_q$$

ซึ่งแสดงให้เห็นว่า ทรัพยากร p และ q ถูกนำไปใช้จนหมดสิ้น (กรณี $\leqslant$) หรือใช้ตามเกณฑ์กำหนดขั้นต่ำสุด (กรณี $\geqslant$) สมมติคำตอบที่ได้คือ $x_1 = d_1, x_2 = d_2$ แสดงให้เห็นว่า ผลจากการตัดสินใจจะมีทรัพยากรที่ $i(i \neq p \neq q)$ เหลืออยู่เป็นจำนวน $b_i - a_{i1}d_1 - a_{i2}d_2$ (กรณี $\leqslant$) หรือใช้ทรัพยากร $i(i \neq p \neq q)$ เกินขีดต่ำสุดไปเท่ากับ $a_{i1}d_1 + a_{i2}d_2 - b_i$

2.2.2 **วิธีการซิมเพลกซ์** (Simplex Method) การหาคำตอบต่อปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นด้วยวิธีกราฟนั้นสะดวกในกรณีที่มีตัวแปรควบคุมได้ไม่เกิน 2 หากมีตัวแปรเกิน 2 การใช้กราฟค่อนข้างยุ่งยาก หรือไม่อาจทำได้ ปัญหาโดยทั่ว ๆ ไปนั้นมีตัวแปรหลายตัวจึงไม่อาจใช้กราฟในการแก้ปัญหาหรือหาคำตอบต่อปัญหานั้นได้ วิธีการที่เป็นที่รู้จักกันดีมากและใช้กันแพร่หลายในการหาคำตอบต่อปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น คือวิธีการซิมเพลกซ์ (simplex method) ซึ่งปรับปรุงขึ้นมาโดย George Dantzig ในปี 1947 เป็นวิธีการทำซ้ำอย่างมีระบบ โดยเริ่มต้นจากจุดยอดมุมเริ่มต้น เคลื่อนที่อย่างมีระบบไปยังจุดยอดมุมต่อไปที่ทำให้ค่าของฟังก์ชันเป้าหมายสูงสุดหรือต่ำสุดแล้วแต่กรณี จุดยอดมุมแต่ละจุดจะเป็นคำตอบฐาน (basic solution) เราสนใจเฉพาะจุดยอดมุมที่มีคำตอบฐานมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0 เท่านั้น นั่นก็คือ จุดยอดมุมของบริเวณคำตอบที่เป็นไปได้ การหาคำตอบที่จุดยอดมุมแต่ละจุดของบริเวณคำตอบที่เป็นไปได้ สาระข้อมูลที่เกี่ยวกับจุดยอดมุมนั้น ตลอดจนเงื่อนไขของการเปลี่ยนจุด จะกำหนดไว้ในตาราง ซึ่งเรียกว่าตารางซิมเพลกซ์ วิธีการซิมเพลกซ์จึงแสดงค่าด้วยตารางที่มีจำนวนนับได้ เนื่องจากตารางหนึ่งก็คือคำตอบของจุดยอดมุมหนึ่ง จากตารางจะบอกให้เรารู้ว่าจุดยอดมุมที่ได้หรืออีกนัยหนึ่งก็คือคำตอบที่เป็นไปได้พื้นฐาน (basic feasible solution) เป็นจุดอุตมะ (optimal point) หรือไม่ถ้าไม่เป็น จุดถัดไปควรจะเป็นจุดไหน

วิธีการซิมเพลกซ์จะเริ่มที่จุดกำหนดให้ จึงมีปัญหาว่าจุดยอดมุมที่จะเป็นคำตอบขั้นต้นควรจะเป็นจุดใด หากจุดกำเนิดเป็นคำตอบที่เป็นไปได้ด้วย จุดยอดมุมเริ่มต้นก็จะอยู่ที่จุดกำเนิดซึ่งเท่ากับว่าเมื่อไม่มีการตัดสินใจใด ๆ หรือยังไม่ทำกิจกรรมใด ค่าของฟังก์ชันเป้าหมายจะเป็น 0 แต่ถ้าจุดกำเนิดไม่เป็นคำตอบที่เป็นไปได้ จะมีวิธีเลือกจุดเริ่มต้นอย่างไรจึงจะไม่มีปัญหาหากเลือกไม่ดีอาจต้องใช้เวลามาก ต้องทำหลายตารางกว่าจะถึงคำตอบอุตมะได้ อย่างไรก็ตามการกำหนดจุดยอดมุมเริ่มต้น เรามักจะเริ่มด้วยการกำหนดตัวแปรที่ควบคุมได้ซึ่งเป็นตัวแปรกำหนดการตัดสินใจ (decision variables) ให้เป็น 0

จากปัญหาที่มีตัวแปรตัดสินใจ n ตัว ภายใต้ข้อจำกัด m ข้อ ที่ตัวแบบ

หาค่าสูงสุด $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

โดยมีข้อจำกัด $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i \quad i = 1,2,\ldots,m$

$x_j \geqslant 0 \quad j = 1,2,\ldots,n$

เขียนให้อยู่ในรูปมาตรฐาน (standard form) จะได้ตัวแบบดังนี้

$$\text{หาค่าสูงสุด } Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.4}$$

$$\text{โดยมีข้อจำกัด } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \quad i = 1,2,\ldots,m \tag{2.5}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad j = 1,2,\ldots,n+m \tag{2.6}$$

หรือเขียนในรูปของเมทริคซ์ ได้ดังนี้

$$\text{หาค่าสูงสุด } Z = \underline{C}'\underline{X} \tag{2.4)'}$$

โดยมีข้อจำกัด

$$A\underline{X} = \underline{B} \tag{2.5)'}$$

$$\underline{X} \geqslant 0 \tag{2.6)'}$$

ในเมื่อ $\underline{C}' = (c_1,\ldots,c_n, 0,\ldots,0)$

$\underline{X}' = (x_1,\ldots,x_n, x_{n+1},\ldots,x_{n+m})$

$\underline{B}' = (b_1,\ldots,b_m)$

$A = (a, , \underline{a}_2,\ldots,\underline{a}_n, \underline{a}_{n+1}\cdots\underline{a}_{n+m})$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

เราเรียก $x_{n+1}, x_{n+2},\ldots,x_{n+m}$ ว่าเป็นตัวแปรอยู่เฉย (slack variables) หากเรากำหนด $x_j = 0$ ทุก ๆ $j = 1,2,\ldots,n$ และ $x_{n+i} > 0$ ทุก ๆ $i = 1,2,\ldots,m$ ค่าของ x_{n+i}, $i = 1,2,\ldots,m$ เหล่านี้จะแสดงถึงจำนวนทรัพยากรต่าง ๆ ที่มีอยู่ ที่จะนำมาใช้ในการทำกิจกรรมของเราได้

ภายหลังการตัดสินใจ ค่าของ x_{n+i}, $i = 1,2,\ldots,m$ จะแสดงให้ทราบว่า จะมีจำนวนทรัพยากรประเภทใดเหลืออยู่บ้าง ในปริมาณเท่าใด สำหรับค่าของ c_{n+i} จะเป็น 0 เสมอทุก ๆ $i = 1,2,\ldots,m$

เพื่อให้สอดคล้องกับการจำกัดว่าตัวแปรของเราจะต้องไม่เป็นลบ ดังนั้น ค่าของ b_i จะต้องเป็นบวกเสมอ ข้อจำกัดใดที่มีค่าของ b_i เป็นลบ เราคูณสมการหรือข้อจำกัดนั้นด้วย (-1)

เพื่อความเข้าใจเกี่ยวกับการแก้ปัญหา หาคำตอบต่อปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นตรงก่อนอื่นให้เรามาทำความเข้าใจเกี่ยวกับนิยามสำคัญ ๆ ในปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นตรงดังต่อไปนี้

นิยาม 2.1 คำตอบที่เป็นไปได้ (feasible solution) ของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นตรงก็คือค่าของ $\underline{X} = (x_1,x_2,\ldots,x_{n+m})$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข (2.5) และ (2.6)

นิยาม 2.2.1 คำตอบฐาน (basic solution) คือคำตอบที่ได้จากการแก้สมการใน (2.5) โดยการกำหนดตัวแปร n ตัวให้เท่ากับ 0 เสียก่อน แล้วจึงแก้สมการหาค่าตัวแปร m ตัวที่เหลือ กำหนดว่า ดีเทอร์มิแนนท์ของตัวแปร m ตัวที่เหลือนี้จะต้องไม่มีค่าเป็น 0 เราเรียกตัวแปร m ตัวนี้ว่า ตัวแปรฐาน (basic variables)

นิยาม 2.2.2 คำตอบที่เป็นไปได้ขั้นฐาน (basic feasible solution) ก็คือ คำตอบฐานที่สอดคล้องกับเงื่อนไข (2.6) นั่นก็คือ ตัวแปรฐานทุกตัวจะต้องไม่มีค่าเป็นลบ หากตัวแปรฐานทุกตัวมีค่ามากกว่า 0 เราเรียกคำตอบของตัวแปรฐานเหล่านี้ว่าเป็น non – degenerate basic feasible solution หากตัวแปรฐานอย่างน้อยที่สุด 1 ตัว มีค่าเป็น 0 นั่นก็คือ มีคำตอบฐานที่มีค่ามากกว่า 0 น้อยกว่า m ตัว เราเรียกคำตอบของตัวแปรฐานเหล่านี้ว่าเป็น degenerate feasible solution

เราสรุปเป็นนิยามได้ดังนี้

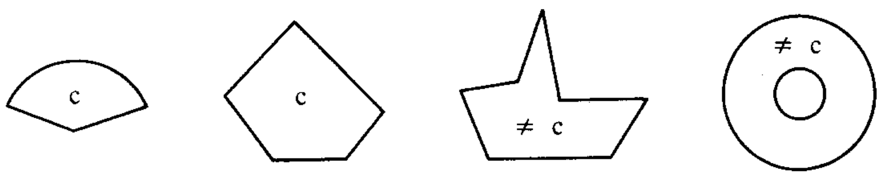
นิยาม 2.3 nondegenerate basic feasible solution ก็คือคำตอบที่เป็นไปได้ขั้นฐานที่มีค่าของ x_j เป็นบวก เพียง m ตัวเท่านั้น นั่นก็คือ ตัวแปรฐานทุกตัวเป็นบวก

นิยาม 2.4 คำตอบที่เป็นไปได้สูงสุด (maximum feasible solution) คือคำตอบที่เป็นไปได้ที่ทำให้ฟังก์ชันเป้าหมาย (2.4) มีค่ามากที่สุด

ฟังก์ชันเป้าหมาย Z ใน (2.1) เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นสำหรับค่า $\underline{X}$ ทั้งหลายที่สอดคล้อง (2.2) และ (2.3) ฟังก์ชัน Z เป็นฟังก์ชันค่าจริง (real – valued function)

นิยาม 2.5 เราเรียกเซต C ว่าเป็น convex set ถ้าหากเราพิจารณาจุด 2 จุดใด ๆ ที่อยู่ในเซต C คือจุด $\underline{X}_a$ และ $\underline{X}_b$ แล้วจะมีจุด $\underline{X}_c$ ที่มีคุณสมบัติว่า $\underline{X}_c = \lambda\underline{X}_a + (1-\lambda)\underline{X}_b,\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ เป็นจุดที่อยู่ในเซต C ด้วย

เราจะเห็นว่า convex set ก็คือ เซตของจุดต่าง ๆ ที่เมื่อเราลากเส้นตรงเชื่อมต่อระหว่าง 2 จุดใด ๆ ที่อยู่ในเซตนี้แล้ว จุดต่าง ๆ บนเส้นตรงทุกจุด จะอยู่ในเซตนี้ด้วย ตัวอย่างของ convex set คือรูป (a) และ (b) สำหรับรูป (c) และ (d) ไม่เป็น convex set

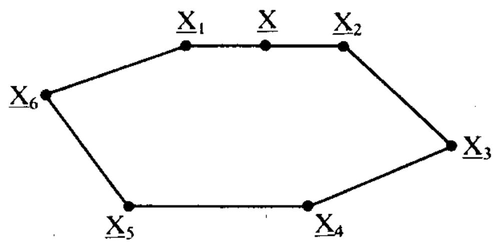


(a) (b) (c) (d)

นิยาม 2.3.2 เราเรียกจุด $\underline{X}$ ว่าเป็นจุดมุมหรือจุดปลายสุด (vertex or extreme point) ของ convex set ก็ต่อเมื่อ จะต้องไม่มีจุดอื่น ๆ เช่น $\underline{X}_1$, $\underline{X}_2$, $\underline{X}_1 \neq \underline{X}_2$ ในเซตนี้ที่ทำให้

$$\underline{X} = \lambda\underline{X}_2 + (1-\lambda)\underline{X}_1,\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$$

ตัวอย่างของจุดปลายสุด ได้แก่ จุดมุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม จุดทุก ๆ จุดบนเส้นรอบวงของวงกลม ในกรณีของรูปเหลี่ยม



จุดที่เป็นจุดปลายสุดหรือจุดมุมคือจุด $\underline{X}_1$, $\underline{X}_2$, $\underline{X}_3$, $\underline{X}_4$, $\underline{X}_5$ และ $\underline{X}_6$ จุดที่อยู่บนด้านใดด้านหนึ่งของรูปไม่เรียกว่าจุดปลายสุด เช่นจุด $\underline{X}$ เนื่องจากเราสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ convex combination ของ $\underline{X}_1$ กับ $\underline{X}_2$ ได้

เรามีทฤษฎีที่เกี่ยวกับปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น ดังต่อไปนี้ (การพิสูจน์ทฤษฎีและรายละเอียดเกี่ยวกับนิยาม ให้นักศึกษาดูได้จากหนังสือ **การโปรแกรมเชิงเส้นเบื้องต้น** ST 471)

ทฤษฎี 2.1 เซตของคำตอบที่เป็นไปได้ทุกคำตอบของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นตรง จะเป็น convex set

ทฤษฎี 2.2 ถ้าค่าของฟังก์ชันเป้าหมาย (2.1) มีจริง คำตอบที่จะให้ค่าของฟังก์ชันเป้าหมาย (2.1) สูงสุด จะอยู่ที่จุดมุมหรือจุดปลายสุด (vertex or extreme point) ของ convex set ซึ่งเป็นเซตของคำตอบที่เป็นไปได้ของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นตรง

ถ้าคำตอบที่ทำให้ฟังก์ชันเป้าหมาย (2.1) มีค่าสูงสุด อยู่ที่จุดมุมหรือจุดปลายสุดมากกว่า 1 จุด แล้วฟังก์ชันเป้าหมาย ณ จุดที่เป็น convex combination ทุก ๆ จุด ของบรรดาจุดมุมหรือจุดปลายสุดดังกล่าว จะมีค่าเดียวกัน

ทฤษฎี 2.3 ถ้า $\underline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+m})$ เป็นจุดมุมหรือจุดปลายสุดของบริเวณคำตอบ แล้วเวคเตอร์ที่มี x_i เป็นบวก จะประกอบกันเป็นเซตที่เป็นอิสระเชิงเส้นตรง ผลที่ตามมาก็คือ จะมี x_i ที่เป็นบวก มากที่สุด m ตัว

สรุปได้ว่า การหาคำตอบต่อปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นตรงนั้น เราเพียงแต่ตรวจสอบจุดมุมหรือจุดปลายสุดของบริเวณคำตอบที่เป็นไปได้ ว่าควรจะเป็นจุดมุมหรือจุดปลายสุดใดบ้าง จุดที่อยู่ถัดไปจากจุดเดิมควรจะเป็นจุดไหน จึงจะทำให้ได้คำตอบที่ทำให้ค่าของฟังก์ชันเป้าหมายสูงสุด (หรือต่ำสุด) โดยเร็ว G.B. Dantzig ได้เสนอระเบียบการซิมเพลกซ์ (simplex procedure) ซึ่งเป็นระเบียบการหาจุดมุมหรือจุดปลายสุดของบริเวณคำตอบที่เป็นไปได้ นั่นก็คือจุดที่จะให้ค่าคำตอบที่เป็นไปได้ขั้นฐาน มีการคำนวณซ้ำ หรือที่เรียกว่า iteration เขียนในรูปของตาราง เรียกว่าตารางซิมเพลกซ์ (simplex tableau) โดยเหตุที่ตัวแบบมาตรฐานของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นตรง ประกอบด้วยเซตของสมการ m สมการ มีตัวแปร m + n ตัว และจากนิยามของคำตอบที่เป็นไปได้ขั้นฐาน หรือเรียกสั้น ๆ ว่า คำตอบฐาน แต่เป็นคำตอบเฉพาะที่มีค่าเป็นบวกเท่านั้น นั่นก็คือ เป็นคำตอบที่ได้จากการกำหนดตัวแปรให้เป็น 0 n ตัวแล้วแก้สมการ m สมการ หาค่าตัวแปร m ตัวที่เหลือ โดยที่ตัวแปรทั้ง m ตัวนี้จะต้องมีค่าเป็นบวกหมดทุกตัว

ปัญหาจึงอยู่ที่ว่า เราควรจะกำหนดตัวแปร n ตัวใดให้เป็น 0 ก่อน นั่นก็คือ คำตอบที่เป็นไปได้ขั้นฐาน หรือตัวแปรฐานชุดแรก ควรจะเป็นอะไร จึงจะเหมาะสมมีประสิทธิภาพมากที่สุด ในกรณีของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นตรง ที่มีตัวแบบดัง (2.4), (2.5) และ (2.6) คำตอบฐานชุดแรกมักจะแสดงถึงจำนวนทรัพยากรที่จะนำมาใช้ได้ ดังนั้น ในขั้นตอนที่ 1 หรือตารางที่ 1 จะมี slack variables เป็นตัวแปรฐานชุดแรก ซึ่งจะมีความหมายว่า ก่อนเริ่มต้นกิจกรรมใด ๆ เรามีทรัพยากรอะไรบ้างที่จะนำมาใช้ในปริมาณเท่าใด มีเงื่อนไขเกี่ยวกับการใช้

อย่างไรบ้าง และฟังก์ชันเป้าหมายของคำตอบชุดแรก หรือในตารางที่ 1 จะมีค่าเป็น 0 เสมอ ขั้นต่อไปหรือในตารางต่อไป เราพิจารณาผลที่ได้ในตารางเดิม ตรวจดูว่าเป็นตารางสุดท้ายแล้วหรือยัง ถ้าเป็นตารางสุดท้าย ผลลัพธ์ที่ได้จากตารางนี้ก็จะเป็นคำตอบที่ดีที่สุด (optimal solution) ถ้าไม่ใช่ตารางสุดท้าย ให้ตรวจดูว่า ตารางต่อไปหรือขั้นตอนต่อไป เราควรจะเปลี่ยนตัวแปรใดเข้ามาแทนที่ตัวแปรฐานตัวไหน ในปริมาณเท่าใด จึงจะเกิดผลดีที่สุด เรามีทฤษฎีที่เกี่ยวกับขั้นตอนการคำนวณด้วยวิธีการซิมเพลกซ์ ก่อนที่จะกล่าวถึงทฤษฎีเหล่านี้ ให้เรามาดูตัวอย่างขั้นตอนการคำนวณด้วยวิธีการที่เป็นระบบ โดยอาศัย Gaussian Elimination และการนำเสนอในรูปของตารางซิมเพลกซ์

ถ้าเรามีตัวแบบมาตรฐานของปัญหาการผลิตสินค้า ดังต่อไปนี้

ค่าสูงสุด $Z = 12x_1 + 8x_2$ (กำไร : บาท)

โดยมีข้อจำกัด $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 90$ (วัตถุดิบ : กก.)

$2x_1 + x_2 + x_4 = 50$ (แรงงาน : ชม.)

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0$

ในเมื่อ x_1, x_2 เป็นจำนวนของสินค้า ก และ ข ที่ต้องการผลิตตามลำดับ (มีหน่วยเป็นชิ้น)

x_3 เป็นจำนวนวัตถุดิบ มีหน่วยเป็นกิโลกรัม

x_4 เป็นปริมาณแรงงาน มีหน่วยเป็นชั่วโมง

คำตอบชุดแรกจะแสดงถึงสาระข้อมูลในการผลิตสินค้า แสดงด้วยระบบสมการต่อไปนี้

$Z - 12x_1 - 8x_2 - 0x_3 - 0x_4 = 0$ ....(0)'

$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 0x_4 = 90$ ....(1)'

$2x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 = 50$ ....(2)'

มีความหมายว่า เมื่อยังไม่มีการผลิตสินค้า ($x_1 = x_2 = 0$) เรามีวัตถุดิบ (x_3) อยู่ 90 กิโลกรัม มีแรงงาน (x_4) อยู่ 50 ชั่วโมง เมื่อไม่มีการผลิต กำไร (Z) = 0

พิจารณาจากฟังก์ชัน $Z = 12x_1 + 8x_2$ มีความหมายว่าค่าของ Z จะเพิ่มสูงขึ้น หากเราเพิ่มค่าของ x_1 และ x_2 การเพิ่มค่า x_1 หนึ่งชิ้นจะทำให้ค่า Z เพิ่มขึ้นอีก 12 บาท และการเพิ่มค่า x_2 หนึ่งชิ้น จะทำให้ค่า Z เพิ่มขึ้นอีก 8 บาท เราจึงเลือกการเพิ่มค่าของ x_1 เนื่องจากอัตราการเพิ่มขึ้นต่อหนึ่งชิ้น มีค่ามากที่สุด สิ่งที่จะต้องพิจารณาต่อไปก็คือ x_1 ควรจะเพิ่มได้มากที่สุดเท่าใด หากดูจากสมการ (1)' จะเห็นว่า การทำ x_1 หนึ่งชิ้น เราใช้วัตถุดิบ 2 กิโลกรัม ดังนั้น วัตถุดิบ 90 กิโลกรัม นำมาทำ x_1 ได้ 90/2 = 45 ชิ้น จากสมการ (2)' ชี้ให้เห็นว่า การทำ x_1 หนึ่งชิ้น

ใช้แรงงาน 2 ชั่วโมง ดังนั้น แรงงาน 50 ชั่วโมง จะนำมาทำ x_1 ได้ 50/2 = 25 ชิ้น สรุปว่าค่ามากที่สุดของ x_1 ที่เป็นไปได้ก็คือ 25

เราสรุปคำตอบและสาระข้อมูลจากสมการชุดแรกลงในตารางได้ดังนี้ (เพื่อความสะดวกและดูง่าย จึงย้ายค่าคงที่ทางขวามือของสมการมาไว้ข้างหน้าในช่อง**คำตอบฐาน**)

ตัวแปรฐาน		c_j	12	8	0	0	**ค่าที่เป็นไปได้**
x_i	c_i	**คำตอบ**	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	a_3	a_4	θ_i
x_3	0	90	2	3	1	0	45
x_4	0	50	2	1	0	1	25
Z = 0		s_j	0	0	0	0	
		$c_j - s_j$	12	8	0	0	

ในที่นี้ค่าของ c_j เป็น ส.ป.ส. ของตัวแปร x_j ในฟังก์ชันเป้าหมาย

$\underline{a}_j$ เป็น ส.ป.ส. ของ x_j ในสมการข้อจำกัดต่าง ๆ

$c_j - s_j$ เป็นอัตรากำไรเพิ่มต่อหน่วย (marginal profit rate) ของ x_j

$$s_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$$

เราเรียกคอลัมน์ที่มี $c_j - s_j$ เป็นบวกที่มีค่ามากที่สุดว่า key – column ตัวแปรที่อยู่ในคอลัมน์นี้จะเป็นตัวแปรที่เราจะเลือกเข้ามาในชุดต่อไป (จากระบบสมการชุดแรกหรือจากตารางนี้ก็คือตัวแปร x_1)

θ_i เป็นค่าที่เป็นไปได้ของตัวแปรจาก key column

$$\theta_i = \frac{x_{i0}}{a_{ik}} \quad i = 1,2,\ldots,m$$

ในเมื่อ x_{i0} เป็นคำตอบของตัวแปรฐานที่อยู่ในสมการ (แถว) i

a_{ik} เป็น ส.ป.ส. ของ ตัวแปรใน key column แถว i

จากตารางนี้ ค่าของ θ_1 มีความหมายว่า ถ้าเราทำ x_1 45 ชิ้น จะใช้วัตถุดิบ (x_3) หมดพอดี ค่าของ θ_2 มีความหมายว่า ถ้าเราทำ x_1 25 ชิ้น เราจะใช้แรงงาน (x_4) หมดพอดี การทำ

x_1 ต้องใช้ทั้งวัตถุดิบและแรงงานควบคู่กัน ดังนั้น จำนวนของ x_1 ที่มากที่สุดคือ 25 ซึ่งเป็นค่าต่ำสุด (θ_1, θ_2) นั่นเอง เราเรียกแถวที่มีค่า θ_i ต่ำสุดว่า key row ตัวแปรที่อยู่ใน key row จะเป็นตัวแปรที่ถูกเปลี่ยนออกไป ตัวเลขที่อยู่ตรงตำแหน่งที่เป็นจุดตัดของ key row กับ key column เรียกว่า pivot number หรือ pivot element

ผลสรุปจากระบบสมการชุดแรก หรือจากตารางที่ 1 ก็คือ เราจะเลือกจุดถัดไปที่มีค่า $x_2 = x_4 = 0$ โดยการนำ x_1 แทนที่ x_4 เป็นจำนวน 25 ชิ้น ทำให้ค่า Z เพิ่มขึ้นเป็น $0+12(25) = 300$ และจะมี x_3 เหลืออยู่ $= 90-2(25) = 40$ ชั่วโมง

กลับมาดูที่สมการชุดแรก จากผลสรุปว่า เราได้ x_1 แทน x_4 ดังนั้น เราหาค่า x_1 จาก $(2)^1$ แล้วนำค่าที่ได้ไปแทนในสมการ $(1)^1$ และ $(0)^1$ ตามลำดับ ปรากฏผลดังต่อไปนี้

$$(2)^1 \div 2 \qquad x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 0x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 25 \qquad \ldots\ldots\ldots(2)^2$$

$$(1)^1 - 2(2)^2 \qquad 0x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 40 \qquad \ldots\ldots\ldots(1)^2$$

$$(0)^1 + 12(2)^2 \qquad Z + 0x_1 - 2x_2 - 0x_3 + 6x_4 = 300 \qquad \ldots\ldots\ldots(0)^2$$

ผลจาก $(0)^2$ แสดงว่า ฟังก์ชัน $Z = 300 + 2x_2 - 6x_4$ มีความหมายว่า $Z = 300$ ยังไม่เป็นคำตอบที่ดีที่สุด เพราะว่า หากเราเพิ่มค่า x_2 หนึ่งชิ้น จะทำให้ค่า Z เพิ่มขึ้นอีก 2 บาท ดังนั้น เราจึงเลือก x_2 เข้ามา จากสมการที่ $(1)^2$ ชี้ให้เห็นว่า หากเราทำทั้ง x_1 และ x_2 เราจะทำ x_2 ได้อีก $\frac{40}{2} = 20$ ชิ้น และจากสมการที่ $(2)^2$ ชี้ให้เห็นว่า หากเราไม่ทำ x_1 สามารถทำ x_2 ได้ $\frac{25}{1/2}$ หรือ 50 ชิ้น ดังนั้น จำนวนที่มากที่สุดของ x_2 ก็คือ 20 ชิ้น เราสรุปผลที่ได้ทั้งหมดลงในตารางที่ 2 ได้ดังต่อไปนี้

ตัวแปรฐาน		c_j	12	8	0	0	**ค่าที่เป็นไปได้**
x_i	c_i	**คำตอบ**	a_1	a_2	a_3	a_4	θ_i
x_3	0	40	0	2	1	-1	20
x_1	12	25	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	50
z = 300		s_j	12	6	0	6	
		$c_j - s_j$	0	2	0	-6	

จากตารางยังมีค่า $c_2 - s_2 > 0$ และเป็นค่ามากที่สุด แสดงว่าเราจะเลือก x_2 เข้ามา ค่าของ x_2 1 ชิ้นจะทำให้ค่า Z เพิ่มขึ้นอีก 2 บาท พิจารณาค่าที่เป็นไปได้ของ x_2 จากอัตราส่วนระหว่างคำตอบกับ ส.ป.ส. ในคอลัมน์ 2 ของแถวเดียวกัน จะได้

$$\frac{40}{2},\ \frac{25}{1/2} \text{ หรือ } 20 \text{ กับ } 50$$

แสดงว่า $\theta_1 = 20$ เป็นค่าต่ำสุดของ θ_i

ผลสรุปจากระบบสมการชุดที่ 2 หรือจากตารางที่ 2 ก็คือเราจะเลือกจุดถัดไปที่มีค่า $x_3 = x_4 = 0$ โดยการแทนที่ x_3 ด้วย $x_2 = 20$ ชิ้น ทำให้ค่าของ Z เพิ่มขึ้นเป็น $300 + 2(20) = 340$ และมี $x_1 = 25 - \frac{1}{2}(20) = 15$ ชิ้น

กลับมาดูที่สมการชุดที่ 2 จากผลสรุปว่า เราใช้ x_2 แทน x_3 ดังนั้น เราหาค่า x_2 จากสมการ $(1)^2$ นำค่าที่ได้นี้แทนในสมการ $(2)^2$ และ $(0)^2$ ตามลำดับ ดังต่อไปนี้

$(1)^2 \div 2 \qquad 0x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 20$ ....$(1)^3$

$(2)^2 - \frac{1}{2}(1)^3 \qquad x_1 + 0x_2 - \frac{1}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_4 = 15$ ....$(2)^3$

$(0)^2 + 2(1)^3 \qquad Z + 0x_1 + 0x_2 + x_3 + 5x_4 = 340$ ....$(0)^3$

ผลจาก $(0)^3$ แสดงว่าฟังก์ชัน $Z = 340 - x_3 - 5x_4$ มีความหมายว่า $Z = 340$ เป็นค่าสูงสุด เพราะว่า ถ้าเราเพิ่มค่าของ x_3 หรือ x_4 จะทำให้ค่าของ Z ลดลง เราสรุปผลที่ได้ลงในตารางที่ 3 ดังนี้

ตัวแปรฐาน		c_j	12	8	0	0
x_i	c_i	คำตอบ	a_1	a_2	a_3	a_4
x_2	8	20	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_1	12	15	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$z = 340$		s_j	12	8	1	5
		$c_j - s_j$	0	0	-1	-5

จากตารางไม่มีค่า $c_j - s_j > 0$ แสดงว่า สิ้นสุดการคำนวณ

สรุปได้ว่า ผลิตสินค้า ก 15 ชิ้น ผลิตสินค้า ข 20 ชิ้น ได้กำไรสูงสุด 340 บาท การผลิตครั้งนี้ใช้วัตถุดิบและแรงงานหมดพอดี

เรามีทฤษฎีเกี่ยวกับการคำนวณด้วยวิธีการซิมเพลกซ์ ดังต่อไปนี้ (รายละเอียดของทฤษฎีเหล่านี้ ดูจากหนังสือ ST 471)

ทฤษฎีที่ 2.4 ถ้าค่าสูงสุดของฟังก์ชันเป้าหมาย Z มีจริง กล่าวคือ กรอบบน (upper bound) ถูกจำกัด หากมีเงื่อนไขว่า $c_j - s_j > 0$ สำหรับค่าคงที่ j ใด ๆ แล้วเราจะหาได้เซตของคำตอบชุดใหม่ ที่ทำให้ได้ค่าของฟังก์ชันเป้าหมาย Z ซึ่งคำนวณจากคำตอบชุดใหม่นี้ มีค่ามากกว่าค่าของฟังก์ชันเป้าหมายที่คำนวณจากคำตอบชุดเดิม นั่นก็คือ

$$Z \geqslant Z_0$$

และคำตอบชุดใหม่นี้ จะประกอบด้วยตัวแปรที่มีค่าเป็นบวกเพียง m ตัว เท่านั้น

ทฤษฎีที่ 2.5 หากมีคำตอบฐาน (basic feasible solution)

$$\underline{X}' = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{m0})$$

ภายใต้เงื่อนไข $c_j - s_j \leqslant 0$ ทุก ๆ ค่า $j = 1,2,\ldots,n+m$

แล้ว ผลจากระบบสมการ

$$x_{10}\underline{a}_1 + x_{20}\underline{a}_2 + \ldots + x_{m0}\underline{a}_m = \underline{a}_0$$

และ $$x_{10}c_1 + x_{20}c_2 + \ldots + x_{m0}c_m = Z_0$$

จะให้คำตอบที่ดีที่สุด นั่นก็คือเป็นคำตอบที่ทำให้ได้ค่าของ Z สูงสุด

ผลที่ได้จากทฤษฎีที่ 2.4 และ 2.5 แสดงให้เห็นว่า เราจะเริ่มต้นด้วยการหาคำตอบฐานชุดแรก ซึ่งจะก่อให้เกิดคำตอบฐานชุดอื่น ๆ ที่จะนำไปสู่คำตอบที่ดีที่สุด (คำตอบอุตมะ) ที่ทำให้ได้ค่าของฟังก์ชันเป้าหมายมีค่าสูงสุด เราจึงสรุปการแก้ปัญหาโดยวิธีการซิมเพลกซ์ดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 จากตัวแบบมาตรฐาน (2.4), (2.5) และ (2.6) เขียนตารางซิมเพลกซ์ที่ 1 ดังนี้

ตัวแปรฐาน		c_j	c_1	c_2 .	c_n	0	0	. .	0
x_i	c_i	**คำตอบฐาน**	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_n$	$\underline{a}_{n+1}$	$\underline{a}_{n+2}$	. . .	$\underline{a}_{n+m}$
x_{n+1}	0	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{1n}	1	0	.	0
x_{n+2}	0	x_{20}	x_{21}	x_{22} .	x_{2n}	0	1		0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		.	.	$\ddots$	.
x_{n+m}	0	x_{m0}	x_{m1}	x_{m2} . .	. x_{mn}	0	0	. . .	1
= 0		s_j	0	0	0	0	0	.	0
		$c_j - s_j$	c_1	c_2	c_n	0	0		0

ในที่นี้ $x_{i0} = b_i$ และ $x_{ij} = a_{ij}$, $i = 1,2,\ldots,m$; $j = 1,2,\ldots,n+m$

นั่นก็คือ $\underline{X}_0' = (b_1, b_2,\ldots,b_m) > 0$

ขั้นที่ 2 คำนวณค่า $Z = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{i0}$ และ $s_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij}$

หาค่า $c_j - s_j$ ทุก ๆ $j = 1,2,\ldots,n+m$

ขั้นที่ 3 ตรวจสอบค่าของ $c_j - s_j$ เพื่อทดสอบว่าคำตอบที่ได้เป็นคำตอบที่ดีที่สุด (คำตอบที่ให้ค่าฟังก์ชันเป้าหมาย Z สูงสุด) หรือไม่

3.1 หากไม่มี $c_j - s_j$ ตัวใดมีค่าเป็นบวก นั่นก็คือ $c_j - s_j \leqslant 0$ ทุก ๆ j แสดงว่าคำตอบนั้นเป็นคำตอบที่ดีที่สุดแล้ว ขบวนการนี้ก็สิ้นสุดลง

3.2 หากมี $c_j - s_j$ บางตัวมีค่าเป็นบวก นั่นก็คือมี $c_j - s_j > 0$ ให้ทำขั้นที่ 4 ต่อไป

ขั้นที่ 4 เลือกเวคเตอร์ที่จะนำเข้ามาในฐาน (basis) นั่นก็คือ เลือกเวคเตอร์ที่มีค่า $c_j - s_j$ สูงสุด สมมติได้

$$c_k - s_k = \text{ค่าสูงสุด } (c_j - s_j)$$

แสดงว่าเวคเตอร์ a_k จะถูกนำเข้ามาในฐาน หรืออีกนัยหนึ่ง เราจะได้ x_k เป็นตัวแปรฐานใหม่ เราเรียกคอลัมน์ k นี้ว่า key column

ขั้นที่ 5 เลือกเวคเตอร์ที่จะขจัดออกจากฐาน เพื่อจะหาคำตอบชุดใหม่ที่ดีกว่า นั่นก็คือ พิจารณาค่าที่เป็นไปได้ของ x_k จากการเปลี่ยนค่าตัวแปรฐานเดิม ซึ่งก็คือการหาค่า θ_i จาก

$$\theta_i = \frac{x_{i0}}{x_{ik}},\ x_{ik} > 0;\ i = 1,2,\ldots,m$$

(เราไม่พิจารณาค่า x_{ik} ที่เป็นลบหรือเท่ากับ 0 เพราะเรากำหนดไว้แล้วว่าตัวแปรจะต้องไม่มีค่าเป็นลบ นอกจากนี้ค่าของ x_k ที่เป็นไปได้ก็คือ ค่า θ_i ที่น้อยที่สุด) เลือกค่า θ_i ที่น้อยที่สุด สมมติได้

$$\theta_r = \text{ค่าต่ำสุด}\, \theta_i = x_{r0}/x_{rk}$$

แสดงว่าเวคเตอร์ที่อยู่ในแถว r เดิมจะถูกขจัดออก สมมติเป็นเวคเตอร์ a_s นั่นก็หมายความว่าเราให้ x_k เป็นจำนวน θ_r แทนที่ x_s

เราเรียกแถว r นี้ว่า key row และเรียก x_{rk} ว่า pivot number (element)

ขั้นที่ 6 เปลี่ยนตารางใหม่โดยใช้วิธีการ Gaussian Elimination

เปลี่ยนตัวแปรฐานจาก x_s เป็น x_k c_s เป็น c_k นอกนั้นเหมือนเดิม

เปลี่ยนคำตอบฐานและ ส.ป.ส. x_{ij} ดังต่อไปนี้

แถวที่ r ใหม่ เท่ากับ แถวที่ r เดิมหารด้วย x_{rk} จะได้ว่า

$$\frac{x_{r0}}{x_{rk}} \qquad \frac{x_{r1}}{x_{rk}} \qquad \frac{x_{r2}}{x_{rk}} \qquad \cdots \qquad \frac{x_{rk}}{x_{rk}} \qquad \cdots$$

นำผลที่ได้นี้คูณด้วย x_{ik}, $i \neq r$ แล้วนำไปลบออกจากแถวที่ i เดิม นั่นก็คือ

แถว i เดิม : $x_{i0} \qquad x_{i1} \qquad x_{i2} \qquad \cdots \qquad x_{ik} \qquad \cdots \qquad (i \neq r)$

ลบด้วย : $\frac{x_{ik}x_{r0}}{x_{rk}} \qquad \frac{x_{ik}x_{r1}}{x_{rk}} \qquad \frac{x_{ik}x_{r2}}{x_{rk}} \qquad \cdots \qquad x_{ik} \qquad \cdots$

ผลที่ได้คือแถว i ใหม่ $(i \neq r)$

หากเรากำหนด $x'_{r0} = x_{r0}/x_{rk}$, $x'_{rj} = x_{rj}/x_{rk}$

และ $x'_{i0} = x_{i0} - \frac{x_{ik}x_{r0}}{x_{rk}}$, $\quad x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{ik}x_{rj}}{x_{rk}}; i \neq r$

เอาเครื่องหมาย ' ออก ตารางต่อไปจะเขียนได้ดังนี้

ตัวแปรฐาน		c_j	c_1	c_2		c_k		c_n	0		0		0
x_i	c_i	คำตอบฐาน	a_1	a_2		a_k	$\cdots$	a_n	a_{n+1}		$a_{..}$		a_{n+m}
x_{n+1}	0	x_{10}	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	0		x_{1n}	1		$x_{1(n+r)}$	$\cdots$	0
x_{n+r-1}	0	$x_{(r-1)0}$	$x_{(r-1)1}$	$x_{(r-1)2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$x_{(r-1)n}$	0	$\cdots$	$x_{(r-1)(n+r)}$	$\cdots$	0
x_k	c_k	x_{r0}	x_{r1}	x_{r2}	$\cdots$	1	$\cdots$	x_{rn}	0	$\cdots$	$x_{r(n+r)}$	$\cdots$	0
			$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
x_{n+m}	0	x_{m0}	x_{m1}	x_{m2}	$\cdots$	0	$\cdots$	x_{mn}	0	$\cdots$	$x_{m(n+r)}$	$\cdots$	1

กลับไปทำขั้นที่ 2 ต่อไปจนกว่าจะได้คำตอบที่ดีที่สุด

การทำซ้ำใหม่ในแต่ละตาราง เรียกว่า iteration

เพื่อความเข้าใจในการทำแต่ละขั้นตอน ให้นักศึกษาดูจากตัวอย่าง 2.8 เป็นต้นไป

2.2.3 **เทคนิคการใช้ตัวแปรเทียม** (artificial variables)

การหาคำตอบที่ดีที่สุดด้วยวิธีการซิมเพลกซ์ตามที่กล่าวมาแล้วนั้น จะเริ่มต้นคำตอบชุดแรกที่มีตัวแปรตัดสินใจ มีค่าเป็น 0 ทุกตัว ซึ่งจะเป็นจุดเริ่มต้นเมื่อยังไม่ได้ตัดสินใจกระทำกิจกรรมใด ๆ และภายใต้เกณฑ์สมมติว่า เรามีคำตอบฐานชุดแรกซึ่งเป็นคำตอบที่แสดงถึงจำนวนทรัพยากรประเภทต่าง ๆ ที่มีให้ใช้ได้ คำตอบที่ได้นี้จะกำหนดได้เมื่อเงื่อนไขของข้อจำกัดอยู่ในรูป $\leqslant$ แต่ในปัญหาจริง ๆ นั้น เงื่อนไขของการใช้ทรัพยากรต่าง ๆ ไม่ได้มีเพียง $\leqslant$ อย่างเดียว อาจกำหนดเงื่อนไขในรูป $\geqslant$ หรือ $=$ ก็ได้ กรณีเหล่านี้จะก่อให้เกิดปัญหาในการหาคำตอบชุดแรก ตัวอย่างเช่น กรณีของข้อจำกัดในรูปสมการ ที่มีตัวแบบดังนี้

หาค่าสูงสุด $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

โดยมีข้อจำกัด $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad i = 1,2,\ldots,m$

และ $\quad x_j \geqslant 0 \quad j = 1,2,\ldots,n$

ในลักษณะปัญหาที่มีตัวแบบเช่นนี้ เราไม่อาจจะตัดสินใจได้ว่า เราควรจะเริ่มต้นที่จุดใด เพราะถ้าหากเราเลือกไม่ดี คำตอบที่ได้อาจจะมีค่าบางตัวเป็นลบก็ได้ ซึ่งขัดกับข้อเท็จจริงที่คำตอบของเราจะต้องไม่เป็นลบ และเป็นการยากที่เราจะตัดสินใจได้ทันทีว่า ตัวแปรใดจะเป็นตัวแปรฐานบ้าง Charnes และ Cooper ได้คิดวิธีการ Big – M method ขึ้นในปี ค.ศ. 1961 วิธีการนี้จะกำหนดตัวแปรเทียม (artificial variables) เข้าไปในสมการของข้อจำกัด โดยที่ตัวแปรเทียมเหล่านี้จะไม่มีความหมายต่อปัญหาอันนั้น มันจะเป็นเพียงตัวแปรที่จะเข้ามาช่วยในการกำหนดคำตอบชุดแรกเท่านั้น นั่นก็คือ ในคำตอบอุตมะหรือในตารางสุดท้าย ตัวแปรเทียมจะต้องมีค่าเป็น 0 การขจัดตัวแปรเทียมหรือทำให้ตัวแปรเทียมไม่มีความหมายต่อปัญหานั้น ทำได้โดยการกำหนดค่า c ของตัวแปรเทียมดังนี้

$c_{ai} = -M$ ถ้าต้องการค่า P สูงสุด

$c_{ai} = M$ ถ้าต้องการค่า P ต่ำสุด

ในเมื่อ c_{ai} เป็น ส.ป.ส. ของ x_j ซึ่งเป็นตัวแปรเทียมของข้อจำกัด i

และ   M เป็นค่าบวกที่มากที่สุด เมื่อเปรียบเทียบกับค่า c อื่น ๆ

ในการแก้ปัญหาด้วยมือ เรามักจะไม่กำหนดค่าของ M เป็นตัวเลข แต่ถ้าใช้เครื่องคอมพิวเตอร์มาช่วยในการหาคำตอบ เรามักจะกำหนดค่า M เป็น 1000 เท่าของค่า c ที่มากที่สุด

โดยวิธีการ Big – M method ตัวแบบดังกล่าวข้างต้นจะเปลี่ยนเป็น

หาค่าสูงสุด $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=n+1}^{n+m} (-M) x_j$

โดยมีข้อจำกัด $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \quad i = 1,2,\ldots,m$

และ $x_j \geqslant 0 \quad j = 1,2,\ldots,n+m$

x_{n+i} จะเป็นตัวแปรเทียมของสมการข้อจำกัด i, $i = 1,2,\ldots,m$

ตัวแปรเทียมเหล่านี้จะเป็นตัวแปรฐานชุดแรกที่จะกำหนดในตารางที่ 1 ตารางที่ 1 จะกำหนดได้ดังนี้

ตัวแปรฐาน		c_j	c_1	c_2	…	c_n	**- M**	**- M**	**-**	**M**
x_i	c_i	**ค่าตอบฐาน**	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	…	$\underline{a}_n$	$\underline{a}_{n+1}$	$\underline{a}_{n+2}$	…	$\underline{a}_{n+m}$
x_{n+1}	- M	x_{10}	x_{11}	x_{12}		x_{1n}	1	0	…	0
x_{n+2}	- M	x_{20}	x_{21}	x_{22}	. .	x_{2n}	0	1	…	0
							.	.		
x_{n+m}	- M	x_{m0}	x_{m1}	x_{m2}		x_{mn}	0	0	:::	1

สำหรับกรณีของข้อจำกัดในรูปอสมการ $\geqslant$ ที่มีตัวแบบดังนี้

หาค่าต่ำสุด $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

โดยมีข้อจำกัด $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i \quad i = 1,2,\ldots,m$

และ $x_j \geqslant 0 \quad j = 1,2,\ldots,n$

เมื่อแปลงให้อยู่ในรูปมาตรฐาน จะมีตัวแบบดังต่อไปนี้

หาค่าต่ำสุด $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

โดยมีข้อจำกัด $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \quad x_{n+i} = b, \; i = 1,2, \ldots, m$

และ $x_j \geqslant 0 \; j = 1,2,\ldots,n+m$

เมื่อพิจารณาจากระบบสมการนี้ จะเห็นว่า หากเราเริ่มต้นคำตอบชุดแรก โดยกำหนดตัวแปรควบคุมได้เป็น 0 ตัวแปรฐานชุดแรกจะประกอบด้วย slack variables ที่ต่างก็มีค่าเป็นลบ ซึ่งขัดกับข้อเท็จจริงที่ว่าตัวแปรแต่ละตัวจะต้องไม่มีค่าเป็นลบ เมื่อเป็นเช่นนี้ เราจึงต้องใส่ตัวแปรเทียมเข้าไปในปัญหานี้ และดำเนินการเช่นเดียวกับกรณีของข้อจำกัดที่อยู่ในรูปสมการ ดังนั้นตัวแบบของปัญหาจะเปลี่ยนไปเป็น

หาค่าต่ำสุด $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=n+m+1}^{n+2m} Mx_j$

โดยมีข้อจำกัด $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} + x_{n+m+i} = b_i \quad i = 1,2,\ldots,m$

และ $x_j \geqslant 0 \quad j = 1,2,\ldots,n+2m$

x_{n+m+i} จะเป็นตัวแปรเทียมของอสมการข้อจำกัด i,i = 1,2,...,m

การแก้ปัญหากรณีต้องการค่า Z ต่ำสุด ทำได้โดยใช้หลักเกณฑ์เดียวกันกับที่กล่าวมาแล้ว เราอาจจะเปลี่ยนเป้าหมายของ Z จาก

ค่าต่ำสุด $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=n+m+1}^{n+2m} Mx_j$ เป็น

ค่าสูงสุด $(-Z) = \sum_{j=1}^{n} (-c_j)x_j + \sum_{j=n+m+1}^{n+2m} (-M)x_j$

หรืออาจคงเป้าหมายต่ำสุดไว้เช่นเดิม แต่การพิจารณาว่าเป็นคำตอบที่ดีที่สุดหรือไม่จะดูจากค่า $c_j - s_j$ ที่เป็นลบ กล่าวคือ

ถ้า $c_j - s_j \geqslant 0 \; \forall_j$ แสดงว่าได้คำตอบที่ดีที่สุด

ถ้า $c_j - s_j < 0$ บางค่า j เราคำนวณต่อไปโดยเลือกตัวแปรฐานใหม่ x_k ที่มี

$$c_k - s_k = \text{ค่าต่ำสุด } (c_j - s_j)$$

การแก้ปัญหาโดยใช้ Big – M method ค่อนข้างจะยุ่งยาก และโดยเหตุที่ค่าของ c_j แต่ละตัวแตกต่างกันมาก ในการคำนวณจึงอาจจะเกิดความคลาดเคลื่อนขึ้นได้ ได้มีการปรับปรุงและพัฒนาวิธีการแก้ปัญหาที่มีตัวแปรเทียม โดยในปี ค.ศ. 1963 Dantzig ได้คิดวิธีใหม่ขึ้น เรียกว่า Two – Phase method ซึ่งมีวิธีการดำเนินการเช่นเดียวกับ Big – M method แตกต่างกันที่ เริ่มต้นของวิธีการ Two – Phase คือ Phase – 1 จะกำหนด $c_j = 0$ ทุก ๆ $j = 1,2,\ldots,n$ และ $M = 1$ สำหรับ Phase – 2 จะคงฟังก์ชันเดิม

ขั้นตอนการคำนวณด้วยวิธีการ Two – Phase จะแยกเป็น Phase – 1 เป็นการหาคำตอบเพื่อให้ได้ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด

$$Z' = \sum_{i=1}^{s} (-1)x_{ai}$$

ในเมื่อ x_{ai} เป็นตัวแปรเทียมตัวที่ i และ s เป็นจำนวนของตัวแปรเทียมในตัวแบบของปัญหานั้น

การคำนวณใน Phase – 1 จะสิ้นสุดลงเมื่อ $Z' = 0$ นั่นคือไม่มีตัวแปรเทียมตัวใดเป็นตัวแปรฐาน เราจะทำต่อใน Phase – 2 ต่อไป

Phase – 2 เป็นการคำนวณในขั้นตอนต่อจาก Phase – 1 เพื่อให้ได้ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

ตารางที่ 1 ของ Phase – 2 คือตารางสุดท้ายของ Phase – 1 ที่เราตัดคอลัมน์ของตัวแปรเทียมออก และใช้ค่า c_j ของตัวแปรควบคุมได้ เป็นค่าเดิม (ใน Phase – 1 ค่าเหล่านี้เป็น 0) คำนวณค่า Z และ $c_j - s_j$ ใหม่ คำนวณต่อไปจนกว่าจะได้คำตอบที่ดีที่สุด

ตัวอย่างที่ 2.10 จะเป็นตัวอย่างเปรียบเทียบวิธีการใช้ Big – M กับ Two – Phase

2.2.4 วิธีการของปัญหาควบคู่ (Dual Problem) วัตถุประสงค์ของการศึกษาในเรื่องนี้ก็เพื่อให้นักศึกษาได้เรียนรู้ถึงการเขียนตัวแบบ และการพิจารณาปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นในอีกความหมายหนึ่ง ซึ่งจะเป็นการพิจารณาถึงการจัดสรรทรัพยากรอย่างมีประสิทธิภาพจากการกำหนดตัวแปรในการตัดสินใจ หรือตัวแปรที่ควบคุมได้ ในความหมายอีกแง่หนึ่งที่ควบคู่ไปกับค่าต่าง ๆ ที่กำหนดไว้เดิม ตัวอย่างเช่น ในความหมายเดิม เรากล่าวถึงการพิจารณาปริมาณที่ดีที่สุดของผลิตภัณฑ์หรือสินค้า ที่เราต้องการผลิต โดยอาศัยการจัดสรรทรัพยากรที่มี

อยู่อย่างจำกัด ให้เกิดผลประโยชน์ที่ดีที่สุด ในความหมายใหม่เรากลับไปสนใจทางด้านราคาที่เหมาะสมที่สุด จากการใช้ทรัพยากรที่มีจำกัดอย่างมีประสิทธิภาพที่สุด เป็นต้น เราเรียกปัญหาที่มีรูปแบบในความหมายเดิมว่า ปัญหาเดิม (primal problem) และเรียกปัญหาในความใหม่ว่า ปัญหาคู่ (dual problem) คำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาใดปัญหาหนึ่ง จะแสดงให้เห็นถึงสาระสำคัญต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับคำตอบที่ดีที่สุดของอีกปัญหาหนึ่ง นั่นก็หมายความว่า เราสามารถบอกลักษณะของปัญหาเดิมหรือแปรความหมาย สรุปผลที่ได้ของปัญหาเดิม โดยอาศัยคำตอบที่ได้จากปัญหาคู่ ซึ่งจะแสดงให้เห็นได้จากคุณสมบัติและทฤษฎีที่แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างกันของปัญหาทั้งสองนี้ จากคุณสมบัติและทฤษฎีเหล่านี้จะแสดงให้เห็นจริงได้ว่า หากปัญหาใดปัญหาหนึ่งมีคำตอบที่ดีที่สุด แล้วปัญหาคู่ของมันจะมีคำตอบที่ดีที่สุดด้วย ตลอดจนแสดงให้เห็นว่า เราจะหาคำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาคู่ เพื่อให้ได้คำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาเดิม ด้วยวิธีการซิมเพลกซ์ได้อย่างไร และปัญหาลักษณะใดที่เราจะหาคำตอบโดยวิธีกราฟของปัญหาคู่ และผลประโยชน์ที่สำคัญก็คือ เมื่อใดก็ตามที่ปัญหาใดปัญหาหนึ่ง ใช้เวลาในการคำนวณมาก การหาคำตอบต้องทำหลายตาราง โดยเฉพาะกรณีของปัญหาที่มีตัวแปรเทียม ซึ่งจะก่อให้เกิดความเบื่อหน่ายในการแก้ปัญหา และอาจเป็นผลให้ผลลัพธ์ที่ได้เกิดความคลาดเคลื่อนได้ เราก็จะใช้ปัญหาควบคู่ของมันแทน ซึ่งจะช่วยลดขั้นตอนในการคำนวณ เท่ากับลดเวลาและค่าใช้จ่ายในการแก้ปัญหาลงได้ นักศึกษาสามารถเปรียบเทียบผลที่ได้ จากการศึกษาปัญหาควบคู่ต่อไปในหัวข้อ 2.5

2.3 การหาคำตอบด้วยวิธีกราฟ

การหาคำตอบด้วยวิธีกราฟ เหมาะสมสำหรับปัญหาที่มีตัวแปรตัดสินใจได้ไม่เกิน 2 ตัว ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2.5 แผนกการผลิตสินค้า A และ B มีวัตถุดิบและแรงงานที่จะใช้ในการผลิตของสัปดาห์หนึ่ง 320 กิโลกรัม และ 360 คน- ชั่วโมง ตามลำดับ และมีเครื่องจักรที่จะใช้ในการผลิตในแต่ละสัปดาห์ เครื่องจักรจะทำงานได้เต็มที่ 360 ชั่วโมง รายละเอียดเกี่ยวกับการผลิตสินค้าแต่ละชนิด มีดังนี้

	วัตถุดิบ (กิโลกรัม/หน่วย)	แรงงาน (คน-ชั่วโมง/หน่วย)	เครื่องจักร (ชั่วโมง/หน่วย)	กำไร (บาท/หน่วย)
สินค้า A	4	9	12	240
สินค้า B	8	8	5	300

แผนการผลิตควรจะเป็นอย่างไร จึงจะเหมาะสมที่สุด

วิธีทำ กำหนดว่า ผลิตสินค้า A = x_1 หน่วย

ผลิตสินค้า B = x_2 หน่วย

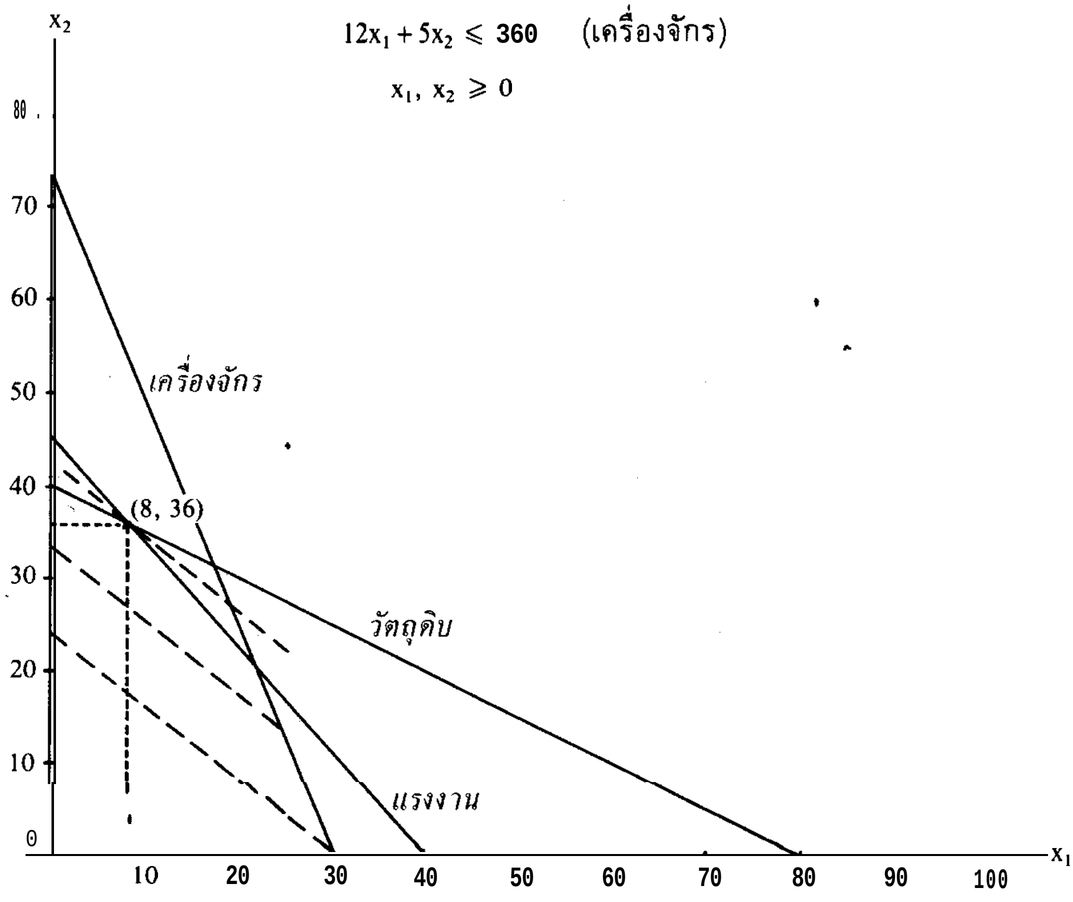
จะได้ ค่าสูงสุด $Z = 240x_1 + 300x_2$ (กำไร)

โดยมีข้อจำกัด $4x_1 + 8x_2 \leqslant 320$ (วัตถุดิบ)

$9x_1 + 8x_2 \leqslant 360$ (แรงงาน)

$12x_1 + 5x_2 \leqslant 360$ (เครื่องจักร)

$x_1, x_2 \geqslant 0$



จากกราฟ จะเห็นได้ว่าจุด (8, 36) เป็นจุดที่ได้ค่า Z สูงสุด สรุปได้ว่า ควรจะผลิตสินค้า A 8 หน่วย ผลิตสินค้า B 36 หน่วย จะได้กำไรมากที่สุด $= 240(8) + 300(36) = 12{,}720$ บาท

หมายเหตุ จากแผนการผลิตนี้ จะใช้วัตถุดิบและแรงงานหมดพอดี แต่ไม่ได้ใช้เครื่องจักรเต็มที่ ยังมีเวลาของเครื่องจักรเหลือ $= 360 - 12(8) - 5(36) = 84$ ชั่วโมง

ตัวอย่างที่ 2.6 จงหาสัดส่วนที่เหมาะสมของถ่านหิน 3 ชนิด ราคา 120, 132 และ 108 บาท ตามลำดับ ซึ่งจะนำมาผสมกันให้ได้เชื้อเพลิงที่มีราคาต่ำสุด ส่วนประกอบของเชื้อเพลิง จะต้องมีปริมาณกำมะถันไม่เกิน 1.2% และให้ปริมาณความร้อน 10 หน่วยต่อกิโลกรัม ถ่านหินแต่ละชนิดมีปริมาณกำมะถัน 0.9%, 1.1% และ 1.4% ตามลำดับ ให้ความร้อนได้ 12, 9 และ 8 หน่วยต่อกิโลกรัมตามลำดับ

วิธีทำ กำหนดว่า สัดส่วนของถ่านหินชนิดที่ 1 $= x_1$

สัดส่วนของถ่านหินชนิดที่ 2 $= x_2$

สัดส่วนของถ่านหินชนิดที่ 3 $= 1 - x_1 - x_2$

ราคาของเชื้อเพลิงนี้ $= Z = 120x_1 + 132x_2 + 108(1 - x_1 - x_2)$ บาท

$= 108 + 12x_1 + 24x_2$ บาท

ปริมาณกำมะถัน $= 0.9x_1 + 1.1x_2 + 1.4(1 - x_1 - x_2)\%$

$\Rightarrow 1.4 - 0.5x_1 - 0.3x_2 \leqslant 1.2$

ปริมาณความร้อนที่ได้ $= 12x_1 + 9x_2 + 8(1 - x_1 - x_2)$ หน่วย

$\Rightarrow 8 + 4x_1 + x_2 = 10$

เขียนตัวแบบได้ดังนี้

ค่าต่ำสุด $Z = 108 + 12x_1 + 24x_2$

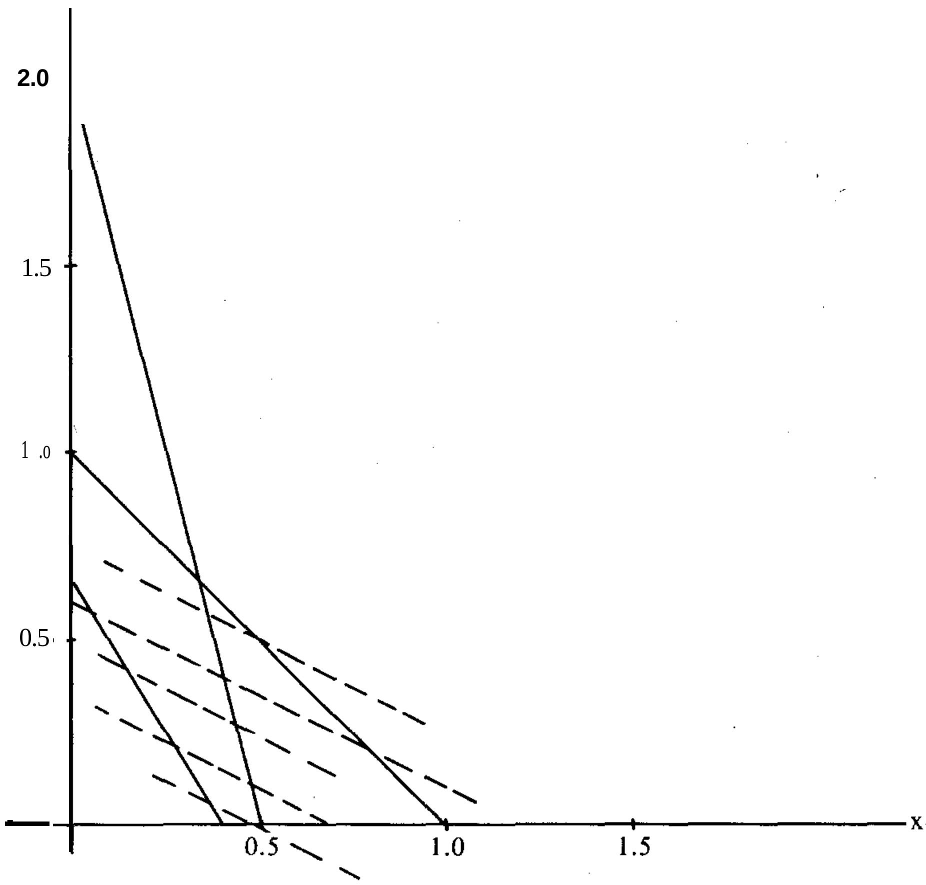
โดยมีข้อจำกัด $5x_1 + 3x_2 \geqslant 2$

$4x_1 + x_2 = 2$

$x_1 + x_2 \leqslant 1$

$x_1, x_2 \geqslant 0$

แสดงด้วยกราฟได้ดังนี้



จากกราฟ จะเห็นได้ว่าเส้นฟังก์ชันเป้าหมาย Z เลื่อนได้ต่ำสุดที่จุด (0.5, 0) แสดงว่า $x_1 = 0.5, x_2 = 0$ ดังนั้น $1 - x_1 - x_2 = 0.5$ สรุปว่าเราใช้ถ่านหิน 3 ชนิดมาผสมกัน ในสัดส่วน 0.5, 0 และ 0.5 จะได้เชื้อเพลิงที่มีราคาต่ำสุด $= 108 + 12(0.5) = 114$ บาท

ตัวอย่างที่ 2.7 ในการตรวจสอบคุณภาพสินค้าที่ผลิตได้แต่ละวัน จะมีผู้ตรวจสอบอยู่ 2 ระดับ ทำการตรวจสอบทุกวัน วันละ 8 ชั่วโมง ได้จำนวนสินค้าที่ตรวจแล้วอย่างน้อยที่สุด 3,000 ชิ้น ผู้ตรวจสอบระดับหนึ่งสามารถตรวจสินค้าได้ชั่วโมงละ 25 ชิ้น มีความถูกต้อง 98% ผู้ตรวจสอบระดับสอง ตรวจได้ชั่วโมงละ 15 ชิ้น มีความถูกต้อง 95% อัตราค่าตรวจสอบของผู้ตรวจสอบแต่ละคน แต่ละระดับเท่ากับ 60 และ 45 บาทต่อชั่วโมงตามลำดับ กรณีที่เกิดการตรวจสอบผิดพลาด บริษัทตีราคาเป็นค่าเสียหายชิ้นละ 30 บาท ในการตรวจสอบแต่ละวัน จึงกำหนดว่าจะต้องไม่มีการตรวจสินค้าผิดพลาดเกิน 150 ชิ้น และให้มีผู้ตรวจสอบระดับหนึ่งอย่างน้อย 1 คน ทุก ๆ 3 คน ของผู้ตรวจสอบระดับสอง แต่ต้องมีผู้ตรวจสอบระดับสองอย่างน้อย 10 คน บริษัทควรมีผู้ตรวจสอบในแต่ละระดับกี่คน จึงจะดีที่สุด

วิธีทำ กำหนดว่า มีผู้ตรวจสอบระดับหนึ่ง x_1 คน

มีผู้ตรวจสอบระดับสอง x_2 คน

จำนวนสินค้าที่ตรวจได้ในแต่ละวัน $= 8 \times 25x_1 + 8 \times 15x_2$ ชิ้น

ดังนั้น $8 \times 25x_1 + 8 \times 15x_2 \geqslant 3000$

หรือ $5x_1 + 3x_2 \geqslant 75$

จำนวนสินค้าที่ตรวจผิดพลาด $= .02 \times 8 \times 25x_1 + .05 \times 8 \times 15x_2$ ชิ้น

ดังนั้น $.02 \times 8 \times 25x_1 + .05 \times 8 \times 15x_2 \leqslant 150$

หรือ $2x_1 + 3x_2 \leqslant 75$

ค่าใช้จ่าย $Z = 60 \times 8x_1 + 45 \times 8x_2 + 30(4x_1 + 6x_2)$ บาท

เขียนตัวแบบ :

ค่าต่ำสุด $Z = 600x_1 + 540x_2$

โดยมีข้อจำกัด $5x_1 + 3x_2 \geqslant 75$

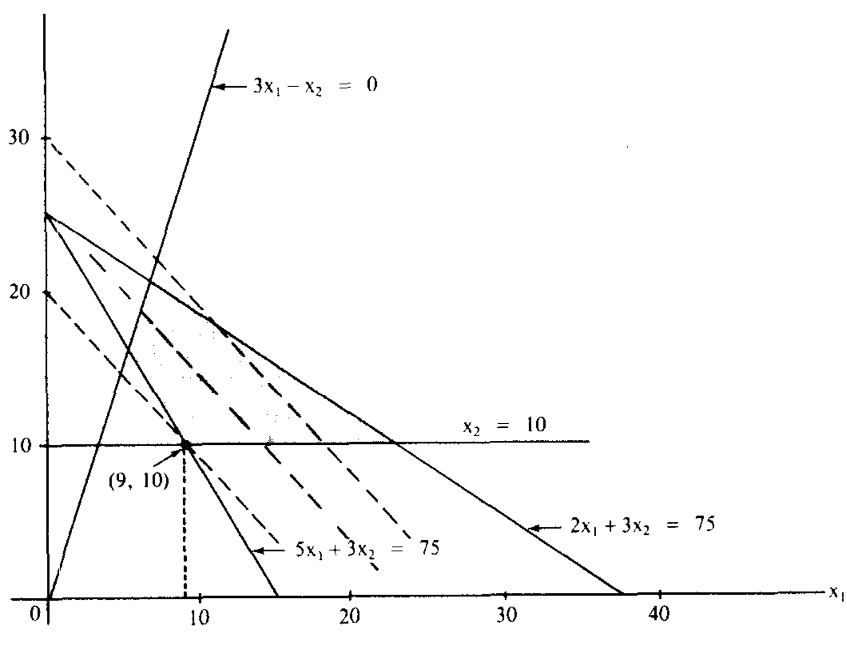
$2x_1 + 3x_2 \leqslant 75$

$3x_1 - x_2 \geqslant 0$

$x_2 \geqslant 10$

$x_1 \geqslant 0$

แสดงให้เห็นได้ด้วยกราฟ ดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่า จุดคำตอบที่ดีที่สุด คือจุด (9, 10)

สรุปได้ว่า บริษัทควรจะมีผู้ตรวจสอบระดับหนึ่ง 9 คน ผู้ตรวจสอบระดับสอง 10 คน ซึ่งจะทำให้เสียค่าใช้จ่ายในการตรวจสอบคุณภาพสินค้า $600 \times 9 + 540 \times 10 = 10{,}800$ บาทต่อวัน

2.4 การหาคำตอบโดยใช้ซิมเพลกซ์อัลกอริทึม

ให้เรามาศึกษาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2.8 จากปัญหาในตัวอย่างที่ 2.5 จงหาจุดการผลิตที่ดีที่สุด โดยใช้ซิมเพลกซ์อัลกอริทึม

วิธีทำ เปลี่ยนตัวแบบของปัญหาในตัวอย่างที่ 2.5 เป็นตัวแบบมาตรฐาน จะได้ว่า

ค่าสูงสุด $Z = 240x_1 + 300x_2$

โดยมีข้อจำกัด

$$
\begin{aligned}
4x_1 + 8x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 320 \\
9x_1 + 8x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 360 \\
12x_1 + 5x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 360 \\
x_j(j = 1,2,3,4,5) &\geqslant 0
\end{aligned}
$$

หาคำตอบด้วยวิธีการซิมเพลกซ์ได้ดังต่อไปนี้

ตารางที่	ตัวแปรฐาน x_i	c_i	c_j คำตอบ	240 $\underline{a}_1$	300 $\underline{a}_2$	0 $\underline{a}_3$	0 $\underline{a}_4$	0 $\underline{a}_5$	ค่าที่เป็นไปได้ θ_i
1	x_3	0	320	4	8	1	0	0	40
	x_4	0	360	9	8	0	1	0	45
	x_5	0	360	12	5	0	0	1	72
	z = o		s_j	0	0	0	0	0	
			c_j s_j	240	300	0	0	0	
2	x_2	300	40	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{8}$	0	0	80
	x_4	0	40	5	0	-1	1	0	8
	x_5	0	160	$\frac{19}{2}$	0	$\frac{5}{8}$	0	1	16.8

	$z = 12{,}000$		s_j	150	300	$\frac{75}{2}$	0	0	
			$c_j - s_j$	90	0	$\frac{75}{2}$	0	0	
ตารางที่	**ตัวแปรฐาน**		c_j	240	300	0	0	0	**ค่าที่เป็นไปได้**
	x_i	c_i	**คำตอบ**	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	θ_i
	x_2	300	36	0	1	$\frac{9}{40}$	$-\frac{1}{10}$	0	
3	x_1	240	8	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	
	x_5	0	84	0	0	$\frac{51}{40}$	$-\frac{19}{10}$	1	
			s_j	240	300	$\frac{39}{2}$	18	0	
	$Z = 12{,}720$		$c_j - s_j$	0	0	$-\frac{39}{2}$	-18	0	

จากตารางที่ 3 จะเห็นว่า ไม่มี $c_j - s_j$ ตัวใดเป็นบวก แสดงว่าได้ตารางสุดท้ายแล้ว สรุปว่า คำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาคือ

ควรผลิตสินค้า A 8 หน่วย ผลิตสินค้า B 36 หน่วย จะได้กำไรสูงสุด 12,720 บาท

จากแผนการผลิตนี้ จะใช้วัตถุดิบ (x_3) และแรงงาน (x_4) หมดพอดี แต่จะมีเวลาเครื่องจักรเหลือ 84 ชั่วโมง

คำอธิบาย

ขั้นตอนในการคำนวณ

ตารางที่ 1 เรามี $c_2 - s_2$ = ค่าสูงสุด (240, 300) = 300 นำค่าในคอลัมน์ 2 ไปหารคำตอบที่อยู่ในแถวเดียวกัน จะได้ค่า θ_i เลือกค่าต่ำสุดได้

$$\theta_1 = \text{ค่าต่ำสุด}\left(\frac{320}{8}, \frac{360}{8}, \frac{360}{5}\right) = 40$$

ทำต่อตารางที่ 2 โดยให้ x_2 เป็นตัวแปรฐานแทนที่ x_3

ตารางที่ 2 เรามี x_2 , x_4 และ x_5 เป็นตัวแปรฐาน ในแถวที่ 1,2 และ 3 ตามลำดับ ข้อมูลในตารางจะหาได้ดังนี้

ตัวเลขในแถวที่ 1 ตารางที่ 2(R_1^2) จะได้จาก ตัวเลขในแถวที่ 1 ตารางที่ 1(R_1^1) หารด้วย 8

$$\begin{array}{lcc|cccccc} & R_1^1 & : & 320 & 4 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ R_1^2 = \frac{1}{8}R_1^1 & & : & 40 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{8} & 0 & 0 \end{array}$$

นำตัวเลขในแถวที่ 1 ตารางที่ 2(R_1^2) คูณด้วย 8 แล้วเอาไปลบออกจาก ตัวเลขในแถวที่ 2 ตารางที่1(R_2^1) จะเป็นผลลัพธ์ของแถวที่ 2 ตารางที่ 2(R_2^2)

นั่นคือ $R_2^2 = R_2^1 - 8R_1^2 = R_2^1 - R_1^1$

$$\begin{array}{lc|cccccc} R_2^1 & : & 360 & 9 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ R_1^1 & : & 320 & 4 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ R_2^2 & : & 40 & 5 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

นำตัวเลขในแถวที่ 1 ตารางที่ 2(R_1^2) คูณด้วย 5 แล้วเอาไปลบออกจาก ตัวเลขในแถวที่ 3 ตารางที่1(R_3^1) จะเป็นผลลัพธ์ของแถวที่ 3 ตารางที่ 2(R_3^2)

นั่นคือ $R_3^2 = R_3^1 - 5R_1^2 = R_3^1 - \frac{5}{8}R_1^1$

$$\begin{array}{lc|cccccc} R_3^1 & : & 360 & 12 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{5}{8}R_1^1 & : & 200 & \frac{5}{2} & 5 & \frac{5}{8} & 0 & 0 \\ R_3^2 & : & 160 & \frac{19}{2} & 0 & -\frac{5}{8} & 0 & 1 \end{array}$$

หาฟังก์ชัน Z โดยการนำค่า c_i ของตัวแปรฐานในแถวที่ i คูณตัวเลขในแถวนั้น แล้วนำผลที่ได้มาบวกกัน เรียกว่าค่าของ s_j ค่าของ $Z = s_0$ แล้วนำค่า s_j ที่ได้ลบออกจาก c_j , $j = 1,2,3,4,5$

ในที่นี้ เราจะได้ ค่าของ s_j ($j = 0,1,2,3,4,5$) เท่ากับ $300R_1^2 + 0R_2^2 + 0R_3^2 = 300R_1^2$

$$\begin{array}{lc|cccccc} c_j\ (j = 1,2,3,4,5) & : & & 240 & 300 & 0 & 0 & 0 \\ R_1^2 & : & 40 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 300R_1^2 & : & 12000 & 150 & 300 & \frac{75}{2} & 0 & 0 \\ \text{ค่าของ } c_j - s_j\ (j=1,2,3,4,5) & : & & 90 & 0 & -\frac{75}{2} & 0 & 0 \end{array}$$

และ ค่าของ $Z = s_0 = 12000$

พิจารณาค่าของ $c_j - s_j$ ในตารางที่ 2 จะเห็นว่า มี $c_j - s_j > 0$ และค่าที่สูงสุด คือ $c_1 - s_1 = 90$ แสดง

ว่า คอลัมน์ 1 เป็น key column ซึ่งมีความหมายว่า เราจะเลือก x_1 เป็นตัวแปรฐานต่อไป ค่าของ x_1 ที่เพิ่มขึ้น 1 หน่วย จะทำให้ค่าของ Z เพิ่มขึ้นอีก 90 เราต้องพิจารณาต่อไปว่า ควรจะให้ x_1 มีค่าได้มากที่สุดเท่าใด ซึ่งจะหาได้จากการนำคำตอบในแถว i หารด้วยค่าในคอลัมน์ 1 ที่มีค่ามากกว่า 0 ในแถวเดียวกัน เรียกว่าค่าที่เป็นไปได้ของ x_1 (θ_i) ค่าที่น้อยที่สุดของ θ_i จะเป็นปริมาณสูงสุดที่เป็นไปได้ของ x_1 ในที่นี้ เราจะได้

ปริมาณสูงสุดที่เป็นไปได้ของ x_1 = ค่าต่ำสุด $(\frac{40}{1/2}, \frac{40}{5}, \frac{160}{19/2}) = 8 = \theta_2$

ในแถวที่ 2 (R_2) มีตัวแปรฐาน x_4 แสดงว่า เราจะทำตารางที่ 3 ต่อไป โดยให้ x_1 เป็นตัวแปรฐานแทนที่ x_4

ตารางที่3 จะมี x_2 , x_1 และ x_5 ,เป็นตัวแปรฐานในแถวที่ 1,2 และ 3 ตามลำดับ ข้อมูลในตารางจะหาได้ดังนี้

ตัวเลขในแถวที่ 2 ตารางที่ 3(R_2^3) จะได้จาก ตัวเลขในแถวที่ 2 ตารางที่ 2(R_2^2) หารด้วย 5

$$R_2^2 \;:\; | \; 40 \; | \quad 5 \quad 0 \quad -1 \quad 1 \quad 0$$

$$R_2^3 = \frac{1}{5} R_2^2 \;:\; | \; 8 \; | \quad 1 \quad 0 \quad -\frac{1}{5} \quad \frac{1}{5} \quad 0$$

นำตัวเลขในแถวที่ 2 ตารางที่ 3(R_2^3) คูณด้วย $\frac{1}{2}$ แล้วเอาไปลบออกจาก ตัวเลขในแถวที่ 1 ตารางที่2(R_1^2) จะเป็นผลลัพธ์ของแถวที่ 1 ตารางที่ 3(R_1^3)

นั่นคือ $R_1^3 = R_1^2 - \frac{1}{2} R_2^3 = R_1^2 - \frac{1}{10} R_2^2$

$$R_1^2 \;:\; | \; 40 \; | \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad \frac{1}{8} \quad 0 \quad 0$$

$$\frac{1}{10} R_2^2 \;:\; | \; 4 \; | \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad -\frac{1}{10} \quad \frac{1}{10} \quad 0$$

$$R_1^3 \;:\; | \; 36 \; | \quad 0 \quad 1 \quad \frac{9}{40} \quad -\frac{1}{10} \quad 0$$

นำตัวเลขในแถวที่ 2 ตารางที่ 3(R_2^3) คูณด้วย $\frac{19}{2}$ แล้วเอาไปลบออกจาก ตัวเลขในแถวที่ 3 ตารางที่ 2(R_3^2) จะเป็นผลลัพธ์ของแถวที่ 3 ตารางที่ 3(R_3^3)

นั่นคือ $R_3^3 = R_3^2 - \frac{19}{2} R_2^3 = R_3^2 - \frac{19}{10} R_2^2$

$$R_3^2 \;:\; | \; 160 \; | \quad \frac{19}{2} \quad 0 \quad -\frac{5}{8} \quad 0 \quad 1$$

$\frac{19}{10}R_2^2$	:	76	$\frac{19}{2}$	0	$-\frac{19}{10}$	$\frac{19}{10}$	0
R_3^3	:	84	0	0	$\frac{51}{40}$	$-\frac{19}{10}$	1

เอาค่า c_i ของตัวแปรฐานที่อยู่ในแถว i ไปคูณตัวเลขในแถวเดียวกัน จะได้ เท่ากับ

$$300R_1^3 + 240R_2^3 + 0R_3^3$$

ผลลัพธ์ที่ได้ เรียกว่า ค่าของ s_j(j = 0,1,2,3,4,5) ค่า $z = s_0$ เอาค่า s_j ที่ได้ ลบออกจาก c_j (j = 1,2,3,4,5) จะได้ค่าของ $c_j - s_j$

c_j (j = 1,2,3,4,5)		:		240	300	0	0	0
300	R_1^3	:	10800	0	300	$\frac{135}{2}$	-30	0
240	R_2^3	:	19201	**240**	**0**	-48	48	0
ค่าของ s_j(j = 0,1,2,3,4,5)		:	12720	240	300	$\frac{39}{2}$	18	0

นั่นคือ $z = s_0$ = 12,720 และ

$c_j - s_j$ (j = 1,2,3,4,5)	:	0	0	$-\frac{39}{2}$	-18	0

พิจารณาค่าของ $c_j - s_j$ (j = 1,2,3,4,5) จะเห็นว่า ไม่มีค่าใดมากกว่า 0 แสดงว่า ค่าของ Z เพิ่มขึ้นไม่ได้อีกแล้ว หยุดการคำนวณ อ่านผลที่ได้จากตารางนี้ จะเป็นคำตอบดีที่สุด

การอ่านและสรุปผลจากตาราง

ตารางที่ 1 จะให้สาระข้อมูล ที่เกี่ยวกับ การผลิตสินค้า A และ สินค้า B ว่า มีรายละเอียดเกี่ยวกับการผลิต อย่างไร และผลกำไรที่ได้จากการจำหน่ายเป็นอย่างไร ผลสรุปที่ได้จากตารางนี้ อ่านจากค่าของ $c_j - s_j$ (j = 1,2,3,4,5) แสดงให้เห็นว่า เราควรเลือกผลิตสินค้า B(x_2) เนื่องจากมีอัตราเพิ่มขึ้นต่อหน่วยมากที่สุด คือ 300 บาท และค่าที่เป็นไปได้ที่มากที่สุดของ x_2 คือ 40 หน่วยเป็นผลให้ได้ค่าของกำไร Z เพิ่มขึ้นอีก 300(40) = 12,000 บาท

ตารางที่ 2 อ่านได้ว่า ผลิตสินค้า B(x_2) 40 หน่วย จะใช้วัตถุดิบ(x_3) หมดพอดี แต่จะมีแรงงาน (x_4) เหลือ 40 ชั่วโมง และ มีเวลาเครื่องจักร (x_5) ที่สามารถใช้ทำงานได้อีก 160 ชั่วโมง กำไรที่ได้ จะเท่ากับ 12,000 บาท

ผลสรุปจากตารางนี้ชี้ให้เห็นว่า ยังไม่เป็นแผนการผลิตที่ดีที่สุด เราสามารถเพิ่มกำไร Z ได้อีก ถ้าเราเลือกผลิตสินค้า $A(x_1)$ ซึ่งจะทำให้กำไรเพิ่มขึ้นอีก 90 บาทต่อการเพิ่มขึ้นของ x_1 1 หน่วย จำนวนมากที่สุดของ x_1 จะเท่ากับ 8 หน่วย เป็นผลให้กำไร Z เพิ่มขึ้นอีก $90 \times 8 = 720$ บาท และจำนวนของ x_2 ลดลงเหลือ $40 - \frac{1}{2}(8) = 36$ หน่วย เครื่องจักรยังสามารถทำงานได้อีก $160 - \frac{19}{2}(8) = 84$ ชั่วโมง

ตารางที่ 3 อ่านได้ว่า ผลิตสินค้า $A(x_1)$ 8 หน่วย ผลิตสินค้า $B(x_2)$ 36 หน่วย ใช้วัตถุดิบ (x_3) และแรงงาน (x_4) หมดพอดี มีเวลาเครื่องจักร (x_5) เหลือ 84 ชั่วโมง กำไรที่ได้จากแผนการผลิตนี้ = 12,720 บาท

ผลสรุป จะได้แผนการผลิตนี้เป็นแผนที่ดีที่สุด

ตัวอย่างที่ 2.9 พ่อค้ากาแฟได้ซื้อกาแฟมา 2 ชนิด ชนิดแรก 40 กิโลกรัม ราคากิโลกรัมละ 160 บาท ชนิดที่สอง 30 กิโลกรัม ราคากิโลกรัมละ 205 บาท พ่อค้าผสมกาแฟทั้ง 2 ชนิด เป็นกาแฟเกรดเอ และเกรดบี นำไปขายในราคากิโลกรัมละ 335 และ 285 บาท ตามลำดับ ส่วนผสมของกาแฟเกรดเอ ประกอบด้วยกาแฟชนิดแรกไม่ต่ำกว่า 25% กาแฟชนิดที่สองไม่ต่ำกว่า 50% ส่วนผสมของกาแฟเกรดบี ประกอบด้วยกาแฟชนิดแรกไม่เกิน 75% จงคำนวณส่วนผสมที่ดีที่สุดของกาแฟแต่ละเกรด

วิธีทำ กำหนดส่วนผสมของกาแฟแต่ละเกรด ดังนี้

กาแฟเกรดเอ มีส่วนผสมของกาแฟชนิดแรก x_1 กิโลกรัม
ส่วนผสมของกาแฟชนิดที่สอง x_2 กิโลกรัม

กาแฟเกรดบี มีส่วนผสมของกาแฟชนิดแรก x_3 กิโลกรัม
ส่วนผสมของกาแฟชนิดที่สอง x_4 กิโลกรัม

จะได้ ปริมาณกาแฟเกรดเอ = $x_1 + x_2$ กิโลกรัม
ปริมาณกาแฟเกรดบี = $x_3 + x_4$ กิโลกรัม
ใช้กาแฟชนิดแรก = $x_1 + x_3 \leqslant 40$ กิโลกรัม
ใช้กาแฟชนิดที่สอง = $x_2 + x_4 \leqslant 30$ กิโลกรัม

$x_1 \geqslant \frac{25}{100}(x_1 + x_2)$ หรือ $-3x_1 + x_2 \leqslant 0$

$x_2 \geqslant \frac{50}{100}(x_1 + x_2)$ หรือ $x_1 - x_2 \leqslant 0$

$x_3 \leqslant \frac{75}{100}(x_3 + x_4)$ หรือ $x_3 - 3x_4 \leqslant 0$

ต้นทุนกาแฟ = ราคากาแฟทั้งสองชนิดที่นำมาใช้เป็นส่วนผสม

$= 160(x_1 + x_3) + 205(x_2 + x_4)$ บาท

$= 160x_1 + 205x_2 + 160x_3 + 205x_4$ บาท

ราคาขาย $= 335(x_1 + x_2) + 285(x_3 + x_4)$ บาท

$= 335x_1 + 335x_2 + 285x_3 + 285x_4$ บาท

กำไรที่ได้จากการขาย Z = ราคาขาย – ต้นทุน

$= 175x_1 + 130x_2 + 125x_3 + 80x_4$ บาท

เขียนตัวแบบได้ดังนี้

ค่าสูงสุด $Z = 175x_1 + 130x_2 + 125x_3 + 80x_4$

โดยมีข้อจำกัด

$$
\begin{array}{rcl}
x_1 + x_3 & \leqslant & 40 \\
x_2 + x_4 & \leqslant & 30 \\
-3x_1 + x_2 & \leqslant & 0 \\
x_1 - x_2 & \leqslant & 0 \\
x_3 - 3x_4 & \leqslant & 0 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 & \geqslant & 0
\end{array}
$$

เปลี่ยนเป็นตัวแบบมาตรฐาน จะได้

ค่าสูงสุด $Z = 175x_1 + 130x_2 + 125x_3 + 80x_4$

โดยมีข้อจำกัด

$$
\begin{array}{rcl}
x_1 + x_3 + x_5 & = & 40 \\
x_2 + x_4 + x_6 & = & 30 \\
-3x_1 + x_2 + x_7 & = & 0 \\
x_1 - x_2 + x_8 & = & 0 \\
x_3 - 3x_4 + x_9 & = & 0 \\
x_j (j = 1, 2, \ldots, 9) & \geqslant & 0
\end{array}
$$

หาคำตอบด้วยวิธีการซิมเพลกซ์ได้ดังต่อไปนี้

	ตัวแปรฐาน		c_j	175	130	125	80	0	0	0	0	0	ค่า θ_i
	x_i	c_i	คำตอบ	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{a}_5$	$\underline{a}_6$	$\underline{a}_7$	$\underline{a}_8$	$\underline{a}_9$	
	x_5	0	40	1	0	1	0	1	0	0	0	0	40
	x_6	0	30	0	1	0	1	0	1	0	0	0	—
1	x_7	0	0	−2	1	0	0	0	0	1	0	0	—
	x_8	0	0	1	−1	0	0	0	0	0	1	0	0
	x_9	0	0	0	0	1	−3	0	0	0	0	1	—
	P = 0		s_j	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
			$c_j - s_j$	175	130	125	80	0	0	0	0	0	
	x_5	0	40	0	1	1	0	1	0	0	−1	0	40
	x_6	0	30	0	1	0	1	0	1	0	0	0	30
2	x_7	0	0	0	−2	0	0	0	0	1	3	0	—
	x_1	175	0	1	−1	0	0	0	0	0	1	0	—
	x_9	0	0	0	0	1	−3	0	0	0	0	1	—
	P = 0		s_j	175	−175	0	0	0	0	0	175	0	
			$c_j - s_j$	0	305	125	80	0	0	0	−175	0	
	x_5	0	10	0	0	1	−1	1	−1	0	−1	0	10
	x_2	130	30	0	1	0	1	0	1	0	0	0	—
3	x_7	0	60	0	0	0	2	0	2	1	3	0	—
	x_1	175	30	1	0	0	1	0	1	0	1	0	—
	x_9	0	0	0	0	1	−3	0	0	0	0	1	0

	P = 9150		s_j	175	130	0	305	0	305	0	175	0	
			$c_j - s_j$	0	0	125	-225	0	-305	0	-175	0	
	ตัวแปรฐาน		c_j	175	130	125	80	0	0	0	0	0	**ค่า** θ_i
	x_i	c_i	**คำตอบ**	$\underline{a}_1$	a2	$\underline{a}_3$	a4	$\underline{a}_5$	$\underline{a}_6$	$\underline{a}_7$	$\underline{a}_8$	a9	
	x_5	0	10	0	0	0	2	1	−1	0	−1	−1	5
	x_2	130	30	0	1	0	1	0	1	0	0	0	30
4	x_7	0	60	0	0	0	2	0	2	1	3	0	30
	x_1	175	30	1	0	0	1	0	1	0	1	0	30
	x_3	125	0	0	0	1	−3	0	0	0	0	1	—
	P = 9150		s_j	175	130	125	−70	0	305	0	175	125	
			cj − sj	0	0	0	150	0	-305	0	-175	-125	
	x_4	80	5	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	
	x_2	130	25	0	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\overline{2}$ 3	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
5	x_7	0	50	0	0	0	0	−1	3	1	4	1	
	x_1	175	25	1	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\overline{2}$ 3	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	
	x_3	125	1.5	0	0	1	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	
	P = 9900		s_j	175	130	125	80	75	230	0	100	50	
			cj − s_j	0	0	0	0	-75	-230	0	-100	-50	

จากตารางที่ 5 จะเห็นว่าไม่มี $c_j - s_j$ ตัวใดเป็นบวก แสดงว่าได้ตารางสุดท้ายแล้ว สรุปว่าคำตอบที่ดีที่สุดของปัญหานี้คือ

ผสมกาแฟเกรดเอ = 25 + 25 = 50 กิโลกรัม มีส่วนผสมของกาแฟชนิดแรก และชนิดที่สอง อย่างละ 25 กิโลกรัม

ผสมกาแฟเกรดบี = 15 + 5 = 20 กิโลกรัม มีส่วนผสมของกาแฟชนิดแรก 15 กิโลกรัม ชนิดที่สอง 5 กิโลกรัม จะได้กำไรสูงสุด 9,900 บาท

หมายเหตุ การคำนวณ

ตารางที่ 2 $R_4^2 \;=\; R_4^1$

$R_1^2 \;=\; R_1^1 - R_4^2$

$R_3^2 \;=\; R_3^1 - (-3)R_4^2$

$R_2^2 \;=\; R_2^1$ และ $R_5^2 \;=\; R_5^1$

ตารางที่ 3 $R_2^3 \;=\; R_2^2$

$R_1^3 \;=\; R_1^2 - R_2^3$

$R_3^3 \;=\; R_3^2 - (-2)R_2^3$

$R_4^3 \;=\; R_4^2 - (-1)R_2^3$ และ $R_5^3 \;=\; R_5^2$

ตารางที่ 4 $R_5^4 \;=\; R_5^3$

$R_1^4 \;=\; R_1^3 - R_5^4$

$R_2^4 \;=\; R_2^3$

$R_3^4 \;=\; R_3^3$ และ $R_4^4 \;=\; R_4^3$

ตารางที่ 5 $R_1^5 \;=\; R_1^4/2$

$R_2^5 \;=\; R_2^4 - R_1^5$

$R_3^5 \;=\; R_3^4 \quad 2R_1^5$

$R_4^5 \;=\; R_4^4 - R_1^5$

และ $R_5^5 \;=\; R_5^4 - (-3)R_1^5$

ตัวอย่างที่ 2.10 จากปัญหาในตัวอย่างที่ 2.6 จงหาสัดส่วนที่เหมาะสมของถ่านหิน 3 ชนิด โดยใช้วิธีการ

1. Big-M Method

2. Two Phase Method

9 4

วิธีทำ I. Big - M Method

เขียนตัวแบบมาตรฐาน จะได้

ค่าต่ำสุด $Z = 108 + 12x_1 + 24x_2 + Mx_5 + Mx_6$

โดยมีข้อจำกัด 5x,+3x,-x, $+ x_5 = 2$

4x,+x, $+ x_6 = 2$

$x_1 + x_2 + x_4 = 1$

$x_j (j = 1,2,\ldots,6) \geqslant 0$

หาคำตอบโดยใช้ซิมเพลกซ์อัลกอริทึม ได้ดังต่อไปนี้

ตัวแปรฐาน		c_j	12	24	0	0	M	M	ค่า θ_i
x_i	c_i	คำตอบ	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{a}_5$	$\underline{a}_6$	
x_5	M	2	5	3	−1	0	1	0	$\frac{2}{5}$
x_6	M	2	4	1	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$
x_4	0	1	1	1	0	1	0	0	1
$Z = 108 + 4M$		s_j	9M	4M	-M	0	M	M	
		$c_j - s_j$	12 − 9M	24-4M	M	0	0	0	
x_1	12	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{3}$	0	
x_6	M	$\frac{2}{5}$	0	$-\frac{7}{5}$	$\frac{4}{5}$	0	$-\frac{4}{5}$	1	$\frac{1}{2}$
x_4	0	$\frac{3}{5}$	0	3	$\frac{1}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	0	3
$Z = \frac{2M + 24}{5}$		s_j	12	$\frac{36-7M}{5}$	$\frac{4M-12}{3}$	0	$\frac{12-4M}{5}$	M	
+ 108		$c_j - s_j$	0	$\frac{7M-12}{5}$	$\frac{12-4M}{5}$	0	$\frac{9M-12}{5}$	0	
x_1	12	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$	
x_3	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{7}{4}$	1	0	- 1	$\frac{5}{4}$	
x_4	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{4}$	0	1	0	$\frac{1}{4}$	
$z = 114$		s_j	12	3	0	0	0	3	
		$c_j - s_j$	0	21	0	0	M	M - 3	

สรุปได้ว่า ใช้ถ่านหิน 3 ชนิดมาผสมกันในอัตราส่วน $\frac{1}{2}$, 0 และ $\frac{1}{2}$ จะได้เชื้อเพลิงที่มีราคาต่ำสุด 114 บาท

2. ใช้ Two – Phase Method ซึ่งจะมีขั้นตอนในการคำนวณเหมือนกัน เปลี่ยนแปลงเฉพาะค่า c_j กล่าวคือ ในวิธีการ Two – Phase จะมีฟังก์ชันเป้าหมาย ดังนี้

Phase – 1 : ค่าต่ำสุด $Z_1 = x_5 + x_6$

Phase – 2 : ค่าต่ำสุด $Z = 108 + 12x_1 + 24x_2$

Phase 1

	ตัวแปรฐาน		c_j	0	0	0	0	1	1	ค่า θ_i
	x_i	c_i	คำตอบ	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{a}_5$	$\underline{a}_6$	
	x_5	1	2	5	3	-1	0	1	0	$\frac{2}{5}$
1	x_6	1	2	4	1	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$
	x_4	0	1	1	IO	0	10	0	0	1
	$Z_1 = 4$		s_j	9	4	−1	0	1	1	
			$c_j - s_j$	-9	-4	1	0	0	0	
	x_1	0	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	—
2	x_6	1	2	0	$-\frac{7}{5}$	$\frac{4}{3}$	0	$-\frac{4}{5}$	1	$\frac{1}{2}$
	x_4	0	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{5}$	0	3
	$Z_1 = \frac{2}{5}$		s_j	0	$-\frac{7}{5}$	$\frac{4}{5}$	0	$-\frac{4}{5}$	1	
			$c_j - s_j$	0	$\frac{7}{5}$	$-\frac{4}{5}$	0	$\frac{9}{3}$	0	

ตัวแปรฐาน		c_j	0	0	0	0	1	1	ค่า θ_i
x_i	c_i	คำตอบ	$\underline{a}_1$	a_2	a_3	$\underline{a}_4$	$\underline{a}_5$	$\underline{a}_6$	
x_1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$	
3 x_3	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{7}{4}$	1	0	-1	$\frac{5}{4}$	
x_4	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{4}$	0	1	0	$-\frac{1}{4}$	
$z_i = 0$		s_j	0	0	0	0	0	0	
		$c_j - s_j$	0	0	0	0	1	1	

ตารางที่ 3 นี้จะเป็นตารางสุดท้ายของ Phase – 1 เปลี่ยนให้เป็นตารางที่ 1 ของ Phase – 2 โดยตัดคอลัมน์ของตัวแปรเทียม x_5 และ x_6 ออก เปลี่ยนค่า c_j เป็นค่าเดิม คำนวณค่า Z, s_j และ $c_j - s_j$ ใหม่

Phase – 2

ตัวแปรฐาน		c_j	12	24	0	0
x_i	c_i	คำตอบ	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	a_3	$\underline{a}_4$
x_1	12	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0
x_3	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{7}{4}$	1	0
x_4	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{4}$	0	1
$z = 114$		s_j	12	3	0	0
		$c_j - s_j$	0	21	0	0

จากตารางนี้ ไม่มีค่า $c_j - s_j < 0$ แสดงว่าค่าของ Z ลดลงไม่ได้อีกแล้ว สรุปได้ว่า

ใช้ถ่านหิน 3 ชนิดมาผสมกันในอัตราส่วน $\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$ จะได้เชื้อเพลิงที่มีราคาต่ำสุด 114 บาท

จะเห็นได้ว่าขั้นตอนในการดำเนินงานของ 2 วิธีการจะเหมือนกัน แตกต่างกันตรงค่า Z, s_j และ $c_j - s_j$ แต่ในตารางสุดท้ายจะเหมือนกันหมด ซึ่งนักศึกษาจะเลือกวิธีการใดก็ได้

ตัวอย่างที่ 2.11 ชาวสวนต้องการซื้อปุ๋ยมาใช้ในการเพาะปลูก เพื่อต้องการให้ได้แร่ธาตุไนเตรต ฟอสเฟต และโปแตช ในปริมาณต่ำสุด 720, 450 และ 360 หน่วยตามลำดับ มีปุ๋ยเคมี 3 ชนิด ราคา 90, 60 และ 45 บาทต่อถุง ตามลำดับ ปุ๋ยเคมีแต่ละชนิดมีแร่ธาตุในปริมาณหน่วยต่อถุง ดังนี้

ชนิดของปุ๋ย	แร่ธาตุ		
	ไนเตรต	ฟอสเฟต	โปแตช
1	12	6	9
2	3	6	6
3	9	9	3

ชาวสวนควรจะซื้อปุ๋ยชนิดใดบ้าง จึงจะดีที่สุด

วิธีทำ กำหนดว่า ซื้อปุ๋ยชนิดที่ 1 = x_1 ถุง

ซื้อปุ๋ยชนิดที่ 2 = x_2 ถุง

ซื้อปุ๋ยชนิดที่ 3 = x_3 ถุง

เขียนตัวแบบ

ค่าต่ำสุด $Z = 90x_1 + 60x_2 + 45x_3$

โดยมีข้อจำกัด $12x_1 + 3x_2 + 9x_3 \geqslant 720$

$6x_1 + 6x_2 + 9x_3 \geqslant 450$

$9x_1 + 6x_2 + 3x_3 \geqslant 360$

$x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$

เปลี่ยนเป็นตัวแบบมาตรฐาน จะได้

ค่าต่ำสุด $Z = 90x_1 + 60x_2 + 45x_3 + Mx_7 + Mx_8 + Mx_9$

โดยมีข้อจำกัด $12x_1 + 3x_2 + 9x_3 - x_4 \qquad + x_7 \qquad = 720$

6x, +6x, +9x, $\quad - x_5 \qquad + x_8 \qquad = 450$

9x, +6x, +3x, $\quad - x_6 \qquad + x_9 = 360$

$x_j(j = 1,2,\ldots,9) \geqslant 0$

หาคำตอบด้วยวิธีการ Two – Phase จะได้ Phase – 1 มีฟังก์ชันเป้าหมาย

ค่าต่ำสุด z, = $x_7 + x_8 + x_9$

ตัวแปรฐาน		c_j	0	0	0	0	0	0	1	1	1	ค่า θ_i
x_i	c_i	คำตอบ	a_1	a2	a3	a_4	a5	a_6	a_7	a_8	a_9	
x_7	1	720	12	3	9	-1	0	0	1	0	0	60
x_8	1	450	6	6	9	0	-1	0	0	1	0	75
x_9	1	360	9	6	3	0	0	-1	0	0	1	40
$Z_1 = 1530$		s_j	27	15	21	-1	-1	-1	1	1	1	
		$c_j - s_j$	-27	-15	-21	1	1	1	0	0	0	
x_7	1	240	0	-5	5	-1	0	$\frac{4}{3}$	1	0	$-\frac{4}{3}$	48
x_8	1	210	0	2	7	0	-1	$\frac{2}{3}$	0	1	$-\frac{2}{3}$	30
x_1	0	40	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{1}{9}$	120
$Z_1 = 450$		s_j	0	-3	12	-1	-1	2	1	1	-2	
		$c_j - s_j$	0	3	-12	1	1	-2	0	0	3	
x_7	1	90	0	$-\frac{45}{7}$	0	-1	$\frac{5}{7}$	$\frac{6}{7}$	1	$-\frac{5}{7}$	$-\frac{6}{7}$	105
x_3	0	30	0	$\frac{2}{7}$	1	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{21}$	0	$\frac{1}{7}$	$-\frac{2}{21}$	315
x_1	0	30	1	$\frac{4}{7}$	0	0	$+\frac{1}{21}$	$-\frac{1}{7}$	0	$-\frac{1}{21}$	$\frac{1}{7}$	—

ตัวแปรฐาน x_i	c_i	c_j / คำตอบ	0 $\underline{a}_1$	0 $\underline{a}_2$	0 $\underline{a}_3$	0 $\underline{a}_4$	0 $\underline{a}_5$	0 $\underline{a}_6$	1 $\underline{a}_7$	1 $\underline{a}_8$	1 $\underline{a}_9$	ค่า θ_i
$z_1 = 90$		s_j	0	$-\frac{45}{7}$	0	-1	$\frac{5}{7}$	$\frac{6}{7}$	1	$-\frac{5}{7}$	$-\frac{6}{7}$	
		-	0	$\frac{45}{7}$	0	1	$-\frac{5}{7}$	$-\frac{6}{7}$	0	$\frac{12}{7}$	$\frac{13}{7}$	

ตารางต่อไป (ตารางที่ 4) จะเป็นตารางสุดท้ายของ Phase – 1 ซึ่งเมื่อตัดคอลัมน์ของตัวแปรเทียม x_7, x_8 และ x_9 ออก และเปลี่ยนค่าฟังก์ชันเป้าหมายใหม่ จะเป็นตารางที่ 1 ของ Phase – 2 จากตารางนี้ เราคำนวณค่า Z, s_j และ $c_j - s_j$ ใหม่ จะได้ผลดังต่อไปนี้

Phase – 2 จะมีฟังก์ชันเป้าหมาย

ค่าต่ำสุด $Z = 90x_1 + 60x_2 + 45x_3$

	ตัวแปรฐาน x_i	c_i	c_j / คำตอบ	90 a_1	60 a_2	45 a_3	0 a_4	0 a_5	0 a_6	ค่า θ_i
1	x_6	0	105	0	$-\frac{15}{2}$	0	$-\frac{7}{6}$	$\frac{5}{6}$	1	126
	x_3	45	20	0	1	1	$\frac{1}{9}$	$-\frac{2}{9}$	0	
	x_1	90	45	1	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	270
	$z = 4950$		s_j	90	0	45	-10	5	0	
			$c_j - s_j$	0	60	0	10	-5	0	
2	x_5	0	126	0	-9	0	$-\frac{7}{5}$	1	$\frac{6}{5}$	
	x_3	45	48	0	-1	1	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{4}{15}$	
	x_1	90	24	1	1	0	$\frac{1}{15}$	0	$-\frac{1}{5}$	

ตัวแปรฐาน	c_j	90	60	45	0	0	0	ค่า θ_i
x_i c_i	คำตอบ	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{a}_5$	$\underline{a}_6$	
$Z - 4320$	s_j	90	45	45	-3	0	-6	
	$c_j - s_j$	0	15	0	3	0	6	

สรุปได้ว่า ชาวสวนควรจะซื้อปุ๋ยชนิดที่ 1 24 ถุง ซื้อปุ๋ยชนิดที่ 3 48 ถุง จึงจะได้แร่ธาตุตามเกณฑ์กำหนดที่ต้องการ แต่เสียค่าใช้จ่ายต่ำสุด 4,320 บาท

ถ้าเราพิจารณาจากการทำซิมเพล็กซ์อัลกอริทึมของตัวอย่างทั้ง 4 เราอาจแยกตัวเลขข้อมูลในแต่ละตารางออกเป็น 3 กลุ่ม คือ

1) กลุ่มคำตอบของตัวแปรฐาน

2) กลุ่ม ส.ป.ส. ของตัวแปรฐาน ซึ่งจะมีค่าเป็น 1 ในแถวและคอลัมน์ของมันเท่านั้น นอกนั้นเป็น 0

และ 3) กลุ่ม ส.ป.ส. ของตัวแปรนอกฐาน

เมื่อพิจารณาขั้นตอนการคำนวณของแต่ละตาราง จะพบว่า เมื่อเราสลับที่ระหว่างตัวแปรนอกฐาน x_k กับตัวแปรฐาน x_r เราจะกลับเศษส่วนของ ส.ป.ส. ด้วย กล่าวคือ

$$x_{kr} = \frac{1}{x_{rk}}$$

ในเมื่อ x_{kr} เป็น ส.ป.ส. ที่อยู่ในแถวของตัวแปรฐาน x_k คอลัมน์ของตัวแปรนอกฐาน x_r

เอาค่า $-x_{kr}$ ไปคูณทุกค่าในคอลัมน์ของมัน จะเป็นค่าของ ส.ป.ส. ในคอลัมน์ของตัวแปรนอกฐานใหม่ x_r นั่นคือ

$$x_{ir} = -x_{kr} \cdot x_{ik}, \quad i \neq k$$

เอาค่า x_{kr} ไปคูณทุกค่าที่อยู่ในแถวเดียวกัน จะเป็นคำตอบและ ส.ป.ส. ในแถวของตัวแปรฐานใหม่ x_k นั่นคือ

$$Rx_k = x_{kr} \cdot Rx_r$$

เอาค่า x_{ir} คูณทุกค่าที่อยู่ในแถวของตัวแปรฐาน x_r (เดิม) ยกเว้นคอลัมน์ของตัวแปรนอกฐาน x_k (เดิม) แล้วนำผลลัพธ์ที่ได้ไปบวกกับทุกค่าที่อยู่ในแถว i จะได้คำตอบและ ส.ป.ส. ของแถว i ใหม่ $i \neq r$ นั่นคือ

$$Rx_i = Rx_i + x_{ir} \cdot Rx_r$$

นอกจากนี้ หากเราย้อนกลับไปดูขั้นตอนการคำนวณด้วยวิธีการที่เป็นระบบโดยอาศัย Gaussian Elimination จะเห็นว่า เราคำนวณฟังก์ชัน Z ไปพร้อมกัน นั่นคือ เปลี่ยนฟังก์ชัน Z เป็นสมการ (0) พิจารณาอัตราการเปลี่ยนแปลงต่อหน่วยของ x_j ในเทอมของ $s_j - c_j$

จากข้อเท็จจริงเหล่านี้ และเพื่อลดจำนวนคอลัมน์ลง เราอาจปรับปรุงตารางซิมเพลกซ์เสียใหม่ โดยตัดคอลัมน์ของตัวแปรฐานออก แต่ละตารางจะแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรฐาน x_i กับตัวแปรนอกฐาน x_j และถือฟังก์ชันเป้าหมาย Z เป็นสมการ (0) ตัวอย่างเช่น ในตารางที่ 1 Phase – 2 ของตัวอย่างที่ 2.11 เราเขียนตารางเสียใหม่ได้ดังนี้

		x_2	x_4	x_5	ค่า θ_i
Z	4950	-60	- 10	5	
x_6	105	$-\frac{15}{2}$	$-\frac{7}{6}$	$\frac{5}{6}$	126
x_3	20	1	$\overline{9}$	$-\overline{9}$	—
x_1	45	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	270

ตัวเลขในแถว Z จะแสดงถึงค่า Z และ $s_j - c_j$, $j = 2,4,5$ ดังนั้น ถ้าต้องการค่าต่ำสุดของ Z เราต้องคำนวณจนกว่าจะได้ค่า $s_j - c_j$ เป็นลบหมดทุกคอลัมน์ สำหรับตารางนี้จะเห็นว่ามีค่าในคอลัมน์ของ x_5 เป็นบวก แสดงว่าค่า Z ยังลดลงได้อีก เราหาค่า θ ได้ $\theta_1 = 126$ ต่ำสุด ดังนั้น ตารางต่อไปเราสลับที่ระหว่าง x_5 กับ x_6 และจะได้ $x_{56} = \frac{1}{x_{65}} = \frac{1}{5/6} = \frac{6}{5}$

หาค่าในแถวของ x_5 และในคอลัมน์ของ x_6 ก่อนจะได้

		x_2	x_4	x_6
Z				- $5) = -6
x_5	$\frac{6}{5}(105)$	$\frac{6}{5}\left(-\frac{15}{2}\right)$	$\frac{6}{5}\left(-\frac{7}{6}\right)$	$\frac{6}{5}$
x_3				$-\frac{6}{5}\left(-\frac{2}{9}\right) = \frac{4}{15}$
x_1				-f(f) $= -\frac{1}{5}$

หาค่าในแถวอื่น ๆ ที่เหลือจะได้

		x_2	x_4	x_6
Z	$4950-6(105)$	$-60-6\left(-\frac{15}{2}\right)$	$-10-6\left(-\frac{7}{6}\right)$	
x_5				
x_3	$20+\frac{4}{15}(105)$	$1+\frac{4}{15}\left(-\frac{15}{2}\right)$	$\frac{1}{9}+\frac{4}{15}\left(-\frac{7}{6}\right)$	
x_1	$45-\frac{1}{5}(105)$	$-\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\left(-\frac{15}{2}\right)$	$-\frac{1}{6}-\frac{1}{5}\left(-\frac{7}{6}\right)$	

ผลสรุปที่ได้ จะเหมือนกันกับผลที่ได้ในตารางสุดท้ายของตัวอย่างที่ 2.11

เราสรุปขั้นตอนการคำนวณได้ดังต่อไปนี้

1) จากตารางซิมเพลกซ์ ซึ่งแสดงสาระข้อมูลโดยย่อดังนี้

		ตัวแปรนอกฐาน x_j
Z	x_{00}	(x_{0j})
ตัวแปรฐาน x_i	(x_{i0})	(x_{ij})

ในที่นี้ x_{00} = ค่าของ Z

x_{i0} = ค่าของตัวแปรฐาน x_i

x_{0j} = $s_j - c_j$

และ x_{ij} = ส.ป.ส. ของตัวแปรนอกฐาน x_j ที่เกี่ยวข้องกับตัวแปรฐาน x_i

= จำนวนที่เปลี่ยนแปลงไปของตัวแปรฐาน x_i เมื่อเพิ่มค่าของตัวแปรนอกฐาน x_j 1 หน่วย

2) พิจารณาค่า x_{0j}

2.1 ถ้า $x_{0j} \geqslant 0$ ทุก ๆ j แสดงว่าได้ค่า Z สูงสุดแล้ว ผลที่อ่านได้จากตารางจะเป็นคำตอบที่ดีที่สุด

2.2 ถ้ามี $x_{0j} < 0$ และได้

$$x_{0k} = \text{ค่าต่ำสุด}_{j}\ x_{0j}$$

ทำต่อข้อ 3)

3) หาค่าต่ำสุดของอัตราส่วนระหว่างคำตอบ กับ ส.ป.ส. ในคอลัมน์ของ x_k ได้

$$\frac{x_{r0}}{x_{rk}} = \text{ค่าต่ำสุด } \frac{x_{i0}}{x_{ik}}, \quad x_{ik} > 0$$

4) คำนวณขั้นตอนต่อไป โดยใช้ x_k เป็นตัวแปรฐานแทนที่ x_r และ x_r จะเป็นตัวแปรนอกฐานแทนที่ x_k

ปรับตัวเลขข้อมูลของตารางใหม่ จะได้

$$x_{kr} = \frac{1}{x_{rk}}$$

คอลัมน์ของตัวแปรนอกฐาน x_r

$$x_{0r} = -x_{kr} \cdot x_{0k}, \quad x_{ir} = -x_{kr} \cdot x_{ik}, \quad i \neq k$$

แถวของตัวแปรฐาน x_k

$$x_{k0} = x_{kr} \cdot x_{r0}, \quad x_{kj} = x_{kr} \cdot x_{rj}, \quad j \neq r$$

แถวของตัวแปรฐาน x_i อื่น ๆ ยกเว้นแถวของ x_k และคอลัมน์ของ x_r

$$x_{00} = x_{00} + x_{0r} \cdot x_{r0}, \qquad x_{0j} = x_{0j} + x_{0r} \cdot x_{rj}$$

$$x_{i0} = x_{i0} + x_{ir} \cdot x_{r0}, \qquad x_{ij} = x_{ij} + x_{ir} \cdot x_{rj}$$

ผลสรุปที่ได้จะเป็นแบบเดียวกับตารางในข้อ 1)

2.5 การหาคำตอบโดยวิธีการของปัญหาคู่

ตัวอย่างของการควบคู่ ที่มีความหมายทางด้านการโปรแกรมเชิงเส้นมากที่สุด ก็คือ ตัวอย่างของปัญหาคู่ในแง่เศรษฐศาสตร์ ที่เกี่ยวกับเรื่องการผลิตสินค้า n ชนิด ภายใต้เงื่อนไขของการใช้ทรัพยากรที่มีอยู่จำกัด m ประเภท เพื่อที่จะได้กำไรรวมมากที่สุด นั่นก็คือ

หาค่าสูงสุดของ $Z_x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

โดยมีข้อจำกัด $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m$ (2.7)

และ $x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n$

แล้วเราจะได้ตัวแบบของปัญหาคู่คือ

หาค่าต่ำสุดของ $Z_w = \sum_{i=1}^{m} b_i w_i$

โดยมีข้อจำกัด $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}w_i \geqslant c_j, \quad j = 1,2,\ldots,n$ (2.8)

และ $w_i \geqslant 0, \quad i = 1,2,\ldots,m$

ในเมื่อ c_j หมายถึง กำไร (value) ต่อหน่วยของสินค้า j

a_{ij} หมายถึง ปริมาณทรัพยากร i ที่ใช้ในการผลิตสินค้า j หนึ่งหน่วย

b_i หมายถึง ปริมาณของทรัพยากรประเภทที่ i (input i) ที่จะมีให้ใช้ได้

x_j หมายถึง จำนวนหน่วยของสินค้า (output) j ที่ต้องการจะผลิต

โดยเหตุที่ Z_x แสดงถึงปริมาณของกำไร (value) ทั้งหมดที่เราจะได้จากการดำเนินการนี้ และกำไรที่ได้นี้มีหน่วยเป็นบาท ดังนั้น เมื่อเรามาพิจารณาปัญหาที่คู่กัน ค่าของ Z_w ย่อมมีหน่วยเป็นบาทด้วย แต่เมื่อ Z_w เป็นฟังก์ชันของ b_i กับ w_i และ b_i เป็นปริมาณของทรัพยากร i ซึ่งอาจมีหน่วยเป็นหน่วยของเวลา หน่วยน้ำหนัก หน่วยปริมาณ เป็นต้น แต่โดยทั่ว ๆ ไปแล้ว b_i ไม่มีหน่วยเป็นบาท ดังนั้น หากเราจะกำหนดให้ Z_w มีหน่วยเป็นบาท แล้ว w_i จะต้องมีหน่วยเป็นบาทด้วย ซึ่งก็หมายถึงหน่วยของบาทต่อหนึ่งหน่วยของทรัพยากร i (value/input i) สำหรับ $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}w_i$ ถือได้ว่าเป็นค่าเสียโอกาส (opportunity cost) รวมของการผลิตสินค้า j เราจึงกล่าวได้ว่า เงื่อนไขของข้อจำกัดในปัญหาคู่ก็คือ ค่าเสียโอกาสรวมของการผลิต จะต้องมากกว่าหรือเท่ากับ กำไรต่อหน่วยของสินค้านั้น เราสามารถแสดงให้เห็นความหมายของตัวแปรควบคู่ได้ดังต่อไปนี้

ปัญหาเดิม (primal problem)	**ปัญหาคู่** (dual problem)
หาค่าสูงสุดของ	หาค่าต่ำสุดของ
$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\text{value}}{\text{output } j}\right)(\text{output } j) = \text{value}$	$\sum_{i=1}^{m} (\text{input } i)\left(\frac{\text{value}}{\text{input } i}\right) = \text{value}$
โดยมีข้อจำกัด	โดยมีข้อจำกัด
$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\text{input } i}{\text{output } j}\right)(\text{output } j) \leqslant (\text{input } i)$	$\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\text{input } i}{\text{output } j}\right)\left(\frac{\text{value}}{\text{input } i}\right) \geqslant \left(\frac{\text{value}}{\text{output}}\right)$
$(\text{output } j) \geqslant 0$	$\left(\frac{\text{value}}{\text{output } j}\right) \geqslant 0$

$i = 1,2,\ldots,m; \quad j = 1,2,\ldots,n$

กล่าวโดยสรุป

ปัญหาเดิม (primal problem) หมายถึง ปัญหาที่ต้องการหาระดับการผลิตที่เหมาะสมที่สุด (optimal output level) x_j^* โดยอาศัยค่าที่กำหนดให้ต่อหน่วย (value/output j) c_j และขีดจำกัดสูงสุดของทรัพยากรแต่ละประเภทที่จะนำมาใช้ (input) b_i เพื่อที่จะทำให้ได้กำไร (value) จากการผลิตทั้งหมด มากที่สุด

ปัญหาคู่ (dual problem) เป็นการหาค่าที่คิดขึ้นของทรัพยากร i (value/input i) w_i โดยกำหนดว่า ค่าเสียโอกาสรวมของสินค้าแต่ละชนิด จะต้องไม่ต่ำกว่า กำไรต่อหน่วยของสินค้านั้น เพื่อให้เกิดค่าเสียโอกาสของทรัพยากรรวมกัน น้อยที่สุด

ค่าที่คิดขึ้น w เป็นตัวแปรควบคุมได้ของปัญหาคู่ อาจจะเรียกว่าเป็นราคาทางบัญชี (accounting price) หรือราคาติดตัว (shadow price) หรือราคาประกันก็ได้ และค่าของ w_i จะต้องไม่เป็นลบ

ในทางกลับกัน หากเรามี (2.8) เป็นปัญหาเดิม แล้วเราจะได้ปัญหาคู่ของ (2.8) เป็นปัญหาที่มีตัวแบบดัง (2.7) นั่นเอง ตัวอย่างของปัญหาดังกล่าวนี้ก็คือ ปัญหาทางด้านโภชนาการนั่นเอง ในปัญหาเดิมจะมีความหมายถึงการหาค่าใช้จ่ายต่ำสุด โดยให้ได้คุณค่าของอาหารแต่ละประเภทอย่างน้อยที่สุด เท่ากับขีดจำกัดของคุณค่าอาหารขั้นต่ำสุด เมื่อพิจารณาความหมายในปัญหาคู่ก็จะเป็นการหาค่าสูงสุดของค่าที่คิดขึ้น ของคุณค่าอาหารขั้นต่ำสุดที่เราจำเป็นต้องมี โดยคำนึงว่าคุณค่าอาหารที่คิดขึ้นในหน่วยของอาหารแต่ละชนิด จะมีไม่เกินราคาของอาหารนั้น

ตัวอย่างการเขียนตัวแบบของปัญหาคู่

ตัวอย่างที่ 2.12

1) จงเขียนตัวแบบปัญหาคู่ของปัญหาในตัวอย่างที่ 2.9

ค่าต่ำสุด $Z_w = 40w_1 + 30w_2$

โดยมีข้อจำกัด
$$
\begin{aligned}
w_1 - 3w_3 + w_4 &\geqslant 175 \\
w_2 + w_3 - w_4 &\geqslant 130 \\
w_1 + w_5 &\geqslant 125 \\
w_2 - 3w_5 &\geqslant 80 \\
w_i(1 = 1, 2, \ldots, 5) &\geqslant 0
\end{aligned}
$$