2) ตัวแบบปัญหาคู่ของปัญหาในตัวอย่างที่ 2.11 จะเขียนได้ดังนี้

ค่าสูงสุด $Z_w = 720w_1 + 450w_2 + 360w_3$

โดยมีข้อจำกัด $12w_1 + 6w_2 + 9w_3 \leqslant 90$

$3w_1 + 6w_2 + 6w_3 \leqslant 60$

$9w_1 + 9w_2 + 3w_3 \leqslant 45$

$w_1, w_2, w_3 \geqslant 0$

สรุปได้ว่า ก่อนจะเขียนปัญหาคู่ เราต้องจัดการให้ข้อจำกัดทุกข้อมีเครื่องหมายอสมการแบบเดียวกันเสียก่อนแล้วจึงเขียนตัวแบบดังต่อไปนี้

1. เปลี่ยนวัตถุประสงค์ของฟังก์ชันเป้าหมายเป็นตรงกันข้าม เช่น

จากเดิม ต้องการหาค่าสูงสุด เปลี่ยนเป็น หาค่าต่ำสุด หรือ

จากเดิม ต้องการหาค่าต่ำสุด เปลี่ยนเป็น หาค่าสูงสุด

2. เปลี่ยนค่าคงที่ b_i ของอสมการข้อจำกัด i ในปัญหาเดิม ไปเป็น ส.ป.ส. ของ w_i ในฟังก์ชันเป้าหมายของปัญหาคู่

3. เปลี่ยนเครื่องหมายอสมการของข้อจำกัดเป็นตรงกันข้าม เช่น จากเดิมมีเครื่องหมาย $\geqslant$ ทั้งหมดเปลี่ยนเป็น $\leqslant$ ทั้งหมด หรือจากเดิมมีเครื่องหมาย $\leqslant$ ทั้งหมดเปลี่ยนเป็น $\geqslant$ ทั้งหมด

4. เขียนเงื่อนไขข้อจำกัด (อสมการ) โดย

4.1 เปลี่ยน ส.ป.ส. c_j ของ x_j ในฟังก์ชันเป้าหมายปัญหาเดิม มาเป็นค่าคงที่ของข้อจำกัด j ในปัญหาคู่

4.2 เปลี่ยน ส.ป.ส. ของ x_j ในอสมการข้อจำกัด i ปัญหาเดิม เป็น ส.ป.ส. ของ w_i ในอสมการข้อจำกัด j ปัญหาคู่ นั่นก็คือ เปลี่ยน ส.ป.ส. a_{ij} ในแถว i คอลัมน์ j เป็น a_{ij} ในแถว j คอลัมน์ i พูดง่าย ๆ ว่า เปลี่ยน ส.ป.ส. จากแถว i เป็น ส.ป.ส. คอลัมน์ i และเปลี่ยนจากของคอลัมน์ j เป็นของแถว j

5. ตัวแปร w_i ทุกตัวในปัญหาคู่ จะต้องมีค่าเป็นบวก

หมายเหตุ สำหรับกรณีของข้อจำกัดที่เป็นสมการ เราอาจพิจารณาว่าเป็นอสมการที่มีเครื่องหมาย $\geqslant$ หรือมีเครื่องหมาย $\leqslant$ ก็ได้ ตามความเหมาะสม แต่ตัวแปรคู่ที่อยู่ในลำดับเดียวกันกับสมการข้อจำกัดนี้ จะไม่กำหนดเครื่องหมาย

2.5.1 คุณสมบัติและสิ่งควรรู้เกี่ยวกับปัญหาควบคู่ เมื่อเราทราบถึงคุณลักษณะและความหมายของปัญหาควบคู่แล้ว เราสามารถนำปัญหาควบคู่นี้ไปใช้ให้เป็นประโยชน์ต่อการ

หาคำตอบที่ดีที่สุดได้ โดยเฉพาะถ้าหากเราหาคำตอบจากปัญหาคู่ได้ง่ายกว่า หรือสะดวกกว่าการหาคำตอบจากปัญหาเดิม ปัญหามีอยู่ว่า เมื่อเราได้คำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาคู่แล้ว เราจะเปลี่ยนคำตอบที่ได้เหล่านี้เป็นคำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาเดิมได้อย่างไร นั่นก็คือเราจะต้องมาศึกษาดูว่า ปัญหาคู่มีคุณสมบัติที่สำคัญอย่างไรบ้าง

คุณสมบัติที่น่าสนใจอันแรก ซึ่งจัดเป็นทฤษฎีของปัญหาควบคู่ ที่สามารถเข้าใจได้ชัดจากการเรียนรู้ลักษณะของปัญหาควบคู่ โดยไม่ต้องพิสูจน์ก็คือ

ทฤษฎี 2.6 ปัญหาควบคู่ของปัญหาคู่ก็คือปัญหาเดิม

คุณสมบัติที่สำคัญอื่น ๆ ที่จะเป็นประโยชน์ต่อการนำไปใช้ในการแก้ปัญหา มีดังต่อไปนี้

ทฤษฎี 2.7 ถ้า $\underline{X}_0 = (x_{10},\ldots,x_{j0},\ldots,x_{n0})$

เป็นคำตอบที่เป็นไปได้ของปัญหา (2.7) และ

$$\underline{W}_0 = (w_{10},\ldots,w_{i0},\ldots,w_{m0})$$

เป็นคำตอบที่เป็นไปได้ของปัญหา (2.8) แล้วเราจะได้ว่า

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_{j0} \leqslant \sum_{i=1}^{m} b_i w_{i0} \text{ นั่นก็คือ } Z_x \leqslant Z_w$$

ทฤษฎี 2.8 ถ้า $\underline{X}_0^* = (x_{10}^*,\ldots,x_{j0}^*,\ldots,x_{n0}^*)$

เป็นคำตอบที่เป็นไปได้ของปัญหา (2.7) และ

$$\underline{W}_0^* = (w_{10}^*,\ldots,w_{i0}^*,\ldots,w_{m0}^*)$$

เป็นคำตอบที่เป็นไปได้ของปัญหา (2.8) ที่มีคุณสมบัติว่า

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_{j0}^* = \sum_{i=1}^{m} b_i w_{i0}^*$$

แล้ว $\underline{X}_0^*$ และ $\underline{W}_0^*$ จะเป็นคำตอบที่ดีที่สุดของปัญหา (2.7) และ (2.8) ตามลำดับ

คุณสมบัติต่อไปของปัญหาควบคู่ จะบอกให้เราทราบว่าเราจะหาคำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาหนึ่ง โดยอาศัยการแก้ปัญหาอีกปัญหาหนึ่งที่ควบคู่กัน ด้วยวิธีการซิมเพลกซ์ได้อย่างไร

เมื่อพูดถึงการหาคำตอบที่ดีที่สุดด้วยวิธีการซิมเพลกซ์ คงจะจำกันได้ว่า จุดสำคัญแรกที่จะต้องทำก็คือ เปลี่ยนรูปตัวแบบให้อยู่ในรูปมาตรฐาน เช่น เมื่อเราต้องการหาคำตอบของปัญหา (2.7) ด้วยวิธีการซิมเพลกซ์ เราเปลี่ยนตัวแบบ (2.7) เป็นรูปมาตรฐาน จะได้ว่า

หาค่าสูงสุดของ $Z_x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

โดยมีข้อจำกัด $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i$ (2.9)

และ $x_j, x_{n+i} \geqslant 0,\ i = 1,2,\ldots, m;\ j = 1,2,\ldots, n$

เราจะสรุปว่า $\underline{X}_0^* = (x_{10}^*,\ldots,x_{i0}^*,\ldots,x_{m0}^*)$

เป็นคำตอบอุตมะ ก็ต่อเมื่อ $c_j - s_j^*$ (ซึ่งเป็น ส.ป.ส. ของ x_j^* ในฟังก์ชันเป้าหมาย) มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ 0 ทุก ๆ ตัว และผลที่ตามมาก็คือ เราจะได้ว่า

$$Z_x^* = \sum_{\substack{i=j \\ j\in B}} c_j x_{i0} = \sum_{i=1}^{m} s_{n+i}^* b_i = \text{ค่าสูงสุดของ } Z_x$$

และ $$s_j^* = \sum_{i=1}^{m} s_{n+i}^* a_{ij},\ j = 1,2,\ldots,n$$

ซึ่งเราจะใช้ key facts ทั้งสองนี้เป็นกุญแจที่จะช่วยในการวิเคราะห์เรื่องต่อไป

ทฤษฎี 2.9 ถ้าปัญหาใดปัญหาหนึ่งใน (2.7) และ (2.8) มีคำตอบที่ดีที่สุด แล้วอีกปัญหาหนึ่งที่ควบคู่กันจะมีคำตอบที่ดีที่สุดด้วย

ตัวอย่างที่ 2.13 จงหาคำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาควบคู่ปัญหาในตัวอย่างที่ 2.11

วิธีทำ จากตัวอย่าง 2.12(2) เราได้ตัวแบบของปัญหาควบคู่ เปลี่ยนตัวแบบนี้เป็นรูปมาตรฐาน จะได้ว่า

ค่าสูงสุด $Z_w = 720w_1 + 450w_2 + 360w_3$

โดยมีข้อจำกัด

$$\begin{aligned} 12w_1 + 6w_2 + 9w_3 + w_4 &= 90 \\ 3w_1 + 6w_2 + 6w_3 + w_5 &= 60 \\ 9w_1 + 9w_2 + 3w_3 + w_6 &= 45 \\ w_i (i = 1,2,\ldots,6) &\geqslant 0 \end{aligned}$$

หาคำตอบด้วยวิธีการซิมเพลกซ์ จะได้

	ตัวแปรฐาน		b_i	720	450	360	0	0	0	ค่าที่เป็นไปได้ θ_i
	w_j	b_j	คำตอบ	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	
1	w_4	0	90	12	6	9	1	0	0	7.5
	w_5	0	60	3	6	6	0		10	20
	w_6	0	45	9	9	3	0	0	1	5
	$Z_w = 0$		s_i	0	0	0	0	0	0	
			$b_i - s_i$	720	450	360	0	0	0	
2	w_4	0	30	0	-6	5	1	0	$-\frac{4}{3}$	6
	w_5	0	45	0	3	5	0	1	$-\frac{1}{3}$	9
	w_1	720	5	1	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{9}$	15
	$Z_w = 3600$		s_i	720	720	240	0	0	80	
			$b_i - s_i$	0	-270	120	0	0	-80	
3	w_3	360	6	0	$-\frac{6}{5}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{4}{15}$	
	w_5	0	15	0	9	0	-1	1	1	
	w_1	720	3	1	$\frac{7}{3}$	0	$-\frac{1}{15}$	0	$\frac{1}{5}$	
	$Z_w = 4320$		s_i	720	576	360	24	0	48	
			$b_i - s_i$	0	-126	0	-24	0	-48	

จากตารางที่ 3 จะได้คำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาคู่ คือ $w_1 = 3, w_3 = 6, Z_{w\ สูงสุด} = 4320$ ผลที่ได้จะยืนยันทฤษฎี 2.9 และจะเห็นว่าค่าสูงสุดของปัญหาคู่ จะเป็นค่าเดียวกับค่าต่ำสุดของปัญหาเดิม

ให้เรามาเปรียบเทียบตารางซิมเพลกซ์ของปัญหาคู่กับของปัญหาเดิม (เมื่อไม่ใช้ตัวแปรเทียม)

ในที่นี้จะเห็นว่า ปัญหาเดิมมีตัวแบบ (2.8) ปัญหาคู่มีตัวแบบ (2.7) เมื่อเปลี่ยนตัวแบบของปัญหาเดิมและของปัญหาคู่ เป็นตัวแบบมาตรฐาน เราจะได้

ปัญหาเดิม :

ค่าต่ำสุด $Z_x = 90x_1 + 60x_2 + 45x_3$

โดยมีข้อจำกัด

$$12x_1 + 3x_2 + 9x_3 - x_4 = 720$$
$$6x_1 + 6x_2 + 9x_3 - x_5 = 450$$
$$9x_1 + 6x_2 + 3x_3 - x_6 = 360$$
$$x_j (j = 1,2,\ldots,6) \geqslant 0$$

ปัญหาคู่ :

ค่าสูงสุด $Z_w = 720w_1 + 450w_2 + 360w_3$

โดยมีข้อจำกัด

$$12w_1 + 6w_2 + 9w_3 + w_4 = 90$$
$$3w_1 + 6w_2 + 6w_3 + w_5 = 60$$
$$9w_1 + 9w_2 + 3w_3 + w_6 = 45$$
$$w_i (i = 1,2,\ldots,6) \geqslant 0$$

จากปัญหาเดิมจะเห็นว่า เมื่อเรากำหนดตัวแปรตัดสินใจ x_1, x_2 และ x_3 เป็น 0 เราจะได้ค่าของ x_4, x_5 และ x_6 ทุกตัวมีค่าเป็นลบ ซึ่งไม่มีความหมาย นั่นคือเป็นคำตอบที่เป็นไปไม่ได้ กรณีเช่นนี้ เราไม่อาจพิจารณาจากค่าของ $c_j - s_j$ ได้ แต่เราจะดูว่า เราควรขจัดตัวแปรฐานที่มีค่าเป็นไปไม่ได้ตัวใดออกไป จึงจะทำให้ได้คำตอบที่เป็นไปได้ และได้ค่าของฟังก์ชันเป้าหมายตามที่ต้องการ ดังนั้น การทำซิมเพลกซ์อัลกอริทึมของปัญหาเดิม เราจึงใช้วิธีขจัดตัวแปรฐานที่มีคำตอบเป็นไปไม่ได้มากที่สุด นั่นคือ มีคำตอบต่ำสุด เมื่อคำตอบมีค่าน้อยกว่า 0 และเลือกตัวแปรแทนที่ จากตัวแปรนอกฐานที่ได้ค่า Z_x ต่ำสุด

เราเปรียบเทียบการทำซิมเพลกซ์อัลกอริทึมของปัญหาที่ควบคู่กัน (ใช้ตารางย่อ) ตารางต่อตาราง จะได้ผลดังต่อไปนี้

ปัญหาเดิม :

		x_1	x_2	x_3
Z_x	0	-90	-60	-45
x_4	-720	-12	-3	-9
x_5	−450	−6	-6	-9
x_6	-360	−9	-6	-3

ปัญหาคู่ :

		w_1	w_2	w_3	
Z_w	0	-720	-450	-360	8;
w_4	90	12	6	9	7.5
w_5	60	3	6	6	20
w_6	45	9	9	3	5

1

		x_1	x_2	x_4
Z_x	3600	-30	-4s	−5
x_3	80	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
x_5	270	6	-3	−1
x_6	-120	-5	−5	$-\frac{1}{3}$

		w_6	w_2	w_3	
Z_w	3600	80	270	-120	θ_i
w_4	30	$-\frac{4}{3}$	-6	S	6
w_5	45	$-\frac{1}{3}$	3	5	9
w_1	5	$\frac{1}{9}$	1	$\frac{1}{3}$	15

2

		x_6	x_2	x_4
Z_x	4320	-6	1s	-3
x_3	48	$\frac{4}{15}$	−1	$\frac{1}{S}$
x_5	126	$\frac{6}{S}$	-9	$-\frac{7}{5}$
x_1	24	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{15}$

		w_6	w_2	w_4
Z_w	4320	48	126	24
w_3	6	$\frac{4}{15}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{1}{5}$
w_5	15	1	9	-1
w_1	3	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{15}$

3

จะเห็นว่าผลที่ได้ในตารางที่ 3 ของปัญหาเดิม จะเป็นผลลัพธ์เดียวกันกับตารางที่ 2 Phase – 2 ในตัวอย่าง 2.11 เมื่อตัด ส.ป.ส. ในคอลัมน์ของตัวแปรฐาน x_1, x_3 และ x_5 ออก และแสดงค่า $c_j - s_j$ หรือ $b_i - s_i$ ในรูปของ $s_j - c_j$ หรือ $s_i - b_i$ ตามลำดับ ซึ่งก็คือค่า x_{0j} หรือ w_{0i} ในแถวของ Z

ผลที่ได้จะยืนยันทฤษฎี 2.9 ว่า หากปัญหาหนึ่งมีคำตอบที่ดีที่สุด ปัญหาคู่จะมีคำตอบที่ดีที่สุดด้วย

ข้อสังเกต

1) ค่าของ $Z_x(x_{00})$ จะเท่ากับค่าของ $Z_w(w_{00})$ เสมอ

2) เมื่อ t = 1,2,3,4,5,6 p จะเท่ากับ 4,5,6,1,2,3 ตามลำดับ เราจะได้

$x_{t0} = w_{0P}$, $-x_{0t} = w_{P0}$ และ

ส.ป.ส. ในแถวของ x_t = – ส.ป.ส. ในคอลัมน์ของ w_P

ส.ป.ส. ในคอลัมน์ของ x_t = – ส.ป.ส. ในแถวของ w_P

3) ถ้าพิจารณาผลที่ได้จากตารางที่ 1 และตารางที่ 2 ของปัญหาเดิม จะเห็นว่าเป็นคำตอบที่เป็นไปไม่ได้ ซึ่งชี้ให้เห็นว่าขั้นตอนการคำนวณของปัญหาเดิม เริ่มจากคำตอบที่เป็นไปไม่ได้ มาสู่คำตอบที่เป็นไปได้ เป็นผลให้หลักเกณฑ์ในการคำนวณแตกต่างออกไป กล่าวคือ

ก) พิจารณาจากคำตอบที่เป็นไปไม่ได้ เลือกแถวที่มีค่าน้อยที่สุด ได้

$$x_{r0} = \text{ค่าต่ำสุด } x_{i0},\ x_{i0} < 0$$

ข) หาอัตราส่วนระหว่าง x_{0j} กับ x_{rj} เลือกค่าบวกที่น้อยที่สุด ได้

$$\frac{x_{0k}}{x_{rk}} = \text{ค่าต่ำสุด}_{i} \frac{x_{0j}}{x_{rj}},\ x_{0j},\ x_{rj} < 0$$

ค) ใช้ x_k เป็นตัวแปรฐานใหม่ แทนที่ตัวแปรฐานเดิม x_r ปรับปรุงตารางใหม่ตามวิธีการเดิม

นอกจากนี้เรายังพบคุณสมบัติที่น่าสนใจของปัญหาควบคู่ทั้ง 2 ดังต่อไปนี้

1) ถ้า $x_k > 0$ เราจะได้ $a_{1k}w_1 + a_{2k}w_2 + \ldots + a_{mk}w_m = c_k$

หรือถ้า $w_k > 0$ เราจะได้ $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k$

2) ถ้า $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n > b_k$ เราจะได้ $w_k = 0$

หรือถ้าหาก $a_{1k}w_1 + a_{2k}w_2 + \ldots + a_{mk}w_n < c_k$ เราจะได้ $x_k = 0$

คุณสมบัติที่ได้นี้ สอดคล้องกับทฤษฎีของ Dantzig กับ Orden ซึ่งเป็นทฤษฎีที่กำหนดในรูปของเงื่อนไขที่จำเป็นและพอเพียง ของคำตอบที่เป็นไปได้ต่อปัญหาเดิมและต่อปัญหาคู่ที่จะเป็นคำตอบที่ดีที่สุด กล่าวคือ

ทฤษฎี 2.10 (Complementary slackness theorem) สำหรับคำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาเดิมและปัญหาคู่ระบบใดก็ตาม ถ้าหากมีอสมการเกิดขึ้นในข้อจำกัดที่ k นั่นก็คือ slack variable x_{n+k} (หรือ w_{m+k}) มีค่ามากกว่า 0 แล้วคำตอบของตัวแปร (decision or controlled variable) ตัวที่ k ของปัญหาที่ควบคู่กัน จะมีค่าเป็น 0

ถ้าหากตัวแปรตัวที่ k ในระบบใด ๆ มีค่ามากกว่า 0 ข้อจำกัดที่ k ของปัญหาที่ควบคู่กันจะเป็นสมการ (มีเครื่องหมาย =) นั่นก็คือ slack variable ของข้อจำกัดที่ k จะมีค่าเป็น 0 (รายละเอียดเกี่ยวกับทฤษฎีเหล่านี้ นักศึกษาสามารถค้นคว้าเพิ่มเติมได้จากหนังสืออ้างอิงท้ายเล่ม)

2.5.2 การหาคำตอบของปัญหาเดิมจากซิมเพลกซ์อัลกอริทึมของปัญหาคู่

จากคุณสมบัติของปัญหาคู่ดังที่กล่าวมาแล้วข้างต้น เราสรุปได้ว่า ถ้าปัญหาเดิมมีตัวแบบ (2.8) ปัญหาคู่ของมันจะมีตัวแบบ (2.7) เมื่อเปลี่ยนตัวแบบทั้ง 2 เป็นรูปมาตรฐาน จะได้ว่า

ปัญหาเดิม :	ปัญหาคู่ :
หาค่าต่ำสุดของ $Z_x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$	หาค่าสูงสุดของ $Z_w = \sum_{i=1}^{m} b_i w_i$
โดยมีข้อจำกัด $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b$,	โดยมีข้อจำกัด $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}w_i + w_{m+j} = c_j$
และ $x_j,\ x_{n+i} \geqslant 0$	และ $w_i,\ w_{m+j} \geqslant 0$

$i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n$

กรณีเช่นนี้ เราจะหาคำตอบจากปัญหาคู่ เนื่องจากง่ายและสะดวกกว่ามาก หากเราได้

$\underline{W}_0^* = (w_{10}^*, w_{20}^*,\ldots,w_{m0}^*)$

เป็นคำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาคู่ โดยมี $Z_w^* = w_{00}^*$ เป็นค่าสูงสุด แล้วเราจะได้

$b_i - s_i^* \leqslant 0$ หรือ $w_{0i}^* \geqslant 0$ ทุก ๆ $i = 1,2,\ldots,m+n$

คำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาเดิมจะอ่านค่าได้ดังนี้

$$Z_x^* = w_{00}^* = \text{ค่า } Z_{\text{ต่ำสุด}}$$

และ
$$x_j^* = s_{m+j}^* = w_{0(m+j)}^*,\ j = 1,2,\ldots,n \qquad (2.10)$$
$$x_{n+i}^* = s_i^* - b_i = w_{0i}^*,\ i = 1,2,\ldots,m$$

ข้อเท็จจริงที่ได้นี้เป็นประโยชน์ต่อเราในการแก้ปัญหาอย่างยิ่ง ปัญหาใดก็ตามที่มีตัวแปรจำนวนมาก หรือมีข้อจำกัดจำนวนมาก ต้องใช้เวลาในการแก้ปัญหา ต้องทำซ้ำหลายตาราง จึงจะได้คำตอบที่ดีที่สุด เราก็ควรจะแก้ปัญหาที่ควบคู่กัน ที่สามารถแก้ได้ง่ายกว่า สะดวกกว่า

ให้เรามาศึกษาเพิ่มเติมจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2.14 บริษัทมีผู้ตรวจสอบ 3 ระดับ ซึ่งจะเป็นผู้ตรวจสอบคุณภาพสินค้าที่ผลิตในแต่ละวัน กำหนดว่าจะต้องทำการตรวจวันละ 8 ชั่วโมง ให้ได้จำนวนสินค้าที่ตรวจแล้ว อย่างน้อย

ที่สุด 3,000 ชิ้น ผู้ตรวจสอบระดับหนึ่งสามารถตรวจสินค้าได้ชั่วโมงละ 25 ชิ้น มีความถูกต้อง 98% ผู้ตรวจสอบระดับสองตรวจได้ชั่วโมงละ 15 ชิ้น มีความถูกต้อง 95% ส่วนผู้ตรวจสอบระดับสาม สามารถตรวจสอบได้ชั่วโมงละ 10 ชิ้น มีความถูกต้อง 90% อัตราค่าตรวจสอบคิดเป็นชั่วโมงละ 20, 15 และ 10 บาท ตามลำดับ กรณีที่เกิดการตรวจสอบผิดพลาด บริษัทตีเป็นราคาค่าเสียหายชิ้นละ 10 บาท บริษัทต้องการให้มีผู้ตรวจสอบระดับหนึ่ง และระดับสาม รวมกันมีจำนวนมากกว่าหรือเท่ากับ ผู้ตรวจสอบระดับสอง แผนกตรวจสอบมีผู้ตรวจสอบแต่ละระดับเป็นจำนวน 12, 15 และ 15 คน ตามลำดับ บริษัทควรจ้างผู้ตรวจสอบแต่ละระดับกี่คน จึงจะทำให้เสียค่าใช้จ่ายต่ำสุด

วิธีทำ กำหนดว่า ให้ผู้ตรวจสอบระดับ 1 ตรวจ x_1 คน
ผู้ตรวจสอบระดับ 2 ตรวจ x_2 คน
ผู้ตรวจสอบระดับ 3 ตรวจ x_3 คน

จะได้

ค่าต่ำสุด $Z_x = 200x_1 + 180x_2 + 160x_3$,

โดยมีข้อจำกัด $5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geqslant 75$ (# $:\times 40$ ชิ้น)

$$x_1 - x_2 + x_3 \geqslant 0$$
$$x_1 \leqslant 12$$
$$x_2 \leqslant 15$$
$$x_3 \leqslant 15$$
$$x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$$

เอา -1 คูณข้อจำกัดที่ 3, 4 และ 5 เครื่องหมายอสมการจะเปลี่ยนเป็น $\geqslant$ เขียนตัวแบบของปัญหาคู่ จะได้

ค่าสูงสุด $Z_w = 75w_1 - 12w_3 - 15w_4 - 15w_5$

โดยมีข้อจำกัด
$$5w_1 + w_2 - w_3 \leqslant 200$$
$$3w_1 - w_2 - w_4 \leqslant 180$$
$$2w_1 + w_2 - w_5 \leqslant 160$$
$$w_i (i = 1,2,3,4,5) \geqslant 0$$

เปลี่ยนตัวแบบให้เป็นรูปมาตรฐาน โดยเอา w_6, w_7 และ w_8 บวกทางด้านซ้ายของอสมการข้อจำกัด 1, 2 และ 3 ตามลำดับ หาคำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาคู่ โดยใช้ซิมเพลกซ์อัลกอริทึม แล้วอ่านคำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาเดิมจากตารางสุดท้ายของปัญหาคู่ จะได้ว่า

	ตัวแปรฐาน		b_i	75	0	−12	−15	−15	0	0	0	ค่าของ θ_i
	w_j	b_j	คำตอบฐาน	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	
1	w_6	0	200	5	1	-1	0	0	1	0	0	40
	w_7	0	180	3	-1	0	-1	0	0	1	0	60
	w_8	0	160	2	1	0	0	-1	0	0	1	80
	$Z_w = 0$		s_i	0	0	0	0	0	0	0	0	
			$b_i - s_i$	75	0	-12	-15	-15	0	0	0	
2	w_1	75	40	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	0	0	—
	w_7	0	60	0	$-\frac{8}{5}$	$\frac{3}{5}$	-1	0	$-\frac{3}{5}$	1	0	100
	w_8	0	80	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	−1	$-\frac{2}{5}$	0	1	200
	$Z_w = 3000$		s_i	75	15	−15	0	0	15	0	0	
			$b_i - s_i$	0	-15	3	-15	-15	-15	0	0	
3	w_1	75	60	1	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	
	w_3	−12	100	0	$-\frac{8}{3}$	1	$-\frac{5}{3}$	0	-1	$\frac{1}{3}$	0	
	w_8	0	40	0	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	-1	0	$-\frac{2}{3}$	1	
	$Z_w = 3300$		s_i	75	7	-12	-5	0	12	5	0	
			$b_i - s_i$	0	-7	0	-10	−15	-12	-5	0	

สรุปได้ว่า ควรให้ผู้ตรวจสอบระดับ 1 ตรวจ 12 คน ผู้ตรวจสอบระดับ 2 ตรวจ 5 คน จะทำให้บริษัทเสียค่าใช้จ่าย 3,300 บาท

หมายเหตุ

1) อ่านคำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาเดิมจากตารางสุดท้ายของปัญหาคู่ คือ

$$x_j(j = 1,2,3,4,5,6,7,8) = s_i - b_i(i = 6,7,8,1,2,3,4,5)$$

ตามลำดับ

2) การทำตารางซิมเพลกซ์ นักศึกษาจะทำแบบตารางสมบูรณ์หรือตารางย่อก็ได้

2.5.3 การหาคำตอบของปัญหาเดิมจากปัญหาคู่ด้วยวิธีกราฟ

ปัญหาที่มีจำนวนตัวแปรหลายตัว แต่มีข้อจำกัด 2 ข้อ เมื่อพิจารณาจากปัญหาคู่จะพบว่าเป็นปัญหาของ 2 ตัวแปร ซึ่งลักษณะปัญหาเช่นนี้ เราสามารถหาคำตอบได้ด้วยวิธีกราฟ ทำให้การแก้ปัญหาง่ายและสะดวกยิ่งขึ้น อาศัยคุณสมบัติและทฤษฎีของปัญหาคู่ นำไปสรุปผลของปัญหาเดิมได้ นั่นก็คือ หากปัญหาเดิมมีตัวแปรตัดสินใจ n ตัว ภายใต้เงื่อนไขของ 2 ข้อจำกัด คำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาเดิม จะมีตัวแปรตัดสินใจ และ/หรือ ตัวแปร slack ที่มีค่ามากกว่า 0 ไม่เกิน 2 ตัว เมื่อหาปัญหาคู่ ปัญหาคู่จะมีตัวแปรตัดสินใจ 2 ตัว ภายใต้เงื่อนไขของ n ข้อจำกัด คำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาคู่จะมีตัวแปรที่มีค่ามากกว่า 0 ไม่เกิน n ตัว และจากทฤษฎี 2.10 นำไปสู่ผลสรุปว่า หากเราหาคำตอบต่อปัญหาคู่ด้วยวิธีกราฟ และรู้ว่าจุดคำตอบที่ดีที่สุด (optimal point) เป็นจุดตัดของข้อจำกัดใด เราทราบได้ว่าตัวแปร slack ตัวใดมีค่าเป็น 0 ก็เท่ากับบอกได้ว่าตัวแปรตัดสินใจของปัญหาเดิมตัวใดมีค่ามากกว่า 0 ถ้าผลจากกราฟได้ตัวแปรตัดสินใจตัวใดเป็น 0 เราก็บอกได้ทันทีว่า ข้อจำกัดใดของปัญหาเดิมเป็นสมการ นั่นคือตัวแปร slack ของปัญหาเดิมตัวใดจะมีค่าเป็น 0

ให้เรามาศึกษาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2.15 ศูนย์เพาะชำมีพื้นที่สำหรับเพาะกล้าต้นไม้ 390 ตารางหน่วย และมีปุ๋ยคอกที่จะนำมาใช้ได้ 300 หน่วย มีต้นไม้ 4 ชนิดที่ศูนย์ต้องการ แต่ละชนิดต้องใช้พื้นที่และปุ๋ยในการเพาะชำต่อร้อยต้น ดังนี้

	ชนิดของต้นไม้			
	ชนิดที่ 1	**ชนิดที่ 2**	**ชนิดที่ 3**	**ชนิดที่ 4**
พื้นที่เพาะปลูก	9	3	2	1
ปริมาณปุ๋ยคอก	4	8	3	1

ผลตอบแทนที่คาดว่าจะได้เท่ากับ 360, 240, 180 และ 70 บาทต่อร้อยต้น ตามลำดับ ศูนย์ควรจะเลือกเพาะกล้าไม้ชนิดใดจึงจะเกิดผลดีที่สุด

วิธีทำ กำหนดว่า เพาะกล้าไม้ชนิดที่ 1 = x_1 ร้อยต้น

ชนิดที่ 2 = x_2 ร้อยต้น

ชนิดที่ 3 = x_3 ร้อยต้น

ชนิดที่ 4 = x_4 ร้อยต้น

ค่าสูงสุด $Z_x = 360x_1 + 240x_2 + 180x_3 + 70x_4$

โดยมีข้อจำกัด $9x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leqslant 390$

$4x_1 + 8x_2 + 3x_3 + x_4 \leqslant 300$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0$

หาตัวแบบของปัญหาคู่ จะได้

ค่าต่ำสุด $Z_w = 390w_1 + 300w_2$

โดยมีข้อจำกัด $9w_1 + 4w_2 \geqslant 360$

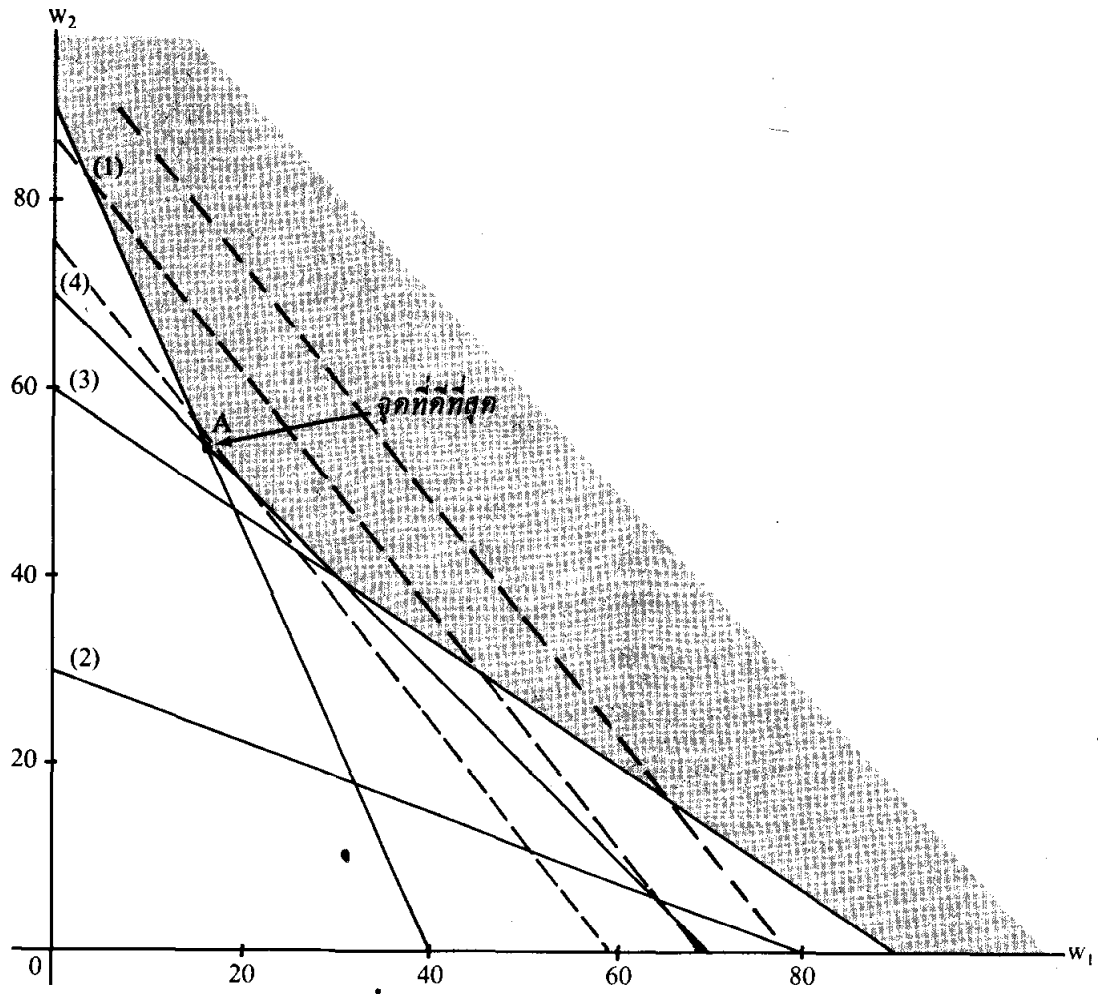
$3w_1 + 8w_2 \geqslant 240$

$2w_1 + 3w_2 \geqslant 180$

$w_1 + w_2 \geqslant 70$

$w_1, w_2 \geqslant 0$

แสดงให้เห็นด้วยกราฟ ดังนี้



จากกราฟจะได้จุด A ซึ่งเป็นจุดตัดของข้อจำกัดที่ 1 และ 4 เป็นจุดคำตอบที่ดีที่สุด แสดงว่ามีสมการเกิดขึ้นในข้อจำกัดที่ 1 และที่ 4 ซึ่งมีความหมายว่า ตัวแปร x_1 กับ x_4 จะมีค่ามากกว่า 0 นอกนั้นเป็น 0 ดังนั้น

$$9x_1 + x_4 = 390$$

$$4x_1 + x_4 = 300$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 18,\ x_4 = 228,\ Z_x = 360 \times 18 + 70 \times 228 = 22440$$

ศูนย์ควรเพาะกล้าต้นไม้ชนิดที่ 1 1,800 ต้น เพาะกล้าไม้ชนิดที่ 4 22,800 ต้น จะได้ผลตอบแทน 22,440 บาท

ตัวอย่างที่ 2.16 ในแต่ละวันคนเลี้ยงหมูจะผสมอาหารหมู ที่มีปริมาณคาร์โบไฮเดรทอย่างน้อยที่สุด 220 หน่วย และมีโปรตีนอย่างน้อยที่สุด 286 หน่วย อาหารที่จะเลือกมาผสมมี 5 ชนิด แต่ละชนิดมีคุณค่าอาหาร (หน่วยต่อกิโลกรัม) และราคา (บาทต่อกิโลกรัม) ดังนี้

ชนิดของอาหาร / คุณค่าอาหาร	ก	ข	ค	ง	จ
คาร์โบไฮเดรท	7.0	8.0	7.0	5.0	5.5
โปรตีน	6.3	5.0	4.0	10.0	5.5
ราคาอาหาร	31.5	40.0	28.0	40.0	33.0

คนเลี้ยงหมูควรเลือกใช้อาหารชนิดใดบ้าง อย่างไร จึงจะเกิดผลดีที่สุด

วิธีทำ กำหนดว่า คนเลี้ยงหมูเลือกใช้อาหาร ก = x_1 กิโลกรัม

อาหาร ข = x_2 กิโลกรัม

อาหาร ค = x_3 กิโลกรัม

อาหาร ง = x_4 กิโลกรัม

อาหาร จ = x_5 กิโลกรัม

จะได้

ค่าต่ำสุด $Z_x = 31.5x_1 + 40x_2 + 28x_3 + 40x_4 + 33x_5$

โดยมีข้อจำกัด $7x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 5.5x_5 \geqslant 220$

$6.3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 10x_4 + 5.5x_5 \geqslant 286$

$x_j (j = 1,2,3,4,5) \geqslant 0$

หาคำตอบโดยใช้ปัญหาคู่ จะมีตัวแบบปัญหาคู่

ค่าสูงสุด $Z_w = 220w_1 + 286w_2$

โดยมีข้อจำกัด

$7w_1 + 6.3w_2 \leqslant 31.5$ (1)

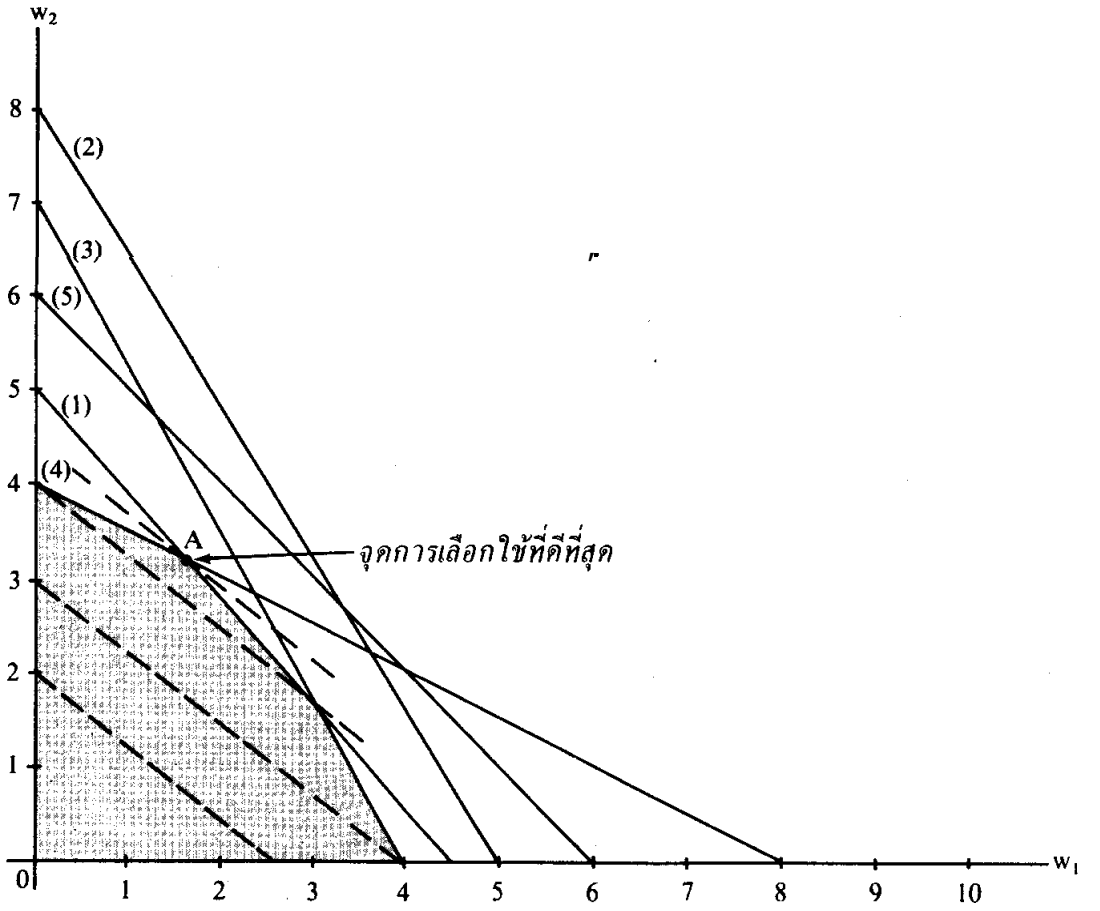
$8w_1 + 5w_2 \leqslant 40$ (2)

$7w_1 + 4w_2 \leqslant 28$ (3)

$5w_1 + 10w_2 \leqslant 40$ (4)

$5.5w_1 + 5.5w_2 \leqslant 33$ (5)

$w_1, w_2 \geqslant 0$



จากกราฟจะได้จุด A ซึ่งเป็นจุดบนข้อจำกัดที่ 1 กับ 4 เป็นจุดที่ดีที่สุด แสดงว่า

$$7x_1 + 5x_4 = 220$$

$$6.3x_1 + 10x_4 = 286$$

จะได้ $x_1 = 20, x_2 = 16$ $Z_{x\ \text{ต่ำสุด}} = 31.5 \times 20 + 40 \times 16 = 1270$

คนเลี้ยงหมูควรเลือกใช้อาหาร ก 20 กิโลกรัม อาหาร ง 16 กิโลกรัม จะเสียค่าใช้จ่ายต่ำสุด 1,270 บาท

2.6 ปัญหาที่สำคัญบางประเภท

วัตถุประสงค์ของการศึกษาเกี่ยวกับปัญหาที่สำคัญก็เพื่อที่เราจะได้เข้าใจ ถึงลักษณะและข้อจำกัดต่าง ๆ ของปัญหาเหล่านี้ ตลอดจนเรียนรู้เทคนิคในการตรวจสอบว่าเป็นปัญหาประเภทใด มีจริงหรือไม่ และการใช้เทคนิคอื่น ๆ มาช่วยในการพิจารณาหรือหาคำตอบต่อปัญหานั้น การตัดสินใจโดยอาศัยเทคนิคการโปรแกรมเชิงเส้นนั้นจำเป็นที่เราจะต้องมีตัวแบบ

ของปัญหา ซึ่งไม่มีหลักประกันใด ๆ ที่จะบอกได้ว่าตัวแบบของเราถูกต้อง เที่ยงตรง แค่ไหน คำตอบที่ได้ในบางครั้งเป็นคำตอบที่เป็นไปไม่ได้ หรือเป็นคำตอบที่เกิดขึ้นไม่ได้ในปัญหาจริง เนื่องจากการจำกัดของการใช้ทรัพยากร หากปัญหาใดมีคำตอบในลักษณะดังกล่าว เราต้องตรวจค้นหาสาเหตุที่เกิดความผิดพลาดอันนี้ ปัญหาบางประเภทเป็นปัญหาที่เกิดขึ้นได้ทั่ว ๆ ไป แต่การใช้วิธีการซิมเพลกซ์ในการหาคำตอบเพียงอย่างเดียว อาจจะทำให้เกิดความยุ่งยากหรือใช้เวลาในการคำนวณมาก เช่นกรณีของปัญหาที่มีคำตอบฐานที่มีค่ามากกว่า 0 น้อยกว่าจำนวนของอสมการหรือสมการข้อจำกัด หรือในปัญหาที่กำหนดค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของตัวแปรควบคุมได้ ปัญหาดังกล่าวนี้ต้องมีเทคนิคบางอย่างมาช่วยในการหาคำตอบ ซึ่งจะช่วยให้การหาคำตอบต่อปัญหาง่ายและสะดวกขึ้น ช่วยลดเวลาในการคำนวณ

2.6.1 ปัญหาที่มี Unbounded solutions

ในการหาคำตอบที่กล่าวมาแล้วข้างต้น เราสมมติว่า หากเราใส่ $\underline{a}_k$ เข้าไปในฐานแทนที่บางเวคเตอร์ เพื่อประกอบกันเป็นฐาน (basis) ใหม่นั้น จะต้องมี $x_{ik} > 0$, $i = 1,2,\ldots,m$ อย่างน้อยที่สุด 1 ตัว ในหัวข้อนี้เราจะมาพิจารณากันว่า จะมีอะไรเกิดขึ้น ถ้าหากค่าของ $x_{ik} \leqslant 0$ หมดทุก ๆ $i = 1,2,\ldots,m$

ในขั้นตอนหรือ iteration ใดก็ตาม ถ้าเรามี $c_j - s_j > 0$ สำหรับบางค่า j และ

$$c_k - s_k = \text{ค่าสูงสุด}_j (c_j - s_j),\ c_j - s_j > 0$$

แต่ $x_{ik} \leqslant 0$ ทุก ๆ i แล้ว θ จะไม่มีขีดจำกัดบน (upper bound) ซึ่งก็หมายความว่า ค่าของ $\theta \to \infty$ หรือบางค่าของ θ เป็น – และค่าของฟังก์ชันเป้าหมายจะเข้าใกล้ $+\infty$ แสดงว่าเราไม่อาจกำหนดค่า x_k มากที่สุดได้ นั่นก็คือไม่มีจุดมุมถัดไป ถ้าเราเลือกค่าของ x_k โตพอสมควร เราจะได้คำตอบที่เป็นไปได้ชุดใหม่ของปัญหานี้ จะประกอบด้วยตัวแปรที่มีค่าเป็นบวก $m+1$ ตัว โดยที่ค่าของฟังก์ชันเป้าหมาย Z จะถูกเลือกให้โตเท่าใดก็ได้ นั่นก็คือ ค่าของ $Z \to \infty$ ในกรณีเช่นนี้เรากล่าวว่าปัญหานี้มี unbounded solutions

ตามความเป็นจริง ปัญหาการโปรแกรมมีประโยชน์ เพราะว่ามันมีแฟคเตอร์ที่จำกัด ซึ่งจะเป็นเครื่องป้องกัน ทำให้เราไม่อาจเลือกค่า Z ได้ตามใจชอบ แสดงให้เห็นชัดว่า ลักษณะของปัญหาประเภทนี้จะไม่มีในปัญหาจริง และจะเป็นเครื่องชี้ให้เห็นว่า เกิดความผิดพลาดในการสร้างตัวแบบของปัญหา ความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นอย่างหนึ่งที่พอจะค้นหาได้ก็คือ เครื่องหมายของอสมการข้อจำกัด ด้วยเหตุผลดังกล่าวมานี้ จึงเป็นสิ่งจำเป็นยิ่งที่จะต้องมีเทคนิคในการคำนวณ

ที่จะแสดงให้เห็นว่า ปัญหานั้น ๆ จะมี unbounded solution หรือไม่ นั่นก็คือเทคนิคที่กล่าวมาแล้วข้างต้น

ตัวอย่างของปัญหานี้ ได้แก่

ตัวอย่างที่ 2.17 โรงงานผลิตสินค้า 2 ชนิด ชนิดละ x_1 ชิ้นและ x_2 ชิ้น ตามลำดับ ภายใต้เงื่อนไขดังนี้

ค่าสูงสุด $Z = 54x_1 + 45x_2$ (กำไร : บาท)

โดยมีข้อจำกัด $2x_1 + 4x_2 \geqslant 800$ (เครื่องจักร : ชั่วโมง)

$7x_1 + 3x_2 \geqslant 1050$ (แรงงาน : ชั่วโมง)

$x_1 \leqslant 200$ (# อุปสงค์สินค้าชนิดที่ 1)

$x_1, x_2 \geqslant 0$

โรงงานควรวางแผนการผลิตอย่างไรจึงจะดีที่สุด

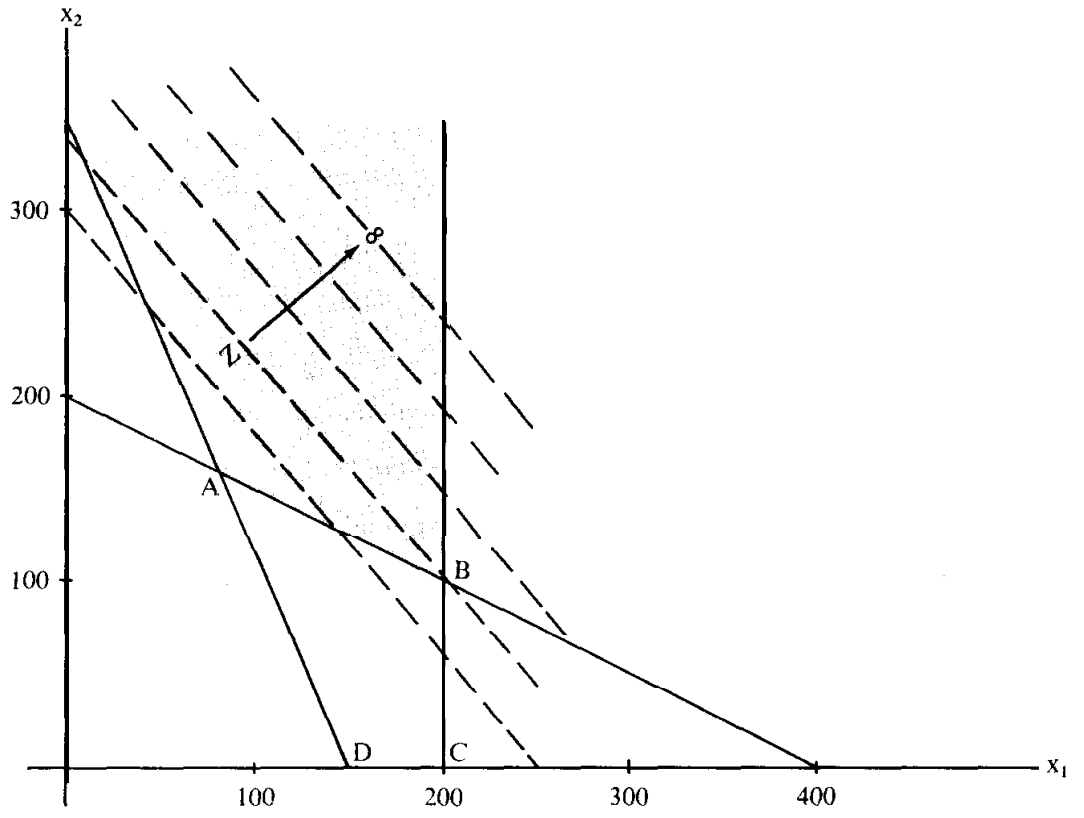
วิธีทำ หาคำตอบด้วยวิธีการซิมเพลกซ์

		x_3	x_5
Z	15300	$-\frac{45}{4}$	$\frac{63}{2}$
x_2	100	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{I}{2}$
x_4	650	$-\frac{3}{4}$	$\frac{II}{2}$
x_1	200	0	I

จะเห็นว่า คำตอบที่ได้จากตารางนี้ยังไม่เป็นคำตอบที่ดีที่สุด แต่เราไม่อาจบอกได้ว่าควรเพิ่มค่า x_3 ขนาดไหน เนื่องจาก $x_{i3} \leqslant 0$ ทุก i

แสดงว่าปัญหานี้มี unbounded solution

แสดงให้เห็นด้วยกราฟได้ดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่า ค่าของ Z เพิ่มขึ้นได้ไม่จำกัด เราไม่อาจกำหนดจุดการผลิตที่เหมาะสมได้ นั่นคือไม่มีกรอบบนของคำตอบ

ในปัญหาจริง การดำเนินกิจการใดก็ตาม มันมีขีดจำกัดโดยธรรมชาติ ดังนั้น ปัญหาประเภทนี้จะไม่เกิดขึ้น นั่นก็หมายความว่า อาจมีข้อผิดพลาดในการบันทึกข้อมูล หรือตีความหมายบางอย่างผิดก็ได้ เช่น เครื่องจักรอาจจะทำงานได้เต็มที่ 800 ชั่วโมง นั่นคือ ข้อจำกัดที่ 1 ควรเป็น

$$2x_1 + 4x_2 \leqslant 800$$

เช่นนี้ เราจะได้ ABCD เป็นบริเวณคำตอบที่เป็นไปได้ และจุดการผลิตที่ดีที่สุดคือจุด B(200, 100) นั่นเอง

2.6.2 ปัญหาที่มี infeasible solutions

ในการเขียนตัวแบบของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นใด ๆ เราไม่อาจรับประกันได้เต็มที่ว่า ปัญหานั้นจะมีคำตอบที่เป็นไปได้ และเราจะได้คำตอบที่ดีที่สุด อาจจะเป็นไปได้ที่ปัญหานั้นจะไม่มีบริเวณคำตอบที่เป็นไปได้ ซึ่งเราเรียกว่าเป็นปัญหาที่มี infeasible solutions โดยทั่วไป การเกิดขึ้นของปัญหาลักษณะนี้ มักจะเกิดขึ้นจากความผิดพลาดในการเขียนตัวแบบ เช่นเขียน

เครื่องหมายอสมการกลับกัน และความผิดพลาดอีกประการหนึ่งที่จะเป็นไปได้คือ ความขัดแย้งหรือไม่เข้าใจนโยบายทางด้านการจัดการ เช่น กำหนดนโยบายไว้ว่า จะผลิตสินค้าชนิดหนึ่งให้ได้อย่างน้อยที่สุดจำนวนหนึ่ง โดยไม่ได้สำรวจว่าจะมีทรัพยากรเพียงพอในการผลิตหรือไม่ ผลก็คือไม่อาจจะผลิตได้ เนื่องจากมีทรัพยากรอย่างน้อยที่สุด 1 ชนิดไม่พอเพียงในการผลิต

เราจะตรวจสอบได้ว่า ปัญหาของเราจะมี infeasible solutions หรือไม่ ต้องอาศัยเทคนิคการโปรแกรมเชิงเส้น หากปัญหานั้นมีตัวแปรควบคุมได้ไม่เกิน 2 ตัว วิธีกราฟจะช่วยตัดสินให้อย่างรวดเร็ว นั่นก็คือเราเขียนกราฟเส้นตรงของข้อจำกัดที่มีอยู่ทั้งหมด แล้วพิจารณาจากกราฟว่า มีบริเวณคำตอบที่เป็นไปได้หรือไม่ ถ้าไม่มี แสดงว่าปัญหานี้มี infeasible solutions เราต้องกลับไปตรวจสอบหาสาเหตุที่เกิดขึ้นต่อไป กรณีที่ตัวแปรควบคุมได้มีมากกว่า 2 ตัว ต้องใช้วิธีการซิมเพลกซ์ ทั่วไปแล้วปัญหาประเภทนี้มักจะเป็นปัญหาที่ต้องอาศัยตัวแปรเทียมในการหาคำตอบฐานชุดแรก ดังที่ได้กล่าวมาแล้วว่า ตัวแปรเทียมเป็นตัวแปรที่ไม่มีความหมายและไม่ได้มีความเกี่ยวพันใด ๆ กับปัญหาจริง เราเพียงแต่นำเข้ามาเพื่อช่วยในการตัดสินใจหาจุดเริ่มต้นเท่านั้นเอง ดังนั้น คำตอบที่ดีที่สุดจะต้องไม่มีค่าของตัวแปรเหล่านี้ นั่นก็คือตัวแปรเทียมจะต้องถูกขจัดออกไปก่อนถึงตารางสุดท้าย หากการแก้ปัญหาด้วยวิธีการซิมเพลกซ์ปรากฏค่าของตัวแปรเทียมในตารางสุดท้าย กล่าวคือคำตอบที่ดีที่สุดมีค่าตัวแปรเทียมมากกว่า 0 เรากล่าวว่า ปัญหานี้มี infeasible solutions

2.6.3 ปัญหาที่มีคำตอบที่ดีที่สุดมากกว่า 1 ชุด (alternative optimal solutions)

ในปัญหาจริงคำตอบที่ดีที่สุดจะมีเพียงชุดเดียว แต่ในบางครั้งอาจจะมีบางกรณีที่การตัดสินใจขั้นสุดท้าย จะมีทางเลือกให้เรามากกว่า 1 ทาง นั่นก็คือ ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นบางปัญหาจะให้คำตอบที่ดีที่สุดมากกว่า 1 ชุด แต่ละชุดจะมีค่าฟังก์ชันเป้าหมายสูงสุดหรือมีค่าต่ำสุดค่าเดียวกัน โดยอาศัยเทคนิคของการโปรแกรมเชิงเส้น จะบอกให้เราทราบได้ว่าคำตอบที่ดีที่สุดของปัญหานั้น มีมากกว่า 1 ชุดหรือไม่ เรามีทฤษฎีเกี่ยวกับคำตอบที่ดีที่สุดมากกว่า 1 ชุดดังนี้ (ดูการพิสูจน์ในหนังสือ ST 471)

ทฤษฎี หากเรามี $X_0^N = (x_{10}^N, \ldots, x_{P0}^N \ldots, x_{m0}^N)$ เป็นคำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น และมี $\underline{a}_j$ บางคอลัมน์ที่ไม่อยู่ในฐาน (basis) แต่ค่าของ $c_j - s_j$ ในคอลัมน์นั้นเป็น 0 และ $x_{ij}^N \geq 0$ ทุก ๆ ค่า i เราจะได้คำตอบที่ดีที่สุดชุดใหม่ที่มีค่า Z คงเดิม เรียกได้ว่าปัญหานี้มีคำตอบที่ดีที่สุดมากกว่า 1 ชุด (alternative optimal solutions)

สรุปได้ว่า หากในตารางสุดท้าย มี $c_t - s_t$ ของตัวแปรนอกฐาน (non – basic variable) x_t มีค่าเป็น 0 และ $x_{it} > 0$ ทุกค่าหรือบางค่า i แสดงว่า ปัญหานี้มีคำตอบที่ดีที่สุดมากกว่า 1 ชุด คำตอบชุดแรกคือคำตอบที่อ่านได้จากตารางสุดท้ายนั้น คำตอบชุดถัดไปคือ คำตอบที่ได้จากการเปลี่ยน x_t เป็นตัวแปรฐาน ซึ่งมีกระบวนการเปลี่ยนเช่นที่กล่าวมาแล้วข้างต้น นั่นก็คือ ถ้าค่าเป็นไปได้ที่มากที่สุดของ x_t คือ

$$x_{t0} = \frac{x_{P0}}{x_{Pt}} = \text{ค่าต่ำสุด}_{i} \frac{x_{i0}}{x_{it}},\ x_{it} > 0$$

เราแทนที่ตัวแปรฐานที่อยู่ในแถว P ด้วย x_t และหาค่าตัวแปรอื่นที่เกี่ยวข้อง

ผลสรุปก็คือ เราจะได้คำตอบชุดใหม่ ประกอบด้วย

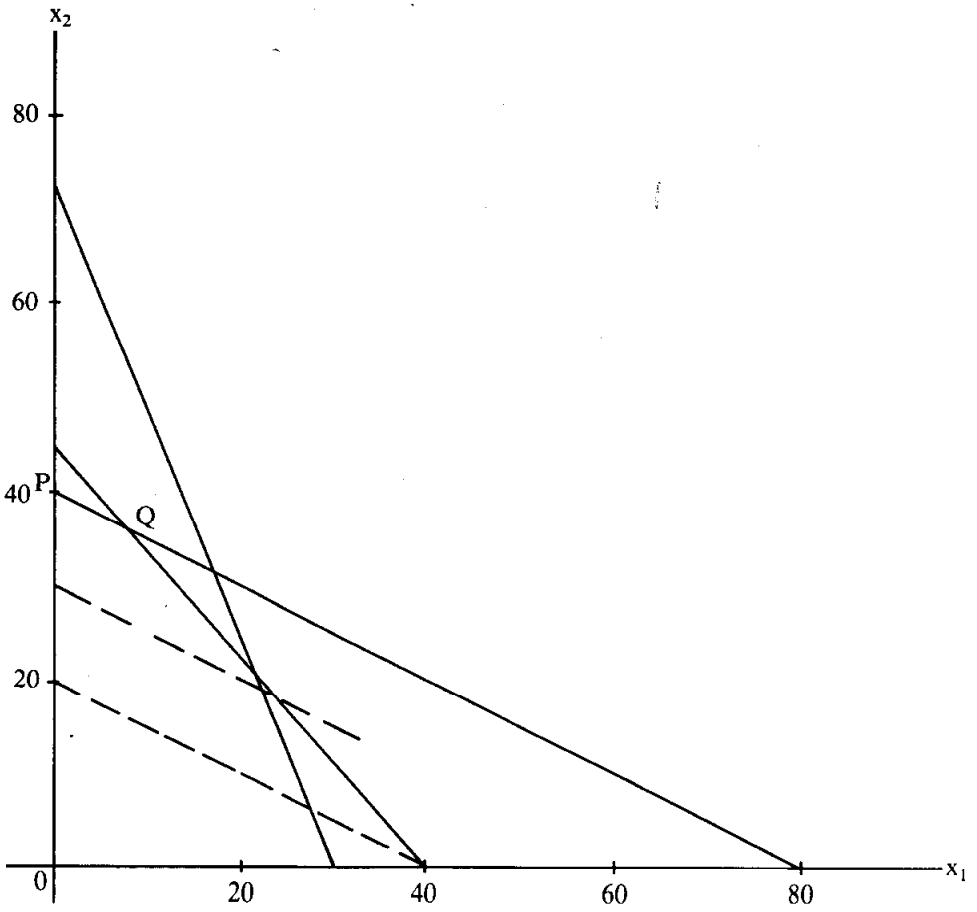
$$x_t = x_{t0}$$

และ $$x_i = x_{i0} - (x_{it})(x_{t0}),\ i \neq t$$

ตัวอย่างของปัญหานี้ จะเห็นได้จากปัญหาในตัวอย่างที่ 2.5 และ 2.8 เมื่อกำไรของสินค้า A เป็น 150 บาทต่อหน่วย ฟังก์ชันเป้าหมายจะเปลี่ยนเป็น

$$\text{ค่าสูงสุด } Z = 150x_1 + 300x_2$$

แผนการผลิตที่ดีที่สุด จะมี 2 แผน ซึ่งแสดงให้เห็นด้วยกราฟ และวิธีการซิมเพลกซ์ ดังต่อไปนี้



จากกราฟ จะเห็นได้ว่า เส้นฟังก์ชัน Z เลื่อนขึ้นสูงสุดที่ระดับ PQ แสดงว่าจุด P และ Q เป็นจุดการผลิตที่ดีที่สุด

สรุปได้ว่า แผนการผลิตอาจจะเลือกผลิตสินค้า B เพียงอย่างเดียว 40 หน่วย หรือเลือกทั้ง 2 ชนิด โดยผลิตสินค้า A 8 หน่วย ผลิตสินค้า B 36 หน่วย ไม่ว่าจะเลือกแบบใด จะได้กำไรสูงสุด 12,000 บาท

การหาคำตอบด้วยวิธีการซิมเพลกซ์ เราจะได้ตารางที่ 3 และ 4 (ตารางย่อ) เป็นตารางที่ให้คำตอบดีที่สุด ดังนี้

ตารางที่ 3

		X_3	X_4	
Z	12.000	$\frac{75}{2}$	0	ค่า e,
X_2	36	$\frac{9}{40}$	$-\frac{1}{10}$	
X_1	8	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	40
X_5	x4	$\frac{51}{40}$	$-\frac{19}{10}$	—

ตารางที่ 4

		X_3	X_1
Z	12,000	$\frac{75}{2}$	0
X_2	40	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
X_4	40	- 1	5
X_5	160	$\frac{5}{8}$	$\frac{19}{2}$

ผลสรุปที่ได้จะเป็นเช่นเดียวกับวิธีกราฟ ส่วนการที่จะตัดสินใจผลิตแบบใด ก็ต้องพิจารณาตามความเหมาะสม ตามนโยบายของแผนกผลิต

2.6.4 ปัญหาที่มี degenerate basic feasible solutions

การหาคำตอบเท่าที่กล่าวมาแล้วข้างต้น เรามีเกณฑ์สมมติ (assumption) ว่า คำตอบฐานที่ได้เป็น nondegenerate basic feasible solution นั่นก็คือ เราจะได้คำตอบฐานที่มีค่ามากกว่า 0 เป็นจำนวนเท่ากับจำนวนของข้อจำกัด เกณฑ์ที่เราใช้ในการหาคำตอบที่ทำให้ได้ค่า Z สูงสุด (กรณีที่ต้องการหาค่าสูงสุดของ Z) ก็คือ

1) หาอัตราการเพิ่มขึ้นของ Z ต่อหนึ่งหน่วยของ nonbasic variable x_k ซึ่งอัตราที่เพิ่มขึ้นกำหนดไว้ดังนี้

$$c_k - s_k = \text{ค่าสูงสุด}_j (c_j - s_j),\ c_j - s_j > 0$$

2) หาจำนวนที่มากที่สุดของ nonbasic variable x_k ที่จะเข้ามาแทนที่ basic variable x_t ซึ่งก็คืออัตราส่วนที่ทดสอบค่าที่ต่ำสุด นั่นก็คือ

$$\theta_r = x_{t0}/x_{tk} = \text{ค่าต่ำสุด}_i (x_{i0}/x_{ik}),\ x_{ik} > 0$$

และค่า θ_r จะมีเพียงค่าเดียวเท่านั้น

อาศัยเกณฑ์ทั้งสองนี้ เราจะหาคำตอบอุตมะได้ หากไม่เป็นไปตามเกณฑ์ดังกล่าว ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นอาจเป็นปัญหาที่มี unbounded solutions หรืออาจจะเป็นปัญหาที่มีคำตอบที่เป็นไปได้ขั้นฐานมีค่าเป็น 0 อย่างน้อยที่สุด 1 ตัว นั่นก็คือ ปัญหาที่มีคำตอบฐานที่มีค่ามากกว่า 0 มีจำนวนน้อยกว่า จำนวนของข้อจำกัด เราเรียกปัญหานี้ว่า degeneracy problem ซึ่งก็หมายถึง

ปัญหาที่มี degenerate basic feasible solution นั่นเอง หากมีกรณีเช่นนี้เกิดขึ้น ย่อมแสดงว่าค่าของ θ_r จะเท่ากับ 0 และค่าของฟังก์ชันเป้าหมายที่คำนวณได้จากคำตอบชุดใหม่ จะเท่ากับค่าของฟังก์ชันเป้าหมายเดิม อันแสดงให้เห็นได้ว่า ค่าของฟังก์ชันเป้าหมายคงค่าเดิม ทั้ง ๆ ที่มีการปรับคำตอบฐานใหม่แล้ว นอกจากนี้ ในบางกรณีการคำนวณเพื่อปรับคำตอบฐานใหม่ที่ดีกว่า อาจจะวนกลับไปได้คำตอบฐานชุดเดิมก็ได้ ซึ่งเราเรียกกรณีเช่นนี้ว่ากระบวนการคำนวณมี cycled

พิจารณาจาก degeneracy problem ที่เป็นปัญหาที่มีจำนวนคำตอบฐานซึ่งมีค่ามากกว่า 0 น้อยกว่าจำนวนของข้อจำกัด อันเป็นผลมาจากเรามี θ_r มีค่าเท่ากับ 0 หรือจากขั้นตอนหนึ่งของการคำนวณได้ ค่า θ_r มากกว่า 1 ค่า ซึ่งเป็นผลให้เราได้คำตอบฐานชุดใหม่มีค่าเป็น 0 อย่างน้อยที่สุด 1 ค่า หากเป็นการหาคำตอบด้วยตัวเราเอง กรณีเช่นนี้ไม่ก่อให้เกิดความยุ่งยากมากนัก เราอาจจะเลือกให้ค่า θ_r ของแถวใดมีค่าต่ำสุดที่แท้จริงก็ได้ นั่นก็คือ จะตัดสินใจเอาตัวแปรฐานของแถวที่มีค่า θ_r แถวใดออกไปก็ได้ และแน่ใจได้ว่า จะไม่เกิดกรณีซ้ำ หรือเกิดมี cycled อย่างไรก็ตาม การพิจารณาอาจจะยุ่งยากและเสียเวลามากและอาจจะทำไม่ได้ หากเราใช้คอมพิวเตอร์ในการคำนวณเพื่อแก้ปัญหาดังกล่าว ได้มีการคิดหาเทคนิคต่าง ๆ เข้ามาช่วยในการตัดสินใจ และแก้ไขกรณีที่กระบวนการคำนวณมี cycled เทคนิคที่คิดขึ้นก็มีของ Charnes' ของ Dantzig, Orden และ Wolfe และยังมีวิธีการของ Hoffman และ Beale เป็นต้น ในทางปฏิบัติถือว่าเทคนิคของแต่ละกลุ่มไม่แตกต่างกัน วิธีการที่นิยมใช้วิธีหนึ่ง เรียกว่า Perturbation Method กำหนดแนวทางในการตัดสินใจดังนี้

ถ้ามี θ_r มากกว่า 1 เราจะใช้วิธีการซิมเพลกซ์โดยตรงไม่ได้ นั่นก็คือ เราใช้วิธีการอื่นมาช่วยในการพิจารณา θ_r โดยพิจารณาจากแถวที่มีค่า θ_r เหมือนกัน คำนวณหาอัตราส่วน x_{ij}/x_{ik} ของแถวนั้น เริ่มจาก basic column j = 1 แล้วเปรียบเทียบอัตราส่วนที่ได้ หากอัตราส่วนที่คำนวณได้จากแถวใดมีค่าต่ำสุด (ในทางปฏิบัติค่านี้จะเป็น 0) เราถือว่าแถวนั้นเป็น key row หากมีอัตราส่วนต่ำสุดมากกว่า 1 คู่ เราคำนวณค่าของอัตราส่วน x_{ij}/x_{ik} จาก basic column j + 1 ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะได้ค่าต่ำสุดเพียงคู่เดียว

ตัวอย่างเช่น เราได้ค่ามากที่สุดของ x_k เท่ากับ

$$\theta_P = \theta_t = \text{ค่าต่ำสุด}_i\ \theta_i$$

เราต้องหาอัตราส่วนจากคอลัมน์ของตัวแปรฐานที่อยู่ใกล้เฉพาะในแถว p และ t สมมติได้

$$\frac{0}{x_{Pk}} \text{ กับ } \frac{1}{x_{ik}}$$

แสดงว่าเราเลือกแถว p เป็น key row ดำเนินขั้นตอนต่อไปได้

เรามีทฤษฎีที่แสดงความสัมพันธ์ของปัญหาที่มีคำตอบที่ดีที่สุดมากกว่า 1 ชุด และปัญหาที่มีคำตอบค่ามากกว่า 0 น้อยกว่า จำนวนข้อจำกัดดังนี้ (ดูการพิสูจน์ในหนังสือ ST 471)

ทฤษฎี 2.11 ถ้าปัญหาใดปัญหาหนึ่งมีคำตอบที่ดีที่สุดมากกว่า 1 ชุด (alternative optimal solutions) แล้วปัญหาที่ควบคู่กันจะมีคำตอบที่ดีที่สุด บางคำตอบมีค่าเป็น 0 (degenerate optimal solution)

แสดงให้เห็นได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2.18 เพื่อให้การสอบดำเนินไปด้วยดี จำเป็นต้องมีเจ้าหน้าที่ตำรวจ มาดูแลรักษาความสงบเรียบร้อย และให้ความปลอดภัยทั้งในด้านการสอบ และข้อสอบ ตลอด 24 ชั่วโมง มหาวิทยาลัยต้องการให้มีตำรวจประจำในแต่ละช่วงเวลา ดังต่อไปนี้

ช่วงที่	1	2	3	4
เวลา	6 – 12	12 – 18	18-24	24-6
# **ต้องการ**	10	12	5	7

ตำรวจแต่ละนายจะทำงาน 12 ชั่วโมงติดต่อกัน มหาวิทยาลัยควรจัดเจ้าหน้าที่ตำรวจมาประจำอย่างไร จึงจะเพียงพอกับความต้องการ แต่ให้มีจำนวนในแต่ละวันน้อยที่สุด

วิธีทำ กำหนดว่า มีเจ้าหน้าที่ตำรวจในช่วงเวลา 6 – 12 น. = x_1 คน

ในช่วงเวลา 12 – 18 น. = x_2 คน

ในช่วงเวลา 18 – 24 น. = x_3 คน

ในช่วงเวลา 24 – 6 น. = x_4 คน

จะได้

ค่าต่ำสุด $Z_x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

โดยมีข้อจำกัด $x_1 + x_4 \geq 10$

$x_1 + x_2 \geq 12$

$x_2 + x_3 \geq 5$

$$x_3 + x_4 \geqslant 7$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0$$

เพื่อความสะดวกเราจะหาคำตอบที่ดีที่สุดจากปัญหาคู่ ที่มีตัวแบบ

ค่าสูงสุด $Z_w = 10w_1 + 12w_2 + 5w_3 + 7w_4$

โดยมีข้อจำกัด $w_1 + w_2 \leqslant 1$

$$w_2 + w_3 \leqslant 1$$

$$w_3 + w_4 \leqslant 1$$

$$w_1 + w_4 \leqslant 1$$

$$w_1, w_2, w_3, w_4 \geqslant 0$$

ทำให้เป็นตัวแบบมาตรฐาน โดยใช้ตัวแปร w_5, w_6, w_7, w_8 บวกข้อจำกัดที่ 1, 2, 3, 4 ตามลำดับ หาคำตอบด้วยวิธีการซิมเพลกซ์ จะได้

			w_1	w_2	w_3	w_4	
	Z_w	0	−10	−12	−5	−7	ค่า θ_i
1	w_5	1	1	1	0	0	1
	w_6	1	0	1	1	0	1
	w_7	1	0	0	1	1	—
	w_8	1	1	0	0	1	—

			w_1	w_6	w_3	w_4	
	Z_w	12	−10	12	7	−7	ค่า θ_i
2	w_5	0	1	−1	−1	0	0
	w_2	1	0	1	1	0	—
	w_7	1	0	0	1	1	—
	w_8	1	1	0	0	1	1

			w_5	w_6	w_3	w_8
	Z_w	19	3	9	4	7
4	w_1	0	1	-1	-1	0
	w_2	1	0	1	1	0
	w_7	0	1	-1	0	- 1
	w_4	1	- 1	1	1	1

หมายเหตุ ตารางที่ 1 ค่าต่ำสุด θ_i คือ $\theta_1 = \theta_2$ เราจึงต้องพิจารณาจากอัตราส่วนระหว่าง ส.ป.ส. ในคอลัมน์ตัวแปรฐานที่ใกล้สุดคือ คอลัมน์ของ w_5 กับ ส.ป.ส. ในคอลัมน์ของ w_2 จะได้ $\frac{1}{1}, \frac{0}{1}$

ดังนั้น เราเลือกแถว 2 เป็น key row

ตารางที่ 3 เราได้ $w_1 = 0$ แทน w_5 ค่าของ w_2, w_7, w_8 และ Z_w คงเดิม

ตารางที่ 4 จะเป็นตารางสุดท้ายของปัญหาคู่

สรุปได้ว่า ควรมีเจ้าหน้าที่ตำรวจในช่วงเวลา 6 – 12 น. 3 คน ในช่วงเวลา 12 – 18 น. 9 คน และในช่วงเวลา 24 – 6 น. 7 คน รวมจำนวนในแต่ละวัน 19 คน

จากตารางสุดท้ายของปัญหาคู่ เราเปลี่ยนไปเป็นตารางสุดท้ายของปัญหาเดิม จะได้

		x_5	x_6	x_3	x_8
Z_x	19	0	– 1	0	– 1
x_1	3	– 1	0	– 1	1
x_2	9	1	– 1	1	– 1
x_7	4	1	– 1	0	– 1
x_4	7	0	0	1	– 1

ตารางนี้มี x_{05} และ x_{03} มีค่าเป็น 0

แสดงว่า มีคำตอบที่ $Z_x = 19$ อีก 2 ชุด ดังนี้

ถ้าเลือก x_5 เป็นตัวแปรฐาน x_5 จะแทนที่ x_7 เราจะได้

$x_5 = 4$, $x_1 = 3+4 = 7$, $x_2 = 9-4 = 5$, $x_4 = 7$ ได้ $Z_x = 19$

ถ้าเลือก x_3 เป็นตัวแปรฐาน x_3 จะแทนที่ x_4 เราจะได้

$x_3 = 7, x_1 = 3+7 = 10, x_2 = 9-7 = 2, x_7 = 4$ ได้ $Z_x = 19$

สรุปว่า มหาวิทยาลัยอาจจะจัดเจ้าหน้าที่ตำรวจมาประจำดังนี้

ช่วงเวลา	6 – 12	12 – 18	18 – 24	24 – 6	# ใน 1 วัน
แบบที่ 1	3	9	—	7	19
แบบที่ 2	7	5	—	7	19
แบบที่ 3	10	2	7	—	19

ผลสรุปที่ได้จากตัวอย่างนี้ ชี้ให้เห็นว่า ปัญหาเดิมมีคำตอบที่ดีที่สุดมากกว่า 1 ชุด ปัญหาคู่จะมีคำตอบบางตัวเป็น 0

ปัญหาในตัวอย่างนี้ ถ้าพิจารณาในแง่ค่าตอบแทน และค่าตอบแทนในแต่ละช่วงเวลาไม่เป็นอัตราเดียวกัน เป้าหมายของการจัดจะเปลี่ยนเป็น จ่ายค่าตอบแทนต่ำสุด ผลที่ได้ก็จะต่างออกไป ขึ้นอยู่กับอัตราค่าตอบแทน และความต้องการเจ้าหน้าที่ในแต่ละช่วงเวลา

2.6.5 ปัญหาที่กำหนดค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของตัวแปร (Upper and Lower Bounds)

บ่อยครั้งที่จะมีข้อจำกัดของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นอยู่จำนวนหนึ่ง มีรูปแบบดังนี้

$$0 \leqslant x_j \leqslant u_j$$

ซึ่งเราเรียกว่า ปัญหานี้มีกรอบบนของตัวแปร การพิจารณาค่าใด ๆ ของตัวแปรเหล่านี้ ต้องไม่เกินกรอบของมัน

ข้อจำกัดดังกล่าวนี้ อาจจะแสดงถึงความสามารถในการผลิต หรือแสดงถึงขีดจำกัดของจำนวนที่จะขายได้หรือจำนวนอุปสงค์ของสินค้า (ปริมาณการผลิตสินค้าชนิดนี้ไม่ควรจะเกินขีดจำกัดที่จะขายได้หรือจำนวนอุปสงค์)

ตัวแบบของปัญหาที่มีกรอบบนของตัวแปรหรือกำหนดค่าสูงสุดของตัวแปร ก็คือ

$$\text{หาค่าสูงสุดของ (หรือหาค่าต่ำสุดของ) } Z = \sum_{j=1}^{n+m} c_j x_j \qquad (2.11)$$

$$\text{โดยมีข้อจำกัด } \sum_{j=1}^{n+m} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1,2,\ldots, m \qquad (2.12)$$

$$x_j \leqslant u_j \quad \text{ทุก ๆ ค่าหรือบางค่า } j = 1,2,\ldots,n \qquad (2.13)$$

และ $x_j (j = 1,2,\ldots,n+m) \geq 0$ (2.14)

หนทางหนึ่งในการแก้ปัญหาประเภทนี้ก็คือ การเปลี่ยนเซตของข้อจำกัดใน (2.13) เป็นเซตของสมการ

$$x_j + x_{s_j} = u_j \tag{2.15}$$

ในเมื่อ x_{s_j} เป็น slack variables

อย่างไรก็ตามวิธีการเช่นนี้จะเพิ่มจำนวนแถวในตาราง และเพิ่มงานมากขึ้น ทั้งที่ควรจะมีวิธีที่ประหยัดเวลาได้มากกว่า การคำนวณในแต่ละตารางต้องพิจารณา $m+p$ แถว $p \leqslant n$ แทนที่จะพิจารณาเพียง m แถวเท่านั้น หากใช้วิธีการของ Charnes และ Lemke หรือของ Dantzig ซึ่งได้ปรับปรุงวิธีการที่มีประสิทธิภาพยิ่ง วิธีการนี้ยึดตามหลักการเดิม กล่าวคือ หาคำตอบจากเซตของสมการ (2.12) ด้วยวิธีการซิมเพลกซ์ แต่การพิจารณาผลในแต่ละตาราง จะต้องคำนึงถึงเงื่อนไขใน (2.13) ควบคู่กันไปด้วย

เมื่อเราได้ $c_k - s_k$ = ค่าสูงสุด $(c_j - s_j)$

ค่ามากที่สุดของ x_k จะเท่ากับ

$$\theta_r = \text{ค่าต่ำสุด}_{i}\left(\frac{x_{i0}}{x_{ik}}\right), x_{ik} > 0$$

แต่ $x_k \leqslant u_k$ ดังนั้น ค่าสูงสุดของ x_k จะเท่ากับค่าต่ำสุด (θ_r, u_k) (2.16)

ถ้าตัวแปรฐาน x_i ตัวใดมีกรอบบนคือ $x_i \leqslant u_i$ เรายังคงเลือกค่า x_k จาก (2.16) ถ้า $x_{ik} > 0$ แต่ถ้า $x_{ik} < 0$ จะพบว่า การเพิ่มขึ้นของ x_k มีผลให้ x_i เพิ่มขึ้นด้วย

พิจารณาจากความสัมพันธ์ จะพบว่า

$$x_i + x_{ik}x_k = x_{i0} \quad , \; x_{ik} < 0$$

นั่นคือ $x_i = x_{i0} - x_{ik}x_k$

แต่ $x_i \leqslant u_i$ ดังนั้น

$$x_{i0} - x_{ik}x_k \leqslant u_i$$

$$x_k \leqslant \frac{u_i - x_{i0}}{-x_{ik}}$$

ถ้า $x_{ik} < 0$ และ $\frac{u_t - x_{t0}}{-x_{tk}}$ = ค่าต่ำสุด $\left(\frac{u_i - x_{i0}}{-x_{ik}}\right)$ (2.17)

ค่าสูงสุดของ x_x จะเท่ากับ

$$\text{ค่าต่ำสุด}\left[\theta_r, u_k, \frac{u_t - x_{t0}}{-x_{tk}}\right] \tag{2.19}$$

1) ถ้า $x_k = \theta_r$ การเปลี่ยนแปลงเป็นไปตามกฎเกณฑ์เดิม

2) ถ้า $x_k = u_k$ ให้ $\bar{x}_k = -x_k$ และ $x_{i0} = x_{i0} + \bar{x}_{ik}u_k$ นั่นคือ

ใส่เครื่องหมาย – บน x_k เอา –1 คูณทุกค่าในคอลัมน์นี้ เอาผลที่ได้ไปคูณกับ u_k แล้วเอาผลคูณไปบวกกับคำตอบเดิม

3) ถ้า $x_k = \dfrac{x_{t0} - u_t}{x_{tk} < 0}$ ปรับตารางใหม่โดยให้ x_k เป็นตัวแปรฐานแทนที่ x_t แล้วให้ $\bar{x}_t = -x_t$

(เอา -1 คูณทุกค่าในคอลัมน์ x_tใส่เครื่องหมาย-บนx_t)และปรับคำตอบใหม่เป็น $x_{i0} = x_{i0} + \bar{x}_{it}u_t$

ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2.19 จงหาคำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาในตัวอย่างที่ 2.14 โดยใช้อัลกอริทึมของกรอบบนของตัวแปร

วิธีทำ เปลี่ยนตัวแบบของปัญหาในตัวอย่าง 2.14 เป็นรูปมาตรฐานเฉพาะในข้อจำกัดสำคัญจะได้

ค่าต่ำสุด $Z_x = 200x_1 + 180x_2 + 160x_3 + Mx_6$

โดยมีข้อจำกัด

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + 2x_2 - x_4 + x_6 &= 75 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_5 &= 0 \\ x_1 &\leqslant 12 \\ x_2 &\leqslant 15 \\ x_3 &\leqslant 15 \\ x_j (j = 1,2,3,4,5,6) &\geqslant 0 \end{aligned}$$

		x_1	x_2	x_3	x_4	
Z_x	75M	5M – 200	3M – 180	2M – 160	– M	ค่า θ_i
x_6	75	5	3	2	– 1	15
x_5	0	– 1	1	– 1	0	—
	u_j	12	15	15	∞	

		$\bar{x}_1$	x_2	x_3	x_4	
Z_x	15M + 2400	200 – 5M	3 M – 180	2M – 160	– M	ค่า e_i
x_6	15	- 5	3	2	– 1	5
x_5	12	1	1	– 1	0	12
	u_j	12	15	15	∞	

		x_1	x_6	x_3	x_4
Z_x	3300	-100	60-M	-40	-60
x_2	5	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_5	7	$\frac{8}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$

สรุปได้ว่า ควรให้ผู้ตรวจสอบระดับ 1 ตรวจ 12 คน ผู้ตรวจสอบระดับ 2 ตรวจ 5 คน บริษัทจะเสียค่าใช้จ่าย 3,300 บาท

ซึ่งเป็นคำตอบเดียวกันกับตัวอย่างที่ 2.14

ปัญหาบางประเภทจะกำหนดกรอบล่างของตัวแปร นั่นก็หมายความว่า คำตอบต่อปัญหานั้น จะต้องมีค่าไม่ต่ำกว่ากรอบของมัน รูปแบบของปัญหานี้จะมี

$$x_j \geq \ell_j \geq 0 \tag{2.19}$$

ถ้าเราให้ $y_j = x_j - \ell_j \geq 0$

หรือ $$x_j = y_j + \ell_j \geq 0 \tag{2.20}$$

แทนค่า x_j ใน (2.11), (2.13) เราจะได้

$$\text{ค่าสูงสุด (หรือค่าต่ำสุด) } z = \sum_{j=1}^{n+m} c_j y_j + \sum c_j \ell_j \tag{2.21}$$

$$\text{โดยมีข้อจำกัด } \sum_{j=1}^{n+m} a_{ij} y_j = b_i - \sum_{j=1}^{n+m} a_{ij} \ell_j \quad i = 1,2,\ldots, m \tag{2.22}$$

$$y_j \geq 0 \qquad j = 1,2,\ldots,n \tag{2.23}$$

จะเห็นได้ว่า ตัวแบบจะมีลักษณะเดียวกับตัวแบบของปัญหาที่ไม่มีกรอบล่างของตัวแปร เพียงแต่ปรับค่า Z และค่าคงที่ b_i เท่านั้นเอง แสดงว่า การหาคำตอบต่อปัญหาที่มีกรอบล่างของตัวแปร ทำได้ง่ายกว่ากรณีที่มีกรอบบนมาก เราเพียงแต่จัดให้อยู่ในรูปของ y_j หาคำตอบที่ดีที่สุดของ y_j ก็จะได้คำตอบที่ดีที่สุดของ x_j ด้วย

สำหรับปัญหาที่มีทั้งกรอบบนและกรอบล่างของตัวแปร เราใช้วิธีการทั้ง 2 แบบผสมกัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2.20 โรงงานผลิตสินค้า มีรายการสินค้าที่จะต้องส่งให้ลูกค้าประจำในสัปดาห์นี้ คือ สินค้า ก 50 หน่วย สินค้า ข และ ค รวมกัน 100 หน่วย สินค้า ง 20 หน่วย สำหรับลูกค้าทั่วไป โรงงานสามารถขายสินค้า ก, ข และ ค ได้ไม่จำกัด แต่สำหรับสินค้า ง จะขายได้มากที่สุด 45 หน่วย การผลิตสินค้าแต่ละชนิดจะใช้เครื่องจักร 3 ประเภท รายละเอียดเกี่ยวกับการผลิตและจำหน่ายในสัปดาห์นี้ มีดังนี้

		เวลาที่ผลิต (ชั่วโมง/หน่วย)				ความสามารถในการผลิต(ชั่วโมง)
		สินค้า ก	สินค้า ข	สินค้า ค	สินค้า ง	
เครื่องจักร :	M1	3	2	2	4	560
	M2	1	1	2	3	460
	M3	2	1	2	1	420
กำไร(บาท/หน่วย)		150	100	150	180	

ถ้าท่านเป็นผู้จัดการโรงงาน ท่านจะวางแผนการผลิตอย่างไร

วิธีทำ แผนการผลิตคือ ผลิตสินค้า ก = x_1 หน่วย

ผลิตสินค้า ข = x_2 หน่วย

ผลิตสินค้า ค = x_3 หน่วย

ผลิตสินค้า ง = x_4 หน่วย

ให้ได้

ค่าสูงสุด $Z = 150x_1 + 100x_2 + 150x_3 + 180x_4$

โดยมีข้อจำกัด $3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leqslant 560$

$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leqslant 460$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leqslant 420$$
$$x_2 + x_3 \geqslant 100$$
$$x_1 \geqslant 50$$
$$x_4 \geqslant 20$$
$$x_4 \leqslant 45$$
$$x_2 \geqslant 0$$
$$x_3 \geqslant 0$$

ให้ $y_1 = x_1 - 50$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3$, $y_4 = x_4 - 20$

เปลี่ยนเป็นตัวแบบของ y_j และทำให้เป็นรูปมาตรฐาน จะได้

ค่าสูงสุด $Z = 150y_1 + 100y_2 + 150y_3 + 180y_4 - My_9 + 11100$

โดยมีข้อจำกัด
$$3y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 4y_4 + y_5 = 560-150-80$$
$$y_1 + y_2 + 2y_3 + 3y_4 + y_6 = 460-50-60$$
$$2y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 + y_7 = 420 - 100-20$$
$$y_2 + y_3 - y_8 + y_9 = 100$$
$$y_4 \leqslant 25$$
$$y_j (j = 1,2,\ldots,9) \geqslant 0$$

หาคำตอบด้วยวิธีการซิมเพลกซ์

		y_1	y_2	y_3	y_4	y_8	
Z	$1100 - 100M$	150	$-M-100$	$-M-150$	-180	M	ค่าของ θ_i
y_5	330	3	2	2	4	0	165
y_6	350	1	1	2	3	0	175
y_7	300	2	1	2	1	0	150
y_9	100	0	1	1	0	-1	100
	u_j	∞	∞	∞	25	∞	

2

		y_1	y_2	y_9	y_4	y_8	
Z	26100	−150	50	M + 150	−180	−150	ค่าของ θ_i
y_5	130	3	0	−2	4	2	32.5
y_6	150	1	−1	−2	3	2	50
y_7	100	2	−1	−2	1	2	100
y_3	100	0	1	1	0	−1	—
	u_j	∞	∞	∞	25	∞	

3

		y_1	y_2	y_9	$\bar{y}_4$	y_8	ค่าของ θ_i	
Z	30600	−150	50	M + 150	180	−150	y_1	y_8
y_5	30	3	0	−2	−4	2	10	15
y_6	75	1	−1	−2	−3	2	75	75/2
y_7	75	2	−1	−2	−1	2	75/2	75/2
y_3	100	0	1	1	0	−1	—	—
	u_j	∞	∞	∞	25			

4

		y_1	y_2	y_9	$\bar{y}_4$	y_5	
Z	32850	75	50	M	−120	75	ค่าของ θ_i
y_8	15	$\frac{3}{2}$	0	−1	−2	$\frac{1}{2}$	—
y_6	45	−2	−1	0	1	−1	45
y_7	45	−1	−1	0	3	−1	15
y_3	115	$\frac{3}{2}$	1	0	−2	$\frac{1}{2}$	—
	u_j	∞	∞	∞	25	∞	

			y_1	Y2	y_9	y_7	y_5
	Z	34650	35	10	M	40	35
	YX	45	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{3}$	- 1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$
5	y_6	30	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
	$\bar{y}_4$	15	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
	y_3	145	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$-- \frac{1}{6}$

ตารางที่ 5 เป็นตารางที่ให้คำตอบดีที่สุด เราได้

$y_1 = 0 = x_1 - 50$ หรือ $x_1 = 50, y_2 = 0 = x_2, y_3 = 145 = x_3, \bar{y}_4 = 15 = 25 - y_4$ หรือ $y_4 = 10 = x_4 - 20$ ดังนั้น $x_4 = 30$

สรุปว่า ในสัปดาห์นี้ โรงงานผลิตสินค้า ก 50 หน่วย ผลิตสินค้า ค 145 หน่วย และผลิตสินค้า ง 30 หน่วย จะได้กำไรสูงสุด 34,650 บาท

2.7 การวิเคราะห์ความไว (Sensitivity Analysis)

การวิเคราะห์ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้น เท่าที่กล่าวมาแล้ว เราถือว่า เรารู้รายละเอียดต่าง ๆ ของข้อมูลดีอยู่แล้ว เช่น รายละเอียดเกี่ยวกับ ส.ป.ส. c_j, a_{ij} หรือปริมาณ b_i แต่ในทางปฏิบัติ ค่าดังกล่าวเหล่านี้ มักจะได้มาจากการประมาณค่าที่ดีที่สุด หรืออาจเป็นค่าจริง แต่มีการเปลี่ยนแปลงในค่าตัวเลขอยู่ตลอดเวลา ทั้งนี้ ขึ้นอยู่กับนโยบาย หรือกลไกการตลาด หรือสภาพทางเศรษฐกิจ เป็นต้น จึงจำเป็นต้องพิจารณาต่อไปว่า คำตอบที่ดีที่สุดที่ได้จากการวิเคราะห์ในตอนแรกจะยังคงเป็นคำตอบที่เหมาะสมหรือไม่ ค่าของ c_j และ b_i สามารถเปลี่ยนแปรในระยะกว้างแค่ไหน จึงจะทำให้การตัดสินใจในครั้งแรกยังคงเป็นการตัดสินใจที่ดีที่สุด อาจจะเปลี่ยนเฉพาะค่าของฟังก์ชันเป้าหมาย หรือค่าของตัวแปรฐานที่ดีที่สุด และค่าของฟังก์ชันเป้าหมายระยะกว้างของค่าเหล่านี้จะให้ความกระจ่างในผลของความคลาดเคลื่อน จากการประมาณค่าจริง

กระบวนการที่จะใช้ในการพิจารณาระยะกว้างนี้ เรียกว่าการวิเคราะห์ความไว การวิเคราะห์นี้จะนำไปใช้เพื่อตรวจสอบการเปลี่ยนแปลงปริมาณทรัพยากร b_i หรือการ

เปลี่ยนแปลงกำไรต่อหน่วย หรือค่าใช้จ่ายต่อหน่วย c_j ซึ่งเป็นการเปลี่ยนแปลงที่พบบ่อยที่สุด สำหรับปริมาณทรัพยากรที่ใช้ในการทำกิจกรรมหนึ่งหน่วย a_{ij} มีการเปลี่ยนแปลงน้อยมาก เราจึงศึกษาเฉพาะการเปลี่ยนแปลงในค่า b_i และ c_j

2.7.1 การเปลี่ยนแปลงในปริมาณทรัพยากร b_i

ถ้าเราพิจารณาแผนการผลิตที่ดีที่สุดของปัญหาการผลิตสินค้า A และสินค้า B จากตัวอย่างที่ 2.5 (กราฟ) และตัวอย่างที่ 2.8 (ซิมเพลกซ์) ไม่ว่าจะพิจารณาจากกราฟหรือตารางสุดท้ายของตารางซิมเพลกซ์ นอกจากจะบอกให้รู้ถึงคำตอบที่ดีที่สุดแล้ว ยังสามารถบอกผลที่ได้เมื่อเกิดการเปลี่ยนแปลงปริมาณของทรัพยากรที่ใช้ ตัวอย่างเช่น

		x_3	x_4
Z	12,720	$\frac{39}{2}$	18
x_2	36	$\frac{9}{40}$	$-\frac{1}{10}$
x_1	8	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
x_5	84	$\frac{51}{40}$	$-\frac{19}{10}$

จากตารางสุดท้าย (ตารางที่ 3) ในตัวอย่างที่ 2.8 คอลัมน์ของ x_3 จะบอกให้เรารู้ว่าหากมีวัตถุดิบเพิ่มเข้ามา 1 กิโลกรัม เราจะได้สินค้า B (x_2) เพิ่มขึ้น $\frac{9}{40}$ หน่วย แต่จะต้องลดสินค้า A(x_1) $\frac{1}{5}$ หน่วย และเครื่องจักรจะมีเวลาเหลือเพิ่มขึ้น $\frac{51}{40}$ ชั่วโมง เป็นผลให้มีกำไรเพิ่มขึ้น $\frac{39}{2}$ บาท ในทางกลับกัน ถ้าวัตถุดิบเกิดขาดแคลน ผลที่ได้จะตรงกันข้าม กล่าวคือ หากจำนวนวัตถุดิบลดลง 1 กิโลกรัม x_2 จะลดลง $\frac{9}{40}$ หน่วย x_1 จะเพิ่มขึ้น $\frac{1}{5}$ หน่วย เวลาของเครื่องจักรจะเหลือน้อยลง $\frac{51}{40}$ ชั่วโมง เป็นผลให้มีกำไรลดลง $\frac{39}{2}$ บาท

แสดงให้เห็นว่า คอลัมน์ของ x_3 จะบอกถึงการใช้วัตถุดิบที่มีประสิทธิภาพมากที่สุด จะเป็นตัวชี้ให้ทราบถึงผลที่เกิดขึ้นจากการเปลี่ยนแปลงปริมาณวัตถุดิบ นั่นคือบอกช่วงกว้างของปริมาณวัตถุดิบได้ว่า เพิ่มขึ้นได้สูงสุดแค่ไหน หรือลดลงได้ต่ำสุดแค่ไหน จึงจะทำให้การตัดสินใจคงเดิม เปลี่ยนแปลงเฉพาะค่าของมันเท่านั้น

ถ้าปริมาณของวัตถุดิบเปลี่ยนไป y กิโลกรัม ผลที่ตามมาก็คือ

	คำตอบเดิม		ผลแสดง		คำตอบใหม่
Z	12,720		$\frac{39}{2}$		$12720+\frac{39}{2}y$
x_2	36		$\frac{9}{40}$		$36+\frac{9}{40}y$
x_1	8	$+y$	$\frac{1}{5}$	$=$	$8-\frac{1}{5}y$
x_5	84		$\frac{51}{40}$		$84+\frac{51}{40}y$

ด้วยเหตุที่ $x_j \geq 0$ ดังนั้น

$36+\frac{9}{40}y \geq 0$ นั่นคือ $y \geq -160$

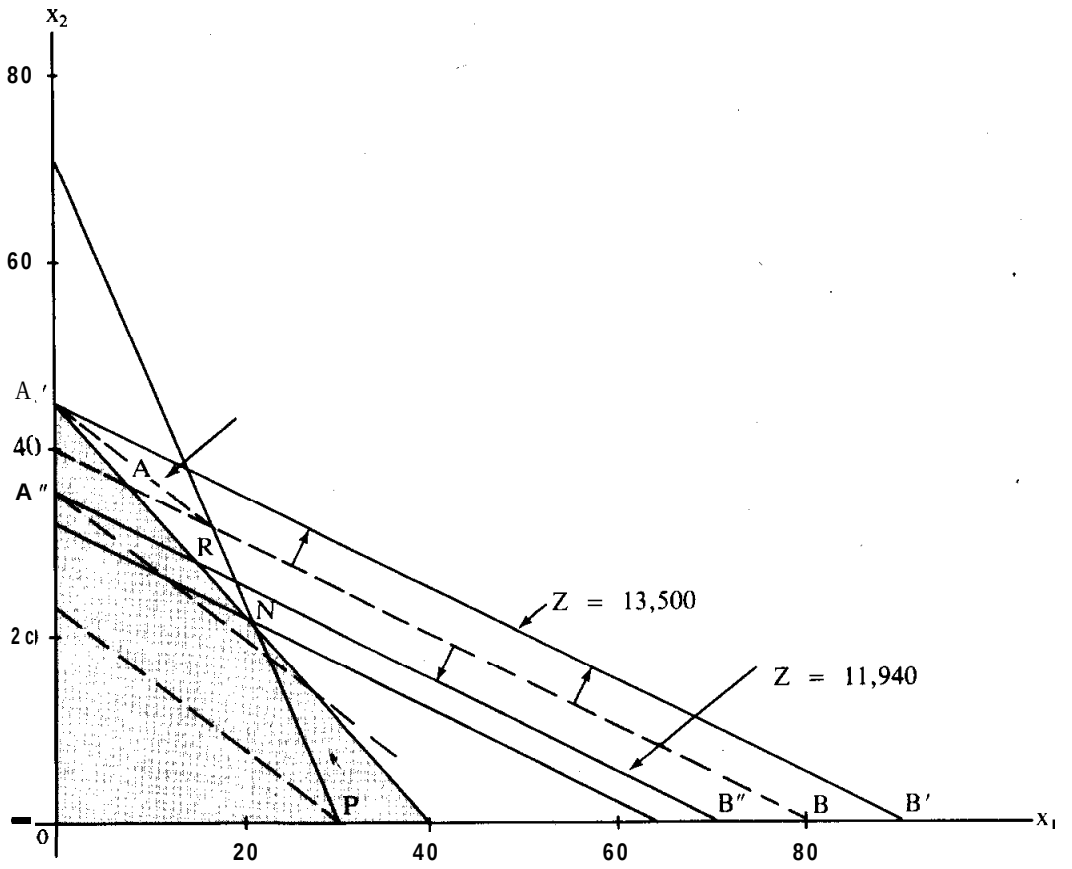
$8-\frac{1}{5}y \geq 0$ นั่นคือ $y \leq 40$

$84+\frac{51}{40}y \geq 0$ นั่นคือ $y \geq -65\frac{15}{17}$

แสดงให้เห็นว่า ถ้าเราต้องการให้มีการตัดสินใจคงเดิม ปริมาณวัตถุดิบจะเพิ่มขึ้นได้สูงสุด 40 กิโลกรัม และลดลงได้ต่ำสุด $65\frac{15}{17}$ กิโลกรัม นั่นคือจะต้องมีปริมาณวัตถุดิบอยู่ระหว่าง $254\frac{2}{17}$ กิโลกรัม ถึง 360 กิโลกรัม

ถ้าเรามีวัตถุดิบมาใช้ได้ 360 กิโลกรัม เราจะผลิตได้สินค้า B $= 36+\frac{9}{40}(40) = 45$ หน่วย สินค้า A $= 8-\frac{1}{5}(40) = 0$ เครื่องจักรมีเวลาเหลือ $84+\frac{51}{40}(40) = 135$ ชั่วโมง ได้กำไรทั้งหมด $= 12,720+\frac{39}{2}(40) = 13,500$ บาท

แต่ถ้าเรามีวัตถุดิบเพียง $254\frac{2}{17}$ กิโลกรัม จะพบว่าแผนการผลิตยังคงเดิม เปลี่ยนแปลงแต่จำนวน และผลกำไรที่ได้ และในกรณีนี้จะพบว่า เราใช้เครื่องจักรเต็มที่ตามความสามารถ แต่ปริมาณการผลิตที่ได้ไม่เป็นจริง เพราะจะได้สินค้าบางชิ้นที่ไม่สมบูรณ์ (ค่าเป็นเลขทศนิยมหรือเศษส่วน) ดังนั้น ถ้าเราจะคงแผนเดิมไว้ และให้ได้ปริมาณสินค้าครบถ้วน ปริมาณของวัตถุดิบจะลดลงได้เต็มที่ 40 กิโลกรัม นั่นคือมีปริมาณวัตถุให้ใช้ได้ $320-40 = 280$ กิโลกรัม แล้วจะผลิตได้สินค้า A $= 8+\frac{1}{5}(40) = 16$ หน่วย สินค้า B $= 36-\frac{9}{40}(40) = 27$ หน่วย เครื่องจักรจะมีเวลาเหลือ $= 84-\frac{51}{40}(40) = 33$ ชั่วโมง แสดงให้เห็นได้ด้วยกราฟดังนี้



จากกราฟจะเห็นว่า เมื่อปริมาณวัตถุดิบเพิ่มขึ้น จาก 320 เป็น 360 กิโลกรัม เส้นกราฟจะเลื่อนจาก AB ไปอยู่ที่ A′B′ จุดการผลิตที่ดีที่สุด เปลี่ยนจากจุด A(8, 36) ไปเป็นจุด A′(0, 45) ถ้าปริมาณวัตถุดิบลดลงเหลือ 280 กิโลกรัม เส้นกราฟจะเลื่อนลงมาที่ A′B′ จุดการผลิตที่ดีที่สุดจะอยู่ที่จุด R(16, 27) ถ้าปริมาณวัตถุดิบลดลงเต็มที่ เหลือเพียง $254\frac{2}{17}$ กิโลกรัม แผนการผลิตจะอยู่ที่จุด N ซึ่งเป็นจุดการผลิตที่จะใช้ทรัพยากรทั้ง 3 ชนิดอย่างเต็มที่

ให้นักศึกษาวิเคราะห์ว่า แผนการผลิตจะเปลี่ยนแปลงอย่างไร ถ้ามีแรงงานให้ใช้ 400 ชั่วโมง ถ้ามีแรงงานเพียง 340 ชั่วโมง และปริมาณแรงงานจะมีช่วงกว้างขนาดไหน จึงจะทำให้แผนการผลิตคงเดิม

สรุปได้ว่า การเปลี่ยนแปลงค่า b_i ไม่มีผลกระทบต่อค่า $c_j - s_j$ หรือ x_{0j} ของตารางสุดท้าย และการเปลี่ยนแปลงปริมาณทรัพยากรที่ถูกนำไปใช้เต็มที่ ในที่นี้คือแรงงานและวัตถุดิบ จะมีผลกระทบต่อการใช้ทรัพยากรที่ไม่ได้ใช้เต็มที่ด้วย ความรู้อันนี้จะเป็นประโยชน์ต่อผู้บริหารในการวางนโยบาย

2.7.2 การเปลี่ยนแปลงค่าของกำไรต่อหน่วยหรือต้นทุนต่อหน่วย (c_j)

การพิจารณาผลที่เกิดจากการเปลี่ยนค่า c_j อาจทำได้เช่นเดียวกับการเปลี่ยนค่า b_i โดยใช้ปัญหาคู่ ซึ่งจะทำให้ค่า c_j ของปัญหาเดิม ทำหน้าที่เป็นปริมาณจำกัดของปัญหาคู่ หรือพิจารณาโดยความหมายของอัตราการเปลี่ยนแปลงต่อหน่วย ($c_j - s_j$ หรือ x_{0j}) ของตัวแปรในตารางสุดท้าย นั่นคือ ตราบเท่าที่ $c_j - s_j \leqslant 0$ หรือ $x_{0j} \geqslant 0$ ทุก j คำตอบที่ได้ยังคงเป็นคำตอบที่ดีที่สุด (ค่า $Z_{สูงสุด}$) นั่นคือ ถ้าค่า c_j ของตัวแปรใดเปลี่ยนแปลง แต่ไม่ทำให้ $c_j - s_j > 0$ แสดงว่าไม่มีการเปลี่ยนแปลงค่าใด ๆ จากผลการตัดสินใจเดิม ยกเว้นค่า Z เท่านั้น ให้เราดูจากตารางสุดท้ายของตัวอย่างที่ 2.8 ว่า ถ้ากำไรของสินค้า A เปลี่ยนไป การเปลี่ยนแปลงค่าจะอยู่ในช่วงใด จึงจะไม่ทำให้แผนการผลิตเดิมเปลี่ยนแปลง

เราให้กำไรต่อหน่วยของสินค้า A เปลี่ยนเป็น $240 + \theta$ บาท คำนวณค่า Z, s_j และ $c_j - s_j$ จะได้

$$Z = 12720 + 8\theta \begin{vmatrix} s_j \\ c_j - s_j \end{vmatrix} \begin{matrix} 240+\theta & 300 & \frac{39}{2} - \frac{\theta}{5} & 18 + \frac{\theta}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{39}{2} + \frac{\theta}{5} & -18 - \frac{\theta}{5} & 0 \end{matrix}$$

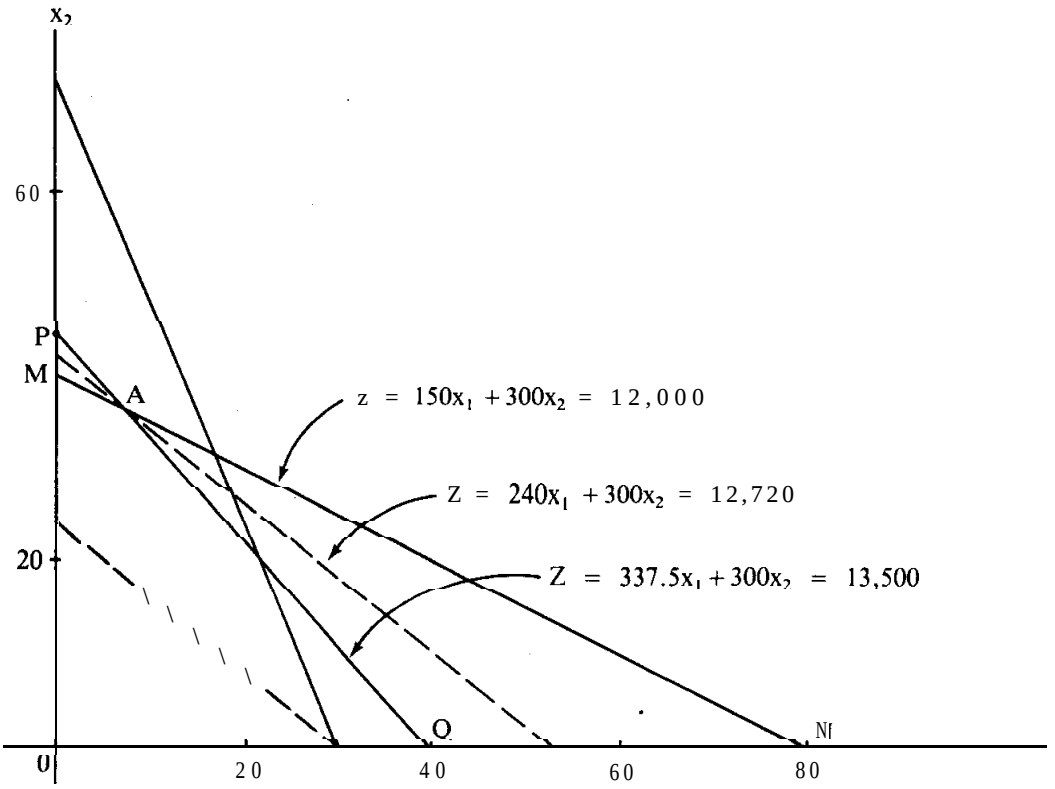
แผนการผลิตจะคงเดิม ถ้า $c_j - s_j \leqslant 0$ นั่นคือ

$-\frac{39}{2} + \frac{\theta}{5} \leqslant 0$ จะได้ $\theta \leqslant 97.5$

$-18 - \frac{\theta}{5} \leqslant 0$ จะได้ $\theta \geqslant -90$

แสดงว่า ถ้ากำไรต่อหน่วยของสินค้า A อยู่ในช่วง 150 ถึง 337.5 คำตอบที่ดีที่สุดจะคงค่าเดิม เปลี่ยนเฉพาะค่า Z เท่านั้น

แสดงให้เห็นได้ด้วยกราฟดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่า เมื่อกำไรของสินค้า A ลดลงต่ำสุด 150 บาทต่อหน่วย เส้นฟังก์ชันเป้าหมายจะขนานกับเส้น MN (วัตถุดิบ) และเมื่อกำไรเพิ่มขึ้นสูงสุดเป็น 337.5 บาทต่อหน่วย เส้นของฟังก์ชันเป้าหมายจะขนานกับเส้น PQ (แรงงาน) ไม่ว่าจะเป็นกรณีใด แผนการผลิตที่ดีที่สุดยังคงอยู่ที่จุด A

แสดงให้เห็นว่า ตราบเท่าที่กำไรต่อหน่วยของสินค้า A อยู่ในช่วง 150 – 337.5 บาท บริเวณคำตอบจะไม่เปลี่ยนแปลง และจุดการผลิตที่ดีที่สุดยังคงอยู่ที่จุดเดิม

ถ้ากำไรของสินค้า A ต่ำกว่า 150 บาทต่อหน่วย หรือสูงกว่า 337.5 บาทต่อหน่วย แผนการผลิตที่ได้ จะไม่เป็นแผนการผลิตที่ดีที่สุด

ให้นักศึกษาวิเคราะห์ดูว่า กำไรต่อหน่วยของสินค้า B จะมีช่วงกว้างขนาดไหน จึงจะไม่มีผลกระทบต่อแผนการตัดสินใจเดิม

สำหรับการหาคำตอบด้วยวิธีการของปัญหาควบคู่ เราต้องพิจารณาให้ดี ถ้ามีการเปลี่ยนแปลงในปริมาณทรัพยากร b_i ในตารางสุดท้ายของปัญหาคู่ ต้องพิจารณาจากค่าของ $b_i - s_i$ หรือ w_{0i} และถ้ามีการเปลี่ยนแปลงในค่า c_j ในปัญหาคู่ ต้องพิจารณาจากคำตอบ w_{j0} ตัวอย่างเช่น

จากปัญหาการเลือกใช้ปุ๋ย ในตัวอย่างที่ 2.11 และ 2.13 ถ้าความต้องการแร่ธาตุ มีปริมาณต่ำสุดเปลี่ยนแปรไป ปริมาณของแร่ธาตุแต่ละประเภทควรจะเปลี่ยนแปรได้แค่ไหน โดยไม่ทำให้ชาวสวนเปลี่ยนชนิดของปุ๋ยที่จะซื้อ

เมื่อเราพิจารณาจากปัญหาคู่ เราต้องดูจาก ส.ป.ส. ของตัวแปรคู่ในฟังก์ชั่นเป้าหมาย Z_w จากตารางสุดท้าย (ตารางที่ 3 ของตัวอย่างที่ 2.13) จะพบว่า

ถ้าปริมาณต่ำสุดของไนเตรทเปลี่ยนไป $720+y$ เราจะได้

s_i	$720+y$	$576+\frac{7}{5}y$	360	$24-\frac{1}{15}y$	0	$48+\frac{1}{5}y$
b_i-s_i	0	$-126-\frac{7}{5}y$	0	$-24+\frac{1}{15}y$	0	$-48-\frac{1}{5}y$

ผลที่ได้จะยังคงเป็นคำตอบที่ดีที่สุด ถ้า $b_i - s_i \leqslant 0$

นั่นคือ $-126-\frac{7}{5}y \leqslant 0$ จะได้ $y \geqslant -90$

$-24+\frac{1}{15}y \leqslant 0$ จะได้ $y \leqslant 360$

$-48-\frac{1}{5}y \leqslant 0$ จะได้ $y \geqslant -240$

หากความต้องการต่ำสุดของแร่ธาตุไนเตรทเปลี่ยนไป ชาวสวนจะยังคงเลือกซื้อปุ๋ยชนิดเดิม ถ้าปริมาณไนเตรทอยู่ในช่วง 630 ถึง 1080

ให้นักศึกษาวิเคราะห์ดูว่า ความต้องการต่ำสุดของแร่ธาตุพวกฟอสเฟต และพวกโปแตซ จะอยู่ในช่วงกว้างขนาดไหน จึงจะทำให้ชาวสวนยังคงใช้ปุ๋ยชนิดเดิม

ถ้าราคาของปุ๋ยเปลี่ยนแปลง ควรจะเปลี่ยนแปลงได้ในช่วงกว้างแค่ไหน โดยที่ชาวสวนยังคงเลือกใช้ปุ๋ยชนิดเดิม

จากการวิเคราะห์ความไว เราสรุปได้ว่า ถ้าค่าของ b_i เปลี่ยนไปมันจะไม่มีผลกระทบต่ออัตราการเปลี่ยนแปลง $c_j - s_j$ ในตารางสุดท้าย มันจะมีผลกระทบเฉพาะความเป็นไปได้ของคำตอบที่ดีที่สุด ส่วนการเปลี่ยนแปลงในค่า c_j จะไม่มีผลต่อบริเวณคำตอบที่เป็นไปได้ แต่จะมีผลต่อคำตอบที่ดีที่สุดเดิมว่าจะยังคงสภาพของคำตอบที่ดีที่สุดหรือไม่

กรณีของการเปลี่ยนค่า a_{ij} หรือ การเพิ่มตัวแปร หรือการเพิ่มข้อจำกัด ไม่ได้กล่าวถึงในที่นี้ นักศึกษาสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากหนังสืออ้างอิงท้ายเล่ม ในเรื่อง postoptimality analysis

แบบฝึกหัดที่ 2

1. ร้านทำเข็มขัดหนัง ทำเข็มขัดมาจำหน่าย 2 แบบ โดยกะว่า ในแต่ละวันจะทำเข็มขัดแบบ A ไม่เกิน 3 เท่าของการทำแบบ B การทำเข็มขัดแบบ A แต่ละเส้น จะใช้เวลา 2 นาที ใช้หนัง 100 ตารางนิ้ว การทำเข็มขัดแบบ B ใช้เวลา 3 นาที ใช้หนัง 60 ตารางนิ้ว เข็มขัดแบบ A จะขายได้กำไรเส้นละ 12 บาท ส่วนแบบ B จะขายได้กำไรเส้นละ 10 บาท ถ้าในแต่ละวันร้านทำเข็มขัดมีแรงงาน 7 ชั่วโมง และมีหนังใช้ทำเข็มขัด 12,000 ตารางนิ้ว เจ้าของร้านควรวางแผนการผลิตอย่างไร จึงจะดีที่สุด

เริ่มต้นด้วยการเขียนตัวแบบทางคณิตศาสตร์ แล้วจึงหาคำตอบที่ดีที่สุดด้วยวิธีกราฟ

เจ้าของร้านวางแผนการผลิตเข็มขัดแบบ A = x_1 เส้น

ผลิตเข็มขัดแบบ B = x_2 เส้น

หาค่าสูงสุด $Z = 12x_1 + 10x_2$

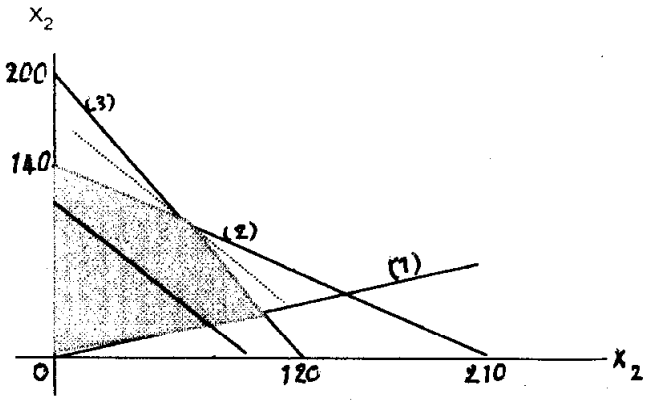
โดยมีข้อจำกัด

$$x_1 - 3x_2 \leq 0$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 420$$

$$100x_1 + 60x_2 \leq 12000$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$



จากกราฟ จะเห็นว่า เส้น Z สัมผัสบริเวณคำตอบ OABC ที่จุด B(60 , 100) สรุปได้ว่า ในแต่ละวันเจ้าของร้านควรจะผลิตเข็มขัดแบบ A 60 เส้น และผลิตเข็มขัดแบบ B 100 เส้น จะได้กำไรมากที่สุด = 12(60) + 10(100) = 1,720 บาท

ข้อสังเกต การหาคำตอบที่จุด B ซึ่งเป็นจุดสัมผัสของข้อจำกัดที่ 2 และ 3 สามารถหาได้จากการแก้สมการข้อจำกัดที่ 2 และ 3 ดังนี้

$$2x_1 + 3x_2 = 420 \qquad (2)$$

$$100x_1 + 60x_2 = 12000 \qquad (3)$$

เอาสมการ (3) หารด้วย20 แล้วลบด้วย (2) จะได้

$$3x_1 = 180 \text{ หรือ } x_1 = 180/3 = 60$$

แทนค่า $x_1 = 60$ ใน (2) จะได้

$$120 + 3x_2 = 420 \text{ หรือ } x_2 = (420 - 120)/3 = 100$$

2. โรงงานผลิตผลิตภัณฑ์ 2 แบบ แยกตามสายการผลิต สายการผลิตแรกสามารถผลิตผลิตภัณฑ์แบบแรกได้เต็มที่ 60 หน่วย ส่วนสายการผลิตที่สอง จะผลิตผลิตภัณฑ์แบบที่ 2 ได้เต็มที่ 70 หน่วย การผลิตผลิตภัณฑ์แต่ละแบบจะใช้ชิ้นส่วนประกอบ 2 ชนิด จำนวนชิ้นส่วนที่ใช้ในการผลิตผลิตภัณฑ์ต่อหน่วย และกำไร(บาทต่อหน่วย)จากการจำหน่ายผลิตภัณฑ์ มีดังนี้

ผลิตภัณฑ์	ชิ้นส่วน ก	ชิ้นส่วน ข	กำไร
แบบแรก	10	10	150
แบบที่สอง	8	15	100

ถ้าโรงงานมีชิ้นส่วน ก 800 ชิ้น ชิ้นส่วน ข 1,200 ชิ้น โรงงานควรผลิตผลิตภัณฑ์แต่ละแบบอย่างไร จึงจะดีที่สุด

เริ่มต้นด้วยการกำหนดตัวแปรตัดสินใจและเขียนตัวแบบจำลอง แล้วหาคำตอบด้วยวิธีกราฟ

โรงงานผลิตผลิตภัณฑ์แบบแรก = x_1 หน่วย

ผลิตผลิตภัณฑ์แบบที่สอง = x_2 หน่วย

หาค่าสูงสุด $Z = 150x_1 + 100x_2$

โดยมีข้อจำกัด

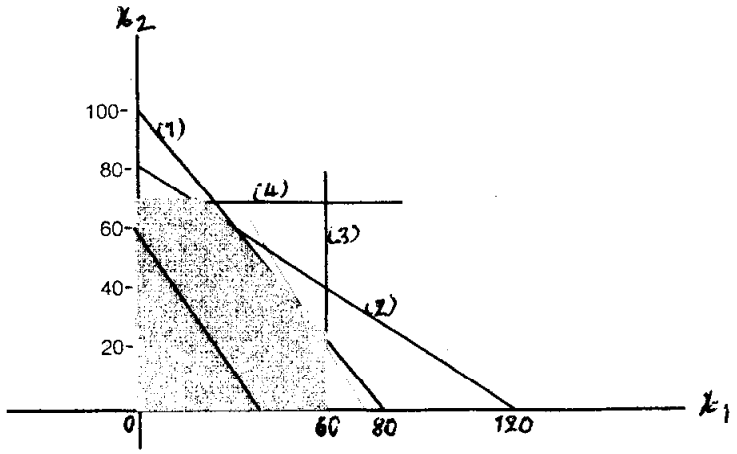
$$10x_1 + 8x_2 \leq 800$$

$$10x_1 + 15x_2 \leq 1200$$

$$x_1 \leq 60$$

$$x_2 \leq 70$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$



จากกราฟ จะเห็นว่า เส้นฟังก์ชันเป้าหมาย Z (เส้นที่มีความชัน $-\frac{150}{100}$) สัมผัสบริเวณคำตอบที่จุด (60 , 25) สรุปได้ว่า

โรงงานควรผลิตผลิตภัณฑ์แบบแรก = 60 หน่วย

ผลิตผลิตภัณฑ์แบบที่สอง = 25 หน่วย

จะได้กำไรมากที่สุด = 150(60) + 100(25) = 11,500 บาท

3. นายเกษมมีเงิน 2,000,000 บาท เขากำลังพิจารณาการลงทุนในโครงการ 2 ประเภท การลงทุนในโครงการแรกคาดว่าจะให้ผลตอบแทน 70 % ต่อปี ส่วนการลงทุนในโครงการที่สองคาดว่าจะให้ผลตอบแทนสองเท่าของการลงทุนทุก ๆสองปี ถ้านายเกษมต้องการลงทุน 3 ปี เขาควรลงทุนในโครงการทั้งสองอย่างไร จึงจะดีที่สุด

3.1 จงเขียนตัวแบบทางคณิตศาสตร์

3.2 ถ้าในปีที่ 1 เขาลงทุนในโครงการแรก 2,000,000 บาท แล้วนำเงินทุนพร้อมผลตอบแทนที่ได้ไปลงทุนโครงการที่สอง ในปีที่ 2 ส่วนปีที่ 3 ไม่มีการลงทุนเพิ่มเติม การตัดสินใจนี้จะดีที่สุด หรือไม่ เพราะเหตุใด

3.1 เริ่มต้นด้วยการกำหนดตัวแปรตัดสินใจ แล้วเขียนตัวแบบทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

กำหนดว่า นายเกษมลงทุนโครงการแรกในปีที่ 1 = x_1 ล้านบาท

ลงทุนโครงการแรกในปีที่ 2 = x_2 ล้านบาท

ลงทุนโครงการแรกในปีที่ 3 = x_3 ล้านบาท

ลงทุนโครงการที่สองในปีที่ 1 = x_4 ล้านบาท

ลงทุนโครงการที่สองในปีที่ 2 = x_5 ล้านบาท

ก่อนการเขียนตัวแบบทางคณิตศาสตร์ ให้เรามาวิเคราะห์การลงทุนและผลตอบแทนที่ได้ในแต่ละปีก่อน ดังนี้

ในปีที่ 1 เราลงทุนในโครงการแรก x_1 และโครงการที่สอง x_4 ดังนั้น

$$x_1 + x_4 \leq 2$$

ในปีที่ 2 จะได้ผลตอบแทนจากการลงทุนในโครงการแรก $0.7x_1$ ล้านบาท ส่วนโครงการที่สองยังไม่ได้รับผลตอบแทนใด ๆ จึงต้องเก็บไว้ก่อน แล้วนำเงินลงทุนพร้อมผลตอบแทนในโครงการแรก ไปลงทุนในปีที่ 2 ต่อไป นั่นคือ $x_2 + x_5 \leq 1.7x_1$ หรือ

$$-1.7x_1 + x_2 + x_5 \leq 0$$

ในปีที่ 3 จะได้ผลตอบแทนจากการลงทุนในโครงการที่สอง $0.7x_2$ ล้านบาท และได้ผลตอบแทนจากการลงทุนโครงการที่สองในปีแรก $2x_4$ ล้านบาท นำเงินลงทุนพร้อมผลตอบแทนที่ได้จากโครงการทั้งสองลงทุนในโครงการแรก เนื่องจาก การลงทุนในโครงการที่สองจะได้ผลตอบแทนเมื่อลงทุนครบ 2 ปี และโดยที่การลงทุนกำหนดเพียง 3 ปี ดังนั้น ในปีนี้จึงไม่มีการลงทุนในโครงการที่สอง นั่นคือ

$$x_3 \leq 1.7x_2 + 3x_4 \quad \text{หรือ} \quad -1.7x_2 + x_3 - 3x_4 \leq 0$$

สิ้นปีที่ 3 จะได้ผลตอบแทนพร้อมเงินลงทุนจากโครงการที่สองของปีที่ 2 $3x_5$ ล้านบาท และจากโครงการแรกของปีที่ 3 $1.7x_3$ ล้านบาท รวมเป็นเงินที่ได้ทั้งหมด $3x_5 + 1.7x_3$ ล้านบาท

สรุปว่า จะได้ตัวแบบทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

หาค่าสูงสุด $Z = 1.7x_3 + 3x_5$

โดยมีข้อจำกัด

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 &\leq 2 \\ -1.7x_1 + x_2 + x_5 &\leq 0 \\ -1.7x_2 + x_3 - 3x_4 &\leq 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

3.2 ให้ตรวจสอบว่า คำตอบที่มี $x_1 = 2$, $x_3 = 0$, $x_5 = 3.4$ เป็นคำตอบที่ดีที่สุดหรือไม่ การตรวจสอบทำได้ โดยการเปลี่ยนอสมการข้อจำกัดทั้ง 3 ให้เป็นสมการ โดยใช้ตัวแปร slack x_6, x_7 และ x_8 ตามลำดับ สำหรับฟังก์ชันเป้าหมาย Z อาจจัดในรูปสมการ และตรวจสอบพร้อมกับคำตอบที่ได้ หรือในรูปฟังก์ชันแล้วแทนค่าคำตอบที่ได้ในขั้นตอนสุดท้าย เพื่อดูว่า เป็นคำตอบดีที่สุด หรือไม่ ในที่นี้ เราจะพิจารณา Z ในรูปสมการ R_0 การพิจารณากระทำตามขั้นตอน ดังนี้

จากสมการ z (R_0) และสมการข้อจำกัดทั้งสาม(R_1,R_2,R_3) นำมาสรุปผลในตาราง ดังนี้

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	คำตอบ
R_0	1	0	0	-1.7	0	-3	0	0	0	0
R_1 :	0	1	0	0	1	0	1	0	0	2
R_2 :	0	-1.7	1	0	0	1	0	1	0	0
R_3 :	0	0	-1.7	1	-3	0	0	0	1	0

ปรับสมการ R_0 เป็น $R_0 + 1.7R_3$ และสมการ R_2 เป็น $R_2 + 1.7R_1$ นอกนั้นคงเดิม จะได้ผลสรุป ดังนี้

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	คำตอบ
R_0	1	0	-2.89	0	-5.1	-3	0	0	1.7	0
R_1 :	0	1	0	0	1	0	1	0	0	2
R_2 :	0	0	1	0	1.7	1	1.7	1	0	3.4
R_3 :	0	0	-1.7	1	-3	0	0	0	1	0

ปรับสมการ R_0 เป็น $R_0 + 3R_2$ นอกนั้นคงเดิม จะได้ผลสรุป ดังนี้

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	คำตอบ
R_0	1	0	0.11	0	0	0	5.1	3	1.7	10.2
R_1 :	0	1	0	0	1	0	1	0	0	2
R_2 :	0	0	1	0	1.7	1	1.7	1	0	3.4
R_3 :	0	0	-1.7	1	-3	0	0	0	1	0

พิจารณาจากสมการ Z(R_0) จะเห็นว่า เป็นสมการที่ให้ค่า Z สูงสุดแล้ว ดังนั้นตารางนี้เป็นตารางที่ให้คำตอบดีที่สุดแล้ว สรุปได้ว่า

การลงทุนปีที่ 1 ในโครงการแรก 2,000,000 บาท แล้วนำเงินทุนพร้อมผลตอบแทนที่ได้ไปลงทุนโครงการที่สอง ในปีที่ 2 ส่วนปีที่ 3 ไม่มีการลงทุนเพิ่มเติม นั้น เป็นการตัดสินใจที่ดีที่สุดแล้ว

4. ในปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นที่มีเป้าหมาย หาค่าสูงสุด ของ ฟังก์ชันของตัวแปรตัดสินใจ x_1 , x_2 และ x_3 โดยมีข้อจำกัดอยู่ในรูปอสมการ $\leq$ ถ้า x_4 , x_5 และ x_6 เป็นตัวแปร slack ของปัญหานี้ และตารางสุดท้ายของโปรแกรมนี้ คือ

x_1	800	1	4	0	2	-1	0
x_3	200	0	-1	1	-1	1	0
x_6	200	0	-7	0	-4	1.5	1
$Z = ?$	$c_j - s_j$	0	-25	0	-10	-15	0

จงหาค่า $Z_{สูงสุด}$

ในที่นี้ เรามี x_4 , x_5 และ x_6 เป็นตัวแปร slack ดังนั้น c_4 , c_5 และ c_6 ต่างมีค่าเป็น 0

หาค่า c_1 , c_2 และ c_3 จากการแก้สมการ

$$c_2 - s_2 = c_2 - [4c_1 - c_3 - 7(0)] = -25 \qquad (1)$$

$$c_4 - s_4 = 0 - [2c_1 - c_3 - 4(0)] = -10 \qquad (2)$$

$$c_5 - s_5 = 0 - [c_1 + c_3 + 1.5(0)] = -15 \qquad (3)$$

(2) + (3) $c_1 = 25$ แทนใน (3) จะได้ $c_3 = 15 + 25 = 40$

แทน c_1 , c_3 ใน (1) จะได้ $c_2 = 4(25) - 40 - 25 = 35$

สรุปว่า เราจะได้ค่าของ $Z_{สูงสุด} = 25(800) + 40(200) + 0(200) = 28,000$

5. หาค่าสูงสุด $Z = 130x_1 + 100x_2 + 140x_3$

โดยมีข้อจำกัด

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 400$$

$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 700$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 300$$

$$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$$

5.1 จงเขียนตารางซิมเพลกซ์ที่ 1

5.2 ถ้าตารางซิมเพลกซ์ที่ 3 ของปัญหานี้ เมื่อ x_4 , x_5 และ x_6 เป็นตัวแปร slack ของข้อจำกัด 1 , 2 และ 3 ตามลำดับ คือ

		x_1	x_4	x_5
Z			60	10
x_3		$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$
x_2		$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_6		$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$

5.2.1 จงหาคำตอบดีที่สุด

5.2.2 ถ้าค่าของ b_1 เปลี่ยนเป็น 340 คำตอบที่ดีที่สุดจะเปลี่ยนแปลงหรือไม่ อย่างไร

ในการเขียนตารางซิมเพลกซ์ที่ 1 ก่อนอื่นเราต้องปรับอสมการข้อจำกัดให้เป็นสมการ โดยใช้ตัวแปร slack x_4 , x_5 และ x_6 ตามลำดับ เริ่มต้นคำตอบชุดแรก โดยมีตัวแปร slack เป็นตัวแปรฐานชุดแรก เขียนตารางที่ 1 ได้ดังนี้

		x_1	x_2	x_3
Z	0	-130	-100	-140
x_4	400	3	1	2
x_5	700	2	4	2
x_6	300	2	1	1

ในการหาคำตอบของตัวแปรฐาน จากตารางที่กำหนด เราแทนค่าตัวแปรนอกฐานให้เป็น 0 ลงในสมการข้อจำกัด แล้วแก้สมการหาค่าตัวแปรที่เหลือ จะได้

$$x_2 + 2x_3 = 400 \quad (1)$$

$$4x_2 + 2x_3 = 700 \quad (2)$$

$$x_2 + x_3 + x_6 = 300 \quad (3)$$

(2) – (1) จะได้ $3x_2 = 300$ หรือ $x_2 = 100$

แทนค่า x_2 ใน (1) จะได้ $x_3 = (400 - 100)/2 = 150$

แทนค่า x_2, x_3 ใน (3) จะได้ $x_6 = 300 - 100 - 150 = 50$

ต่อไปตรวจสอบว่า เป็นคำตอบที่ดีที่สุดหรือไม่ โดยการพิจารณาค่าของ x_{oj} หรือ $c_j - s_j$, j=1,4,5

หาค่าของ $x_{o1} = s_1 - c_1 = [140(\frac{5}{3}) + 100(-\frac{1}{3}) + 0] - 130 = 70$

พิจารณาค่าของ x_{oj} จะพบว่าเป็นบวกหมด แสดงว่า คำตอบที่ได้เป็นคำตอบดีที่สุด และจะได้

$$Z_{สูงสุด} = 140(150) + 100(100) + 0 = 31,000$$

ถ้า b_1 เปลี่ยนเป็น นั่นคือ ลดลง 340 400 – 340 = 60 คำตอบที่ได้จะเปลี่ยนแปลง ดังนี้

$x_3 = 150 - 60(\frac{2}{3}) = 110$, x,=100-60(+=120 และ $x_6 = 50 - 60(-\frac{1}{3}) = 70$

เป็นคำตอบที่ดีที่สุด ให้ค่า $Z_{สูงสุด} = 31,000 - 60(60) = 27,400$

6. จากปัญหาข้อ 1 แบบฝึกหัดที่ 1 เรามีตัวแบบมาตรฐาน

หาค่าสูงสุด $Z = 27x_1 + 35x_2 + 40x_3 + 28x_4$

โดยมีข้อจำกัด

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 100 \quad \text{(ผลคูณของ 20 ตร.เมตร)}$$

$$3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2.5x_4 + x_6 = 240$$

$$3x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 4.5x_4 + x_7 = 400$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

6.1 จงเขียนตารางซิมเพลกซ์ที่ 1

6.2 จงหาแผนการผลิตที่ดีที่สุด กำหนดตารางซิมเพลกซ์สุดท้าย ดังนี้

		x_2	x_5	x_6	x_7
Z		26	9	4	2
x_3		1.5	1.2	-0.3	-0.1
x_1		-1	-0.2	0.8	-0.4
x_4		1	-1.2	-0.2	0.6

6.3 ถ้าคลังสินค้าของโรงงานมีพื้นที่วางสินค้าได้ 2,400 ตร.เมตร แผนการผลิตที่ดีที่สุด จะเปลี่ยนแปลงหรือไม่ อย่างไร

6.4 ถ้าราคาขายของสินค้า n เปลี่ยนเป็น 40 บาท/หน่วย แผนการผลิตที่ดีที่สุดจะเป็นอย่างไร

การเขียนตารางที่ 1 เริ่มต้นโดยให้ตัวแปร slack x_5, x_6 และ x_7 เป็นตัวแปรฐาน เขียนฟังก์ชัน Z ในรูปสมการ จะได้ผลดังตารางต่อไปนี้

		x_1	x_2	x_3	x_4	
Z	0	-27	-35	-40	-28	θ_1's
x_5	100	1	3	2	1	50
x_6	240	3	4	3	2.5	80
x_7	400	3	9	5	4.5	80

ในการหาคำตอบดีที่สุด เราอ่านผลที่ได้จากตารางสุดท้าย จะเห็นว่า มี x_2, x_5, x_6 และ x_7 เป็นตัวแปรนอกฐาน แทนค่าในสมการมาตรฐาน แก้สมการหาค่าตัวแปรฐาน x_3, x_1 และ x_4 ดังนี้

$$x_1 + 2x_3 + x_4 = 100 \quad (1)$$

$$3x_1 + 3x_3 + 2.5x_4 = 240 \quad (2)$$

$$3x_1 + 5x_3 + 4.5x_4 = 400 \quad (3)$$

(3) – 3(1) จะได้ $-x_3 + 1.5x_4 = 100$ (4)

(3) – (2) จะได้ $2x_3 + 2x_4 = 160$ (5)

2(4) + (5) จะได้ $5x_4 = 360$ หรือ $x_4 = 72$

แทนค่า x_4 ใน (5) จะได้ $2x_3 = 160 - 144$ หรือ $x_3 = 8$

แทนค่า x_3 และ x_4 ใน (1) จะได้ $x_1 = 100 - 16 - 72 = 12$

สรุปว่า คำตอบที่ดีที่สุดของปัญหานี้ คือ

ผลิตสินค้า ก = 12 หน่วย ผลิตสินค้า ค = 8 หน่วย และผลิตสินค้า ง = 72 หน่วย ให้ค่า

กำไรสูงสุด = 27(12) + 40(8) + 28(72) = 2,660 บาท

ถ้าคลังสินค้าของโรงงาน มีพื้นที่ใช้วางสินค้าได้ 2,400 ตร.หน่วย นั่นคือ ค่าของ b_1 เพิ่มขึ้น 20 เท่าของ 20 ตร.หน่วย เป็นผลให้ คำตอบเปลี่ยนแปลงดังนี้

$x_1 = 12 + 20(-0.2) = 8$, $x_3 = 8 + 20(1.2) = 32$, $x_4 = 72 + 20(-1.2) = 48$

นอกนั้นเป็น 0 จะเป็นคำตอบดีที่สุด แสดงว่า แผนการผลิตคงเดิม เปลี่ยนเฉพาะปริมาณผลิต และผลกำไรเป็น

ผลิตสินค้า ก = 12 หน่วย ผลิตสินค้า ค = 8 หน่วย และผลิตสินค้า ง = 72 หน่วย ให้ค่า

กำไรสูงสุด = 2,660 + 20(9) = 2,840

ถ้าราคาขายสินค้า ก เปลี่ยนเป็น 40 บาท/หน่วย นั่นคือ ค่าของ c_1 ลดลง 5 บาท/หน่วย เป็นผลให้ ค่าของ x_{oj} , j=0,2,5,6 เปลี่ยนแปลง ตามลำดับ ดังนี้

$Z = 2,660 - 5(12) = 2,600$, $x_{02} = 26 - 5(-1) = 31$, $x_{05} = 9 - 5(-0.2) = 10$,

$x_{06} = 4 - 5(0.8) = 0$ และ $x_{07} = 2 - 5(-0.4) = 4$

สรุปว่า แผนการผลิตไม่เปลี่ยนแปลง แต่กำไรลดลงเป็น 2,600 บาท

โดยที่ เรามี $x_{06} = 0$ แสดงว่า มีแผนการผลิตที่ดีที่สุดชุดอื่น ที่ให้ผลกำไร 2,600 บาท

พิจารณาจากตารางสุดท้าย จะเห็นว่า เราเลือก x_6 เป็นตัวแปรฐานแทนที่ x_1 จะได้คำตอบดีที่สุดชุดใหม่ ดังนี้

$x_6 = 12/0.8 = 15$, $x_3 = 8 + 0.3(15) = 12.5$ และ $x_4 = 72 + 0.2(15) = 75$

แต่ค่าของ x_3 ไม่เป็นเลขจำนวนเต็ม ดังนั้นปริมาณผลิตสินค้า ค = 12 เป็นผลให้ได้กำไรไม่ถึง 2,600 บาท ดังนั้น คำตอบชุดนี้ไม่เป็นคำตอบดีที่สุด

7. โรงงานวางแผนในการผลิตสินค้า 4 ชนิด โดยใช้เครื่องจักร 2 ประเภท ที่มีความสามารถในการทำงานได้ 500 และ 350 ชั่วโมง ตามลำดับ การผลิตสินค้าแต่ละชนิด ใช้เวลาในการผลิต ดังนี้

	เวลาที่ใช้ในการผลิต(ชม.ต่อหน่วย)			
เครื่องจักร	สินค้า 1	สินค้า 2	สินค้า 3	สินค้า 4
M1	2	3	4	2
M2	3	2	1	2

ค่าใช้จ่ายในการผลิตสินค้าแต่ละชนิดต่อหน่วย แปรผันโดยตรงกับเวลาในการทำงานของเครื่องจักร ค่าใช้จ่ายในการผลิตของเครื่องจักรทั้งสองประเภท เท่ากับ 200 และ 300 บาทต่อชั่วโมง ตามลำดับ ถ้าราคาขายสินค้าแต่ละชนิดต่อหน่วย ตามลำดับ เท่ากับ 1,450 1,380 1,200 และ 1,100 บาท

7.1 จงเขียนตัวแบบทางคณิตศาสตร์ของปัญหานี้

7.2 จงเขียนตัวแบบปัญหาควบคู่

7.3 โรงงานควรวางแผนการผลิต อย่างไร จึงจะดีที่สุด

ในการเขียนตัวแบบ เริ่มต้นด้วยการกำหนดตัวแปรควบคุมได้ เขียนตัวแบบทางคณิตศาตร์ แล้วจึงจะเขียนตัวแบบควบคู่

กำหนดว่า โรงงานวางแผนการผลิตสินค้า j = x_j หน่วย $j = 1,2,3,4$

การผลิตสินค้าทั้ง 4 ชนิด

ใช้เวลาในการทำงานของเครื่องจักร M1 = $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4$ ชั่วโมง

และ ใช้เวลาในการทำงานของเครื่องจักร M2 = $3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4$ ชั่วโมง

ค่าใช้จ่ายด้านเครื่องจักรที่ใช้ในการผลิตสินค้าทั้งสี่ชนิด

$= 200(2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4) + 300(3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4)$ บาท

$= 1300x_1 + 1200x_2 + 1100x_3 + 1000x_4$ บาท

ราคาขายของสินค้าทั้งสี่ชนิด = $1450x_1 + 1380x_2 + 1200x_3 + 1100x_4$ บาท

กำไรที่คาดว่าจะได้จากการจำหน่ายสินค้าทั้งสี่ชนิด = $150x_1 + 180x_2 + 100x_3 + 100x_4$ บาท

เขียนตัวแบบทางคณิตศาสตร์

หาค่าสูงสุด $Z = 150x_1 + 180x_2 + 100x_3 + 100x_4$

โดยมีข้อจำกัด

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 500$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 350$$

$$x_1 , x_2 , x_3 , x_4 \geq 0$$

กำหนด w_1 และ w_2 เป็นตัวแปรควบคู่ของข้อจำกัดที่ 1 และ 2 ตามลำดับ เขียนตัวแบบปัญหาคู่

หาค่าต่ำสุด $Z_w = 500w_1 + 350w_2$

โดยมีข้อจำกัด

$$2w_1 + 3w_2 \geq 150$$

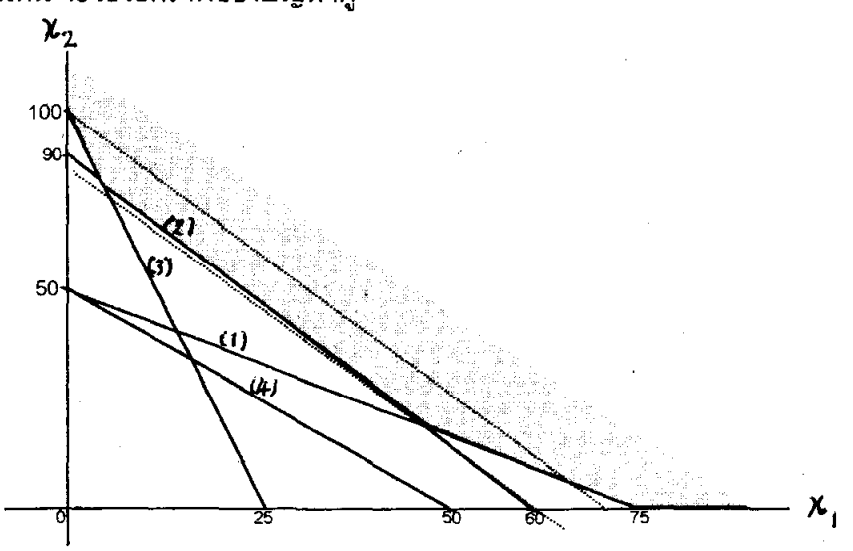
$$3w_1 + 2w_2 \geq 180$$

$$4w_1 + w_2 \geq 100$$

$$2w_1 + 2w_2 \geq 100$$

$$w_1 , w_2 \geq 0$$

การหาคำตอบดีที่สุด จะหาจากปัญหาเดิม โดยวิธีการซิมเพลกซ์ หรือ หาจากปัญหาคู่โดยวิธีกราฟก็ได้ ในที่นี้ จะใช้วิธีกราฟของปัญหาคู่



จากกราฟ จะเห็นว่า จุดคำตอบดีที่สุดเป็นจุดตัดของ ข้อจำกัดควบคู่ที่ 1 กับ 2 แสดงว่า

$$2x_1 + 3x_2 = 500 \text{ และ } 3x_1 + 2x_2 = 350$$

นั่นคือ $x_1 = 10$, $x_2 = 160$, $x_3 = x_4 = 0$ เป็นคำตอบดีที่สุด

สรุปได้ว่า โรงงานควรวางแผนการผลิตเฉพาะสินค้า 1 10 หน่วย และ ผลิตสินค้า 2 160 หน่วย คาดว่าจะได้กำไรมากที่สุด 30,300 บาท

8. จงเขียนตัวแบบปัญหาคู่ และหาคำตอบดีที่สุดทั้งของปัญหา เดิมและปัญหาคู่ ของปัญหานี้

หาค่าต่ำสุด $Z = 120x_1 + 160x_2 + 120x_3 + 70x_4$

โดยมีข้อจำกัด

$$7.5x_1 + 5x_2 + 6x_3 \geq 300$$

$$4x_1 + 10x_2 + 6x_3 + 5x_4 \geq 700$$

$$x_1 , x_2 , x_3 , x_4 \geq 0$$

กำหนด w_1 และ w_2 เป็นตัวแปรควบคู่ของข้อจำกัดที่ 1 และ 2 ตามลำดับ เขียนตัวแบบปัญหาคู่

หาค่าสูงสุด $Z_w = 300w_1 + 700w_2$

โดยมีข้อจำกัด

$$7.5w_1 + 4w_2 \leq 120$$

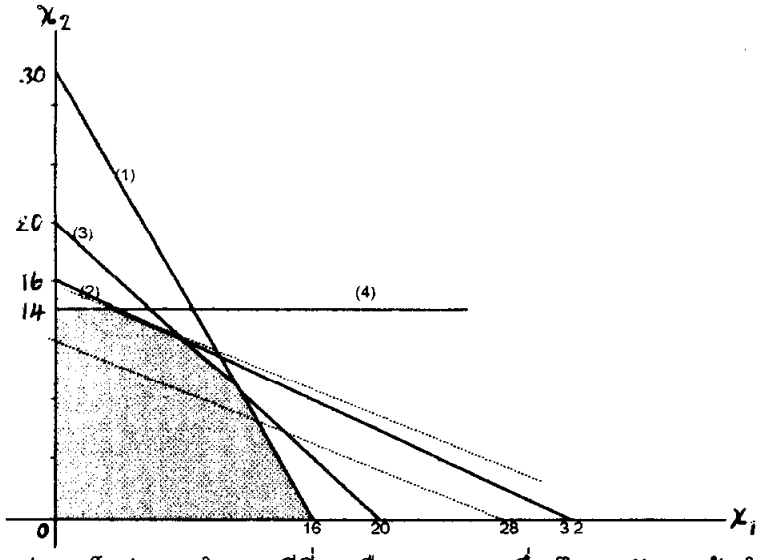
$$5w_1 + 10w_2 \leq 160$$

$$6w_1 + 6w_2 \leq 120$$

$$5w_2 \leq 70$$

$$w_1 , w_2 \geq 0$$

การหาคำตอบดีที่สุด อาจจะใช้วิธีการซิมเพลกซ์กับปัญหาเดิม หรือใช้วิธีกราฟกับปัญหาคู่ ก็ได้ ในที่นี้ จะใช้วิธีกราฟ



จากกราฟ จะเห็นว่า จุดคำตอบดีที่สุด คือจุด (4,14) ซึ่งเป็นจุดตัดของข้อจำกัดที่ 2 กับ 4 แสดงว่า คำตอบดีที่สุดของปัญหาคู่ จะมี

$w_1 = 6 , w_2 = 14$ ให้ค่า $Z_{สูงสุด} = 300(4) + 700(14) = 11,000$

คำตอบดีที่สุดของปัญหาเดิม จะหาได้จากการแก้สมการ

$5x_2 = 300$ และ $10x_2 + 5x_4 = 700$

!&id คำตอบดีที่สุดของปัญหาเดิม จะมี

$x_2 = 60$, $x_4 = 20$, $x_1 = x_3 = 0$ ให้ค่า $Z_{ต่ำสุด} = 160(60) + 70(20) = 11,000$

9. นักเคมีต้องการเตรียมสารเคมี โดยใช้วัตถุดิบ 2 ชนิดมารวมกัน ให้ได้ปริมาณ 90 กรัม (การรวมตัวกันของวัตถุดิบทั้งสอง ไม่ทำให้ปริมาณลดลง) และให้มีส่วนประกอบของสารเอ อย่างมากที่สุด 1 % สารบีไม่เกิน 5 % และสารดีอย่างน้อยที่สุด 30 % ราคาของวัตถุดิบ(บาทต่อกรัม) และส่วนประกอบของสาร(กรัมต่อกรัม) ในวัตถุดิบ มีดังนี้

	สารเอ	สารบี	สารดี	ราคา
วัตถุดิบ ก	0.0018	0.02	0.09	14
วัตถุดิบ ข	0.0036	0.03	0.36	42

นักเคมีควรใช้ส่วนผสมของวัตถุดิบ แต่ละชนิด อย่างไร จึงจะได้สารเคมีที่มีคุณสมบัติตามที่ต้องการ ในราคาต่ำสุด

10. จงหาคำตอบดีที่สุดของปัญหาใน

10.1 ตัวอย่างที่ 1.1 และ 1.4

10.2 ตัวอย่างที่ 2.1และ 2.2

10.3 แบบฝึกหัดที่ 1 ข้อ 2 , ข้อ 3 , ข้อ 4 และ ข้อ 5

11. จากปัญหาในตัวอย่างที่ 2.3

11.1 จงเขียนตารางที่ 1 ของวิธีการ Big-M

11.2 จงเขียนตารางที่ 1 Phase-1 ของวิธีการ Two-Phase

11.3 จงหาคำตอบดีที่สุดของปัญหานี้

12. โรงงานแห่งหนึ่ง มีแรงงานฝีมือที่จะทำการผลิตได้ในวันหนึ่ง ๆ เท่ากับ 860 นาที มีเครื่องจักรที่สามารถทำงานได้เต็มที่ 680 นาทีต่อวัน ในวันหนึ่ง ๆ โรงงานจะผลิตสินค้า 3 ชนิด ตามความต้องการของตลาด และความสามารถในการผลิตของโรงงาน จากรายงานการตลาด พบว่า จำนวนอุปสงค์ของสินค้าชนิดที่ 1 ในแต่ละวัน มากที่สุด 10 หน่วย จำนวนอุปสงค์ของสินค้า

ชนิดที่ 2 และ 3 จะมีอย่างน้อยที่สุด 5 และ 5 หน่วย ตามลำดับ รายละเอียดเกี่ยวกับการผลิต และ กำไรที่คาดว่าจะได้ของสินค้าแต่ละชนิด มีดังนี้

	เวลาที่ใช้ในการผลิต (นาที/หน่วย)		กำไร
	แรงงานฝีมือ	เครื่องจักร	(บาท/หน่วย)
สินค้า 1	20	12	60
สินค้า 2	12	16	45
สินค้า 3	20	20	75

โรงงานควรจัดตารางการผลิตอย่างไร จึงจะดีที่สุด

12.1 จงกำหนดตัวแปรตัดสินใจและเขียนตัวแบบทางคณิตศาสตร์

12.2 จงเขียนตารางซิมเพลกซ์ที่ 1

12.3 จงหาตารางการผลิตที่ดีที่สุด

13. จากปัญหาข้อ 11 ในแบบฝึกหัดที่ 1

13.1 จงเขียนตารางที่ 1 ของ Phase-1 จากการใช้วิธีการ Two Phase ในการแก้ปัญหา

13.2 จงเขียนตัวแบบทางคณิตศาสตร์ของปัญหาควบคู่

13.3 จงหาคำตอบดีที่สุด

14. โรงงานอุตสาหกรรมไม้อัดไทย ผลิตไม้อัด 2 แบบ โดยใช้ไม้ 2 ชนิด และมีกระบวนการผลิต 2 ขั้นตอน รายละเอียดเกี่ยวกับการผลิต ปริมาณของปัจจัยที่จะใช้ในการผลิต และกำไรที่คาดว่าจะได้ของไม้อัดแต่ละแบบ มีดังต่อไปนี้

	# แผ่น/ตารางฟุต		# ออนซ์	# ชั่วโมง/ตารางฟุต		กำไรบาทต่อ
	ไม้ชนิด 1	ไม้ชนิด 2	กาว	ขั้นตอน 1	ขั้นตอน 2	ตารางฟุต
ไม้อัดแบบ ก	2	2	1	0.2	0.1	36
ไม้อัดแบบ ข	1	3	2	0.1	0.3	48
ปริมาณที่มีใช้	10,000	9,000	6,000	600	800	

โรงงานควรวางแผนการผลิตอย่างไร จึงจะดีที่สุด

จงหาคำตอบด้วยวิธีกราฟ

ถ้าต้องการขยายการผลิตออกไป ควรเพิ่มปัจจัยการผลิตประเภทใดเป็นอันดับแรก ในปริมาณเท่าใด