บทที่ 1
ปัญหาโปรแกรมเชิงคณิตศาสตร์

การดำเนินงานต่าง ๆ ไม่ว่าจะเป็นงานทางด้านธุรกิจ อุตสาหกรรม เกษตรกรรม และการบริหารงานของรัฐบาล ฯลฯ จะบรรลุความสำเร็จตามเป้าหมายที่กำหนดไว้ โดยประหยัดหรือเกิดผลดีที่สุดต่อหน่วยงาน จำเป็นต้องอาศัยการวางแผน และการตัดสินใจที่เหมาะสม การวางแผนที่ดี จะต้องมีการใช้หลักเกณฑ์ทางวิชาการควบคู่กันไปกับการปฏิบัติที่จริงจัง ต้องศึกษาให้เข้าใจถึงหลักการ รายละเอียดของระบบงาน และเป้าหมายของการทำงานนั้น เพื่อให้สามารถจัดเก็บข้อมูลได้ครบถ้วนและถูกต้อง แล้วนำมาสร้างแบบจำลอง เพื่อการวิเคราะห์และวางแผนในลักษณะต่าง ๆ ตามที่ต้องการต่อไป ด้วยเหตุที่การบริหารงานต้องการการตัดสินใจที่รวดเร็วและถูกต้อง ในขณะที่ปริมาณงาน ปริมาณข้อมูลและระบบต่าง ๆ ได้ขยายกว้างขวางและสลับซับซ้อนยิ่งขึ้น ทรัพยากรส่วนใหญ่อันได้แก่ คนปฏิบัติงาน เครื่องจักร ที่ดิน เงินทุน วัสดุอุปกรณ์ต่าง ๆ ที่จะนำมาใช้ในการดำเนินงาน ก็มีจำนวนจำกัดและหาได้ยาก ต้องรู้จักใช้อย่างมีประสิทธิภาพและประหยัด จึงต้องอาศัยเทคนิคใหม่ ๆ ที่มีประสิทธิภาพสูง เช่น โปรแกรมเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Programming) มาใช้ในงานวิเคราะห์วิจัย และใช้เครื่องคอมพิวเตอร์สมัยใหม่ที่ให้ผลลัพธ์อย่างรวดเร็วและแม่นยำในการประมวลผล

1.1 *แนวความคิดเกี่ยวกับปัญหาโปรแกรมเชิงคณิตศาสตร์*

โปรแกรมเชิงคณิตศาสตร์เป็นเทคนิคการวิเคราะห์ ซึ่งเกี่ยวกับการหาค่าที่เหมาะสมของกระบวนการตัดสินใจที่ซ้ำซ้อน เทคนิคการตัดสินใจนี้ขึ้นอยู่กับปัญหาที่ต้องการหาแนวปฏิบัติที่ให้ผลดีที่สุด เช่น ให้ได้ผลตอบแทนมากที่สุด ให้เสียค่าใช้จ่ายต่ำสุด ให้ใช้เวลาดำเนินการต่ำสุด เป็นต้น ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับว่า มีเป้าหมายวางไว้อย่างไร เป้าหมายนี้จะเป็นฟังก์ชันของตัวแปรโดยที่ตัวแปรเหล่านี้อาจเป็นอิสระต่อกัน หรืออาจจะมีความสัมพันธ์กันตามข้อกำหนดที่มี

ปัญหาการโปรแกรมเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Programming Problem) จึงเป็นปัญหาการหาทางเลือกที่ดีที่สุด โดยมีเป้าหมายและข้อจำกัด อยู่ในรูปของฟังก์ชันหรือความสัมพันธ์ของฟังก์ชันของตัวแปร แสดงด้วยตัวแบบทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

ค่าที่ดีที่สุด $Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (1.1)

โดยมีข้อจำกัด $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\{\leqslant, =, \geqslant\} b_i \quad i = 1, 2, \ldots, m$ (1.2)

และ $x_j \geqslant 0 \quad j = 1, 2, \ldots, n$ (1.3)

ในเมื่อ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นตัวแปรตัดสินใจ (decision variables) หรือตัวแปรควบคุมได้ (controlled variables)

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ เป็นฟังก์ชันเป้าหมาย

$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ เป็นเงื่อนไขของการดำเนินงาน หรือข้อจำกัดในการใช้ทรัพยากร i, $i = 1, 2, \ldots, m$

b_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ เป็นปริมาณของทรัพยากร i ที่มีอยู่

การหาแนวปฏิบัติหรือค่าที่ดีที่สุด ก็คือการหาค่าของ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ที่จะทำให้ได้ค่า Z ใน (1.1) ดีที่สุด นั่นคือค่า Z สูงสุดหรือค่า Z ต่ำสุด แล้วแต่เป้าหมายที่วางไว้ ภายใต้ข้อจำกัด (1.2) และ (1.3) ให้เรามาพิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.1 บริษัท สยาม จำกัด ผลิตผลิตภัณฑ์ 3 ชนิด โดยใช้วัตถุดิบ ก และวัตถุดิบ ข เป็นส่วนผสม ในแต่ละสัปดาห์บริษัทมีวัตถุดิบ ก 500 กิโลกรัม และมีวัตถุดิบ ข 200 กิโลกรัม การผลิตแต่ละครั้งจะใช้เครื่องจักรซึ่งสามารถทำงานได้ 1,000 ชั่วโมงต่อสัปดาห์ รายละเอียดเกี่ยวกับการผลิตและกำไรที่คาดว่าจะได้จากการจำหน่าย กำหนดไว้ในตารางดังนี้

	ผลิตภัณฑ์		
	A	B	C
วัตถุดิบ n (กก./ชิ้น)	6	2	3
วัตถุดิบ ข (กก./ชิ้น)	2	1	1
เครื่องจักร (ชม./ชิ้น)	3	4	5
กำไร(บาท/ชิ้น)	60	40	48

บริษัทควรวางแผนการผลิตอย่างไรจึงจะดีที่สุด จงเขียนตัวแบบทางคณิตศาสตร์ของปัญหานี้

วิธีทำ

ถ้าเราพิจารณาจากปัญหานี้ จะเห็นว่า บริษัทต้องการวางแผน ในการผลิต ผลิตภัณฑ์ 3 ชนิด การผลิตแต่ละชนิด เน้นในเรื่อง การใช้วัตถุดิบ ก วัตถุดิบ ข ที่มีอยู่ และการผลิตของเครื่องจักรที่สามารถใช้งานได้ นอกจากนี้บริษัทยังมีข้อมูลเกี่ยวกับกำไรที่ได้ จากการจำหน่ายผลิตภัณฑ์ แต่ละชนิด ดังนั้น แผนการผลิตที่ดีที่สุด ก็คือ จะผลิตผลิตภัณฑ์แต่ละชนิด ได้มากที่สุดเท่าใด จากสิ่งที่ต้องนำมาใช้ในการผลิตที่มีอยู่ โดยมีเป้าหมาย ให้ได้กำไรมากที่สุด นั่นเอง

การสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์แทนระบบของปัญหา

การที่เราจะสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์ของปัญหานี้ได้ ก่อนอื่น เราต้องหาคำตอบของคำถาม 3 ข้อ ต่อไปนี้ ให้ได้ก่อน

ตัวแบบของปัญหานี้ ต้องการให้หาอะไร หรืออีกนัยหนึ่ง ต้องการจะรู้ว่า ตัวแปรตัดสินใจ(หรือตัวแปรควบคุมได้) ที่ไม่รู้ค่า ของปัญหา คืออะไร

มีข้อจำกัดที่เป็นฟังก์ชันของตัวแปร อะไรบ้าง ที่เป็นไปตาม เขตจำกัด แทนระบบ

เป้าหมายที่ต้องการ ในการพิจารณาคำตอบที่ดีที่สุด จากบรรดาค่าของตัวแปรที่เป็นไปได้ทั้งหมด คืออะไร ?

วิธีการที่ดีที่สุดในการตอบปัญหาเหล่านี้ ก็คือ การสรุปใจความสำคัญของปัญหา นั่นคือ บริษัทต้องการหาจำนวน(ชิ้น) ของผลิตภัณฑ์ A , B และ C ที่ควรจะผลิต เพื่อให้ได้กำไร(บาท) มากที่สุด และสอดคล้องกับข้อจำกัด ของการใช้ วัตถุดิบ ก วัตถุดิบ ข ที่มีอยู่ และความสามารถในการทำงานของเครื่องจักร

จุดสำคัญของตัวแบบทางคณิตศาสตร์ อันดับแรก ก็คือ การกำหนดตัวแปร เพื่อจะนำไปใช้ในการเขียนฟังก์ชันเป้าหมาย และการเขียนสมการหรืออสมการของฟังก์ชันข้อจำกัดของตัวแปรต่อไปจากข้อมูลของปัญหาในตัวอย่างนี้ เราจะเห็นว่า

<u>ตัวแปร</u> ในเมื่อเราต้องการหาจำนวนของผลิตภัณฑ์ A , B และ C ที่ควรจะผลิต เราจึงกำหนดตัวแปรของปัญหา ดังนี้

ผลิตผลิตภัณฑ์ A = x_1 ชิ้น

ผลิตผลิตภัณฑ์ B = x_2 ชิ้น

ผลิตผลิตภัณฑ์ C = x_3 ชิ้น

<u>ฟังก์ชันเป้าหมาย</u> พิจารณากำไรที่ได้จากการจำหน่ายผลิตภัณฑ์ แต่ละชนิด จะเห็นว่า ผลิตภัณฑ์ A ได้กำไรชิ้นละ 60 บาท ดังนั้น กำไรจากการผลิตผลิตภัณฑ์ A x_1 ชิ้น จะเท่ากับ $60x_1$ บาท ผลิตภัณฑ์ B ได้กำไรชิ้นละ 40 บาท ดังนั้น กำไรที่ได้จากการผลิตผลิตภัณฑ์ B x_2 ชิ้น จะเท่ากับ $40x_2$ บาท และผลิตภัณฑ์ C ได้กำไรชิ้นละ 48 บาท ดังนั้น กำไรจากการผลิตผลิตภัณฑ์ C x_3 ชิ้น จะเท่ากับ $48x_3$ บาท กำไรที่ได้จากการจำหน่ายทั้งหมด จะเท่ากับ $60x_1+40x_2+48x_3$ ถ้าเราให้ Z แทนกำไรทั้งหมดที่ได้(บาท) จะได้ฟังก์ชันเป้าหมายเป็น $Z = 60x_1+40x_2+48x_3$ จุดประสงค์ของการผลิต ก็คือ ต้องการหาค่า x_1 , x_2 และ x_3 ที่เป็นไปได้ ที่จะทำให้ได้ค่า Z โตที่สุด

<u>ข้อจำกัด</u> บริษัทสยามมีขีดจำกัดในการผลิตที่สำคัญเกี่ยวกับการใช้วัตถุดิบ ก วัตถุดิบ ข และความสามารถในการทำงานของเครื่องจักร ซึ่งแสดงในรูปแบบ ดังนี้

(# วัตถุดิบที่ใช้ในการผลิตผลิตภัณฑ์ทั้งสาม) $\leq$ (# สูงสุดของวัตถุดิบที่มีอยู่)

และ

(เวลาที่ใช้ในการผลิตผลิตภัณฑ์ทั้งสาม) $\leq$ (ความสามารถในการทำงานของเครื่องจักร)

เขียนในรูปแบบทางคณิตศาสตร์ ได้ดังนี้

ปริมาณวัตถุดิบ ก ที่ใช้ในการผลิตผลิตภัณฑ์ทั้งสาม $= 6x_1+2x_2+3x_3$ กิโลกรัม

ปริมาณวัตถุดิบ ก ที่มี = 500 กิโลกรัม

ดังนั้น $6x_1+2x_2+3x_3 \leq 500$

ปริมาณวัตถุดิบ ข ที่ใช้ในการผลิตผลิตภัณฑ์ทั้งสาม $= 2x_1+x_2+x_3$ กิโลกรัม

ปริมาณวัตถุดิบ ข ที่มี = 200 กิโลกรัม

ดังนั้น $2x_1+x_2+x_3 \leq 200$

เวลาที่ใช้ในการทำงานของเครื่องจักร $= 3x_1+4x_2+5x_3$ ชั่วโมง

เวลาที่เครื่องจักรทำงานได้เต็มที่ = 1,000 ชั่วโมง

ดังนั้น $3x_1+4x_2+5x_3 \leq 1000$

ข้อจำกัดที่จะต้องมีโดยปริยาย ก็คือ จำนวนชิ้นที่ผลิตได้ของผลิตภัณฑ์แต่ละชนิด จะต้องไม่มีค่าเป็นลบ นั่นคือ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

ตัวแบบทางคณิตศาสตร์ของปัญหาในตัวอย่างนี้ ก็คือ

หาค่าสูงสุด $Z = 60x_1+40x_2+48x_3$

โดยมีข้อจำกัด

$$6x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 500$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 200$$
$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 1000$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

ตัวอย่างที่ 1.2 นายเกษมมีเงินอยู่ 5,000 บาท เขาสนใจการลงทุนกับหุ้น 2 ประเภท หุ้นแต่ละประเภท มีราคา หุ้นละ 100 บาท เท่ากัน แต่ผลตอบแทนที่ได้ไม่เท่ากัน ผลตอบแทนที่คาดว่าจะได้จากการซื้อหุ้นแต่ละประเภท เป็นฟังก์ชันของจำนวนหุ้นที่ซื้อ ดังนี้

หุ้นประเภท ก ให้ผลตอบแทน = 40 - จำนวนหุ้น ก

หุ้นประเภท ข ให้ผลตอบแทน = 80 - จำนวนหุ้น ข

นายเกษมควรลงทุนอย่างไร จึงจะเกิดผลดีที่สุด

จงเขียนตัวแบบทางคณิตศาสตร์ของปัญหานี้

วิธีทำ

กำหนดตัวแปร

เราสรุปใจความสำคัญของปัญหานี้ ได้ว่า นายเกษมต้องการหาจำนวนหุ้นประเภท ก และจำนวนหุ้นประเภท ข ที่ควรจะลงทุน เพื่อให้ได้ผลตอบแทน มากที่สุด ภายในวงเงินที่เขามีอยู่ ดังนั้น ตัวแปรตัดสินใจหรือตัวแปรควบคุมได้ จะนิยามได้ดังนี้

นายเกษมซื้อหุ้นประเภท ก = x_1 หุ้น

ซื้อหุ้นประเภท ข = x_2 หุ้น

เขียนฟังก์ชันเป้าหมาย

โดยที่ ผลตอบแทนของหุ้นประเภท ก = 40 - จำนวนหุ้น ก นั่นคือ $40 - x_1$

ดังนั้น ผลตอบแทนที่ได้จากการซื้อหุ้นประเภท ก x_1 หุ้น = $(40 - x_1)x_1$

ผลตอบแทนของหุ้นประเภท ข = 80 - จำนวนหุ้น ข นั่นคือ $80 - x_2$

ดังนั้น ผลตอบแทนที่ได้จากการซื้อหุ้นประเภท ข x_2 หุ้น = $(80 - x_2)x_2$

ให้ Z เป็นผลตอบแทนที่คาดว่าจะได้ทั้งหมด ดังนั้น

$$Z = (40 - x_1)x_1 + (80 - x_2)x_2 = 40x_1 - x_1^2 + 80x_2 - x_2^2$$

จุดประสงค์ของการลงทุนซื้อหุ้น ก็คือ ก็คือ ต้องการหาค่า x_1 และ x_2 ที่เป็นไปได้ ที่จะทำให้ได้ค่า Z มากที่สุด

เขียนข้อจำกัด

ขีดจำกัดของการซื้อหุ้นของนายเกษม ก็คือ จำนวนเงินที่เขามีอยู่ ซึ่งแสดงได้ดังนี้

(# เงินที่ซื้อหุ้น ก และหุ้น ข) $\leq$ (# เงินที่มีอยู่)

นั่นคือ $100x_1 + 100x_2 \leq 5000$

หรือ $x_1 + x_2 \leq 50$ (ผลคูณของ 100)

ถ้าต้องการเน้นว่า ผลตอบแทนที่ได้ ต้องไม่เป็นลบ กล่าวคือ

$40 - x_1 \geq 0$ และ $80 - x_2 \geq 0$

แล้ว เราจะได้ ข้อจำกัดซึ่งเป็นกรอบบนของตัวแปร ดังนี้

$x_1 \leq 40$

และ $x_2 \leq 80$

อย่างไรก็ตาม ถ้าเราสนใจเฉพาะจำนวนหุ้นที่จะซื้อ ภายในวงเงินที่มีอยู่ เพื่อให้ได้ผลตอบแทนมากที่สุด โดยไม่สนใจว่า จะได้ผลตอบแทนของหุ้นใดเป็นลบบ้าง ข้อจำกัดซึ่งเป็นกรอบบนของตัวแปรทั้งสอง ไม่จำเป็นต้องมี

สุดท้ายคือข้อจำกัดที่ต้องมี โดยละทิ้งไม่ได้ ก็คือ จำนวนหุ้นแต่ละประเภทที่จะซื้อ ต้องมีค่าจริงคือไม่เป็นลบ นั่นคือ

$x_1 , x_2 \geq 0$

สรุปได้ว่า เมื่อ เรากำหนดตัวแปร x_1 และ x_2 แล้ว เขียนตัวแบบทางคณิตศาสตร์ แทนปัญหา ได้ดังนี้

หาค่าสูงสุด $Z = 40x_1 - x_1^2 + 80x_2 - x_2^2$

โดยมีข้อจำกัด

$x_1 + x_2 \leq 50$

$x_1 , x_2 \geq 0$

ตัวอย่างที่ 1.3 ผู้จัดการฝ่ายผลิตกำลังพิจารณาดูความจำเป็นในการเก็บสินค้าคงคลังที่มีราคาค่อนข้างแพง ในการผลิต 2 เดือนหน้า ต้นทุนการผลิตสินค้านี้ต่อหน่วย เท่ากับ 25,000 บาท ต้นทุนการจัดเก็บสินค้าคงเหลือต่อหน่วย เท่ากับ 2,500 บาท ราคาขายต่อหน่วย เท่ากับ 50,000 บาท ด้วยเหตุที่ ช่วงเวลาเริ่มการผลิตจำนวนใหม่นั้นสั้น จำนวนที่ผลิตได้ในแต่ละเดือนจึงจัดแค่ให้เพียงพอกับจำนวนอุปสงค์ของสินค้าในเดือนนั้น เมื่อเริ่มต้นการผลิตในเดือนแรก ไม่มีสินค้าคง

คลัง เมื่อสิ้นสุดเดือนที่สองหากมีสินค้าคงเหลือจากการจำหน่ายจะมีราคาลดลง เป็น 12,500 บาท จำนวนอุปสงค์ของสินค้านี้ในแต่ละเดือน จะมีการกระจายแบบเดียวกัน ดังนี้

จำนวนอุปสงค์ (D)	0	1	2	3
ความน่าจะเป็น	0.25	0.40	0.20	0.15

ถ้าท่านเป็นผู้จัดการฝ่ายผลิต ท่านจะวางแผนการผลิตอย่างไร จึงจะดีที่สุด

จงกำหนดตัวแปรตัดสินใจ และ เขียนตัวแบบทางคณิตศาสตร์

วิธีทำ

กำหนดตัวแปร

จากปัญหานี้ เราจะเห็นว่า จำนวนอุปสงค์ไม่แน่นอน ทำให้จำนวนสินค้าคงเหลือ ไม่แน่นอนด้วย ถ้าจำนวนอุปสงค์มากกว่าจำนวนสินค้าที่ผลิตได้ ไม่ถือว่า เกิดการเสียหาย เพียงแต่ไม่มีสินค้าจำหน่ายเท่านั้น ปริมาณการผลิตในเดือนแรก จะขึ้นอยู่กับ จำนวนอุปสงค์ ในขณะที่ปริมาณการผลิตเดือนที่สอง ขึ้นอยู่กับ จำนวนอุปสงค์และจำนวนสินค้าคงเหลือจากเดือนแรกจึงเห็นได้ว่า การตัดสินใจ จะขึ้นอยู่กับ จำนวนผลิตในแต่ละเดือน จำนวนอุปสงค์ และ จำนวนสินค้าคงเหลือ โดยมีเป้าหมายที่จะให้ได้ ค่าคาดหมายของกำไรมากที่สุด ดังนั้น ตัวแปรตัดสินใจจะประกอบด้วยการวางแผนเกี่ยวกับการผลิตและสินค้าคงเหลือ ดังนี้

ผลิตสินค้าในเดือนแรก = x_1 หน่วย

ผลิตสินค้าในเดือนที่สอง = x_2 หน่วย

จำนวนสินค้าคงเหลือในเดือนแรก = I_2 หน่วย

จำนวนสินค้าคงเหลือในเดือนที่สอง = I_3 หน่วย

ฟังก์ชันเป้าหมาย

โดยที่การวางแผนการผลิต ขึ้นอยู่กับ จำนวนสินค้าคงเหลือ และ จำนวนอุปสงค์ที่เกิดขึ้นภายใต้ความไม่แน่นอน จึงเป็นลักษณะของการตัดสินใจภายใต้การเสี่ยง ผลตอบแทนหรือกำไรที่ได้ จะเป็นการคาดหมาย

การหาค่าคาดหวังของกำไรในเดือนแรก ต้นเดือนแรกไม่มีสินค้าคงเหลือ ดังนั้น การหาค่าคาดหวังของกำไร จะขึ้นอยู่กับ จำนวนผลิต x_1 หน่วย จำนวนอุปสงค์ในเดือนแรก d_1 และจำนวนสินค้าคงเหลือเมื่อสิ้นสุดการผลิตในเดือนแรก $I_2 = x_1 - d_1$ เมื่อ $x_1 > d_1$

ต้นทุนการผลิตในเดือนแรก จะเท่ากับ $25000x_1$ บาท = $25x_1$ พันบาท

โดยที่ปริมาณขายต้องไม่เกินปริมาณที่ผลิตได้ ดังนั้น

ค่าคาดหวังของปริมาณขาย = $\sum_{d_1=0}^{x_1-1} 50d_1P[D_1=d_1]+50x_1P[D_1 \geq x_1]$ พันบาท

ค่าคาดหวังของค่าใช้จ่ายในการจัดเก็บสินค้าคงเหลือ $I_2 = x_1 - d_1$

$$= \sum_{d_1=0}^{x_1-1} 2.5I_2P[D_1=d_1] \quad \text{พันบาท}$$

ถ้า $E[P|\, x_1\, ,\, I_2 = x_1 - d_1]$ เป็นค่าคาดหวังของกำไรในเดือนแรก เราจะได้

$$E[P|\, x_1\, ,\; I_2 = x_1 - d_1] = \sum_{d_1=0}^{x_1-1} P[D_1=d_1][50d_1-2.5I_2]+50x_1P[D_1 \geq x_1] - 25x_1 \quad \text{พันบาท}$$

การหาค่าคาดหวังของกำไรในเดือนที่สอง เมื่อ $x_2 + I_2 = 0,1,2,3$

ถ้าปริมาณที่ขายได้ในเดือนนี้เป็น d_2 และ $d_2 < x_2 + I_2$

จะมีสินค้าคงเหลือสิ้นเดือนนี้ $I_3 = x_2 + I_2 - d_2$ ดังนั้น

ต้นทุนการผลิตของเดือนที่สอง = $25x_2$ พันบาท

ค่าคาดหวังของปริมาณขายในเดือนที่สอง เมื่อ $x_2 + I_2 = 0,1,2,3$

$$= \sum_{d_2=0}^{x_2+I_2-1} 50d_2P[D_2=d_2]+50(x_2+I_2)P[D_2 \geq x_2+I_2] \quad \text{พันบาท}$$

ค่าคาดหวังของค่าใช้จ่ายในการจัดเก็บสินค้าคงเหลือ $I_3 = x_2+I_2-d_2$

$$= \sum_{d_2=0}^{x_2+I_2-1} 2.5I_3P[D_2=d_2] \quad \text{พันบาท}$$

โดยที่ เราผลิตเพียง 2 เดือน และ สินค้าคงเหลือสิ้นเดือนที่สอง จะมีราคาลดลงเป็น 12,500 บาท หรือ 12.5 พันบาทต่อหน่วย ดังนั้น ค่าคาดหวังของปริมาณขายสิ้นเดือนที่สอง

$$= \sum_{d_2=0}^{x_2+I_2-1} 2.5I_3P[D_2=d_2] \quad \text{พันบาท}$$

ถ้า $E[P|\, x_2+I_2\, ,\; I_3 = x_2+I_2 - d_2]$ เป็นค่าคาดหวังของกำไรในเดือนที่สอง เราจะได้

$E[P|\, x_2+I_2, I_3 = x_2+I_2 - d_2]$

$$= \sum_{d_2=0}^{x_2+I_2-1} P[D_2=d_2][50d_2-2.5I_3+12.5I_3]+50(x_2+I_2)P[D_2 \geq x_2+I_2] - 25x_2$$

ให้ Z เป็นค่าคาดหวังของกำไรทั้งหมด เราจะได้ ฟังก์ชันเป้าหมาย คือ

$$Z = E[P|\, x_1 , I_2 = x_1 - d_1] + E[P|\, x_2+I_2 , I_3 = x_2+I_2 - d_2]$$

$$= \sum_{d_1=0}^{x_1-1} P[D_1=d_1][50d_1-2.5I_2]+50x_1P[D_1 \geq x_1] - 25x_1 +$$

$$\sum_{d_2=0}^{x_2+I_2-1} P[D_2=d_2][50d_2-2.5I_3+12.5I_3]+50(x_2+I_2)P[D_2\geq x_2+I_2] - 25x_2$$

ซึ่งต้องการให้ได้ค่ามากที่สุด

เขียนข้อจำกัด

โดยที่การผลิตสินค้าในแต่ละเดือน ต้องการให้เพียงพอกับจำนวนอุปสงค์ d_1 และ d_2 ซึ่งมีค่ามากที่สุด 3 หน่วย โดยที่ต้นเดือนแรกไม่มีสินค้าคงเหลือ ดังนั้น x_1 จึงไม่ควรเกิน 3 นั่นคือ

$$x_1 \leq 3$$

ถ้า $x_1 \geq d_1$ จะมีสินค้าคงเหลือสิ้นเดือนแรก $I_2 = x_1 - d_1$

เมื่อผลิตสินค้าในเดือนที่สอง x_2 หน่วย จะมีสินค้าจำหน่ายในเดือนที่สอง เท่ากับ $x_2 + I_2$ จำนวนนี้ต้องไม่เกิน 3 ดังนั้น

$$x_2 + I_2 \leq 3$$

ถ้า $x_2 + I_2 \geq d_2$ จะมีสินค้าคงเหลือสิ้นเดือนที่สอง $I_3 = x_2 + I_2 - d_2$

จำนวนสินค้าที่ผลิตได้ และ จำนวนสินค้าคงเหลือ จะต้องเป็นค่าที่เป็นไปได้ นั่นคือ

$$x_1 , x_2 , I_2 , I_3 \geq 0$$

สรุปการเขียนตัวแบบได้ดังนี้

กำหนดตัวแปรตัดสินใจ แล้วเขียนตัวแบบทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

หาค่าสูงสุด $z = E[P|\, x_1 , I_2 = x_1 - d_1] + E[P|\, x_2+I_2 , I_3 = x_2+I_2 - d_2]$

$$= \sum_{d_1=0}^{x_1-1} P[D_1=d_1][50d_1-2.5I_2]+50x_1P[D_1 \geq x_1] - 25x_1 +$$

$$\sum_{d_2=0}^{x_2+I_2-1} P[D_2=d_2][50d_2-2.5I_3+12.5I_3]+50(x_2+I_2)P[D_2\geq x_2+I_2] - 25x_2$$

โดยมีข้อจำกัด

$$
\begin{aligned}
x_1 \quad & \leq 3 \\
x_1 - I_2 \quad & = d_1 \\
I_2 + x_2 \quad & \leq 3 \\
I_2 + x_2 - I_3 \quad & = d_2 \\
x_1, x_2, I_2, I_3 \quad & \geq 0
\end{aligned}
$$

จะเห็นได้ว่า การสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ สิ่งแรกที่จะต้องพิจารณาจากปัญหาหรือข้อมูลที่เกี่ยวกับการดำเนินงาน ก็คือ ต้องวิเคราะห์ให้ได้ว่า สิ่งที่เราจะต้องตัดสินใจ มีอะไรบ้างเพื่อจะได้นำมากำหนดเป็นตัวแปร แล้วจึงจะสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์แทนปัญหานั้น

พิจารณาการสร้างตัวแบบทางเชิงคณิตศาสตร์ แทนปัญหา จะเห็นว่า

1. โครงสร้างของตัวแบบ จะประกอบด้วย 3 ส่วนที่สำคัญ ดังนี้

1.1 ฟังก์ชันเป้าหมาย (objective function) ต้องกำหนดเป้าหมายชัดเจน ว่า ต้องการให้ได้ค่า สูงสุดหรือต้องการค่าต่ำสุด และกำหนดค่าเป็นปริมาณ

1.2 เงื่อนไขของข้อจำกัด(constraints) จะอยู่ในรูปสมการ(=) หรืออสมการในรูป $\leq$ หรือในรูป $\geq$ ซึ่งจะแสดงให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร ที่สอดคล้องตาม คุณสมบัติที่กำหนด หรือเงื่อนไขที่มีอยู่

1.2 ข้อกำกัด(restriction) ค่าของตัวแปรทุกตัว จะต้องไม่เป็นลบ แต่จะมีค่าต่อเนื่องหรือเป็นเลขจำนวนเต็ม ก็ได้

2. ฟังก์ชันที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร อาจเป็นฟังก์ชันภายใต้ความแน่นอน เช่น ฟังก์ชัน $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ในตัวอย่างที่ 1.1 และ 1.2 ฟังก์ชันข้อจำกัด $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ในตัวอย่างทั้งสาม หรือเป็นฟังก์ชันภายใต้ความไม่แน่นอน (เชิงน่าจะเป็น) เช่นเป็นฟังก์ชันค่าคาดหมาย ดังฟังก์ชัน $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ในตัวอย่างที่ 1.3

3. ฟังก์ชัน $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ และ $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1,2,\ldots,m$ ใน (1.1) และ (1.2) อาจเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นตรงของ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ หรืออาจจะมีอย่างน้อยที่สุด 1 ฟังก์ชัน ที่ไม่เป็นเชิงเส้นตรง ก็ได้ และอาจจะเป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้(เรียบ) หรือเป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ ไม่ได้ (ไม่เรียบ) ก็ได้

4. ค่าที่เหมาะสมอาจเกิดขึ้นในช่วงเวลาซึ่งไม่ทันได้เกิดการเปลี่ยนแปลง (คงที่) หรืออาจจะเกิดขึ้นในช่วงเวลาซึ่งจะมีการเปลี่ยนแปลงเกิดขึ้น (พลวัต) ก็ได้

ปัญหาในตัวอย่างที่ 1.1 เป็นแบบเชิงเส้น ในตัวอย่างที่ 1.2 มีฟังก์ชัน f ไม่เป็นเส้นตรง แต่ข้อจำกัด g เป็นเส้นตรง สำหรับปัญหาในตัวอย่างที่ 1.3 เป็นการคาดคะเนในช่วงเวลาต่อไป ซึ่งอยู่ภายใต้ความไม่แน่นอน แต่จากการศึกษาข้อมูล ทำให้สามารถพยากรณ์ผลตอบแทน (กำไร) จากการผลิตและการเก็บของคงเหลือได้

1.2 ลักษณะปัญหาที่ใช้โปรแกรมเชิงคณิตศาสตร์

ปัญหาที่ใช้โปรแกรมเชิงคณิตศาสตร์ โดยทั่วไปจะเป็นปัญหาที่นำไปใช้ทางด้านการวางแผน เสนอแนวทางปฏิบัติ ควบคุมการดำเนินงาน ปรับปรุงประสิทธิภาพการทำงานขององค์การหรือหน่วยงานต่าง ๆ ลักษณะของปัญหาเหล่านี้ ได้แก่

1.2.1 ปัญหาการจัดสรร (Allocation Problem) เป็นปัญหาที่เกี่ยวกับการจัดสรรทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัด อาทิเช่น วัสดุอุปกรณ์ เวลา เงินทุน ผู้ปฏิบัติงาน ตลอดจนทรัพยากรธรรมชาติ เพื่อไปผลิตเป็นสินค้าและบริการอะไรบ้าง เป็นจำนวนเท่าใด ในลักษณะอย่างไร จึงจะให้ประโยชน์ต่อส่วนรวมมากที่สุด ตัวอย่างปัญหานี้ได้แก่

ตัวอย่างที่ 1.4 บริษัทเอบีต้องการวิเคราะห์ดูว่า ควรจะปลูกพืชประเภทใดบ้างในที่ดิน 350 ตารางหน่วย โดยเลือกจากพืช 3 ประเภท บริษัทมีคนงานอยู่ 380 คน การปลูกพืชแต่ละประเภทใช้คนงานโดยเฉลี่ย 1, 3 และ 2 คนต่อตารางหน่วย ตามลำดับ อย่างไรก็ตามบริษัทกำหนดไว้ว่าจะใช้พื้นที่ในการปลูกพืชประเภทที่ 2 ไม่เกิน 20 ตารางหน่วย และการปลูกพืชประเภทที่ 3 ใช้พื้นที่ได้มากที่สุด 10 ตารางหน่วย ถ้าปริมาณผลผลิตที่ได้ของพืชแต่ละประเภทโดยเฉลี่ยต่อตารางหน่วยเป็น 30, 50 และ 42 บริษัทควรจะวางแผนในการปลูกอย่างไร จึงจะทำให้ได้ผลผลิตรวมมากที่สุด จงเขียนตัวแบบของปัญหานี้

วิธีทำ กำหนดว่าบริษัทจะปลูกพืชประเภทที่ 1 = x_1 ตารางหน่วย

ปลูกพืชประเภทที่ 2 = x_2 ตารางหน่วย

ปลูกพืชประเภทที่ 3 = x_3 ตารางหน่วย

จะได้ ค่าสูงสุดของ $Z = 30x_1 + 50x_2 + 42x_3$

โดยมีข้อจำกัด

$$x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 350$$

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\leqslant 380 \\
x_2 \qquad &\leqslant 20 \\
x_3 &\leqslant 10 \\
x_1, x_2, x_3 &\geqslant 0
\end{aligned}
$$

การประยุกต์ใช้ปัญหาทางด้านการเกษตร โดยทั่วไปจะเป็นการวิเคราะห์แหล่งผลิต การใช้ที่ดิน การชลประทาน และการใช้น้ำที่จะช่วยเพิ่มผลผลิต การเลือกชนิดของพืช อุปสรรคในการผลิต แหล่งเงินทุนเป็นต้น

ปัญหาในตัวอย่างที่ 1.1 และ 1.2 เป็นตัวอย่างหนึ่งของปัญหาการจัดสรร นอกจากนี้ยังมีปัญหาทางด้านการโฆษณา พิจารณาว่าควรวางแผนการโฆษณาอย่างไร วิธีไหน ภายในวงเงินที่มีอยู่จำกัด จึงจะสามารถเรียกลูกค้าได้มากที่สุด ปัญหาทางด้านการผลิตและการตลาด วางแผนว่าจะผลิตสินค้าใด อย่างไร ภายใต้ข้อจำกัดของจำนวนอุปสงค์ และจำนวนอุปทาน นอกจากนี้ปัญหาการจัดสรรยังนำไปประยุกต์ใช้กับกิจกรรมทางการทหาร ทางอุตสาหกรรม ทางเศรษฐกิจ การเมือง ฯลฯ กล่าวโดยสรุป ปัญหาการจัดสรรจะมีตัวแปรตัดสินใจแทนกิจกรรมต่าง ๆ ที่ใช้ทรัพยากร มีปริมาณของทรัพยากรและการนำไปใช้เป็นข้อจำกัด และเป้าหมายของปัญหาการจัดสรรก็คือ การหาค่าสูงสุดของผลตอบแทน การหาค่าต่ำสุดของค่าใช้จ่าย เป็นต้น

1.2.2 ปัญหาการคำนวณส่วนผสม (Blending Problem) เป็นปัญหาเกี่ยวกับการนำวัตถุดิบซึ่งมีคุณสมบัติต่าง ๆ ทางเคมีหรือทางฟิสิกส์ มาผสมกันให้ได้ผลิตภัณฑ์ที่มีคุณภาพมาตรฐานตามข้อกำหนด โดยมีต้นทุนในการดำเนินงานต่ำสุด ตัวอย่างปัญหาประเภทนี้ได้แก่ ปัญหาทางด้านโภชนาการ ซึ่งเป็นปัญหาเกี่ยวกับการจัดเตรียมอาหารซึ่งมีคุณสมบัติเพียงพอและจำเป็นสำหรับกลุ่มคนบางประเภท เช่น คนไข้โรคเบาหวาน คนที่มีปัญหาเกี่ยวกับน้ำหนัก เป็นต้น ดังเช่นตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.5 แผนกคนไข้พักฟื้นได้จัดบริการทางด้านโภชนาการสำหรับคนไข้ กำหนดว่าในแต่ละวัน จะต้องจัดเตรียมอาหารที่มีโปรตีนอย่างน้อยที่สุด 60 กรัม ให้มีแคลเซียมและธาตุเหล็กอย่างต่ำ 500 และ 10 มิลลิกรัม ตามลำดับ และให้ได้พลังงานไม่ต่ำกว่า 2,000 แคลอรี โดยเลือกจากอาหาร 5 ชนิด ในอาหารแต่ละชนิด 100 กรัม จะมีปริมาณของโปรตีน แคลเซียม ธาตุเหล็ก พลังงาน และมีราคา ดังนี้

ส่วนประกอบ	ชนิดของอาหาร				
	ก	ข	a	ง	a
โปรตีน (กรัม)	7.5	25.0	I.1	4.8	3.6
แคลเซียม (มิลลิกรัม)	16.8	650.3	12.7	58.9	480.4
ธาตุเหล็ก (มิลลิกรัม)	1.9	0.5	0.2	2.1	3.8
พลังงาน (แคลอรี)	250	48.9	803	102	30
ราคา (ml)	80	220	215	125	160

แผนกอาหารควรเลือกใช้อาหารแต่ละชนิดอย่างไร จึงจะได้อาหารที่มีคุณค่าตามที่กำหนด แต่ให้เสียค่าใช้จ่ายต่ำสุด จงเขียนตัวแบบของปัญหานี้

วิธีทำ กำหนดว่า เลือกใช้อาหาร ก $= x_1$ ร้อยกรัม

อาหาร ข $= x_2$ ร้อยกรัม

อาหาร ค $= x_3$ ร้อยกรัม

อาหาร ง $= x_4$ ร้อยกรัม

อาหาร จ $= x_5$ ร้อยกรัม

ตัวแบบ : ค่าต่ำสุด $Z = 80x_1 + 220x_2 + 215x_3 + 125x_4 + 160x_5$

โดยมีข้อจำกัด

$$7.5x_1 + 25.0x_2 + 1.1x_3 + 4.8x_4 + 3.6x_5 \geqslant 60$$

$$16.8x_1 + 650.3x_2 + 12.7x_3 + 58.9x_4 + 480.4x_5 \geqslant 500$$

$$1.9x_1 + 0.5x_2 + 0.2x_3 + 2.1x_4 + 3.8x_5 \geqslant 10$$

$$250x_1 + 48.9x_2 + 803x_3 + 102x_4 + 30x_5 \geqslant 2000$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0$$

ปัญหาการคำนวณส่วนผสม นอกจากจะนำไปใช้ทางด้านโภชนาการแล้ว ยังนำไปใช้กับปัญหาการผลิตอาหารและยา เช่น การผลิตอาหารเลี้ยงสัตว์พิจารณาว่าควรเลือกใช้วัตถุดิบประเภทใดบ้าง ในปริมาณเท่าใดจึงจะได้อาหารที่มีคุณสมบัติตามที่ต้องการ แต่ให้มีต้นทุนการผลิตต่ำ นอกจากนี้ยังประยุกต์ใช้กับปัญหาเกี่ยวกับการผลิตสารเคมี ปัญหาการหลอมเหล็ก ปัญหาการกลั่นน้ำมัน เป็นต้น ปัญหาเหล่านี้จะมีจำนวนหรือสัดส่วนของวัตถุดิบที่เลือกใช้

เป็นตัวแปรตัดสินใจ คุณภาพมาตรฐานตามข้อกำหนด หรือคุณสมบัติตามข้อกำหนดของสิ่งนั้น จะเป็นข้อจำกัด เป้าหมายก็คือ การลงทุนหรือเสียค่าใช้จ่ายต่ำสุด

1.2.3 ปัญหาการแจกจ่าย (Distribution Problem) เป็นปัญหาเกี่ยวกับการกำหนดขนาด และที่ตั้งของโรงงาน คลังสินค้า ศูนย์การแจกจ่ายตลอดจนการกำหนดนโยบายในการแจกจ่าย จัดระบบการจัดส่งและการดำเนินงาน ให้สอดคล้องกับกำลังความสามารถที่มี และความต้องการของตลาด ทำให้เสียค่าใช้จ่ายต่ำสุด หรือก่อให้เกิดผลงานมากที่สุด ให้เรามาศึกษาจาก ตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.6 องค์การคลังสินค้าวางแผนเปิดคลังสินค้าเพิ่มขึ้นอีก 2 แห่ง เพื่อรองรับสินค้าที่จะส่งเข้ามาเก็บไว้ รอการส่งไปจำหน่ายที่ตลาด 4 มุมเมือง โดยพิจารณาเลือกจากสถานที่ 3 แห่ง สถานที่แห่งแรกมีความจุ 17,000 หน่วย สามารถส่งสินค้าไปจำหน่ายที่ตลาด A, B และC ตามลำดับ สถานที่แห่งที่ 2 มีความจุ 16,500 หน่วย สามารถส่งสินค้าไปจำหน่ายที่ตลาด A, C และ D ตามลำดับ สถานที่แห่งที่ 3 มีความจุ 17,500 หน่วย สามารถส่งไปจำหน่ายที่ตลาดทั้ง 4 ได้ทุกตลาด จากการศึกษาข้อมูลของค่าใช้จ่ายในการลงทุนสร้างคลังสินค้า ค่าใช้จ่ายในการดำเนินการเก็บสินค้า อัตราค่าขนส่งสินค้าจากคลังสินค้าไปยังตลาด และความต้องการสินค้าของตลาดทั้ง 4 ปรากฏผลดังตารางต่อไปนี้

สถานที่ / ตลาดการค้า	อัตราค่าขนส่ง(บาท/หน่วย)			ความต้องการสินค้า (หน่วย)
	1	2	3	
A	15	16	12	8,500
B	17	—	11	8,000
C	14	13	10	9,000
D		18	14	8,000
การลงทุน (ล้านบาท)	4.5	4.2	5.3	
ค่าดำเนินงาน (บาท/หน่วย)	13	15	10	

องค์การควรสร้างคลังสินค้า ณ สถานที่ใดจึงจะเหมาะสมที่สุด จงเขียนตัวแบบของปัญหานี้

วิธีทำ จะเห็นได้ว่า ค่าใช้จ่ายในการเปิดคลังสินค้าแต่ละแห่ง ประกอบด้วยค่าใช้จ่ายในการลงทุนซึ่งคงที่ ค่าดำเนินงานซึ่งแปรผันไปตามจำนวนสินค้าที่จะนำมาเก็บไว้ และค่าขนส่งซึ่งขึ้นอยู่กับจำนวนสินค้าที่ส่งออกไปตามเส้นทางใดบ้าง ปัญหาของเราคือ การพิจารณาว่าควรเปิดคลังสินค้า ณ สถานที่ใดบ้าง เก็บและจัดส่งสินค้าอย่างไรจึงจะทำให้ค่าใช้จ่ายในการก่อสร้าง การดำเนินงาน และการขนส่งรวมกันต่ำที่สุด ดังนั้น ตัวแปรตัดสินใจในที่นี้จึงมี 2 ประเภท ประเภทแรกจะเป็นตัวแปรที่แสดงถึงการเลือกสถานที่ ประเภทที่สองเป็นตัวแปรที่แสดงถึงจำนวนสินค้าที่จะส่งจากคลังสินค้าไปยังตลาดการค้า เราจึงกำหนดให้

y_i = 1 ถ้าเปิดคลังสินค้าที่สถานที่ i, $i = 1, 2, 3$

= 0 อื่น ๆ

x_{ij} = จำนวนหน่วยของสินค้าที่ส่งจากสถานที่ i ไปยังตลาดการค้า j, $i = 1, 2, 3;$

$j = A, B, C, D$

(ในที่นี้ $x_{1D} = x_{2B} = 0$)

ค่าใช้จ่ายในการลงทุน = $4.5y_1 + 4.2y_2 + 5.3y_3$ ล้านบาท = 10^6P_1 บาท

ค่าใช้จ่ายในการดำเนินงาน

$= 13(x_{1A} + x_{1B} + x_{1C}) + 15(x_{2A} + x_{2C} + x_{2D}) + 10(x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} + x_{3D})$ บาท

$= P_2$ บาท

ค่าใช้จ่ายในการขนส่ง

$= 15x_{1A} + 17x_{1B} + 14x_{1C} + 16x_{2A} + 13x_{2C} + 18x_{2D} + 12x_{3A} + 11x_{3B} + 10x_{3C} + 14x_{3D}$ บาท

$= P_3$ บาท

ตัวแบบ : ค่าต่ำสุด $Z = 10^6 P_1 + P_2 + P_3$

โดยมีข้อจำกัด

$$
\begin{aligned}
y_1 + y_2 + y_3 &= 2 \\
x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} &\leqslant 17000y_1 \\
x_{2A} + x_{2C} + x_{2D} &\leqslant 16500y_2 \\
x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} + x_{3D} &\leqslant 17500y_3 \\
x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} &= 8500 \\
x_{1B} + x_{3B} &= 8000 \\
x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} &= 9000 \\
x_{2D} + x_{3D} &= 8000
\end{aligned}
$$

y_i = 0 หรือ 1 ทุกค่า $i = 1, 2, 3$

$x_{ij} \geqslant 0$ ทุกค่า $i = 1, 2, 3, \quad j = A, B, C, D$

ปัญหาประเภทนี้จะนำไปประยุกต์ใช้ในการกำหนดจำนวนและสถานที่ตั้งสิ่งอำนวยความสะดวกต่าง ๆ เช่น โรงพยาบาล สถานีตำรวจ ฯลฯ การประยุกต์ใช้ที่สำคัญของปัญหานี้ก็คือ ปัญหาการขนส่ง เป็นปัญหาเกี่ยวกับการพิจารณาจัดส่งสินค้าจากโรงงานที่อยู่ต่างท้องที่กันไปเก็บไว้ที่คลังสินค้า หรือส่งไปที่ศูนย์การค้า หรือลูกค้าที่อยู่ต่างเมืองกันอย่างไร จึงจะเสียค่าใช้จ่ายต่ำสุด ในปัญหาการมอบงานจะพิจารณาว่า จะมอบงานให้ผู้ใดทำ หรือเครื่องจักรตัวใดควรทำงานชิ้นไหน จึงจะทำให้เสียค่าใช้จ่ายต่ำสุดหรือก่อให้เกิดผลงานมากที่สุด ฯลฯ

1.2.4 ปัญหาสินค้าคงคลัง (Inventory Problem) เป็นปัญหาเกี่ยวกับการเก็บรักษาทรัพยากร หรือสินค้าเพื่อใช้ในการผลิตหรือการดำเนินงานในเวลาต่อไป ปัญหาจะอยู่ที่การตัดสินใจว่า ควรจะเก็บทรัพยากรอย่างไร ในปริมาณเท่าใด จึงจะเพียงพอต่อการนำไปใช้ในการผลิตหรือการดำเนินงาน โดยที่ทรัพยากรนั้นไม่เสื่อมคุณภาพ หรือไม่ทำให้ต้นทุนการผลิตและเก็บรักษาสูงเกินไป ในเรื่องการเก็บสินค้าคงคลังก็ต้องพิจารณาว่า ควรเก็บไว้ในปริมาณเท่าใด จึงจะเพียงพอต่อความต้องการของลูกค้า และจะเก็บไว้นานแค่ไหน จึงจะไม่ทำให้ค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาสูง ไม่ว่าจะเป็นการสั่งซื้อเข้ามาหรือผลิตเองก็ตาม ก็ต้องพิจารณาว่าการสั่งซื้อหรือผลิตในแต่ละครั้ง ควรจะมีปริมาณเท่าใด จึงจะดีที่สุด การศึกษาข้อมูลของค่าใช้จ่ายในการสั่งซื้อหรือผลิต การพยากรณ์ความต้องการในการใช้หรือความต้องการสินค้าของลูกค้าจะมีผลทำให้การตัดสินใจถูกต้อง มีความเชื่อมั่นสูง ดังเช่น ปัญหาในตัวอย่างที่ 1.3

นอกเหนือจากปัญหาที่กล่าวมาแล้ว ยังมีปัญหาที่ใช้โปรแกรมเชิงคณิตศาสตร์อีกมากที่ไม่ได้กล่าวถึงในที่นี้ เช่น ปัญหาการทดแทน (Replacement Problem) ปัญหาการควบคุมกระบวนการผลิตทางเคมี ปัญหาการจัดตารางการผลิตในเวลาและนอกเวลา ให้สอดคล้องกับความต้องการตามฤดูกาล ปัญหาการตลาด การธนาคาร การพาณิชย์ ปัญหาทางสาธารณูปโภคต่าง ๆ ปัญหาทางสังคมและทางการเมือง เป็นต้น นักศึกษาสามารถศึกษาค้นคว้าเรื่องราวเหล่านี้ได้จากหนังสืออ้างอิงท้ายเล่ม

1.3 เทคนิคหรือวิธีการที่ใช้ในปัญหาโปรแกรมเชิงคณิตศาสตร์

เทคนิคหรือวิธีการที่สำคัญ ๆ และศึกษากันมากได้แก่

1.3.1 โปรแกรมเส้นตรง (Linear Programming : LP) เป็นเทคนิคที่สำคัญและใช้กันแพร่หลายมากในปัจจุบัน LP ใช้กับปัญหาซึ่งความสัมพันธ์กันระหว่างตัวแปรทุกตัวเป็นแบบเชิงเส้น นั่นก็คือ การเปลี่ยนแปลงแต่ละหน่วยของตัวแปรตัวใดตัวหนึ่ง จะมีผลทำให้ปริมาณของตัวแปรอื่น ๆ ที่สัมพันธ์กันเปลี่ยนแปลงไปด้วยในอัตราส่วนที่คงที่ มักจะใช้กับปัญหาเกี่ยวกับการจัดสรรทรัพยากร ในเวลาใดเวลาหนึ่งที่มีให้ใช้ โดยไม่ทันเกิดการเปลี่ยนแปลงในทรัพยากรหรือวิธีเลือกใช้ทรัพยากร

ตัวแบบของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นเขียนได้ดังนี้

ค่าสูงสุด (หรือค่าต่ำสุด) $Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ **(1.4)**

โดยมีข้อจำกัด

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \{\leqslant, =, \geqslant\} b_i \quad i = 1, 2, \ldots, m \qquad \textbf{(1.5)}$$

$$x_j \geqslant 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, n \qquad \textbf{(1.6)}$$

ในเมื่อ c_j, b_i และ a_{ij} เป็นค่าคงที่ ทุก ๆ i และ j

ตัวอย่างของปัญหานี้ได้แก่ ตัวอย่างที่ 1.1, 1.4 และ 1.5 ฯลฯ

ปัจจุบันประเทศที่มีความเจริญทางวิชาการ นิยมใช้โปรแกรมเชิงเส้นกับปัญหาทางด้านธุรกิจ เศรษฐศาสตร์ อุตสาหกรรมและองค์การของรัฐอย่างกว้างขวาง เช่น ปัญหาในการวางแผนเกี่ยวกับการผลิตและสต๊อคสินค้า การวางแผนพัฒนาการเกษตร การทหาร การจัดการทางด้านโภชนาการ การจัดงบประมาณ และการให้บริการชุมชน เป็นต้น ทั้งนี้เนื่องจากว่า ปัญหานานาประการที่เกิดขึ้นในสาขาต่าง ๆ สามารถจำลองแบบได้หรืออย่างน้อยที่สุดก็ประมาณได้ด้วยตัวแบบของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น นอกจากนี้ยังมีเทคนิคที่มีประสิทธิภาพในการหาคำตอบ เช่น วิธีการซิมเพลกซ์ เมื่อโปรแกรมวิธีการนี้ลงในเครื่องคอมพิวเตอร์ จะสามารถแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น ที่มีตัวแปรนับร้อย และข้อจำกัดเป็นพัน ๆ ข้อได้ ดังนั้น แม้ว่าปัญหาที่แท้จริงจะยุ่งยากสลับซับซ้อน และโดยเนื้อแท้ไม่ได้มีความสัมพันธ์เชิงเส้น เราก็อาจปรับตัวแบบโดยใช้ตัวแปรและข้อจำกัดจำนวนมาก ให้เป็นตัวแบบเชิงเส้นตรงได้ และหากมีการเปลี่ยนแปลงใด ๆ ของข้อมูล ก็สามารถจัดการได้ด้วยวิธีการวิเคราะห์ความไวของตัวแบบโปรแกรมเชิงเส้น

1.3.2 โปรแกรมเลขจำนวนเต็ม (Integer Programming) เป็นโปรแกรมเชิงคณิตศาสตร์ที่มีข้อจำกัดของตัวแปรว่าจะต้องเป็นเลขจำนวนเต็มที่ไม่มีค่าเป็นลบ นั่นคือ

$$x_j = 0,1,2,\ldots \text{ ทุกค่า } j \tag{1.7}$$

ถ้าตัวแบบของปัญหาประกอบด้วย (1.4), (1.5) และ (1.7) นั่นคือปัญหาที่มีฟังก์ชัน f และ g_i ทุก ๆ i เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นตรง เราเรียกตัวแบบนี้ว่า โปรแกรมเลขจำนวนเต็มเชิงเส้น (Integer Linear Programming) กรณีที่มีตัวแปรบางตัวไม่มีค่าเป็นเลขจำนวนเต็ม เราเรียกโปรแกรมนี้ว่าเป็นแบบผสม

ปัญหาโปรแกรมเชิงจำนวนเต็มที่สำคัญ ได้แก่ ปัญหาการขนส่ง ปัญหาการมอบหมายงาน ปัญหาการจัดสรรงบประมาณ ปัญหาการจัดลำดับงาน เป็นต้น เทคนิคที่ใช้ในการหาคำตอบต่อปัญหาเหล่านี้ ไม่มีเทคนิคใดที่จัดว่าเป็นเทคนิคที่มีประสิทธิภาพโดยเฉพาะ แต่จะมีเทคนิคหลายแบบ แต่ละแบบจะเหมาะสมกับลักษณะของปัญหาหนึ่ง เช่น ใช้วิธีการขนส่ง (Transportation Method) กับปัญหาการขนส่ง หรือใช้วิธีการแจงนับ (Implicit Enumeration) กับปัญหาการเลือกโครงการที่จะลงทุน เป็นต้น

1.3.3 โปรแกรมพลวัต (Dynamic Programming) ใช้ในการแก้ปัญหาที่จะต้องตัดสินใจติดต่อกันเป็นขั้นตอนหลาย ๆ ขั้นตอน ลักษณะของปัญหาจะมีฟังก์ชัน f $g_1,g_2,\ldots,g_m$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร $x_1,x_2,\ldots,x_n$ ที่เป็นอิสระต่อกัน สามารถแยกเป็นปัญหาย่อยของแต่ละตัวแปร ซึ่งเรียกว่าขั้นตอน การหาคำตอบต่อปัญหาทั้งหมด จำเป็นต้องสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์ขึ้นมาให้เหมาะสมกับปัญหาย่อยแต่ละปัญหาโดยเฉพาะ ปัญหาทั้งหมดจะแยกเป็นปัญหาย่อย (ขั้นตอน) โดยที่ ตัวแบบของแต่ละปัญหาย่อยจะได้มาจากการเปลี่ยนตัวแบบปัจจุบัน เป็นตัวแบบที่เกี่ยวข้องกับตัวแบบของปัญหาย่อยต่อไป ฟังก์ชันที่แสดงความเกี่ยวข้องของตัวแบบ เรียกว่า ฟังก์ชันความสัมพันธ์ต่อเนื่อง (recursive function) เทคนิคการตัดสินใจจึงขึ้นอยู่กับปัญหาที่ต้องการหาค่าที่ดีที่สุดในแต่ละปัญหาย่อย (ขั้นตอน) ซึ่งเกี่ยวข้องกับตัวแปรที่ต้องการหาค่าดีที่สุดเพียงตัวเดียวเท่านั้น การคำนวณในขั้นตอนต่าง ๆ จะถูกเชื่อมโยงด้วยการคำนวณแบบต่อเนื่อง ในลักษณะที่ให้คำตอบที่เป็นไปได้ดีที่สุด ต่อปัญหาทั้งหมด เทคนิคของการคำนวณจะขึ้นอยู่กับ หลักของค่าดีที่สุด นั่นคือนโยบายที่ดีที่สุด ที่มีหลักเกณฑ์ว่า **ไม่ว่าจุดเริ่มต้นและตัวแปรตัดสินใจจะเป็นอย่างไร ตัวแปรตัดสินใจที่เหลือต้องประกอบกันขึ้นเป็นนโยบายที่ดีที่สุดกับผลที่มาจากการตัดสินใจครั้งแรก**

ตัวอย่างเช่น ปัญหาในตัวอย่างที่ 1.2 สามารถหาคำตอบโดยใช้โปรแกรมพลวัตได้ จากตัวอย่างที่ 1.2 เราจะแยกการแก้ปัญหาเป็น 2 ขั้นตอน นั่นคือ แยกปัญหาเดิมเป็นปัญหาย่อย 2 ปัญหา จะได้ตัวแบบของแต่ละปัญหา ดังนี้

ขั้นตอนหรือปัญหาย่อย 1

$$\begin{aligned} \text{ค่าสูงสุด } f_1(x,\ x_1) &= 40x_1 - x_1^2 \\ \text{โดยมีข้อจำกัด } x_1 &\leqslant x \leqslant 50 \\ x_1 &= 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

ขั้นตอนหรือปัญหาย่อย 2

$$\begin{aligned} \text{ค่าสูงสุด } f_2(x,\ x_2) &= 80x_2 - x_2^2 + f_1^*(50 - x_2) \\ \text{โดยมีข้อจำกัด } x_2 &\leqslant 50 \\ x_2 &= 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

ในเมื่อ $f_1^*(50 - x_2)$ เป็นค่าสูงสุดของฟังก์ชันเป้าหมายในขั้นตอนที่ 1 ณ จุด $x_1 = 50 - x_2$

การหาคำตอบสำหรับตัวอย่างที่ 1.2 จะเป็นการหาคำตอบที่เหมาะสมในแต่ละขั้นตอนติดต่อกันไป

1.8.4 โปรแกรมเชิงน่าจะเป็น (Probabilistic Programming) ใช้แก้ปัญหาภายใต้การเสี่ยงหรือภายใต้ความไม่แน่นอน เราไม่อาจทราบแน่นอนถึงสิ่งที่จะเกิดขึ้นในอนาคต แต่จากการศึกษาข้อมูลก็พอจะคาดคะเนความน่าจะเป็นของสิ่งที่จะเกิดขึ้นได้ โปรแกรมเชิงน่าจะเป็นที่จะกล่าวถึงในที่นี้ก็คือโปรแกรมเชิงสถิติ (Stochastic Programming) และกระบวนการลูกโซ่มาร์คอฟ (Markov chain)

เมื่อตัวพารามิเตอร์ในตัวแบบโปรแกรมเชิงคณิตศาสตร์ ถูกกำหนดว่า เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม เราใช้วิธีการของปัญหาการโปรแกรมเชิงสถิติ (Stochastic Programming Problem) ในการหาคำตอบ ไม่ว่าลักษณะของปัญหาจะเป็นแบบเชิงเส้น หรือแบบพลวัตก็ตาม ถ้าเราทราบการแจกแจงน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่ม การหาคำตอบจะใช้เทคนิคการตัดสินใจภายใต้การเสี่ยง แต่ถ้าไม่ทราบการแจกแจงของตัวแปรอย่างน้อย 1 ตัว ก็ต้องใช้การตัดสินใจภายใต้ความไม่แน่นอน โดยทั่วไปเราจะพิจารณาเป้าหมายของปัญหาเหล่านี้ด้วย ค่าสูงสุดของค่าคาดหมายของฟังก์ชันเป้าหมาย ดังตัวอย่างที่ 1.3

สำหรับกระบวนการมาร์คอฟ เป็นการนำเอาทฤษฎีของ Andrei A. Markov นักคณิตศาสตร์ชาวรุสเซีย มาประยุกต์ใช้ในการพยากรณ์ความนิยมสินค้าของลูกค้าในท้องตลาด

ของบริษัทผู้ผลิตสินค้าประเภทเดียวกัน ว่ามีโอกาสของการเปลี่ยนแปรอย่างไร มีส่วนแบ่งของลูกค้าอย่างไร และภายในช่วงระยะเวลาหนึ่ง จะมีส่วนแบ่งเป็นอย่างไร นอกจากนี้ยังนำไปใช้ในการพยากรณ์คนงานแต่ละระดับ และอื่น ๆ อีกมาก

1.3.5 **โปรแกรมที่ไม่เป็นเส้นตรง** (Nonlinear Programming) เป็นโปรแกรมเชิงคณิตศาสตร์ที่ใช้หาคำตอบ กรณีที่ตัวแปรตัดสินใจมีความสัมพันธ์กันในลักษณะที่ไม่เป็นเส้นตรง นั่นคือ จะมีฟังก์ชัน $f, g_1, g_2, \ldots, g_m$ ใน (1.1) และ (1.2) อย่างน้อยที่สุด 1 ฟังก์ชันไม่เป็นเส้นตรง ปัญหาประเภทนี้มักจะประยุกต์ใช้กับปัญหาทางด้านการพยากรณ์ การกำหนดการผลิต การควบคุมสินค้าคงคลัง การควบคุมคุณภาพ การซ่อมแซมและการบำรุงรักษา การออกแบบกระบวนการ วิธีการทางบัญชีและการจัดสรรงบประมาณ เป็นต้น การหาคำตอบต่อปัญหาโปรแกรมที่ไม่เป็นเส้นตรง ยุ่งยากกว่าปัญหาการโปรแกรมที่เป็นเส้นตรงมาก ไม่มีอัลกอริทึมใดโดยเฉพาะที่จะนำมาใช้หาคำตอบ แต่มีอัลกอริทึมจำนวนมากที่ได้ถูกปรับปรุงจนเป็นที่ยอมรับและนำไปใช้อย่างได้ผลในทางปฏิบัติ อัลกอริทึมของแต่ละเทคนิคจะมีหลักการใช้ที่เหมาะสมกับสภาพความเป็นจริงที่เกิดขึ้น สามารถหาคำตอบได้โดยระบบคอมพิวเตอร์ที่ทันสมัย

ปัญหาโปรแกรมที่ไม่เป็นเส้นตรงที่สำคัญปัญหาหนึ่งก็คือ ปัญหาการโปรแกรมเชิงกำลังสอง (Quadratic Programming Problem) เป็นปัญหาของการหาค่าที่ดีที่สุด (ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด) ของฟังก์ชันเป้าหมาย ซึ่งเป็นฟังก์ชันกำลังสอง โดยมีข้อจำกัดของปัญหา เป็นสมการหรืออสมการเชิงเส้น เขียนตัวแบบได้ดังนี้

$$\text{ค่าที่ดีที่สุด } Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} q_{jk} x_j x_k \tag{1.8}$$

$$\text{โดยมีข้อจำกัด } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \{\leqslant, =, \geqslant\} b_i \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{1.9}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{1.10}$$

ในเมื่อ c_j, b_i, a_{ij} และ q_{jk} เป็นค่าคงที่ $q_{jk} = q_{kj}$

ตัวแบบ (1.8) – (1.10) นิยมใช้เพื่อศึกษาตัวแบบของการดำเนินงานของบริษัทหนึ่งในตลาดที่มีคุณสมบัติเป็นแบบการแข่งขันที่ไม่สมบูรณ์ ถ้าบริษัทจำหน่ายผลผลิตในตลาดการแข่งขันที่ไม่สมบูรณ์ รายได้ทั้งหมดจะถือว่าเป็นฟังก์ชันกำลังสอง แต่ถ้าบริษัทผู้ซื้อวัสดุอุปกรณ์เข้ามาเพื่อการผลิต ค่าใช้จ่ายของการผลิตจะเป็นฟังก์ชันกำลังสอง

นอกจากวิธีการดังกล่าวข้างต้น ยังมีเทคนิคหรือวิธีการอื่น ๆ อีก ที่นักศึกษาจะได้ศึกษาราย ละเอียด ในวิชาเหล่านั้นโดยเฉพาะ ตัวอย่างเช่น

โปรแกรมพาราเมตริก (Parametric Programming) ใช้ในการแก้ปัญหา เกี่ยวกับ กรณีที่มีการเปลี่ยนแปลง ผลกำไรในการผลิตต่อชิ้น ของสินค้าหลาย ๆ ชนิด พร้อม ๆ กัน หรือมีการเปลี่ยนแปลง ทรัพยากรที่ใช้ในการผลิต เช่น ปริมาณวัตถุดิบ แรงงาน หรือ ชั่วโมงการทำงานของเครื่องจักร หรือเงื่อนไขอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการผลิต ผลกระทบที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงเหล่านี้ จะเป็นอย่างไร จะยังคงการผลิตแบบเดิมหรือควรจะตัดสินใจอย่างไร ต่อไป

ตัวแบบข่ายงานรวมทั้งเพอร์ทและซีพีเอม (Network Models including PERT-CPM :OR 414) ใช้ในปัญหาการควบคุมงาน ให้เสร็จทันเวลาตามกำหนด สำหรับโครงการใหญ่ ๆ อาจแบ่งงานออกเป็นงานย่อย ๆ งานย่อยใดที่อาจมีเวลาล่าช้าได้ โดยไม่เสียงานใหญ่ ก็ไม่จำเป็นต้องควบคุมเข้มงวดมากนัก เพียงแต่ระวังไม่ให้เสียงานใหญ่ก็พอ งานย่อยใดที่ไม่สามารถจะเสร็จล่าช้ากว่ากำหนดได้เลย เพราะจะเกิดผลกระทบ ทำให้งานทั้งโครงการล่าช้าด้วย งานย่อยประเภทนี้ต้องมีการควบคุมเข้มงวด ให้เสร็จทันตามกำหนด วิธีการควบคุมงานให้เสร็จทันตามกำหนดเวลานี้ จะใช้เทคนิคทางคณิตศาสตร์ ที่เรียกว่า PERT(Program Evaluation and Review Techniques) ในกรณีที่ฝ่ายจัดทำ ไม่อาจทำงาน ให้เสร็จทันตามเวลาที่กำหนด ฝ่ายจัดทำจำเป็นจะต้องทราบว่างานย่อยแต่ละงาน สามารถลดระยะเวลา ให้เสร็จทันตามกำหนด ได้อย่างไร เช่น ควรจะเพิ่มคนงาน หรือเพิ่มการทำงานล่วงเวลา หรือเพิ่มเครื่องจักรช่วยงาน เป็นต้น เพื่อจะได้ตัดสินใจว่า จะใช้วิธีการใดที่จะทำให้ เสียค่าใช้จ่ายเพิ่มขึ้นน้อยที่สุด โดยพิจารณาเปรียบเทียบกัน ระหว่างความเสียหายอันเกิดจากงานไม่เสร็จทันตามกำหนด กับ ค่าใช้จ่ายที่เกิดจากการใช้ปัจจัยในการทำงานเพิ่มขึ้น เทคนิคทางคณิตศาสตร์ที่ใช้สำหรับแก้ปัญหานี้ เรียกว่า CPM(Critical Path Method)

ทฤษฎีเกม (Game Theory : OR 315) ใช้ในปัญหาการตัดสินใจ ในการประกอบธุรกิจ ซึ่งจะต้องมีคู่แข่งขัน จึงจำเป็นต้องรู้ว่า ควรจะเลือกใช้กลยุทธใด ในการแข่งขันกับผู้ประกอบการตรงข้าม

ตัวแบบสินค้าคงคลัง (Inventory Models) ใช้ในปัญหาที่เกี่ยวกับ การคำนวณหาจำนวนวัสดุหรือสินค้าที่สั่งซื้อหรือผลิต เพื่อจัดเตรียมสำรองไว้ สำหรับรอการผลิตหรือรอการขาย ในแต่ละงวดว่า ควรจะสั่งซื้อหรือผลิต อย่างไร จึงจะเพียงพอและสามารถผลิตออกมาขายทันเวลา ตามความต้องการของสินค้าโดยสม่ำเสมอ โดยมีเป้าหมายที่จะทำให้ เสียค่าใช้จ่ายรวมต่ำสุด

แบบฝึกหัดที่ 1

1. โรงงานแห่งหนึ่งผลิตสินค้า 4 ประเภท เพื่อป้อนตลาด ในแต่ละวันโรงงานมีวัตถุดิบและแรงงานที่จะนำมาใช้ในการผลิต เป็นจำนวน 240 กิโลกรัม และ 400 ชั่วโมง ตามลำดับ สินค้าที่ผลิตได้จะถูกนำไปเก็บที่คลังสินค้า เพื่อรอการส่งไปที่ตลาดต่อไป คลังสินค้าของโรงงานนี้มีพื้นที่วางสินค้าได้ 2000 ตารางเมตร รายละเอียดเกี่ยวกับการผลิตและการจำหน่ายมีดังนี้

ประเภทของสินค้า	ก	ข	ค	ง
ขนาดของสินค้า(ตร.เมตร/หน่วย)	20	60	40	20
วัตถุดิบ(กิโลกรัม/หน่วย)	3	4	3	2.5
แรงงาน(ชั่วโมง/หน่วย)	3	9	5	4.5
ต้นทุนการผลิต(บาท/หน่วย)	18	25	20	17
ราคาขาย(บาท/หน่วย)	45	60	60	45

โรงงานควรวางแผนการผลิตในแต่ละวันอย่างไร จึงจะดีที่สุด จงเขียนตัวแบบของปัญหานี้

<u>กำหนดตัวแปรตัดสินใจ</u>

โรงงานวางแผนการผลิตสินค้าในแต่ละวัน ดังนี้

ผลิตสินค้า ก = x_1 หน่วย

ผลิตสินค้า ข = x_2 หน่วย

ผลิตสินค้า ค = x_3 หน่วย

ผลิตสินค้า ง = x_4 หน่วย

หาฟังก์ชันเป้าหมาย นั่นคือ ฟังก์ชันของกำไร เราจะได้

กำไร Z = ราคาขาย - ต้นทุนการผลิต

ต้นทุนการผลิตต่อวัน = $18x_1 + 25x_2 + 20x_3 + 17x_4$ บาท

ราคาขายสินค้าต่อวัน = $45x_1 + 60x_2 + 60x_3 + 45x_4$ บาท

ดังนั้น กำไรที่คาดว่าจะได้จากการจำหน่ายต่อวัน Z

$$= 27x_1 + 35x_2 + 40x_3 + 28x_4$$

<u>เขียนตัวแบบทางคณิตศาสตร์</u>

หาค่าสูงสุด $Z = 27x_1 + 35x_2 + 40x_3 + 28x_4$

โดยมีข้อจำกัด

$$20x_1 + 60x_2 + 40x_3 + 20x_4 \leq 2000$$

$$3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2.5x_4 \leq 240$$

$$3x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 4.5x_4 \leq 400$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

2. บริษัทคิดวางแผนในการผลิตน้ำยา 4 สูตร น้ำแต่ละสูตร จะมี ส่วนประกอบของสาร 2 ประเภท ใช้ปริมาณการผสมต่างกัน ตามรายละเอียด ดังต่อไปนี้

ประเภทของน้ำยา	สูตรP	สูตรQ	สูตรR	สูตรS	ปริมาณสารที่มี
สารประกอบ A(ลิตร)	1.5	1.0	3.0	4.5	2400
สารประกอบ B(ลิตร)	0.5	0.5	1.0	0.5	900
กำไร(บาทต่อลิตร)	48	36	100	128	

จากการวิจัยตลาด คาดหมายว่า ความต้องการของตลาดน้ำยาทำความสะอาด อาจเป็นสูตรP 2400 ลิตร หรือ สูตรQ 1200 ลิตร หรือ สูตรR 1200 ลิตร หรือ สูตรS 300 ลิตร หรือทุกชนิดรวมกัน ตามอัตราส่วนความต้องการ ก็ได้ บริษัทควรวางแผนการผลิตอย่างไร จึงจะดีที่สุด จงเขียนตัวแบบทางคณิตศาสตร์ของปัญหานี้

<u>กำหนดตัวแปรตัดสินใจ</u>

บริษัทวางแผนการผลิตน้ำยาแต่ละชนิด ดังนี้

ผลิตน้ำยาสูตร P = x_1 ลิตร

ผลิตน้ำยาสูตร Q = x_2 ลิตร

ผลิตน้ำยาสูตร R = x_3 ลิตร

ผลิตน้ำยาสูตร S = x_4 ลิตร

<u>เขียนตัวแบบทางคณิตศาสตร์</u>

หาค่าสูงสุด $Z = 48x_1 + 36x_2 + 100x_3 + 128x_4$

โดยมีข้อจำกัด

$$1.5x_1 + x_2 + 3x_3 + 4.5x_4 \leq 2400$$

$$0.5x_1 + 0.5x_2 + x_3 + 0.5x_4 \leq 900$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 8x_4 \leq 2400$$

$$x_1 \ , \ x_2 \ , \ x_3 \ , \ x_4 \geq 0$$

3. จงหาสัดส่วนที่เหมาะสมของถ่านหิน 3 ชนิด ราคา 120 , 132 และ 108 บาท ตามลำดับ ซึ่งจะนำมาผสมกัน ให้ได้เชื้อเพลิงที่มีราคาต่ำสุด ส่วนประกอบของเชื้อเพลิงที่ได้ จะต้องมีปริมาณกำมะถันไม่เกิน 1.2 % และ ให้ปริมาณความร้อน 10 หน่วยต่อกิโลกรัม ถ่านหินแต่ละชนิด มีปริมาณกำมะถัน 0.9 % , 1.1 % และ 1.4 % ตามลำดับ ให้ความร้อนได้ 12 , 9 และ 8 หน่วยต่อกิโลกรัม ตามลำดับ จงเขียนตัวแบบทางคณิตศาสตร์ของปัญหานี้

<u>กำหนดตัวแปรตัดสินใจ</u>

กำหนดส่วนผสมของเชื้อเพลิง ประกอบด้วย

ถ่านหินชนิดที่ 1 = x_1 ส่วน

ถ่านหินชนิดที่ 2 = x_2 ส่วน

ถ่านหินชนิดที่ 3 = x_3 ส่วน

<u>เขียนตัวแบบทางคณิตศาสตร์</u>

หาค่าต่ำสุด $Z = 120x_1 + 132x_2 + 108x_3$ (ราคาเชื้อเพลิง : บาท)

โดยมีข้อจำกัด

$x_1 + x_2 + x_3 = 1$ (ปริมาณเชื้อเพลิง)

$0.9x_1 + 1.1x_2 + 1.4x_3 \leq 1.2$ (% ของปริมาณกำมะถัน)

$12x_1 + 9x_2 + 8x_3 = 10$ (ปริมาณความร้อน)

$x_1 \ , \ x_2 \ , \ x_3 \geq 0$

(นักศึกษาอาจกำหนดปริมาณถ่านหินชนิดที่ 3 = $1-x_1-x_2$ ส่วน ก็ได้)

4. ในปีนี้ธนาคารไทยจำกัด จะปล่อยเงินกู้จำนวน 20 ล้านบาท เพื่อบริการลูกค้า โดยมีวงเงินสินเชื่อให้เลือกได้ 5 ประเภทด้วยกัน คือ เงินกู้ซื้อบ้าน การอุตสาหกรรม การค้า ซื้อรถยนต์ และ เงินกู้สวัสดิการ ธนาคารคาดว่า จะได้ดอกเบี้ยจากเงินกู้แต่ละประเภท เท่ากับ 14 % , 15 % , 16 % , 18 % และ 20 % ตามลำดับ ตามกฎหมายและนโยบายของธนาคารกำหนดเงื่อนไขของการปล่อยเงินกู้แต่ละประเภทดังนี้

(1) เงินกู้สวัสดิการ ให้กู้สูงสุด 3 ล้านบาท

(2) เงินกู้ซื้อบ้าน การอุตสาหกรรม หรือ เพื่อการค้า ในวงเงินรวมกันไม่ต่ำกว่า 50 % ของเงินกู้ทั้งหมด

(3) เงินกู้เพื่อการค้า หรือซื้อรถยนต์ จะต้องไม่เกิน 60 % ของเงินกู้ทั้งหมด

ธนาคารควรปล่อยเงินกู้ประเภทใด ในวงเงินเท่าใด จึงจะดีที่สุด

จงเขียนตัวแบบทางคณิตศาสตร์ของปัญหานี้

<u>กำหนดตัวแปรตัดสินใจ</u>

กำหนดว่า ธนาคารปล่อยเงินกู้แต่ละประเภท ดังนี้

เงินกู้ซื้อบ้าน = x_1 ล้านบาท

เงินกู้เพื่อการอุตสาหกรรม = x_2 ล้านบาท

เงินกู้เพื่อการค้า = x_3 ล้านบาท

เงินกู้ซื้อรถยนต์ = x_4 ล้านบาท

เงินกู้สวัสดิการ = x_5 ล้านบาท

<u>เขียนตัวแบบทางคณิตศาสตร์</u>

หาค่าสูงสุด $Z = 0.14x_1 + 0.15x_2 + 0.16x_3 + 0.18x_4 + 0.20x_5$ (ดอกเบี้ย : ล้านบาท)

โดยมีข้อจำกัด

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 20$ (ปริมาณเงินกู้ : ล้านบาท)

$x_5 \leq 3$

$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 \geq 0$

$-3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 \leq 0$

$x_j \; (j = 1,2,3,4,5) \geq 0$

5. ความต้องการต่ำสุดของสินค้า A , B และ C ในแต่ละวัน มีปริมาณ 36 , 45 และ 10 หน่วย ตามลำดับ โรงงานมีเครื่องจักร X , Y , S และ T ที่จะใช้ในการผลิต เครื่องจักรแต่ละเครื่องมีความสามารถในการผลิต 480 นาทีต่อวัน การผลิตสินค้า A ต้องผ่านขั้นตอนการผลิตของเครื่องจักร X , S และ T การผลิตสินค้า B มีกระบวนการผลิต 2 แบบ แบบแรกจะใช้เครื่องจักร X กับ S ส่วนแบบที่สองจะใช้เครื่องจักร Y กับ T สำหรับสินค้า C อาจผลิตโดยใช้เครื่องจักร X กับ S หรือ ผลิตโดยใช้เครื่องจักร Y , S และ T ขั้นตอนในการทำงานของเครื่องจักรและค่าใช้จ่ายในการผลิตของเครื่องจักร มีดังนี้

		เวลาที่ใช้ในการผลิตของเครื่องจักร (นาที/หน่วย)			
สินค้า	กระบวนการ	X	Y	S	T
A	1	10		6	3
B	1	8		10	
	2		6		9
C	I	8		16	
	2		10	3	8
ค่าใช้จ่ายในการผลิต(บาท/นาที)		10.0	12.5	6.0	7.5

โรงงานควรจัดตารางการผลิตแต่ละวันอย่างไร จึงจะดีที่สุด จงเขียนตัวแบบทางคณิตศาสตร์

กำหนดตัวแปรตัดสินใจ

กำหนดตารางการผลิตในแต่ละวัน ดังนี้

ผลิตสินค้า A กระบวนการที่ 1 = x_1 หน่วย

ผลิตสินค้า B กระบวนการที่ 1 = x_2 หน่วย

ผลิตสินค้า B กระบวนการที่ 2 = x_3 หน่วย

ผลิตสินค้า C กระบวนการที่ 1 = x_4 หน่วย

ผลิตสินค้า C กระบวนการที่ 2 = x_5 หน่วย

เขียนตัวแบบทางคณิตศาสตร์

โดยที่ค่าใช้จ่ายในการผลิตกำหนดต่อนาที ดังนั้น เราควรจะหาเวลาการทำงานของเครื่องจักรแต่ละเครื่องก่อน ดังนี้

เครื่องจักร X ใช้เวลาในการทำงาน = $10x_1 + 8x_2 + 8x_4$ นาที

เครื่องจักร Y ใช้เวลาในการทำงาน = $6x_3 + 10x_5$ นาที

เครื่องจักร S ใช้เวลาในการทำงาน = $6x_1 + 10x_2 + 16x_4 + 3x_5$ นาที

เครื่องจักร T ใช้เวลาในการทำงาน = $3x_1 + 9x_3 + 8x_5$ นาที

ดังนั้น ค่าใช้จ่ายในการผลิตแต่ละวัน Z จะเท่ากับ

$10(10x_1+8x_2+8x_4) + 12.5(6x_3+10x_5) + 6(6x_1+10x_2+16x_4+3x_5) + 7.5(3x_1+9x_3+8x_5)$

เขียนตัวแบบทางคณิต

หาค่าต่ำสุด $Z = 158.5x_1 + 140x_2 + 142.5x_3 + 176x_4 + 203x_5$

โดยข้อจำกัด

$$
\begin{aligned}
x_1 \quad\quad\quad\quad\quad\quad &\geq 36 \\
x_2 + x_3 \quad\quad\quad\quad &\geq 45 \\
x_4 + x_5 &\geq 10 \\
10x_1 + 8x_2 \quad + 8x_4 \quad\quad &\leq 480 \\
6x_3 \quad +10x_5 &\leq 480 \\
6x_1 + 10x_2 \quad + 16x_4 + 3x_5 &\leq 480 \\
3x_1 \quad + 9x_3 \quad\quad + 8x_5 &\leq 480 \\
x_j \ (j = 1,2,3,4,5) \quad &\geq 0
\end{aligned}
$$

6. แผนกขายสินค้า A ได้ประเมินความต้องการสินค้า ใน 3 เดือนข้างหน้า เท่ากับ 220 , 250 และ 200 หน่วย ตามลำดับ ขณะนี้โรงงานมีปัจจัยเพียงพอต่อการผลิตแต่ละเดือน เท่ากับ 250 , 230 และ 240 หน่วย ตามลำดับ ต้นทุนการผลิตแปรผันไปในแต่ละเดือน คิดเป็นอัตรา 15 , 18 และ 14 บาทต่อหน่วย ตามลำดับ โรงงานควรจัดตารางการผลิตแต่ละเดือน อย่างไร จึงจะเพียงพอกับความต้องการ แต่ให้มีต้นทุนต่ำสุด จงเขียนตัวแบบทางคณิตศาสตร์

<u>กำหนดตัวแปรตัดสินใจ</u>

โรงงานจัดตารางการผลิตในแต่ละเดือน ดังนี้

ผลิตสินค้าในเดือนแรก = x_1 หน่วย

ผลิตสินค้าในเดือนที่สอง = x_2 หน่วย

ผลิตสินค้าในเดือนที่สาม = x_3 หน่วย

<u>เขียนตัวแบบทางคณิตศาสตร์</u>

หาค่าต่ำสุด $Z = 15x_1 + 18x_2 + 14x_3$ (ต้นทุนการผลิต : บาท)

โดยมีข้อจำกัด

$x_1 \geq 220$ (ความต้องการในเดือนแรก)

$x_1 + x_2 \geq 470$ (ความต้องการในสองเดือนแรก)

$x_1 + x_2 + x_3 \geq 670$ (ความต้องการในสามเดือนแรก)

$x_1 \leq 250$ (ปัจจัยการผลิตในเดือนแรก)

$x_2 \leq 230$ (ปัจจัยการผลิตในเดือนที่สอง)

$x_3 \leq 240$ (ปัจจัยการผลิตในเดือนที่สาม)

$x_j \ (j = 1,2,3) \geq 0$

7. นายพานิชต้องการส่งสินค้าจำนวน 5 ลอท แต่ละลอทมีขนาด 10 ชิ้น ไปจำหน่ายที่ศูนย์การค้า 4 แห่ง คาดว่าจะได้กำไรจากการจำหน่ายแต่ละศูนย์การค้า เท่ากับ 80 , 120 , 100 และ 90 บาทต่อลอท ตามลำดับ ถ้าความต้องการสินค้าของศูนย์การค้าแต่ละแห่ง เท่ากับ 4 , 2 , 2 และ 3 ลอท ตามลำดับ นายพานิชควรจัดส่งสินค้าไปจำหน่ายอย่างไรจึงจะดีที่สุด จงเขียนตัวแบบทางคณิตศาสตร์

<u>กำหนดตัวแปรตัดสินใจ</u>

กำหนดว่า นายพานิชส่งสินค้าไปจำหน่ายแต่ละศูนย์ ดังนี้

ส่งไปศูนย์การค้าแรก = x_1 ลอท

ส่งไปศูนย์การค้าที่สอง = x_2 ลอท

ส่งไปศูนย์การค้าที่สาม = x_3 ลอท

ส่งไปศูนย์การค้าที่สี่ = x_4 ลอท

<u>เขียนตัวแบบทางคณิตศาสตร์</u>

หาค่าสูงสุด $Z = 80x_1 + 120x_2 + 100x_3 + 90x_4$

โดยมีข้อจำกัด

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 5 \\
x_1 &\leq 4 \\
x_2 &\leq 2 \\
x_3 &\leq 2 \\
x_4 &\leq 3 \\
x_j \ (j = 1,2,3,4) &\geq 0
\end{aligned}
$$

8. บริษัทผลิตผลไม้กระป๋อง ต้องการขยายการผลิต โดยการสร้างโรงงานผลิตเพิ่มใหม่ สถานที่ที่อยู่ในข่ายการพิจารณา อยู่ในเขตต่าง ๆ 3 แห่ง รวมทั้งพิจารณาการสร้างคลังสินค้าใหม่ไม่เกิน 1 แห่ง ในสถานที่ที่สร้างโรงงานใหม่ด้วย บริษัทมีเงินลงทุน ที่จะใช้ในการสร้างโรงงานและคลังสินค้า 20 ล้านบาท บริษัทคาดหมาย ปริมาณเงินที่จะลงทุน(ล้านบาท) และมูลค่าปัจจุบันสุทธิ(ล้านบาท) ที่จะได้จากการสร้างโรงงานและคลังสินค้าในแต่ละสถานที่ ดังนี้

เขต	เงินลงทุน(ล้านบาท)		มูลค่าปัจจุบันสุทธิ(ล้านบาท)	
	โรงงาน	คลังสินค้า	โรงงาน	คลังสินค้า
1	12	10	18	12
2	7	6	12	10
3	6	4	10	8

บริษัทควรสร้างโรงงานและคลังสินค้า ในเขตใดบ้าง จึงจะทำให้ได้มูลค่าปัจจุบันสุทธิ มากที่สุด จงกำหนดตัวแปรตัดสินใจ และเขียนตัวแบบทางคณิตศาสตร์

<u>กำหนดตัวแปรตัดสินใจ</u>

กำหนด $x_j = 1$ ถ้าบริษัทเลือกสร้างโรงงานที่เขต j , j=1,2,3

$= 0$ ถ้าบริษัทไม่สร้างโรงงานที่เขต j , j=1,2,3

$x_j = 1$ ถ้าบริษัทเลือกสร้างคลังสินค้าที่เขต j – 3 , j=4,5,6

$= 0$ ถ้าบริษัทไม่สร้างคลังสินค้าที่เขต j – 3 , j=4,5,6

โดยที่การสร้างคลังสินค้า กำหนดว่า จะสร้างไม่เกิน 1 แห่ง ข้อจำกัดนี้จึงกำหนดได้ ดังนี้

$$x_4 + x_5 + x_6 \leq 1$$

และการสร้างคลังสินค้า จะสร้างในเขตที่สร้างโรงงานเท่านั้น เราจะได้ข้อจำกัดเหล่านี้คือ

$x_4 \leq x_1$ หรือ $x_1 - x_4 \geq 0$

$x_5 \leq x_2$ หรือ $x_2 - x_5 \geq 0$

$x_6 \leq x_3$ หรือ $x_3 - x_6 \geq 0$

เขียนตัวแบบทางคณิตศาสตร์ ได้ดังนี้

หาค่าสูงสุด $Z = 18x_1 + 12x_2 + 10x_3 + 12x_4 + 10x_5 + 8x_6$

โดยมีข้อจำกัด

$$\begin{aligned}
12x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 10x_4 + 6x_5 + 4x_6 &\leq 20 \\
x_4 + x_5 + x_6 &\leq 1 \\
x_1 - x_4 &\geq 0 \\
x_2 - x_5 &\geq 0 \\
x_3 - x_6 &\geq 0 \\
x_j \ (j = 1,2,3,4,5,6) &= 0 \text{ หรือ } 1
\end{aligned}$$

9. สำนักพิมพ์แห่งหนึ่ง มีหนังสือรอการพิมพ์อยู่ 4 ประเภท ในสัปดาห์นี้สำนักพิมพ์ มีแรงงานคนและเครื่องจักรที่จะใช้ ในแผนกการพิมพ์ 4,500 ชั่วโมง ในแผนกเข้าเล่มเย็บปก 4,000 ชั่วโมง และมีกระดาษที่จะใช้ในการพิมพ์ 5,900 หน่วย การพิมพ์หนังสือแต่ละประเภท แต่ละเล่ม คาดว่า จะใช้เวลาโดยเฉลี่ยในแต่ละแผนก และใช้กระดาษในการพิมพ์ ดังนี้

ประเภทหนังสือ	1	2	3	4
แผนกพิมพ์(ชั่วโมง)	0.1	0.3	0.8	0.4
แผนกเย็บ(ชั่วโมง)	0.2	0.1	0.1	0.3
จำนวนกระดาษ(หน่วย)	0.2	0.3	0.2	0.3

กำไรที่คาดว่าจะได้จากการจำหน่ายหนังสือแต่ละประเภท เท่ากับ 24 , 60 , 96 และ 72 บาทต่อเล่ม ตามลำดับ สำนักพิมพ์ควรวางแผนการผลิตอย่างไร จึงจะดีที่สุด จงกำหนดตัวแปรตัดสินใจและเขียนตัวแบบทางคณิตศาสตร์

10. เพื่อการโภชนาการที่ดีของครอบครัว แม่บ้านได้กำหนดรายการอาหารในแต่ละสัปดาห์ ว่าจะต้องมีอาหารประเภทผักทุกวัน วันละ 2 มื้อ คาดว่าจะได้คุณค่าอาหารจากผัก คือ ไนอาซิน ฟอสฟอรัส วิตามินเอ วิตามินซีและเหล็ก อย่างน้อย 5 , 390 , 17500 ,274 และ 7.20 มิลลิกรัม ตามลำดับ เพื่อมิให้เกิดความจำเจและเบื่อหน่าย แม่บ้านจัดซื้อผัก 5 ชนิด มาปรุงอาหารสลับกันไปในแต่ละมื้อ เฉพาะผักชนิดแรก จะซื้อมาไม่เกิน 2 ครั้งต่อสัปดาห์ ส่วนผักชนิดอื่น ๆ แต่ละชนิด จะซื้อมาไม่เกิน 4 ครั้งต่อสัปดาห์ คุณค่าอาหารตลอดจนราคาของผักที่จัดซื้อมาในแต่ละครั้ง มีดังต่อไปนี้

คุณค่าอาหาร	ชนิดของผัก				
	1	2	3	4	5
ไนอาซิน(มิลิกรัม)	0.15	0.30	0.35	0.60	0.80
ฟอสฟอรัส(มิลิกรัม)	30	12	33	60	90
วิตามินเอ(มิลิกรัม)	75	415	9065	2550	235
วิตามินซี(มิลิกรัม)	30	9	3	59	9
เหล็ก(มิลิกรัม)	0.48	0.54	0.54	1.26	0.60
ราคา (บาท)	5.00	12.50	12.50	20.00	7.50

แม่บ้านควรจัดสรรการซื้อ อย่างไร จึงจะดีที่สุด จงกำหนดตัวแปรตัดสินใจและเขียนตัวแบบทางคณิตศาสตร์

11. โรงพยาบาลเอกชนแห่งหนึ่ง เปิดบริการ 24 ชั่วโมง จึงมีความจำเป็นต้องมีนางพยาบาลประจำอยู่อย่างน้อยที่สุด ในแต่ละช่วงเวลา ดังต่อไปนี้

ช่วงที่	1	2	3	4	5	6
เวลา	7 - 11	11 - 15	15 - 19	19 - 23	23 - 3	3 - 7
จำนวนที่ต้องการ	55	60	70	45	15	25

นางพยาบาลแต่ละคนจะทำงาน 8 ชั่วโมง ติดต่อกัน โรงพยาบาลควรจัดสรรการทำงานของนางพยาบาลอย่างไร จึงจะเพียงพอกับความต้องการในแต่ละช่วงเวลา แต่ให้มีจำนวนนางพยาบาลที่ทำงานแต่ละวันต่ำสุด จงกำหนดตัวแปรตัดสินใจและเขียนตัวแบบทางคณิตศาสตร์

12. บริษัทเงินทุนสยามคาดว่า จะสามารถหาเงินทุนในระยะแรกได้ 80 ล้านบาท ระยะที่สองในอีก 5 ปีข้างหน้า คาดว่าจะสามารถหาได้ 50 ล้านบาท ขณะนี้บริษัทกำลังพิจารณาการลงทุนใน 6 โครงการ ซึ่งต้องใช้เงินลงทุน(ล้านบาท) และมีมูลค่าปัจจุบันสุทธิ(ล้านบาท) ดังต่อไปนี้

โครงการที่	1	2	3	4	5	6
ลงทุนระยะแรก	12	15	30	10	20	8
ลงทุนระยะที่สอง	5	7	25	6	10	2
มูลค่าปัจจุบันสุทธิ	14	16	40	15	18	12

บริษัทควรเลือกลงทุนในโครงการใดบ้าง จึงจะได้ประโยชน์สูงสุด จงกำหนดตัวแปรตัดสินใจและเขียนตัวแบบทางคณิตศาสตร์

13. โรงงานผลิตสินค้า 2 ชนิด โดยใช้วัตถุดิบ ก และ วัตถุดิบ ข ปริมาณวัตถุดิบที่ใช้ในการผลิตแต่ละงวดการผลิต และปริมาณวัตถุดิบที่มี กำหนดไว้ดังนี้

วัตถุดิบ	ปริมาณที่ใช้ (กิโลกรัม/หน่วย)		ปริมาณที่มี
	สินค้า A	สินค้า B	(กิโลกรัม)
ก	2	2	200
ข	8	3	600

ปริมาณสินค้าแต่ละชนิดที่ผลิตได้ จะขึ้นอยู่กับราคาของสินค้า ดังนี้

ปริมาณสินค้า A = $190 - 25P_1$ และ ปริมาณสินค้า B = $250 - 50P_2$

เมื่อ P_1 และ P_2 เป็นราคา(บาทต่อหน่วย) ของสินค้า A และ สินค้า B ตามลำดับ

โรงงานควรวางแผนการผลิตอย่างไร จึงจะดีที่สุด จงกำหนดตัวแปรตัดสินใจและเขียนตัวแบบทางคณิตศาสตร์