ภาคผนวก ข
ทบทวนเรื่องเมตริกซ์ (Matrix)

คำจำกัดความ

เมตริกซ์ A ขนาด r rows และ c columns หรือขนาด (r x c) ประกอบด้วยสมาชิกทั้งหมด rc ตัว สมาชิกแต่ละตัวเขียนแทนได้ด้วย a_{ij} โดยที่ ดรรชนีตัวแรกจะบอกตำแหน่งของสมาชิกตัวนั้นว่าอยู่ row ที่ i ส่วนดรรชนีตัวหลังจะบอกตำแหน่งว่าอยู่คอลัมน์ที่ j

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1c} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2c} \\ & \cdots & & \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rc} \end{vmatrix}$$

เสกลลา (Scalar) คือเลขจำนวนหนึ่ง เราถือว่าเป็นเมตริกซ์ขนาด (1 x 1) นั่นเอง

เวคเตอร์ (Vector) คือเมตริกซ์ซึ่งมี 1 row หรือ 1 คอลัมน์

column vector เช่น $x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix}_{n \times 1}$

row vector เช่น $x' = [x_1 \quad x_2 \ \ldots \ x_n]_{1 \times n}$

เมตริกซ์สลับเปลี่ยน (Transpose Matrix)

ถ้า A มีขนาด (r x c) แล้ว A' (อ่านว่า A transpose) มีขนาด (c x r) ซึ่งหาได้จากการเปลี่ยน row ไปเป็นคอลัมน์

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1c} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2c} \\ & \cdots & & \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{r1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{r2} \\ & \cdots & & \\ a_{1c} & a_{2c} & \cdots & a_{rc} \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์จตุรัส (Square Matrix) คือเมตริกซ์ที่มีจำนวน row เท่ากับจำนวนคอลัมน์

เมตริกซ์สมมาตร (Symmetric Matrix) ถ้าเมตริกซ์ A เป็นเมตริกซ์จตุรัส และ $A' = A$ แล้ว A เป็นเมตริกซ์สมมาตร นั่นคือ $a_{ij} = a_{ji}$ สำหรับทุกคู่ของ i, j เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$ เป็นเมตริกซ์สมมาตร

ในขณะที่ $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ไม่เป็นเมตริกซ์สมมาตร

เทรซ (Trace) ตำแหน่งบน main diagonal คือตำแหน่งของ a_{ii} ในเมตริกซ์จตุรัส ผลบวกของสมาชิกบน main diagonal เราเรียกว่า **เทรซ** ของ A (tr A)

$$\text{tr } A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \quad \text{ถ้า } A \text{ มีขนาด } (n \times n)$$

เมตริกซ์เอกลักษณ์ (Identity Matrix) คือเมตริกซ์จตุรัสซึ่งมีสมาชิกบน main diagonal มีค่าเป็น 1 ส่วนสมาชิกอื่น ๆ เป็นศูนย์หมด

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Diagonal Matrix ขนาด (p x p)</u> คือเมตริกซ์จตุรัสซึ่งมีสมาชิกบน main diagonal เป็น $a_1, a_2, \dots, a_p$ โดยที่ a_i บางตัวอาจมีค่าเป็น 0 ได้ ส่วนสมาชิกอื่น ๆ เป็น 0 หมด

$$D(a_i) = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & a_p \end{vmatrix}$$

$D(a_{ii})$ = diag(A) คือ diagonal matrix ซึ่งประกอบด้วยสมาชิกจาก main diagonal ของเมตริกซ์ A

<u>เมตริกซ์สามเหลี่ยมขนาด (p x p)</u> คือเมตริกซ์จตุรัสในรูป

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1p} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2p} \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & t_{pp} \end{bmatrix}$$ ซึ่งเป็น upper triangular matrix

$$\begin{bmatrix} t_{11} & 0 & \dots & 0 \\ t_{21} & t_{22} & \dots & 0 \\ & \dots & & \\ t_{p1} & t_{p2} & \dots & t_{pp} \end{bmatrix}$$ ซึ่งเป็น lower triangular matrix

<u>**Null Matrix ขนาด (r x c)**</u> คือเมตริกซ์ซึ่งมีสมาชิกทุกตัวเป็น 0

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Unity **Row** Vector</u> **คือ** row vector **ซึ่งมีสมาชิกทุกตัวเป็น** 1

$$j' = [1 \; 1 \; \dots \; 1]$$

<u>**Unity Matrix**</u> คือเมตริกซ์ซึ่งมีสมาชิกทุกตัวเป็น 1

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ & & \dots & \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

การดำเนินการเกี่ยวกับเมตริกซ์และเวคเตอร์

<u>**การเท่ากันของเมตริกซ์**</u>

เมตริกซ์ A ขนาด (r x c) และเมตริกซ์ B ขนาด (r x c) จะเท่ากันก็ต่อเมื่อ

$a_{ij} = b_{ij}$ สำหรับทุกคู่ของ (i,j)

การบวกและการลบของ 2เมตริกซ์ซึ่งมีขนาดเท่ากัน

เมตริกซ์ 2 เมตริกซ์ต้องมีขนาดเท่ากัน จึงจะบวกกันได้

ถ้า $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1c} \\ & \dots & \\ a_{r1} & \dots & a_{rc} \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1c} \\ & \dots & \\ b_{r1} & \dots & b_{rc} \end{bmatrix}$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1c}+b_{1c} \\ & \dots & \\ a_{r1}+b_{r1} & \dots & a_{rc}+b_{rc} \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} a_{II}-b_{11} & \dots & a_{1c}-b_{1c} \\ & \dots & \\ a_{r1}-b_{r1} & \dots & a_{rc}-b_{rc} \end{bmatrix}$$

การบวกและลบเป็นไปตามกฎเกณฑ์ดังนี้

1) $A + B = B + A$

2) A t $(B$ t $C) = (A$ t $B)$ t C

3) $A - (B - C) = A - B$ t C

การคูณเมตริกซ์ด้วยเสกลลา c

$$cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & \dots & ca_{1k} \\ & \dots & \\ ca_{r1} & \dots & ca_{rk} \end{bmatrix}$$

การคูณเมตริกซ์ 2 เมตริกซ์

ถ้าจำนวนคอลัมน์ของเมตริกซ์ A เท่ากับจำนวน row ของเมตริกซ์ B (เรียกว่าขนาดของทั้ง 2 เมตริกซ์ นั้น comformable) ผลคูณของ AB จึงจะหาได้

ถ้า A(p x r) และ B(r x q)

C(p x q) = AB

สมาชิกของ C หาได้โดยสูตร $c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj}$

โดยที่ c_{ij} เกิดจากผลคูณของ row ที่ i ของ A กับ column ที่ j ของ B

<u>**ตัวอย่าง**</u> $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 1(6)+2(-1)+3(0) & 1(5)+2(1)+3(2) & 1(4)+2(-1)+3(0) \\ (-1)6+0(-1)+1(0) & (-1)5+0(1)+1(2) & (-1)4+0(-1)+1(0) \end{bmatrix} = c$$

I

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 13 & 2 \\ -6 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

จะหา BA ไม่ได้เพราะจำนวนคอลัมน์ของ B ไม่เท่ากับจำนวน row ของ A

Distributive law และ Associative law ใช้ได้กับการคูณ นั่นคือ

A(B t C) = AB t AC

A(BC) = (AB)C

Commutative law ใช้ไม่ได้กับการคูณ

โดยทั่ว ๆ ไปแล้ว $AB \neq BA$

ตัวอย่าง $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

AB นั้นเรียกว่า premultiplication ของ B ด้วย A หรือ postmultiplication ของ A ด้วย B

การคูณด้วยเมตริกซ์เอกลักษณ์ (Identity Matrix)

$$I_{n \times n} A_{n \times n} = A_{n \times n}$$

เช่น $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

การคูณแบบ preautiplcation ด้วย diagonal เมตริกซ์

ถ้า $D_{r \times r}(d_i) = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ & & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & d_r \end{bmatrix}$

$$D_{r \times r}(d_i) \quad A_{r \times c} = \begin{bmatrix} d_1 a_{11} & \ldots & d_1 a_{1c} \\ & \ldots & \\ d_r a_{r1} & \ldots & d_r a_{rc} \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง $D_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

$$DA = \begin{bmatrix} 2(1) & 2(2) & 2(1) \\ 3(4) & 3(3) & 3(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 12 & 9 & 15 \end{bmatrix}$$

การคูณแบบ postmultiplication ด้วย diagonal เมตริกซ์

ถ้า $$D_{c\times c}(d_i) = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & d_c \end{bmatrix}$$

$$A_{r\times c}D_{c\times c}(d_i) = \begin{bmatrix} d_1a_{11} & \cdots & d_ca_{1c} \\ & \cdots & \\ d_1a_{r1} & \cdots & d_ca_{rc} \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง $D_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

$$AD = \begin{bmatrix} 2(1) & 3(2) & 4(1) \\ 2(4) & 3(3) & 4(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 8 & 9 & 20 \end{bmatrix}$$

Vector Inner Products

ผลคูณของ 2 เวคเตอร์ซึ่งมีจำนวนสมาชิกเท่ากันคือผลบวกของผลคูณของสมาชิกที่สมนัยกัน

$$x'y = [x_1 \; x_2 \; . \; . \; . \; x_p] \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ : \\ y_p \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{p} x_i y_i$$ ซึ่งเป็นเสกลลา

$$x'y = y'x$$

$$x'x = \sum_{i=1}^{p} x_i^2$$

ใน p-dimensional coordinate

$x'x$ = [ระยะทางจากจุดกำเนิดไปยังจุดที่มี coordinates $(x_1, x_2, ..., x_p)]^2$

$(x'x)^{1/2}$ = ระยะทางจากจุดกำเนิดไปยังจุดที่มี coordinates$(x_1, x_2, ..., x_p)$

จุดกำเนิดมี coordinates (0,0,...,0)

โดยทั่ว ๆ ไป $x' = [x_1 \;\; x_2 \; ... \; x_p]$

$y' = [y_1 \;\; y_2 \; ... \; y_p]$

ระยะทางจากจุดทั้ง 2 คือ $d = [\sum_{i=1}^{p} (x_i - y_i)^2]^{1/2}$

θ = มุมระหว่างเวคเตอร์ x และ y

$$\cos\theta = x'y / [(x'x)^{1/2} (y'y)^{1/2}]$$

Normalization คือการหารเวคเตอร์นั้นด้วยความยาวของมัน

inner product ของ normalized เวคเตอร์ = 1

inner product ของเวคเตอร์ที่ตั้งฉากกัน = 0

<u>ตัวอย่าง</u> ใน 3-dimensional space

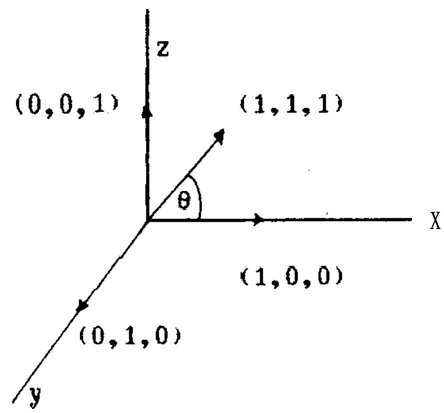
$x' = [1\ \ 0\ \ 0]\ ,\ x'x = 1$

$y' = [0\ \ 1\ \ 0]$

$z' = [0\ \ 0\ \ 1]$

$e' = [1\ \ 1\ \ 1]\ ,\ e'e = 3$

$\cos\theta = e'x/[(x'x)^{1/2}(e'e)^{1/2}] = 1/\sqrt{3} \qquad (x'x = 1,\ e'e = 3)$



<u>Transpose **ของผลคูณของเมตริกซ์**</u>

$(AB)' = B'A'$

โดยทั่ว ๆ ไป $(A_1 \ldots A_k)' = A_k' \ldots A_1'$

<u>การหาดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์จตุรัส</u>

ทุก ๆ เมตริกซ์จตุรัสเราหาค่าเสกลลาค่าหนึ่งและเป็นค่าเดียวซึ่งเรียกว่า ดีเทอร์มิแนนท์ (determinant)

<u>คำจำกัดความ</u> ดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์ A ขนาด (n x n) คือผลบวก

$$\underset{P}{\sum \cdots \sum} (-1)^{\alpha}\, a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

α = จำนวนครั้งของการเปลี่ยนที่ $j_1, \ldots, j_n$ ให้อยู่ในลำดับมาตรฐาน $1, 2, \ldots, n$

$\underset{P}{\sum \cdots \sum}$ คือผลบวกสำหรับเซท P ของ n! permutations ของดรรชนีของคอลัมน์

ดีเทอร์มินแนนท์ของ A เขียนแทนด้วย $|A|$

วิธีหาค่าดีเทอร์มินแนนท์ อาจหาโดยใช้ cofactor ของสมาชิกใน row ใด row หนึ่ง หรือของสมาชิกในคอลัมน์ใดคอลัมน์หนึ่ง

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + \dots + a_{in}A_{in}\ ,\ i=1,\dots,n$$

หรือ $$|A| = a_{1j}A_{1j} + \dots + a_{nj}A_{jn}\ ,\ j=1,\dots,n$$

โดยที่ A_{ij} คือ cofactor ของ a_{ij}

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\ (\text{minor ของสมาชิกของ } a_{ij})$$

minor ของ a_{ij} คือดีเทอร์มินแนนท์ของเมตริกซ์ซึ่งตัด row ที่ i และ คอลัมน์ที่ j ของเมตริกซ์ A ออก

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+\ a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$+\ a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}$$

หมายเหตุ $|a_{11}| = a_{11}$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

ตัวอย่าง จงหา $|A|$ ถ้า

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 3\{2\begin{vmatrix}2 & -1\\3 & 2\end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix}-3 & -1\\4 & 2\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}-3 & 2\\4 & 3\end{vmatrix}\}$$

$$= -9$$

ดีเทอร์มินนท์ของ upper triangular matrix คือผลคูณของสมาชิกบน main diagonal

เมตริกซ์ผกผัน (Inverse matrix)

เมตริกซ์ผกผันของเมตริกซ์ A คือ A^{-1}

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Nonsingular matrix $|A| \neq 0$ ---> หา A^{-1} ได้

Singular matrix $|A| = 0$ ---> จะหา A^{-1} ไม่ได้

คุณสมบัติของเมตริกซ์ผกผัน

1. เมตริกซ์ผกผันของเมตริกซ์สมมาตร จะเป็น เมตริกซ์สมมาตรด้วย
2. เมตริกซ์ผกผันของของ A' คือ $(A^{-1})'$
3. $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$
4. ถ้า c เป็น nonzero scalar แล้ว $(cA)^{-1} = (1/c)A^{-1}$
5. เมตริกซ์ผกผันของของ diagonal matrix คือ diagonal matrix ซึ่งมีสมาชิกเป็นส่วนกลับของสมาชิกเดิม

ตัวอย่าง

$$A = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\0 & 4 & 0 & 0\\0 & 0 & 3 & 0\\0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix}1/2 & 0 & 0 & 0\\0 & 1/4 & 0 & 0\\0 & 0 & 1/3 & 0\\0 & 0 & 0 & 1/2\end{bmatrix}$$

Rank ของเมตริกซ์

$$X = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_k' \end{bmatrix}$$

rank ของ X คือจำนวน row vector ที่ linearly independent กัน

คำจำกัดความของ Linearly Independent

เซทของ k เวคเตอร์ที่มีขนาดเท่ากันคือ $x_1,...,x_k$ จะถูกเรียกว่าเป็นเซทของเวคเตอร์ที่ linearly independent กัน ถ้าไม่สามารถหาค่าคงที่ $c_1,...,c_k$ ที่จะทำให้เวคเตอร์ x_i ซึ่งอยู่ในเซทมีลักษณะดังนี้

$$c_i x_i = c_1 x_1 + \dots + c_{i-1} x_{i-1} + c_{i+1} x_{i+1} + \dots + c_k x_k$$

ตัวอย่าง $x' = [1 \quad -1 \quad 2]$

$y' = [2 \quad 0 \quad -1]$

$z' = [0 \quad -2 \quad 5]$

$z' = 2x' - y'$

ดังนั้น x', y' และ z' ไม่เป็นเซทของเวคเตอร์ที่ linearly independent กัน

ในขณะที่ $t' = [1 \quad 0 \quad 0]$

$u' = [0 \quad 1 \quad 0]$

และ $v' = [0 \quad 0 \quad 1]$

เป็นเซทของเวคเตอร์ที่ linearly independent กัน

rank ของเมตริกซ์ $A_{k \times k}$ อาจมีค่าตั้งแต่ 0 (สำหรับ null matrix) ถึง k (สำหรับ matrix of full rank)

rank ของเมตริกซ์หนึ่ง ๆ จะเป็นค่าคงที่ค่าหนึ่งค่าเดียว ไม่ว่าจะหาจาก rows หรือจากคอลัมน์

ตัวอย่าง เมตริกซ์ R = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 7 & 11 \\ 8 & 6 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ มี rank = 2

$r_2' = 3r_1'$

$r_4' = r_2' - r_3'$

$r_5' = 2r_3'$

r_1' และ r_3' เท่านั้นที่ linearly independent กัน

คุณสมบัติของ rank

1. rank ของ A' = rank ของ A
2. rank ของ A'A = rank ของ A และ
   rank ของ AA' = rank ของ A
3. rank ของ A ไม่เปลี่ยนถ้า pre หรือ postmultiplication A ด้วย nonsingular matrix

Elementary Row และ Elementary Column Operations

rank ของเมตริกซ์ไม่เปลี่ยนไปถ้าทำ elementary row และ column ต่อไปนี้

1. สลับเปลี่ยนระหว่าง 2 rows (columns)
2. คูณสมาชิกของ row (column) หนึ่งด้วยค่าคงที่
3. คูณ row (column) หนึ่งด้วยค่าคงที่แล้วบวกกับอีก row (column) หนึ่ง

การหาเมตริกซ์ผกผันโดยวิธี Abbreviated Gauss-Doolittle

ถ้า A มีขนาด (n x n)

ให้สร้างเมตริกซ์ขนาด (n x 2n) คือ $[A_{n \times n} | I_{n \times n}]_{n \times 2n}$

แล้วทำ elementary row (column) operations จนได้ $[I_{n \times n} | A_{n \times n}^{-1}]_{n \times 2n}$

<u>**ตัวอย่าง**</u> $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 8 \end{bmatrix}$ จงหา A^{-1}

$$[A \quad I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -11 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -13.5 & 5 & 1.5 \\ 0 & 1 & 0 & 3.5 & -1 & -.5 \\ 0 & 0 & 1 & 5.5 & -2 & -.5 \end{array}\right]$$

ดังนั้น $A^{-1} = \begin{bmatrix} -13.5 & 5 & 1.5 \\ 3.5 & -1 & -.5 \\ 5.5 & -2 & -.5 \end{bmatrix}$

<u>**ตัวอย่าง**</u> เนื่องจากว่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์สามเหลี่ยม คือผลคูณของสมาชิกบน main diagonal ดังนั้นการหา $|A|$ ทำได้โดยใช้ row หรือ column operations กับ A ให้ได้เมตริกซ์สามเหลี่ยมก่อน แล้วผลคูณของสมาชิกบน main diagonal คือ $|A|$

<u>**ตัวอย่าง**</u> จงหา $|A|$ ถ้า $A = \begin{bmatrix} 10 & 5 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 12 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$

$$\longrightarrow \begin{vmatrix} 10 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3.2 & 1 \\ 0 & 3 & 12.8 & 3 \\ 0 & -1.5 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{vmatrix} 10 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -12.8 & -3 \\ 0 & 0 & 3.2 & 1 \\ 0 & 0 & 10.4 & 9.5 \end{vmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{vmatrix} 10 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -12.8 & -3 \\ 0 & 0 & 3.2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6.25 \end{vmatrix}$$

ดังนั้น $|A| = (10)(-3)(-12.8)(6.25) = -600$

Simultaneous Linear Equations

เซทของสมการซึ่งอยู่ในรูปของ $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = c_m \end{array}\right\}$$

ระบบของ m-simultaneous linear equations ใน ตัวไม่ทราบค่า n ตัว

อาจเขียนในรูปของเมตริกซ์ดังนี้

$$A_{m\times n}x_{n\times 1} = c_{m\times 1}$$

โดยที่ $x' = [x_1 \ \ldots \ x_n]$

$c' = [c_1 \ \ldots \ c_m]$

และ
$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \ldots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

ถ้า A เป็นเมตริกซ์จตุรัส และเป็น nonsingular matrix (หา A^{-1} ได้) ผลเฉลยรูปเดียว (unique solution) คือ $x = A^{-1}c$

พิสูจน์ $Ax = c$

$A^{-1}Ax = A^{-1}c$

$x = A^{-1}c$

ตัวอย่าง
$$x_1 + x_2 - x_3 = 1$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 = -1$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad c = [1 \quad -1 \quad 1]'$$

$$x = A^{-1}c = A^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

<u>เวคเตอร์ออร์ธอโกนอล (Orthogonal Vectors) และ เมตริกซ์ออร์ธอโกนอล</u>

$$\cos\theta = x'y/[(x'x)^{1/2}(y'y)^{1/2}]$$

คือ cos ของมุมระหว่างเวคเตอร์ x และ y

ถ้า $\cos\theta = 0$ ---> x และ y ตั้งฉากกัน

---> x และ y ออร์ธอโกนอลกัน

ถ้า x และ y ต่างก็มีความยาว = 1 และออร์ธอโกนอลกัน เราเรียกว่า x และ y ออร์ธอนอร์มอล (orthonormal) กัน

เมตริกซ์ออร์ธอโกนอล I คือเมตริกซ์จตุรัสที่มี rows เป็นเซทของเวคเตอร์ออร์ธอนอร์มอล

$$TT' = T'T = I$$

ดังนั้น $T^{-1} = T'$

(2 x 2) เมตริกซ์ออร์ธอโกนอล คือ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ซึ่งคือ transformation matrix ซึ่งทำให้หมุนแกน xy ไป 45 องศา

(2 x 2) เมตริกซ์ออร์ธอโกนอล คือ $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ คือ transformation ซึ่งทำให้หมุนแกน xy ไปเป็นมุม θ

นั่นคือถ้า (x,y) เป็น coordinates ของจุดบนแกนเก่า จุดนั้นจะมี coordinates (u,v) เมื่อเทียบกับแกนใหม่ที่หมุนไปจากแกนเก่าเป็นมุมกาง θ องศา (rigit rotation) โดยที่

$$u = x\cos\theta \;t\; y\sin\theta$$

$$v = -x\sin\theta \;t\; y\cos\theta$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \mathbf{Tx} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์ออร์ธอโกนอลที่ใหญ่ขึ้นอาจสร้างขึ้นด้วยวิธี Gram-Schmidt orthogonalization process

<u>**ตัวอย่าง**</u> Hermert matrix ---> เมตริกซ์ออร์ธอโกนอลขนาด (3 x 3)

$$T = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{vmatrix},$$

เมตริกซ์ออร์ธอโกนอลขนาด (n x n) คือ T ---> เมตริกซ์ของ linear transformation

ระยะทางใน space จะไม่เปลี่ยนแปลงโดยการหมุนแกนต่อไปนี้

$$\mathbf{y} = \mathbf{Tx}$$

$$\mathbf{x'x} = \mathbf{y'T'Ty}$$

$$= \mathbf{y'Iy}$$

$$= \mathbf{y'y}$$

เมตริกซ์ออร์ธอโกนอล (Orthogonal Matrix) มีคุณสมบัติดังนี้

1. คอลัมน์ของเมตริกซ์ออร์ธอโกนอลนั้นออร์ธอโกนอลกัน
2. ดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์ออร์ธอโกนอล มีค่าเท่ากับ 1 หรือ -1

   $[\,|T'T| = |I| = 1$ และ $|T| = |T'|$, $|T| = \pm 1]$
3. ผลคูณของเมตริกซ์ออร์ธอโกนอล 2 เมตริกซ์ที่มีขนาดเท่ากัน จะเป็นออร์ธอโกนอลด้วย

นั่นคือการหมุนแกน และ reflections ของแกนอย่างต่อเนื่องกันหลายครั้ง ก็คือการหมุนแกน 1 ครั้งและ reflection ที่เหมาะสมนั่นเอง

Quadratic Forms

Quadratic form $x_1, \ldots, x_n$

$$f(x_1,\ldots,x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2$$
$$+ 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n + \ldots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

โดยที่ $a_{ij} = a_{ji}$

a_{ij} บางตัวอาจเท่ากับศูนย์

เราอาจเขียน quadratic form ในรูปเมตริกซ์ดังนี้

$$x'Ax$$

โดยที่ A เป็นเมตริกซ์สมมาตรขนาด (n x n)

และ $x' = [x_1 \;\; x_2 \; \ldots \; x_n]$

ตัวอย่าง $\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - (1/N)(\sum_{i=1}^{N} x_i)^2$

อาจถูกเขียนในรูปเมตริกซ์ x'Ax

โดยที่

$$A = \begin{bmatrix} (N-1)/N & -1/N & \ldots & -1/N \\ -1/N & (N-1)/N & \ldots & -1/N \\ & \ldots & & \\ -1/N & -1/N & \ldots & (N-1)/N \end{bmatrix}$$

และ $x' = [x_1, x_2 \ldots x_N]$

Positive Definite

เรากล่าวว่า quadratic form $x'Ax$ และ A เป็น positive definite ถ้า $x'Ax > 0$ สำหรับทุก nonnull vector x

ถ้า $x'Ax >= 0$ เราเรียกว่า positive semidefinite

ค่าเจาะจง (Eigen Roots หรือ Characteristic Roots) และ เวคเตอร์เจาะจง (Eigen Vectors หรือ Characteristic Vectors) ของเมตริกซ์

ค่าเจาะจงของเมตริกซ์ A ขนาด (p x p) คือผลเฉลยของสมการ

$$\left| A - \lambda I \right| = 0$$

$\left| A - \lambda I \right|$ คือ pth-degree polynomial ใน λ และ A จะมีค่าเจาะจง p ตัว

จาก Laplace expansion ของ $\left| A - \lambda I \right|$ ทำให้เราเขียน Characteristic polynomial ได้ดังนี้

$$\left| A - \lambda I \right| = (-\lambda)^p + S_1(-\lambda)^{p-1} + S_2(-\lambda)^{p-2} + \ldots + S_{p-1}\lambda + \left| A \right|$$

โดยที่ S_i คือผลบวกของทุก (i x i) principal minor determinants ดังนั้น S_1 คือผลบวกของสมาชิกบน diagonal ของ A คือ tr A

$S_i = tr_i A$ ผลบวกของดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์ทั้งหมด $\binom{n}{i}$ เมตริกซ์ ขนาด (i x i) ซึ่งสามารถเขียนขึ้นจาก row l และ row m กับ column l และ column n ($l \neq m = 1, 2, \ldots, p$)

จากทฤษฎีของ Polynomial equations เราได้ว่า

1. ผลคูณของค่าเจาะจงของ A คือ $|A| = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i$

2. ผลบวกของค่าเจาะจงของ A คือ $tr\ A = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i$

ตัวอย่าง $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$S_1 = tr\ A = 6$ และ $|A| = 4$

3 (2 x 2) principal minor determinants แต่ละตัวมีค่าเท่ากับ

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$S_2 = 3 + 3 + 3 = 9$

$p = 3$

$\binom{3}{2} = 3$ ---> row_1, row_2 ---> $\begin{bmatrix} 11 & 11 \end{bmatrix}$

row_1, row_3 ---> $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$row_2, row_3 \dashrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = (-\lambda)^3 \; t \; S_1(-\lambda)^2 \; t \; S_2(-\lambda)^1 \; t \; |A|$$
$$= -\lambda^3 \; t \; 6\lambda^2 - 9X \; t \; 4$$
$$-\lambda^3 \; t \; 6\lambda^2 - 9\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 \; t \; 9\lambda - 4 = 0$$

รากทั้ง 3 ของสมการนี้คือ 1 , 1 และ 4

(1 t 1 t 4) = 6 = tr A และ (1)(1)(4) = 4 = $|A|$)

ตัวอย่าง

$$A = \begin{vmatrix} 25 & 30 & -10 \\ 30 & 40 & -6 \\ -10 & -6 & 17 \end{vmatrix}$$

$tr\, A = 25 \; t \; 40 \; t \; 17 = 62$

$$tr_2\, A = \begin{vmatrix} 25 & 30 \\ 30 & 40 \end{vmatrix} \; t \; \begin{vmatrix} 40 & -6 \\ -6 & 17 \end{vmatrix} \; t \; \begin{vmatrix} 25 & -10 \\ -10 & 17 \end{vmatrix}$$
$$= [(25)(40)-(30)(30)] \; t \; [(40)(17)-(-6)(-6)]$$
$$t \; [(25)(17)-(-10)(-10)]$$
$$= 1069$$

$tr_3\, A = |A| = 400$

ดังนั้น characteristic equation คือ $\lambda^3 - 82\lambda^2 \; t \; 1069X - 400 = 0$

รากของสมการทั้ง 3 หรือ ค่าเจาะจงทั้ง 3 คือ

$\lambda_1 = 65.66108$, $\lambda_2 = 15.75339$ และ $\lambda_3 = 0.36553$

คุณสมบัติของค่าเจาะจง

1. ค่าเจาะจงของเมตริกซ์สมมาตรที่มีสมาชิกเป็น real จะเป็น real ทุกตัวด้วย

2. ค่าเจาะจงของ a positive definite matrix จะเป็นบวกทุกตัว

3. ถ้าเมตริกซ์สมมาตรขนาด (n x n) เป็น positive semidefinite และ rank r เมตริกซ์ข้างต้นจะมีค่าเจาะจง r ค่าที่มีค่าบวกและ (n - r) ค่าที่มีค่าเป็นศูนย์

4. ค่าเจาะจงที่ไม่เป็นศูนย์ของ AB จะเท่ากับค่าเจาะจงที่ไม่เป็นศูนย์ของ BA ดังนั้น tr AB = tr BA

5. ค่าเจาะจงของ diagonal matrix หนึ่ง คือสมาชิกบน diagonal นั่นเอง

สำหรับทุก ๆ ค่าเจาะจง λ_i ของเมตริกซ์จตุรัส A จะมี เวคเตอร์เจาะจง x_i ซึ่งสมาชิกจะสอดคล้องกับ homogeneous system of equation

$$[A - \lambda_i I]x_i = 0 \quad \text{หรือ} \quad Ax_i = \lambda_i x_i$$

คุณสมบัติของค่าเจาะจง และ เวคเตอร์เจาะจงของเมตริกซ์สมมาตร

1. ถ้า λ_i และ λ_j เป็น ค่าเจาะจงที่ต่างกันของเมตริกซ์สมมาตร A เวคเตอร์เจาะจง x_i และ x_j จะออร์ธอโกนอลกัน

จาก $[A - \lambda_i I]x_i = 0$

$$Ax_i - \lambda_i x_i = 0$$

$$Ax_i = \lambda_i x_i \quad \text{และ} \quad Ax_j = \lambda_j x_j$$

$$x_j'Ax_i = \lambda_i x_j' x_i \quad \text{และ} \quad x_i'Ax_j = \lambda_j x_i' x_j$$

ดังนั้น $\lambda_i x_j' x_i = \lambda_j x_i' x_j$

แต่ $\lambda_i \neq \lambda_j$ ดังนั้นเราสรุปว่าเวคเตอร์ทั้ง 2 ออร์ธอโกนอลกัน ($x_j'x_i = x_i'x_j = 0$ นั่นคือ inner product ของ 2 เวคเตอร์เท่ากับศูนย์)

2. สำหรับ real symmetric matrix A จะมี เมตริกซ์ออร์ธอโกนอล P ซึ่งทำให้ $P'AP = D$

โดยที่ D = diagonal matrix ซึ่งมีสมาชิกเป็น ค่าเจาะจงของ A

เวคเตอร์เจาะจงของ A ที่ถูก normalized แล้วจะเป็นคอลัมน์ของ P

คุณสมบัติเหล่านี้ของเมตริกซ์สมมาตร มีความสำคัญกับ quadratic forms ถ้าเราใช้ orthogonal transformation

$$x = Py$$

กับตัวแปร p ตัวใน quadratic form $x'Ax$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} x'Ax &= y'P'APy \\ &= y'Dy \\ &= \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_r y_r^2 \end{aligned}$$

โดยที่ λ_i เป็น ค่าเจาะจงของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ A และ r เป็น rank ของ quadratic form $x'Ax$

เมตริกซ์จตุรัส ซึ่งมีคุณสมบัติว่า AA = A เราเรียกว่า idempotent

ค่าเจาะจงของ idempotent matrix มีค่า 0 หรือ 1

<u>คุณสมบัติเพิ่มเติม</u>

1. $ch(A + \gamma I) = \gamma + ch(A)$
2. $ch(AB) = ch(BA)$ ยกเว้นถ้า AB หรือ BA อาจมี additional roots เท่ากับ o
3. $ch(A^{-1}) = 1/ch(A)$
4. ถ้า $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ เป็นค่าเจาะจงของ A แล้ว

$$\sum_{i}^{n} \lambda_i = \text{tr } A$$

$$\sum_{i<j}^{n} \lambda_i \lambda_j = tr_2 A$$

$$\sum_{i<j<k} \lambda_i \lambda_j \lambda_k = tr_3 A$$

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = |A|$$

5. ratio ของ 2 quadratic forms (B เป็น non-singular matrix) คือ $u = x'Ax/x'Bx$ จะให้ ค่าเจาะจงของ $B^{-1}A$

$u_{max} = ch_{max}(B^{-1}A)$ และ $u_{min} = ch_{min}(B^{-1}A)$