บทที่ 7
วิธีวิเคราะห์เชิงตัวเลขสำหรับการหาอนุพันธ์ (Differentiation) และการอินทิเกรท (Integration)

หน้า

บทที่ 7
วิธีวิเคราะห์เชิงตัวเลขสำหรับการหาอนุพันธ์ (Differentiation) และการอินทิเกรท (Integration)

ในบทนี้จะพิจารณาวิธีการในการประมาณค่าในวิชาแคลคูลัส 2 ชนิดคือ

1) อนุพันธ์ของ f ที่ x

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \Delta f(x)/h$

โดยที่ $\Delta f(x)/h = [f(x+h)-f(x)]/h$

$\Delta f(x)/h$ คือ **difference quotient** ของ f ที่ x

2) ค่าอินทิกรัลจำกัดเขต (**Definite integral**) ของ f เหนือ [a,b]

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h \to 0} R(h)$$

โดยที่ $R(h) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})h$

R(h) คือ **left-endpoint of Riemann Sum** สำหรับ n ช่วงย่อยซึ่งมีความยาวเท่ากันทุกช่วงคือ $h = (b-a)/n$

7.1 สูตรสำหรับ f'(x); สูตรของริชาร์ดสัน (Richardson's Formula)

7.1A สัญลักษณ์ Big O สำหรับการอธิบายความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลาย (Truncation Errors)

ทั้ง f'(x) และ $\int_a^b f(x)\,dx$ เป็นกรณีพิเศษของ Q ซึ่งถูกกำหนดและแสดงในรูป

$Q = \lim_{h \to 0} F(h)$ โดยที่ F(h) เป็นสูตรของการประมาณ (approximation formula) . ..(1a)

ถ้าไม่มีความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษ ค่าของ Q จะหาได้ด้วยความแม่นยำที่ต้องการโดยใช้การประมาณ $Q \approx F(h)$

โดยที่ h มีขนาดเล็กเพียงพอ (แต่ไม่เป็นศูนย์) ...(1b)

ความคลาดเคลื่อนของการประมาณนี้คือ

$\tau(h) = Q - F(h) =$ ความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลายของการประมาณ Q โดย F(h)

...(1c)

ดังนั้นความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลาย คือความคลาดเคลื่อนที่ติดมากับสูตรของการประมาณ F(h)เอง โดยไม่มีความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษอยู่ด้วย

ในการประเมินว่า F(h)ใดที่จะเป็นสูตรในการประมาณ Q เราต้องทราบอัตราที่ $\tau(h)$ นั้นหดตัว ขณะที่ $h \to 0$

พิจารณาเทอมนำ (leading term) ของอนุกรมของแมคคลอรินสำหรับ $\tau(h)$

$$\tau(h) = Ch^n + Dh^m + \dots \quad \text{โดยที่ } n<m \qquad \dots(2)$$

ถ้าเป็นไปตาม (2) F(h) ถูกเรียกว่า **nth order** approximating formula สำหรับ Q

สมมุติว่าเราต้องการประมาณค่าของฟังก์ชัน f ณ จุด x+h ซึ่งใกล้จุด (fixed) x การประมาณค่าคือ **n th Taylor Polynomial** $P_n(x+h)$ ซึ่งสอดคล้องกับ

$$\underbrace{f(x+h)}_{Q} = \underbrace{f(x)+f'(x)h+(1/2)f''(x)h^2+\dots+(1/n!)f^{(n)}(x)h^n}_{F(h)=P_n(x+h)} + \underbrace{R_n(x+h)}_{\tau(h)} \qquad \dots(3a)$$

ในกรณีนี้ความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลายสำหรับการประมาณ $f(x+h) \approx P_n(x+h)$ (ซึ่งได้จากการตัดเทอม **หลังจาก** เทอม h^n ในอนุกรมของเทย์เลอร์ออก)

$$\tau(h) = R_n(x+h) = [1/(n+1)!]\, f^{(n+1)}(x)\, h^{n+1} + [1/(n+2)!]\, f^{(n+2)}(x)\, h^{n+2} + \dots$$

เนื่องจาก $f^{(n+1)}(x)$ เป็นค่าคงที่ (x is fixed) $P_n(x+h)$ ถูกเรียกว่าเป็น **(n+1)st order Taylor approximation ของ f(x+h)**

เมื่อการประมาณ $Q \approx F(h)$ คือ nth order นั่นคือเทอมนำ Ch^n ใน อนุกรมของแมคคลอรินสำหรับ $\tau(h)$ เราจะเขียน

$$\boxed{\tau(h) = O(h^n) \text{ หรือ } Q = F(h) + O(h^n)} \qquad \ldots(4a)$$

$O(h^n)$ อ่านว่า **ปริมาณที่เล็กพอ ๆ กับเทอม** Ch^n ทั้งนี้เพราะ ถ้า (2) จริง

$\tau(h) = Ch^n[1+(D/C)h^{m-n}$ t higher-order terms]

และ $[1+(D/C)h^{m-n}+\ldots] \rightarrow 1$ ถ้า $h \rightarrow 0$

ดังนั้น ถ้า $c \neq 0$

$$\tau(h) = O(h^n) \rightarrow \tau(h) \approx Ch^n \text{ เมื่อ } h \approx 0 \qquad \ldots(4b)$$

ตัวอย่าง n th Taylor approximations ...(5)

$$\exp(h) = 1+h+h^2/2+h^3/6+O(h^4)\text{ , นั่นคือ } \tau(h)=R_3(0+h)= O(h^4)$$
$$\sin h = h-h^3/3+O(h^5)\text{ , นั่นคือ } \tau(h)=R_4(0+h)= O(h^5)$$
$$\sqrt{1+h} = 1+h/2+O(h^2)\text{ , นั่นคือ } \tau(h)=R_1(1+h)= O(h^2)$$

จาก (2) เราอาจเขียนว่า

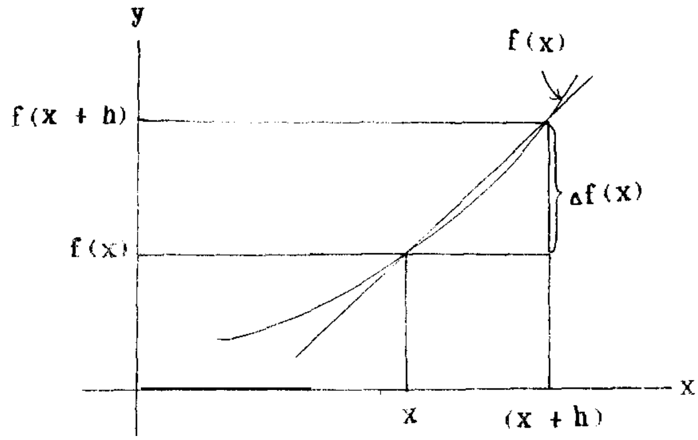
$$\tau(h) = Ch^n +O(h^m) \text{ หรือ } Q = F(h) \text{ t } Ch^n +O(h^m) \qquad \ldots(6)$$

7.1B การใช้ $\Delta f(x)/h$ เพื่อประมาณค่า $f'(x)$

$f'(x) = \lim_{h\rightarrow 0}\Delta f(x)/h$ โดยที่ $\Delta f(x)/h = [f(x+h)-f(x)]/h$

เราต้องการใช้ (2) เพื่อหา order ของการประมาณ

$f'(x) \approx \Delta f(x)/h$ เมื่อ $h \approx 0$



รูป 7.1-1 รูปแสดง $\Delta f(x)$

จากรูป $\lim_{h \to 0} \Delta f(x)/h = \lim_{h \to 0} [f(x+h)-f(x)]/h = f'(x) = dy/dx$ ซึ่งคือ slope ของเส้นที่สัมผัส curve f(x) ที่ x นั่นเอง

เพื่อหา Maclaurin expansion ของความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลาย เราเริ่มด้วย

$$f(x+h) = f(x)+[f'(x)/1!]h+[f''(x)/2!]h-[f'''(x)/3!]h^3 + [f^{(iv)}(x)/4!]h^4+\ldots \qquad \ldots(7)$$

เอา f(x) ลบออกจาก (7) ทั้ง 2 ข้าง แล้วหารตลอดด้วย h จะได้นิพจน์ที่ต้องการ

$$\underbrace{f'(x)}_{Q} = \underbrace{[f(x+h)-f(x)]/h}_{F(h)=\Delta f(x)/h} \underbrace{-[f''(x)/2]h-[f'''(x)/6]h^2 +[f^{(iv)}(x)/24]h^3+\ldots}_{\tau(h)=f'(x)-[\Delta f(x)/h]} \qquad \ldots(8)$$

ดังนั้นการประมาณ $f'(x) \approx \Delta f(x)/h$ is exact (นั่นคือ $f'(x) = \Delta f(x)/h$) เมื่อ f(x) เป็นสมการเส้นตรง (ในกรณีที่ $f''(x) = 0$) นอกจากนั้นจะเป็นไปตาม (4) นั่นคือ

$$f'(x) = [\Delta f(x)/h] + \tau(h) \text{ โดยที่ } \tau(h) \approx -[f''(x)/2]h = O(h^1) \ \ldots (9)$$

การประมาณ $f'(x)$ โดย $\Delta f(x)/h$ นั้นจะถูกเรียกว่า

$O(h)$ **forward difference approximation of $f'(x)$** ถ้า $h>0$

และเรียกว่า $O(h)$ **backward difference approximation of $f'(x)$** ถ้า $h<0$

ถ้า $f''(x) = 0$ แล้วการประมาณจะกลายเป็น $O(h^2)$

ตัวอย่าง จงอภิปรายเกี่ยวกับความคลาดเคลื่อนของการประมาณ $f'(x)$ ด้วย $\Delta f(x)/h$ เมื่อ $f(x) = e^x$ และ $x = 1$ [Exact $f'(x) = f''(x) = e^1 \doteq 2.718282$]

Solution ในตาราง 7.1-1เป็นผลจาก $h = \pm 0.2$, ± 0.02 และ ± 0.002 digits ที่ถูกขีดเส้นใต้ของคอลัมน์ $\Delta f(x)/h$ คือพวกที่จะมีความคลาดเคลื่อนหลังจากการปัดเศษ **ความคลาดเคลื่อนที่แท้จริง** (actual error) $\epsilon(h)$ เป็นผลมาจากทั้งความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลาย และความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษ

ใน 2 คอลัมน์สุดท้ายแสดงว่าสำหรับ $0.002 <= |h| <= 0.2$ ความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลายที่หาได้จาก (9) นั้นอาจถูกใช้ในการประมาณ actual error ได้ นั่นคือ

$$-1/2\ f''(x)h = -1/2\ eh \approx \tau(h) \approx \epsilon(h)$$

ตาราง 7.1-1

การใช้ $F(h) = \Delta f(x)/h$ เพื่อประมาณค่า $d(e^x)/dx = e^x$ เมื่อ $x = 1$

h	Approximation $F(h)$ $\Delta f(x)/h$ $=[e^{1+h}-e^1]/h$	**Actual** error $\epsilon(h)$ $= e^1-\Delta f(x)/h$	Approximation truncation error $-1/2\ e h \approx \tau(h)$
0.2	3.009175	-0.290893	-0.271828
0.02	2.745650	-0.027368	-0.027183
0.002	2.721000	-0.002718	-0.002718
-0.002	2.715500	0.002782	0.002718
- 0.02	2.691300	0.026982	0.027183
- 0.2	2.463705	0.254577	0.271828

7.1C ความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษและจากการตัดปลาย: Stepsize Dilemma

โชคไม่ดีที่ ความแม่นยำของ $\Delta f(x)/h$ จะลดลง เมื่อ h ลดลงเรื่อย ๆ โดยไม่มีข้อจำกัด

ถ้าเราทำการลด h ไปเป็น h/10 และใช้ 7s arithmetic (ดังในตาราง7.1-1) เราจะได้ผลลัพธ์ในตาราง7.1-2 ซึ่งจะเห็นได้ชัดว่า ค่าประมาณของความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลาย $[-1/2\ f''(x)h]$ นั้นหยุดประมาณค่า $\epsilon(h)$ เหตุผลก็คือความคลาดเคลื่อนที่แท้จริง (actual error) $\epsilon(h)$ นั้นมีผลมาจากความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษมากกว่ามาจากความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลาย สิ่งที่เกิดขึ้นเมื่อ $h \approx 0$ คือการขาดตัวเลขนัยสำคัญใน $\Delta f(x) = e^{1+h}-e^{1}$ ซึ่งจะยิ่งขาดหายมากขึ้นเมื่อหารด้วย h ผลดังกล่าวจะยิ่งเลวลงเมื่อ h ลดลงเรื่อย ๆ เมื่อ h=0.0000002, $1+h \doteq 1$(to 7s) ดังนั้น $\Delta f(x) = 0$ ซึ่งจะให้ผลที่เหลวไหล (**absurd**) ในค่าประมาณดังแสดงใน row สุดท้ายของตารางต่อไปนี้

ตาราง 7.1-Z

ก.ใช้ 7s arithmetic เพื่อคำนวณ $\Delta f(x)/h$ สำหรับ h ค่าเล็ก

h	$\Delta f(x)/h = [e^{1+h}-e^{1}]/h$	Actual error $\epsilon(h) = e^{1}-[\Delta f(x)/h]$	Approximate truncation error $1/2\ e\ h \approx \tau(h)$
0.0002	2.72<u>00</u>	-0.01718	-2.7E-4
0.00002	2.7<u>000</u>	+0.01828	-2.7E-5
0.000002	2.5000	to. 21828	-2.7E-6
0.0000002	<u>**0.0000**</u> !!	t2.7183	-2.7E-7

เหตุการณ์ดังกล่าวข้างต้นเกิดขึ้นทุกครั้งที่เราพยายามประมาณพฤติกรรมของ f ที่ (หรือใกล้) ค่า fixed x โดยการใช้ค่าของ f ณ $x+\Delta x$ โดยที่ Δx เป็น multiple ของ stepsize h ซึ่งมีค่าเล็ก ในสถานการณ์ดังกล่าว

$$\underset{\text{ความคลาดเคลื่อนที่แท้จริง}}{\epsilon(h)} = \underset{\text{ความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลาย}}{\tau(h)} + \underset{\text{ความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษ}}{\rho(h)} \quad \ldots(10)$$

โดยที่ $\tau(h) = O(h^n)$

$\rho(h)$ จะมีค่าสูงขึ้นถ้า $h \to 0$ (ดูรูป 7.1-2)

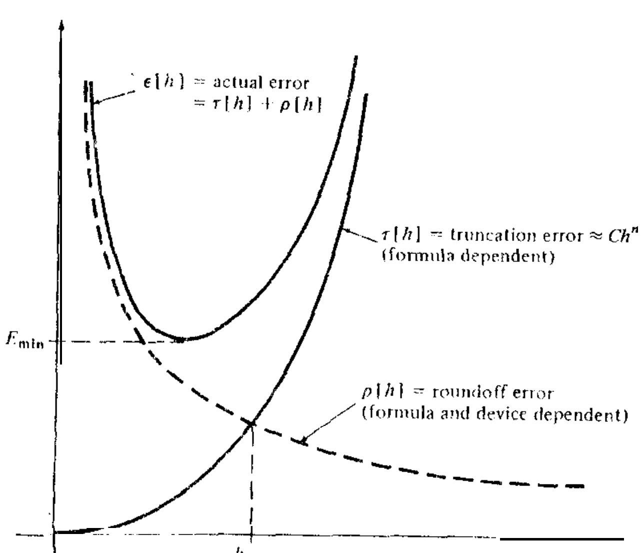
ผลที่ตามมาคือ $h_{\tau=\rho}$ เมื่อ $\tau(h) = \rho(h)$ และ $\rho(h)$ จะเป็น dominant term ใน (10) สำหรับ $h < h_{\tau=\rho}$

ปัญหาของการหา stepsize h ที่เล็กพอที่จะทำให้ $\tau(h)$ เล็ก และใหญ่พอที่จะทำให้ $\rho(h)$ ไม่ dominate ความคลาดเคลื่อน (นั่นคือ $h \approx h_{\tau=\rho}$) จะถูกอ้างถึงโดย

Stepsize Dilemma

E_{min} อาจจะใหญ่เกินกว่าที่จะยอมรับได้ ตัวอย่างเช่น จากตารางทั้ง 2 ที่ผ่านมาแสดงว่าเมื่อ $f(x) = e^x$ และ $x = 1$ และใช้ 7s arithmetic แล้ว

$O(h)$ approximation $\Delta f(x)/h$ ไม่สามารถประมาณ $f'(x)$ได้ถึง 6s จาก h ที่ใช้ในทั้ง 2 ตาราง ความแม่นยำของค่าประมาณที่ดีที่สุดได้เพียง 3s เท่านั้น



รูป 7.1-2 Actual error = Truncation error + Roundoff error

จากรูปได้คำแนะนำในการลดขนาดของ E_{min} เมื่อ E_{min} ยังเล็กไม่พอเพียง

__Remedy 1__ ให้ใช้สูตรซึ่งมีเทอมที่มีกำลังสูงกว่าเดิม (high-order)(นั่นคือเพิ่ม n) การทำดังกล่าวจะลดค่า E_{min} ลงโดย กราฟของ $\tau(h)$ จะลดลงสำหรับ h เล็ก ๆ

__Remedy 2__ ให้ใช้การคำนวณที่มีความแม่นยำสูงกว่าเดิม การทำดังกล่าวจะลดค่า E_{min} โดยเคลื่อนกราฟของ $\rho(h)$ ลงมาและไปทางซ้าย

แต่วิธีแก้ไขทั้ง 2 วิธีข้างต้นจะต้องใช้การคำนวณที่ช้า ๆ ซาก ๆ และวิธีทั้งสองอาจจะต้องใช้เครื่องที่แตกต่างไปจากเครื่องเดิม

7.1D __การประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสัน (Richardson's Extrapolation)__

สมมุติว่า F(h) คือ $O(h^n)$ approximation ของ Q และเราใช้เพื่อหาค่าประมาณสองค่า คือ F(h) และ $F(h_{larger})$ สูตรสำหรับหาค่าประมาณของ Q ซึ่งปรับปรุงแล้วคือ

$$F_1(h) = [r^n F(h) - F(h_{larger})]/(r^n - 1) \qquad \ldots(11a)$$

โดยที่ $r = h_{larger}/h$

ถ้าทราบว่า $\tau(h) = Ch^n + O(h^m)$ แล้ว $F_1(h)$ คือ mth order นั่นคือ

$$Q - F_1(h) = Dh^m + (\text{เทอมกำลังสูงขึ้น}) = O(h^m) \qquad \ldots(11b)$$

ในกรณีนี้เราอาจใช้ (11a) เพื่อให้การประมาณค่ารวมเทอมที่มีกำลังสูงขึ้นไปจากเดิมอีก นั่นคือหา

$$F_2(h) = [r^m F_1(h) - F_1(h_{larger})]/(r^m - 1) \qquad \ldots(11c)$$

โดยที่ $r = h_{larger}/h$ เช่นเดิม

7.1E การใช้สูตรของริชาร์ดสันเพื่อแก้ไข Stepsize Dilemma

$Q = f'(x)$ และ $F(h) = \Delta f(x)/h$

จาก (12) เราทราบว่า

$$\underbrace{f'(x)}_{Q} = \underbrace{[\Delta f(x)/h]}_{F(h)} + \underbrace{Ch + Dh^2 + Eh^3 + \ldots}_{\tau(h)} \qquad \ldots(12)$$

ดังนั้น $\tau(h) = Ch^1 + O(h^2)$

เมื่อใช้สูตรของริชาร์ดสัน กับ $n = 1$, $m = 2$

สำหรับค่า $F(0.2) = 3.009175$, $F(0.02) = 2.745650$,

$F(0.002) = 2.721000$ ...(13)

จากตาราง 7.1-1

$h_{larger} = 10h$ นั่นคือ $r = 10$ และโดย (12), $n = 1$, $m = 2$

ดังนั้นค่าประมาณที่ปรับปรุงตามสูตร (11a) และ (11c) ของ $f'(x)$ คือ

$F_1(h) = [10^1 F(h) - F(10h)]/9$ และ

และ $F_2(h) = [10^2 F_1(h) - F_1(10h)]/99$ ...(14)

ใช้ค่าจาก (13) และสูตรเหล่านี้สร้าง **ตารางริชาร์ดสัน (Richardson Table)** ได้ดังนี้

ตาราง 7.1-3

ตารางริชาร์ดสัน สำหรับการปรับปรุง $F(h) = [\Delta f(x)/h]$

	h	$F(h)=\Delta f(x)/h$ $[\tau(h)=O(h^1)]$	$F_1(h)$ in (14) $[\tau(h)=O(h^2)]$	$F_2(h)$ in (14) $[\tau(h)=O(h^3)]$
r-10,	0.2	3.009175		
	0.02	**2.745650**	**2.716369**	
r-10	0.002	2.721000	2.718261	2.718280

ตัวเลขที่ถูกขีดเส้นใต้คือพวกที่จะมีความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษ

การคำนวณค่าในตาราง $F_1(0.002) = [10(2.721)-2.745650]/9$

$$2.718261$$

และ $F_2(0.002) = [100(2.718261)-2.716369]/99$

$$= 2.718280$$

$F(0.002) = 2.721000$ นั้นแม่นยำเพียง 3s

$F_2(0.002) = 2.718280$ แม่นยำถึง 6s

เพราะว่า $F_1(0.002)$ และ $F_2(0.002)$ นั้นค่าใกล้เคียงกันประมาณ 6s ดังนั้นเราอาจสรุปว่า $F_2(0.002)$ ประมาณค่า $f'(x)$ ได้ละเอียดแม่นยำถึง 6s ถึงแม้ว่าเราไม่ทราบค่าจริงของ $f'(x)$ ดังนั้นให้ใช้ Richardson improvement ก่อนใช้ remedy 1 หรือ 2 ในหัวข้อ 7.1C

7.1F $O(h^2)$ Central Difference Approximation $f'(x) \approx \delta f(x)/2h$

a u (15a) ออกจาก (15b) โดยที่

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + [f''(x)/2!]h^2 - [f'''(x)/3!]h^3 + \dots + [f^{(vi)}(x)/6!]h^6 + \dots \quad \dots(15a)$$

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + [f''(x)/2!]h^2 + [f'''(x)/3!]h^3 + \dots + [f^{(vi)}(x)/6!]h^6 + \dots \quad \dots(15b)$$

เทอมที่มี h กำลังเลขคู่ ตัดกันหมด

$$\underbrace{f'(x)}_{Q} = \underbrace{[f(x+h)-f(x-h)]/2h}_{F(h)=\delta f(x)/2h} \underbrace{- [f'''(x)/6]h^2 + [f^{(v)}(x)/120]h^4 - [f^{(vii)}(x)/5040]h^6 - \dots}_{\tau(h)=f'(x)-[\delta f(x)/2h]} \quad \dots(16)$$

ดังนั้นเราให้

$$\boxed{\delta f(x)/2h = [f(x+h) - f(x-h)]/2h} \quad \dots(17)$$

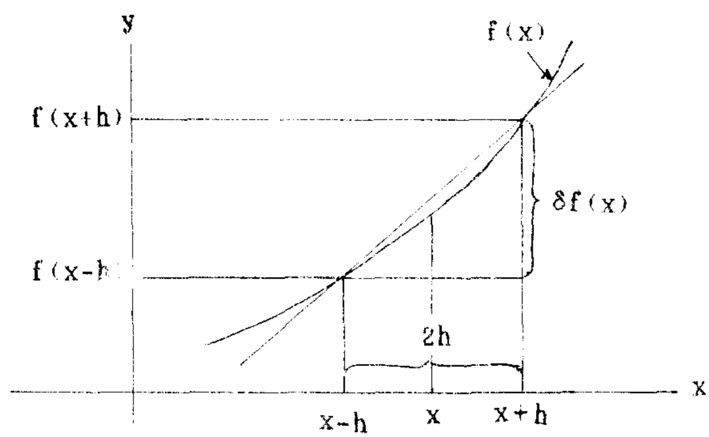
ซึ่งเรียกว่า central difference quotient ของ f ที่ x

ดังนั้น central difference approximation $f'(x) \approx \delta f(x)/2h$ ซึ่งคือ $O(h^2)$

$$f'(x) = [\delta f(x)/2h] + \tau(h)$$

โดยที่ $\tau(h) \approx [-f'''(x)/6]h^2 = O(h^2)$ ...(18)

โปรดสังเกตว่า $\delta f(x)/2h$ ไม่เปลี่ยนแปลง เมื่อแทน h ด้วย $-h$



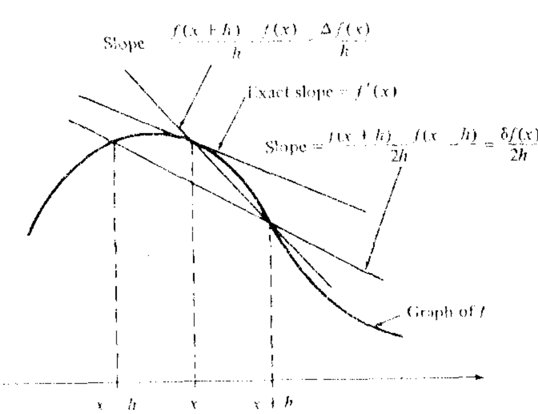
รูป 7.1-3 รูปแสดง $\delta f(x)$

จากรูป slope ของเส้นตรงที่สัมผัส $f(x)$ ที่ x คือ

$$dy/dx = f'(x) = \lim_{h \to 0}[f(x+h)-f(x-h)]/2h = \lim_{h \to 0}\delta f(x)/2h$$

จาก (16) จะเห็นว่า $\delta f(x)/2h$ ประมาณค่า $f'(x)$ ตรงกับค่าจริงของ $f'(x)$ [นั่นคือ $\tau(h) = 0$] เมื่อ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันกำลังสอง

$\delta f(x)/2h$ นั้นโดยทั่ว ๆ ไปแล้ว จะประมาณ $f'(x)$ ได้แม่นยำกว่า $\Delta f(x)/h$ ซึ่งจะเห็นได้จากรูปต่อไปนี้



รูป 7.1-4 รูปแสดง $\Delta f(x)/h$ และ $\delta f(x)/2h$

ตาราง 7.1-4 แสดงการใช้ 7s arithmetic เพื่อประมาณค่า $f'(x) = e^{1}$ โดยใช้ $\delta f(x)/2h$ ทั้งนี้เพื่อเปรียบเทียบกับสองตารางข้างต้น (ซึ่งใช้ $\Delta f(x)/h$)

ตาราง 7.1-4

การใช้ 7 s arithmetic เพื่อประมาณค่า $f'(x)=e^{1}$ โดย $\delta f(x)/2h$

h	$\delta f(x)/2h = [e^{1+h}-e^{1-h}]/2h$	$\epsilon(h) = f'(x)-[\delta f(x)/2h]$	$-1/6\ eh^{2} \approx \tau(h)$
0.2	2.736440	-0.018158	-1.8E-2
0.02	2.718475	-0.000193	-1.8E-4
0.002	2.718250	-0.000032	-1.8E-6
0.0002	2.720000	-0.001718	-1.8E-8
0.00002	2.725000	-0.006718	-1.8E-10
0.000002	2.750000	-0.031718	-1.8E-12
0.0000002	0.000000	2.718282	-1.8E-14

จากตารางตรงที่ $h=0.002$ แสดงว่าความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษมีอิทธิพลเล็กน้อยและใหญ่ขึ้นกว่า $\tau(h)$ อย่างรวดเร็ว สำหรับ $h<0.002$ อย่างไรก็ดีถ้าความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลายมีอิทธิพลมากกว่า (โดยที่ $h >= 0.002$) ความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษแล้ว $\delta f(x)/2h$ จะประมาณได้แม่นยำกว่า $\Delta f(x)/h$ สำหรับ h ที่กำหนดให้ และสอดคล้องกับ

$$\epsilon(h/10) \approx 1/100\ \epsilon(h) \qquad \ldots(19)$$

7.2 สูตรการประมาณค่าสำหรับอนุพันธ์อันดับที่ k

7.2A O(h) Approximation $f^{(k)}(x) \approx \Delta^{k} f(x)/h^{k}$

พิจารณา Taylor expansion

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + [f''(x)/2]h^2 + [f'''(x)/6]h^3 + [f^{(iv)}(x)/24]h^4 + \ldots \qquad \ldots(1)$$

แทน h ด้วย 2h;

$$f(x+2h) = f(x) + 2f'(x)h + 2f''(x)h^2 + [4f'''(x)/3]h^3 + [2f^{(iv)}(x)/3]h^4 + \ldots \qquad \ldots(2)$$

2*(1)-(2);

$$2f(x+h)-f(x+2h) = f(x) - f''(x)h^2 - f'''(x)h^3 + (7/12)f^{(iv)}(x)h^4 + \ldots \qquad \ldots(3)$$

แล้วแก้ (3) เพื่อหา f ''(x) เราได้

$$f''(x) = [f(x)-2f(x+h)+f(x+2h)]/h^2 - f'''(x)h + (7/12)f^{(iv)}(x)h^2 + \ldots \qquad \ldots(4)$$

ถ้าเราให้ f(x)-2f(x+h)+f(x+2h) แทนด้วย $\Delta^2 f(x)$ แล้วจาก (4) จะได้

$$\boxed{\begin{array}{l} f''(x) \approx \Delta^2 f(x)/h^2 = [f(x)-2f(x+h)+f(x+2h)]/h^2 \\ \tau(h) \approx -f'''(x)h = O(h) \end{array}} \qquad \ldots(5)$$

เราเรียก three-point formula $\Delta^2 f(x)/h^2$ ว่า

$O(h)$ forward difference approximation of $f''(x)$ ถ้า $h>0$

และเรียกว่า

$O(h)$ backward difference approximation of $f''(x)$ ถ้า $h<0$

จาก (4) จะเห็นว่า $\Delta^2 f(x)/h^2$ เป็นค่าแม่นตรง (exact) สำหรับฟังก์ชันกำลังสอง (ซึ่งสอดคล้องกับ $f''' = 0$)

$$f^{(k)}(x) \approx \Delta^k f(x)/h^k = (1/h)[\Delta^{k-1} f(x+h)/h^{k-1} - \Delta^{k-1} f(x)/h^{k-1}],$$
$$[k >= 1] \quad \tau(h) = O(h)$$

...(6)

$$f'''(x) \approx \Delta^3 f(x)/h^3 = [-f(x)+3f(x+h)-3f(x+2h)+f(x+3h)]/h^3$$

(four-point formula) $\tau(h) = O(h)$ ...(7)

เราไม่จำเป็นต้องจำส.ป.ส.ของ $f(x+h)$, $f(x+2h)$,..., $f(x+kh)$ ใน $(k+1)$-term expansion of $\Delta^k f(x)/h^k$ เพราะเราอ่านได้จาก row ที่ k ของสามเหลี่ยมของปาสคาล (Pascal's triangle) (รูป 6.2-11) **อย่าลืม** สลับเครื่องหมายเพื่อให้ได้ส.ป.ส.ของ $f(x+kh)$ เป็น +1

ตัวอย่าง $O(h)$ approximation ของ $f^{(v)}(x)$ คือ

$$\Delta^5 f(x)/h^5$$
$$= [-f(x)+5f(x+h)-10f(x+2h)+10f(x+3h)-5f(x+4h)+f(x+5h)]/h^5$$

...(8)

ตัวอย่าง ถ้า $f(x) = e^x$, $x = 1$ และ $h = \pm 0.1$ จงหา

(a) $O(h)$ forward difference approximation ของ $f''(x)$, $h = 0.1$

(b) $O(h)$ backward difference approximation ของ $f^{(v)}(x)$, $h = -0.1$

Solution

(a) $f''(1) \approx (1/0.1)^2[e^{1.0} - 2e^{1.1} + e^{1.2}] \doteq 3.0067$

...(9)

(b) $f^{(v)}(x)$

$\approx (1/-0.1)^5[-e^{1.0} + 5e^{0.9} - 10e^{0.8} + 10e^{0.7} - 5e^{0.6} + e^{0.5}]$

$\doteq$ **2.1214** ...(10)

เพราะว่า $f''(1) = f^{(iv)}(1) = e^{1} \doteq 2.7183$ เราจะเห็นว่า สำหรับค่า h ที่กำหนดให้ $O(h)$ approximation $f^{(k)}(x) \approx \Delta^k f(x)/h^k$ นั้นโดยทั่ว ๆ ไปจะมีความแม่นยำน้อยลงเมื่อ k เพิ่มขึ้น

เพื่อช่วยปรับปรุงให้มีความแม่นยำมากขึ้น เราใช้สูตรของริชาร์ดสัน (โดยที่ n = 1) เพื่อให้ได้ $O(h^2)$ approximations ที่ดีขึ้น

$$f^{(k)}(x) \approx F_1(h) = [rF(h) - F(rh)]/(r-1)$$

โดยที่ $F(h) = \Delta^k f(x)/h^k$ และ $r > 1$ ...(11)

7.2B Higher-Order Formulas สำหรับ $f^{(k)}(x)$

ใน (12)-(14), f_{+j} เป็นตัวย่อของ $f(x+jh)$ ดังนั้น

$$f_0 = f(x),\ f_1 = f(x+h),\ f_{-1} = f(x-h),\ f_2 = f(x+2h), \ldots$$

f_{-3}	f_{-2}	f_{-1}	f_0	f_1	f_2	f_3	
•	•	•	•	•	•	•	x
x-3h	x-2h	x-h	x	x+h	x+2h	x+3h	

$O(h^2)$ Forward/Backward Difference Formulas

$$f'(x) \approx \frac{1}{2h}[-3f_0 + 4f_1 - f_2] \tag{12a}$$

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2}[2f_0 - 5f_1 + 4f_2 - f_3] \tag{12b}$$

$$f'''(x) \approx \frac{1}{2h^3}[-5f_0 + 18f_1 - 24f_2 + 14f_3 - 3f_4] \tag{12c}$$

$$f^{(iv)}(x) \approx \frac{1}{h^4}[3f_0 - 14f_1 + 26f_2 - 24f_3 + 11f_4 - 2f_5] \tag{12d}$$

$O(h^2)$ Central Difference Formulas

$$f'(x) \approx \frac{1}{2h}[-f_{-1} + 0f_0 + f_1] = \frac{\delta f(x)}{2h} \tag{13a}$$

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2}[f_{-1} - 2f_0 + f_1] = \frac{\delta^2 f(x)}{h^2} \tag{13b}$$

$$f'''(x) \approx \frac{1}{2h^3}[-f_{-2} + 2f_{-1} + 0f_0 - 2f_1 + f_2] \tag{13c}$$

$$f^{(iv)}(x) \approx \frac{1}{h^4}[f_{-2} - 4f_{-1} + 6f_0 - 4f_1 + f_2] \tag{13d}$$

$O(h^4)$ Central Difference Formulas

$$f'(x) \approx \frac{1}{12h}[f_{-2} - 8f_{-1} + 0f_0 + 8f_1 - f_2] \tag{14a}$$

$$f''(x) \approx \frac{1}{12h^2}[-f_{-2} + 16f_{-1} - 30f_0 + 16f_1 - f_2] \tag{14b}$$

$$f'''(x) \approx \frac{1}{8h^3}[f_{-3} - 8f_{-2} + 13f_{-1} + 0f_0 - 13f_1 + 8f_2 - f_3] \tag{14c}$$

$$f^{(iv)}(x) \approx \frac{1}{6h^4}[-f_{-3} + 12f_{-2} - 39f_{-1} + 56f_0 - 39f_1 + 12f_2 - f_3] \tag{14d}$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f(x) = e^x$ จงประมาณค่าของ $f''(1) = e^1 \doteq 2.718281$ อย่างแม่นยำ

Solution $O(h^2)$ foraula (13b), h = 0.1 ให้ค่า

$$f''(1) \approx (1/0.1)^2[e^{0.9} - 2e^{1.0} + e^{1.1}] = 2.720548 \quad \ldots(15)$$

(3s accuracy)

ต่อไปใช้ $\delta^2 f(x)/h^2$, h = 0.05 ให้ค่า

$$f''(1) \approx 1/(0.05)^2[e^{0.95} - 2e^{1.0} + e^{1.05}] = 2.\underline{7188}48 \quad \ldots(16)$$

($\approx$ 4s accuracy)

เมื่อใช้สูตรของริชาร์ดสัน โดยใช้ r = 0.1/0.05 = 2 และ n = 2

$$f''(1) \approx [2^2(2.718848) - 2.720548]/(2^2 - 1) = 2.\underline{718281}$$

(7s accuracy) . ..(17)

ซึ่งคือ $O(h^4)$ approximation, h = 0.05(14b)

หมายเหตุ (n+1)-point formulas ใน (12)-(14) อาจหาได้จาก

$$f^{(k)}(x) \approx p^{(k)}(x), \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad \ldots(18)$$

โดยที่ p(x) คือการประมาณค่าในช่วงแบบโพลิโนเมียลสำหรับ (n+1) knots ซึ่งสมนัยกับค่าของฟังก์ชัน (n+1) ค่า ดังนั้น

(n + 1)-point formulas (12)-(14) ที่จริงแล้วคือ polynomial of degree <= n

7.3 วิธีวิเคราะห์เชิงตัวเลขสำหรับการอินทิเกรท หรือควอดราเจอร์ (Quadrature)

วัตถุประสงค์ของหัวข้อนี้คือแสดงวิธีการประมาณค่าอินทิกรัลจำกัดเขต (definite integrals) โดยใช้สูตรในรูป

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + \ldots + w_n f(x_n) = \sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k) \quad \ldots(1)$$

โดยที่ จุดที่ใช้ (sample points) คือ $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (ไม่จำเป็นต้องเป็นห่างกันเท่า ๆ กัน) คือจุดที่อยู่ <u>ในหรือใกล้ (in or near)</u> [a,b]

weighted sum $\sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k)$ ถูกเรียกว่า (n+1)-point formula

สูตรนี้จะเป็น closed formula ถ้าทั้ง a และ b เป็น sample points
และ จะเป็น open formula ถ้าทั้ง a และ b ไม่เป็น sample points

7.3A <u>การใช้การประมาณค่าในช่วงแบบโพลิโนเมียลเพื่อหาสูตรสำหรับควอดราเจอร์</u>

สมมุติว่า sample points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ถูกเลือกมาเพื่อใช้ใน (1)
ให้ $p_{0,n}(x)$ เป็น unique interpolating polynomial สำหรับ (n+1) knots

$$P_0(x_0, f(x_0)),\ P_1(x_1, f(x_1)), \ldots,\ P_n(x_n, f(x_n)) \qquad \ldots(2)$$

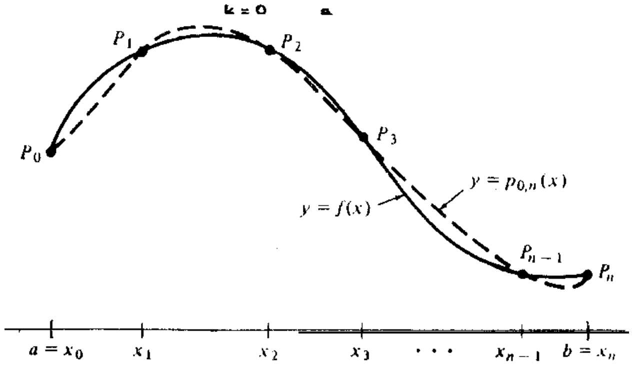
เหตุผลเบื้องหลัง quadrature formulas ส่วนมากคือ

ถ้า $f(x) \approx p_{0,n}(x)$ บน [a,b] แล้ว $\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_{0,n}(x)dx \qquad \ldots(3)$

sample weights ที่ทำให้ (1) เป็น **exact** สำหรับ polynomial of degree <= n นั้นหาได้ง่ายจากรูปแบบของลากรองก์ (Lagrange form) ของ $p_{0,n}(x)$

แท้จริงแล้ว $\int_a^b p_{0,n}(x)dx = \int_a^b [\sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_k(x)]dx$

$$= \sum_{k=0}^{n} [\int_a^b L_k(x)dx]f(x_k) \qquad \ldots(4)$$



รูป 7.3-1 การประมาณค่า $\int_a^b f(x)\,dx$ โดย $\int_a^b p_{0,n}(x)\,dx$.

จาก (4) การเท่ากันของคู่หลังมาจากความจริงที่ว่าอินทิกรัลของ weighted sum ของฟังก์ชัน คือ weighted sum ของอินทิกรัลของฟังก์ชันนั่นเอง

เนื่องจาก $f(x) = p_{o,n}(x)$ เมื่อ $f(x)$ คือ polynomial of degree $<= n$ เราจะเห็นได้จาก (4) ว่า

Quadrature formula (5a)

$$\int_a^b f(x)dx \approx w_o f(x_o) + w_1 f(x_1) + \ldots + w_n f(x_n) = \sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k)$$

...(5a)

จะเป็น exact (นั่นคือ เท่ากัน) สำหรับ polynomials of degree <= n ถ้าเราใช้

$$w_k = \int_a^b L_k(x)dx \text{ ,โดยที่ } L_k(x) = \prod_{i\neq k} (x-x_i)/(x_k-x_i)$$

...(5b)

<u>**ตัวอย่าง**</u> จงหา $w_o, w_1, \ldots, w_n$ ซึ่งทำให้สูตรต่อไปนี้ให้ค่าที่แท้จริงสำหรับ polynomials of degree <= n

(a) $\int_a^b f(x)dx \approx w_o f[(a+b)/2]$, [n = 0;sample only the midpoint]

(b) $\int_a^b f(x)dx \approx w_o f(a) + w_1 f(b)$, [n = 1; sample only the endpoints (a and b)]

(c) $\int_0^1 f(x)dx \approx w_o f(-1) + w_1 f(0) + w_2 f(2)$, [n = 2]

แล้วใช้ (a)-(c) เพื่อประมาณ $\int_0^1 x\,dx$ และ $\int_0^1 x^2 dx$

Solution

(a) สูตร (a) จะให้ค่าที่แท้จริงสำหรับ polynomials of degree <= 0 เมื่อ f(x) = 1 (ค่าคงที่) จากเงื่อนไขดังกล่าวเราได้

$$b - a = \int_a^b 1\,dx = w_o \cdot 1 \text{ นั่นคือ } w_0 = b - a$$

ผลคือได้ open formula ดังนี้

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f[(a+b)/2] \quad \text{[กฎจุดกึ่งกลาง หรือ Midpoint, Rule]} \quad \ldots(6)$$

(b) Lagrange polynomials สำหรับ $x_o = a$, $x_1 = b$ คือ

$$L_o(x) = (x-b)/(a-b) \text{ และ } L_1(x) = (x-a)/(b-a) \quad \ldots(7)$$

จาก (5b) weight. ที่ต้องการสำหรับ (b) คือ

$$w_o = \int_a^b L_o(x)dx = (x-b)^2/[2(a-b)]\Big|_a^b = (b-a)/2;$$

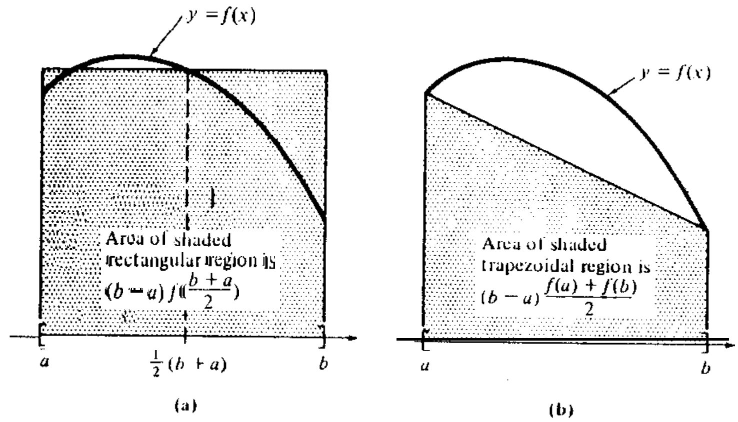
$$W_1 = \int_a^b L_1(x)dx = (x-a)^2/[2(b-a)]\Big]_a^b = (b-a)/2$$

ผลที่ได้คือ closed formula

$$\int_a^b f(x)dx \approx [(b-a)/2][f(a)+f(b)]$$

[กฎสี่เหลี่ยมคางหมู หรือ Trapezoidal Rule] ...(8)

รูป 7.3-2 แสดงภาพกราฟฟิคของสูตรที่ (6) และ (8) รูป (a) แสดงว่ากฎจุดกึ่งกลางจะให้ค่าที่แท้จริงเมื่อกราฟของ f เป็นเส้นตรง ดังนั้นสูตร (6) และ (8) ให้ค่าที่แท้จริงสำหรับ polynomial of degree <= 1 ผลที่ตามมาคือสูตรทั้งสองนั้นแม่นยำเมื่อ f(x) ≈ เส้นตรงบน [a,b] (นั่นคือเมื่อ a ≈ b)



รูป 7.3-2 (a) กฎจุดกึ่งกลาง (b) กฎสี่เหลี่ยมคางหมู

(c) Lagrange polynomials $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$

$$L_0(x) = \frac{(x-0)(x-2)}{(-1-0)(-1-2)}; \quad L_1(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{(0+1)(0-2)}; \quad L_2(x) = \frac{(x+1)(x-0)}{(2+1)(2-0)} \qquad \ldots(9)$$

ทำรูปให้ง่ายขึ้นและโดยใช้ (5b) เราได้

$$w_0 = \int_0^1 L_0(x)dx = (1/3)[(x^3/3)-x^2\Big|_0^1 = -2/9$$

$$w_1 = \int_0^1 L_1(x)dx = 13/12; \qquad w_2 = \int_0^1 L_2(x)dx = 5/36$$

ดังนั้นสูตรที่ต้องการ (ซึ่งไม่เป็นทั้ง open หรือ closed formula) คือ

$$\int_0^1 f(x)dx \approx (-2/9)f(-1) + (13/12)f(0) + (5/36)f(2) \qquad \ldots(10)$$

โดยการใช้ (6), (8) และ (10) กับ $f(x) = x$ แล้ว $f(x) = x^2$ ที่ $[0,1]$ จะได้

(a) $\int_0^1 x\,dx \approx (1-0)(1/2) = 1/2;\ \int_0^1 x^2dx \approx (1-0)(1/2)^2 = 1/4$

(b) $\int_0^1 x\,dx \approx [(1-0)/2][0+1] = 1/2;\ \int_0^1 x^2dx \approx [(1-0)/2][0^2+1^2]$

$= 1/2$

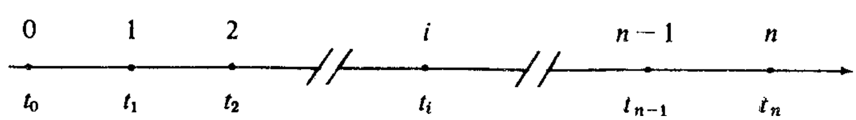
(c) $\int_0^1 x\,dx \approx (-2/9)(-1)+(13/12)(0)+(5/36)(2) = 1/2;$

$\int_0^1 x^2dx \approx (-2/9)(-1)^2+(13/12)(0^2)+(5/36)(2^2) = 1/3$

ทั้งหมดเป็นค่าที่แท้จริงสำหรับ $f(x) = x$ (degree 1) แต่ (c) เท่านั้นที่เป็นค่าที่แท้จริงสำหรับ $f(x) = x^2$ (degree 2) เป็นที่น่าสังเกตว่าสูตร (6) [one-point Midpoint Rule] ประมาณค่า $\int_0^1 x^2dx = 1/3$ ได้แม่นยำกว่าสูตร (8) [two-point Trapezoidal Rule]

7.3B <u>สูตรสำหรับจุดที่อยู่ห่างเท่า ๆ กัน</u>

ให้ $L_{i,n}(t)$ คือ ith Lagrange polynomial สำหรับ (n+1) integer nodes $t_i = i$, i-0, 1,. . .,n



. . .(11)

ตัวอย่างเช่น 2nd Lagrange polynomial สำหรับ $t_0 = 0,\ldots,\ t_3 = 3$ คือ cubic polynomial

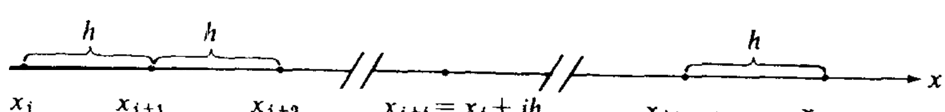
$$L_{2,3}(t) = \frac{(t-0)(t-1)(t-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} = (-1/2)(t^3 - 4t^2 + 3t)$$

เราอาจหา $L_{i,n}(t)$'s ตัวอื่น ๆ ได้ในทำนองเดียวกัน ดูตาราง 7.3-1

<u>**ตาราง 7.3-1**</u> $L_{i,n}(t)$'s สำหรับ n = 2, 3, 4

$n = 2$	$L_{0,2}(t) = \frac{1}{2}(t^2 \quad 3t + 2)$
	$L_{1,2}(t) = -1(t^2 - 2t)$
	$L_{2,2}(t) = \frac{1}{2}(t^2 - t)$
n-3	$L_{0,3}(t) = -\frac{1}{6}(t^3 - 6t^2 + \quad 11t - 6)$
	$L_{1,3}(t) = \frac{1}{2}(t^3 - 5t^2 + 6t)$
	$L_{2,3}(t) = -\frac{1}{2}(t^3 - 4t^2 + 3t)$
	$L_{3,3}(t) = \frac{1}{6}(t^3 - 3t^2 + 2t)$
$n = 4$	$L_{0,4}(t) = \frac{1}{24}(t^4 - \quad 10t^3 + 35t^2 - 50t + 24)$
	$L_{1,4}(t) = -\frac{1}{6}(t^4 + 9t^3 + 26t^2 - 24t)$
	$L_{2,4}(t) = \frac{1}{4}(t^4 - 8t^3 + 19t^2 - 12t)$
	$L_{3,4}(t) = -\frac{1}{6}(t^4 - 7t^3 + 14t^2 - 8t)$
	$L_{4,4}(t) = \frac{1}{24}(t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t)$

$L_{i,n}(t)$'s เหล่านี้อาจถูกใช้เพื่อหา quadratic formulas สำหรับ (n+1)h-spaced sample points ใด ๆ คือ $x_{j+i} = x_j + ih$, i=0, 1,..., n



...(12)

General (n+1)-Point Quadratic Formula สำหรับจุดที่อยู่ห่างกันเท่ากับ h

ถ้า $a = x_j + t_a h$ และ $b = x_j + t_b h$ แล้วการประมาณ

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\{w_0 f(x_j) + w_1 f(x_{j+1}) + \ldots + w_n f(x_{j+n})\} \quad \ldots(13a)$$

จะเป็นค่าที่แท้จริงสำหรับ polynomials of degree <= n ถ้า

$$w_i = \int_{t_a}^{t_b} L_{i,n}(t)dt \ , \quad i = 0, 1, \ldots, n \qquad \ldots(13b)$$

ก่อนที่จะแสดงที่มาของ (13) จะได้แสดงว่าเราอาจใช้ (13) เพื่อหาสูตรต่าง ๆ ที่มีประโยชน์ก่อน ถ้าเราใช้ n = 3, $t_a = 0$ ($a = x_j$) และ $t_b = 3$ ($b = x_{j+3}$) ใน (13a) เราได้

$$\int_{x_j}^{x_{j+3}} f(x)dx = h\{w_0 f(x_j) + w_1 f(x_{j+1}) + w_2 f(x_{j+2}) + w_3 f(x_{j+3})\} \qquad \ldots(14a)$$

โดยที่ weights [ได้มาจากตาราง 7.3-1 โดยการใช้ (13b)] คือ

$$w_0 = \int_0^3 L_{0,3}(t)dt = (-1/6)(t^4/4 - 2t^3 + 11t^2/2 - 6t)\Big|_0^3 = 3/8 \qquad \ldots(14b)$$

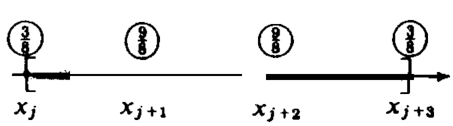
และทำนองเดียวกัน $w_1 = w_2 = 9/8$ และ $w_3 = 3/8$ ผลที่ได้คือสูตร (16a) ซึ่งให้ค่าที่แท้จริงสำหรับ polynomial of degree <= 3 อาร์กิวเมนต์ที่คล้ายคลึงกันทำให้ได้สูตรที่สำคัญคือ (15a), (17a), และ (18a)

SIMPSON'S $\frac{1}{3}$-RULE:

$$\int_{x_j}^{x_{j+2}} f(x)\ dx \approx \frac{h}{3}\{f(x_j) + 4f(x_{j+1}) + f(x_{j+2})\} \qquad \textbf{(15a)}$$

$$\tau[h] = \frac{-1}{90} h^5 f^{(iv)}(\xi) \qquad \text{where } x_j \leq \xi \leq x_{j+2} \qquad \textbf{(15b)}$$

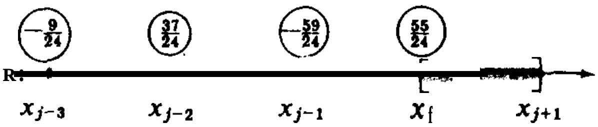
SIMPSON'S $\frac{3}{8}$-RULE:



$$\int_{x_j}^{x_{j+3}} f(x)\, dx \approx \frac{3h}{8}\{f(x_j) + 3f(x_{j+1}) + 3f(x_{j+2}) + f(x_{j+3})\} \qquad \textbf{(16a)}$$

$$\tau[h]=\frac{-3}{80}h^5f^{(iv)}(\xi), \qquad \text{where } x_j \leq \xi \leq x_{j+3} \tag{16b}$$

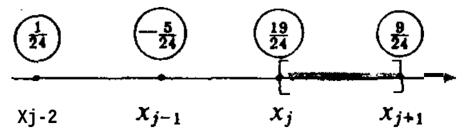
ADAMS $O(h^5)$ PREDICTOR:



$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\,dx \approx \frac{h}{24}\{-9f(x_{j-3})+37f(x_{j-2})-59f(x_{j-1})+55f(x_j)\} \tag{17a}$$

$$\tau[h]=\frac{251}{720}h^5f^{(iv)}(\xi), \qquad \text{where } x_{j-3} \leq \xi \leq x_{j+1} \tag{17b}$$

ADAMS $O(h^5)$ CORRECTOR:



$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\,dx \approx \frac{h}{24}\{f(x_{j-2})-5f(x_{j-1})+19f(x_j)+9f(x_{j+1})\} \tag{18a}$$

$$\tau[h]=-\frac{19}{720}h^5f^{(iv)}(\xi), \qquad \text{where } x_{j-2} \leq \xi \leq x_{j+1} \tag{18b}$$

ในไดอะแกรมซึ่งเขียนต่อจากชื่อสูตร ช่วงที่แลเงาไว้คือช่วงของการอินทิเกรท ([a,b] ของ (13a)) และตัวเลขซึ่งถูกวงรอบไว้เหนือ sample point x_{j+i} คือ sample weight w_i

ความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลายทั้งหมด ซึ่งแสดงไว้ใน (15b)-(18b) เป็นกรณีพิเศษของ

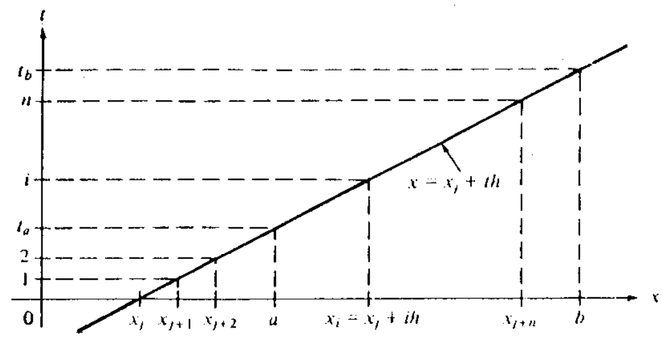
$$\boxed{\tau(h) = \underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{\text{exact value}} - \underbrace{h\sum_i w_i f(x_i)}_{\text{quadratic formula (13)}}} \qquad \ldots(19)$$

จะเห็นได้จาก (15b)-(18b) ว่า สูตรทั้ง 4 คือ (15a)-(18a) จะเป็นค่าที่แท้จริงสำหรับ cubic polynomials [ซึ่งมี $f^{(iv)} = 0$] นอกจากนั้น เนื่องจากว่า $f^{(iv)}(\lambda) \approx$ ค่าคงที่ สำหรับ h เล็ก ๆ เราจะเห็นว่า (15a)-(18a) คือ $O(h^5)$ formulas

เพื่อแสดงที่มาของ (13) เราจะเริ่มโดยการเปลี่ยนตัวแปรดังนี้

จาก $x = x_j$ t th ดังนั้น $t = (1/h)(x-x_j)$

$dx = h\ dt$ $\qquad\qquad dt = (1/h)dx$ $\qquad\qquad$ ...(20a)



รูป 7.3-3 รูปแสดง $x = x_j$ t th

(ดูรูป 7.3-3) จะได้

$$\int_{x=a}^{b} f(x)dx = \int_{t=t_a}^{t_b} f(x_j+th)h\ dt$$

$$= \quad h\int_{t=t_a}^{t_b} \phi(t)dt \text{ โดยที่ } \phi(t) = f(x_j + th)$$

เนื่องจากว่า $\phi(i) = f(x_j+ih) = f(x_i)$ สำหรับ i = 0, I,..., n

สูตร (13) จะได้มาโดยใช้ (5) กับ quadratic formula

$$\int_{t_a}^{t_b} \phi(t)dt = w_o\phi(0) \text{ t } w_1\phi(1) + \ldots + w_n\phi(n) \qquad \ldots(20b)$$

ถ้า f(x) คือ polynomial of degree <= n ใน x แล้ว $\phi(t)=f(x_j+th)$ คือ polynomials of degree <= n ใน t (ทำไม?) ในกรณีนี้ (20b) แล้ว (13a) จะเป็นค่าที่แท้จริง

ตัวอย่าง ใช้สูตรเท่าที่มีอยู่ถึงขณะนี้เพื่อประมาณค่า

(a) $\int_{0.1}^{0.3} e^x dx$ [Exact answer คือ $e^{0.3} - e^{0.1} \doteq 0.2446871$

(b) $\int_{0.3}^{0.4} e^x dx$ [Exact answer คือ $e^{0.4} - e^{0.3} \doteq 0.1419661$

(c) $\int_{0}^{0.5} e^x dx$ [Exact answer คือ $e^{0.5} - e^{0} \doteq 0.6487211$

Solution

(a) การใช้ กฎจุดกึ่งกลาง (6) บน [0.1,0.3] ให้

$$\int_{0.1}^{0.3} e^x dx \approx (0.3-0.1)\, f[(0.1+0.3)/2] = 0.2\ \exp(0.2) = 0.244280 \qquad \ldots(21)$$

(Error $\doteq$ 0.244687-0.244280 = 0.000407)

หรือโดยใช้ กฎสี่เหลี่ยมคางหมู (8) บน [0.1,0.2] และ [0.2,0.3] ให้

$$\int_{0.1}^{0.3} e^x dx \approx (0.1/2)[e^{0.1} + e^{0.2}] + (0.1/2)[e^{0.2} + e^{0.3}] \doteq 0.244892 \qquad \ldots(22)$$

(Error $\doteq$ 0.244687 - 0.244892 = -0.000205~

และท้ายสุด โดยใช้กฎเศษหนึ่งส่วนสามของซิมป์สัน (Simpson's 1/3-rule) (15a) บน [0.1,0.3] (h = 0.1) ให้

$$\int_{0.1}^{0.3} e^x dx \approx (0.1/3)[e^{0.1} + 4e^{0.2} + e^{0.3}] \doteq 0.244688 \qquad \ldots(23)$$

(Error $\doteq$ 0.244687 - 0.244688 = -0.000001)

การที่ (23) มีความแม่นยำสูงกว่า (22) อย่างมาก แสดงให้เห็นความจริงที่ว่า การประมาณค่าในช่วงกำลังสองบน [0.1,0.3] ประมาณค่า e^x ได้ดีกว่า การประมาณค่าในช่วงเชิงเส้นบน [0.1,0.2] และ [0.2,0.3] โปรดสังเกตว่า (21) ซึ่งใช้เพียงจุดเดียวนั้นมีความแม่นยำเกือบจะเท่ากับ (23) ซึ่งใช้ 3 จุด

(b ด้วย $x_3 = 0.3$ และ $h = 0.1$

สูตรตัวทำนายของอาดามส์ (Adams predictor formula) (17a) จะให้

$$\int_{0.3}^{0.4} e^x dx \approx (0.1/24)[-9e^0 + 37e^{0.1} - 59e^{0.2} + 55e^{0.3}]$$

$$\doteq 0.141962 \qquad (24)$$

(Error = 0.141966 - 0.141962 = 0.000004)

ในขณะที่ สูตรตัวแก้ของอาดามส์ (Adams corrector formu la) (18a) ให้

$$\int_{0.3}^{0.4} e^x dx \approx (0.1/24)[e^{0.1} \quad 5e^{0.2} + 19e^{0.3} + 9e^{0.4}] \doteq 0.141966 \qquad ...(25)$$

(Error = 0 to 6s)

ความแม่นยำกว่าค่าประมาณอื่นของ (25) แสดงให้เห็นความจริงว่าช่วงของการอินทิเกรท [0.3,0.4] ซึ่งอยู่ใน ช่วงของการประมาณค่าในช่วง [0.1,0.4] (ที่ซึ่ง $p_{0,3}(x)$ นั้นประมาณ $f(x)$ ได้ดีที่สุด) ใน (25) แต่ [0,0.3] ใน (24) **อยู่นอก** ช่วงสำหรับการประมาณค่าในช่วง

(c) ใช้กฎเศษหนึ่งส่วนสามของซิมป์สัน บน [0,0.2] และ กฎเศษสามส่วนแปดของซิมป์สัน บน [0.2,0.5] ให้

$$\int_{0}^{0.5} e^x dx \approx (0.1/3)[e^0 + 4e^{0.1} + e^{0.2}]$$

$$+ (0.3/8)[e^{0.2} + 3e^{0.3} + 3e^{0.4} + e^{0.5}]$$

$$\doteq 0.221403 + 0.427319 = 0.648722 \qquad (26)$$

(Error = -0.000001)

หรือใช้กฎเศษสามส่วนแปดของซิมป์สัน บน [0,0.3] และ กฎเศษหนึ่งส่วนสามของซิมป์สัน บน [0.3,0.5] ให้

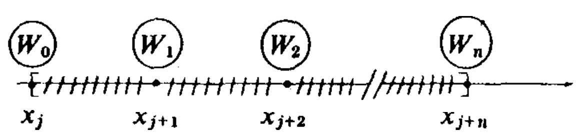
$$\int_0^{0.5} e^x dx \approx (0.3/8)[e^0 + 3e^{0.1} + 3e^{0.2} + e^{0.3}]$$
$$+ (0.1/3)[e^{0.3} + 4e^{0.4} + e^{0.5}]$$
$$\doteq 0.349859 + 0.298663 = 0.646722 \qquad \ldots(27)$$

(Error = -0.000001)

ในทั้ง (26) และ (27) ความคลาดเคลื่อนขนาดเล็กเกิดจาก rightmost integration โดยที่ $f^{(iv)}(\lambda) = \exp(\lambda)$ ใหญ่ที่สุด [ดู (15b) และ (16b)]

กฎสี่เหลี่ยมคางหมู (8) และ กฎของซิมป์สัน (15a) และ (16a) เป็น closed quadrature formulas ซึ่งอินทิเกรท $f(x)$ เหนือ $[a,b] = [x_j, x_{j+n}]$ โดยการใช้ $(n+1)$ จุดซึ่งเป็นจุดแบ่งช่วง $[a,b]$ ออกเป็น n ช่วงย่อยซึ่งมีความยาวเท่า ๆ กัน สูตรทั่ว ๆ ไปสำหรับจุดในลักษณะนี้คือ

(n + 1)-Point Newton–Cotes Formula



$$\int_{a=x_j}^{b=x_{j+n}} f(x)dx \approx h[w_0 f(x_j) + w_1 f(x_{j+1}) + \ldots + w_n f(x_{j+n})] \qquad \ldots(28a)$$

$$\tau(h) = K_n f^{(n+2)}(\lambda)h^{n+3} \quad \text{ถ้า } n \text{ เป็นเลขคู่}$$
$$K_n f^{(n+2)}(\lambda)h^{n+2} \quad \text{ถ้า } n \text{ เป็นเลขคี่} \qquad \ldots(28b)$$

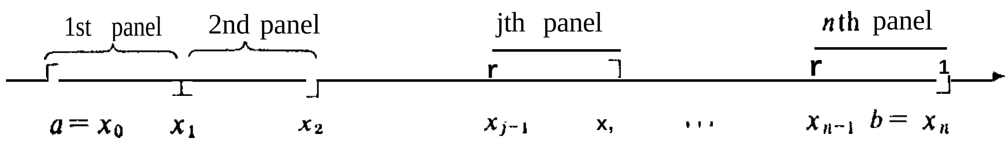
ใน (28b) K_n เป็นค่าคงที่ซึ่งขึ้นอยู่กับ n และ λ คือจุดที่ไม่ทราบค่าใน $[x_j, x_{j+n}]$ จาก (28b) เราเห็นว่า

สูตร (n+1)-จุดของนิวตัน-โคตส์ [(n+1)-point Newton-Cotes formula] เป็นค่าที่แท้จริงเมื่อ f(x) เป็น polynomial of degree <= n ถ้า n = 1, 3, 5 ,..., และเป็น polynomial of degree <= n+1 ถ้า n = 2, 4, 6, . . .

7.4 กฎรวม (Composite Rules) และ การหาค่าอินทิกรัลแบบรอมเบิร์ก (Romberg Integration)

สมมุติว่าเราแบ่ง [a,b] เป็น n panels ซึ่งมีความยาวเท่า ๆ กัน คือ (n+1) x_j's (ซึ่งห่างกันเท่า ๆ กัน) คือ

$x_j = a + jh$ โดยที่ $h = (b-a)/n$ สำหรับ $j = 0, 1, \ldots, n$ ...(1)



7.4A การรวมกฎของสี่เหลี่ยมคางหมู (Composite Trapezoidal Rule) และ การรวมกฎของซิมป์สัน (Composite Simpson's Rule) : T[h] และ S[h]

ถ้าเราใช้ กฎสี่เหลี่ยมคางหมู (8) ของหัวข้อ 7.3C ในการประมาณอินทิกรัลของ f ในแต่ละ panel เราได้

$$\int_a^b f(x)dx \approx (h/2)[f(a)+f(x_1)]+(h/2)[f(x_1)+f(x_2)]+\ldots + (h/2)[f(x_{n-1})+f(b)]$$

การรวมเทอม $f(x_j)$, $j = 1,\ldots,n-1$ ทำให้ได้ **การรวมกฎของสี่เหลี่ยมคางหมู** (Composite Trapezoidal Rule)

$$\int_a^b f(x)dx \approx T[h] = h\{[f(a)+f(b)]/2 + \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j)\} \qquad \ldots(2a)$$

$$\tau_T[h] = \int_a^b f(x)dx - T[h] = (-h^2/12)(b-a)f''(\lambda) = O(h^2) \qquad \ldots(2b)$$

ในหัวข้อ 7.4B จะแสดงการหาที่มาของความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลายใน (2b) (λ คือจุดที่ไม่ทราบค่าของ [a,b]) โปรดสังเกตว่าถึงแม้ว่าความคลาดเคลื่อนจากการ

ตัดปลายในแต่ละ panel ของ กฎสี่เหลี่ยมคางหมูจะเป็น $O(h^3)$ [ดู (33) ของหัวข้อ 7.3C] ความคลาดเคลื่อนสะสมของทั้ง n panels จะมี order ต่ำลงอีกหนึ่ง นั่นคือ $O(h^2)$

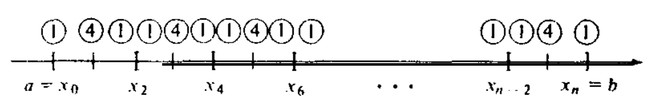
เพื่อให้ได้ การรวมกฎของซิมป์สัน เราต้องให้ **n เป็นเลขจำนวนเต็มคู่** ดังนั้นเราอาจใช้กฎเศษหนึ่งส่วนสามของซิมป์สัน [(15) ของหัวข้อ 7.1B] กับ n/2 double panels คือ

$[a,x_2],[x_2,x_4],[x_4,x_6],\ldots,[x_{n-2},b]$ (ดูรูป 7.4-1)

ผลที่ได้คือ การรวมกฎของซิมป์สัน

$$\int_a^b f(x)dx \approx S[h] = (h/3)\{f(a)+f(b)+4\Sigma_{odd}[h]+2\Sigma_{even}[h]\} \quad \ldots(3a)$$

$$\tau_S[h] = \int_a^b f(x)dx - S[h] = (-h^4/180)(b-a)f^{(iv)}(\lambda) = O(h^4) \quad \ldots(3b)$$



รูป 7.4-1 รูปแสดงที่มาของสูตรการรวมกฎของซิมป์สัน S[h]

ใน (3a) $\Sigma_{odd}[h]$ และ $\Sigma_{even}[h]$ แทนการบวกเหนือจุดภายใน(**interior** sample points) ซึ่งมีดรรชนีล่างเป็นเลขคี่และเลขคู่ตามลำดับ นั่นคือ

$$\Sigma_{odd}[h] = f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{n-3}) + f(x_{n-1}) \quad \ldots(4a)$$
$$\Sigma_{even}[h] = f(x_2) + f(x_4) + \ldots + f(x_{n-4}) + f(x_{n-2}) \quad \ldots(4b)$$

เมื่อ n เป็นเลขคู่ ดังนั้นการบวกเหนือ interior x_j's อาจเขียนได้ดังนี้

$$\Sigma_{interior}[h] = \Sigma_{odd}[h] + \Sigma_{even}[h] = \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) \qquad \ldots(4c)$$

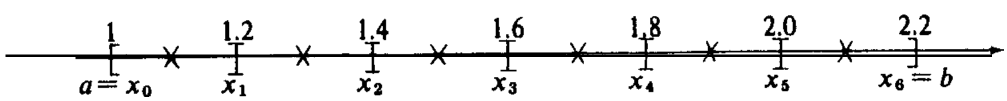
ตัวอย่าง จากตาราง 7.4-1 จงประมาณ $\int_{1}^{2.2} \ln x \, dx$ โดยใช้กฎรวม T[h] และ S[h] ด้วย (a) 6 panels และ (b) 12 panels

Solution [หมายเหตุ ค่าจริงคือ 0.534606(6s)]

(a) ในที่นี้ $a = 1$ และ $b = 2.2$ ดังนั้น (to 5d)

$f(a) + f(b) = \ln 1 + \ln 2.2 = 0 + 0.78846 = 0.78646$ ...(5a)

สำหรับ $n = 6$ panels, $h = (2.2-1)/6 = 0.2$ และจุดทั้ง 7 คือ



จาก (4) และด้านซ้ายของตาราง 7.4-1

$\Sigma_{odd}[0.2] = \ln(1.2)+\ln(1.6)+\ln(2.0) \doteq 1.34547$ ...(5b)

$\Sigma_{even}[0.2] = \ln(1.4)+\ln(1.8) \doteq 0.92426$ ...(5c)

ตาราง 7.4-1 **ค่าของ ln x(5s)**

x	f(x) = ln x	x	f(x) = ln x
1.0	0.00000	1.1	0.095310
1.2	0.18232	1.3	0.26236
1.4	0.33647	1.5	0.40547
3.6	0.47000	1.7	0.53063
1.8	0.58779	1.9	0.64185
2.0	0.89315	2.1	0.74194
2.2	0.78846		

ดังนั้น การรวมกฎสี่เหลี่ยมคางหมู (2a) [และ (4c)] ให้

$$TC0.23 = (0.2)\{(0.78846/2)\ t\ (1.34547+0.92426)\} \doteq 0.532792 \quad \ldots(6a)$$

$$\tau_T[0.2] = 0.534606 - 0.532792 = 0.001614 \quad \ldots(6b)$$

ในขณะที่ การรวมกฎของซิมป์สัน (3a)ให้

$$S[0.2] = (0.2/3)[0.78846 +4(1.34547) +2(0.92426)] \doteq 0.534591 \quad \ldots(7a)$$

$$\tau_s[0.2] = 0.534606 - 0.534591 = 0.000015 \quad \ldots(7b)$$

โปรดสังเกตว่า S[0.2] นั้นมีความแม่นยำมากกว่า T[0.2] ประมาณ 2d!

(b) h = 0.1 จุด 6 จุดใหม่ (คือจุดที่มีเครื่องหมาย x) ซึ่งมีดรรชนีล่างเป็น
เลขคี่

จากด้านขวาของตาราง 7.4-1

$$\Sigma_{odd}[0.1] = \ln(1.1)+\ln(1.3)+\ln(1.5)+\ln(1.7)+\ln(1.9)+\ln(2.1)$$
$$= 2.67756 \quad \ldots(8a)$$

ในทางตรงกันข้าม

$$\Sigma_{even}[0.1] = \Sigma_{interior}C0.21 = 1.34547\ t\ 0.92426 = 2.26973 \quad \ldots(8b)$$

[ดู (5b) และ (5c)] ดังนั้น (2a) และ (3a) ให้

$$T[0.1] = (0.1)\{(0.78846/2)+(2.67756+2.26973)\} \doteq 0.534152$$

$$(\tau_T[0.1] \doteq 0.000454) \quad \ldots(9a)$$

$$SCO.ll = (0.1/3)\{0.78846+4(2.67756)+2(2.26973)\} \doteq 0.534605$$

$$(\tau_s[0.1] \doteq 0.000001) \quad \ldots(9b)$$

โปรดสังเกตว่าความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลายของ T[h] และ S[h] นั้นสอดคล้อง (ตามลำดับ) กับ

$$\tau_T[0.1] \approx (1/2)^2 \tau_T[0.2] \text{ และ } \tau_S[0.1] \approx (1/2)^4 \tau_S[0.2]$$

ซึ่งแสดงว่า T[h] คือ $O(h^2)$ และ S[h] คือ $O(h^4)$ ในหัวข้อ 7.4B จะพิสูจน์สิ่งนี้ โดยอาศัยความจริงที่ว่า เมื่อ n มีจำนวนเป็น 2 เท่า (h ลดลงครึ่งหนึ่ง) จุดของ $\Sigma_{odd}[h/2]$ เป็นจุดใหม่ ในขณะที่จุดของ $\Sigma_{even}[h/2]$ ถูกใช้มาก่อนแล้ว

$$\boxed{\Sigma_{even}[h/2] = \Sigma_{odd}[h] \ t\ \Sigma_{even}[h] = \Sigma_{interior}[h]} \quad \ldots(10)$$

ดังนั้นถ้าเราบันทึก(หรือเก็บ) $\Sigma_{odd}[h]$ และ $\Sigma_{even}[h]$ แล้ว สิ่งที่ต้องการเพื่อใช้หา T[h/2] หรือ S[h/2] คือ $\Sigma_{odd}[h/2]$ จริง ๆ แล้วโดย (2a) และ (10)

$$T[h/2] = (h/2)\{[f(a)+f(b)]/2 \ t\ \Sigma_{odd}[h/2] \ t\ \Sigma_{interior}[h]\}$$

ดังนั้นจาก (2a) เราพบว่า

$$\boxed{T[h/2] = (1/2)\{T[h] \ t\ h\Sigma_{odd}[h/2]\}} \quad \ldots(11)$$

ซึ่งสูตรนี้ก็คือ **Recursive form ของการรวมกฎสี่เหลี่ยมคางหมู** ซึ่งทำให้ง่ายสำหรับการหา T[h/2] จาก T[h] เพื่อเป็นตัวอย่าง (6a) และ (8a) ให้

$$TC0.13 = (1/2)\{T[0.2] \ t\ (0.2)\Sigma_{odd}[0.1]\}$$

$$= (1/2)\{0.532792 \ t\ (0.2)(2.67756)\} \doteq 0.534152$$

ซึ่งเท่ากับ TCO.11 ที่ได้จาก (9a)

7.4B ความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลายของ T[h] และ S[h]

ในหัวข้อนี้จะแสดงว่า T[h] คือ $O(h^2)$

จาก (33) ของหัวข้อ 7.3C

$$\tau_T[h] = \int_a^b f(x)dx - T[h]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \{\text{ความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลายของกฎสี่เหลี่ยมคางหมู บน}[x_{j-1}, x_j]\}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \{-h^3/12\ f''(\lambda_j)\} = (-h^3/12)\{\sum_{j=1}^{n} f''(\lambda_j)\} \quad ...(12)$$

โดยที่ λ_j ตกอยู่ใน jth panel $[x_{j-1}, x_j]$ สำหรับ $j = 1, 2,..., n$ ถ้า f'' เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง บน $[a,b]$ ดังนั้น

$$\sum_{j=1}^{n} f''(\lambda_j) = nf''(\lambda) \text{ สำหรับบาง } \lambda \text{ ใน } [a,b]$$

โดยการแทนค่า n ด้วย (b-a)/h จะให้ (2b) นั่นคือ

$$\tau_T[h] = (-h^2/12)(b-a)f''(\lambda) = O(h^2) \quad ...(13a)$$

การวิเคราะห์ทำนองเดียวกัน โดยยึด (38) ของหัวข้อ 7.3C แสดงว่า ความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลายของการรวมกฎของซิมป์สัน ซึ่งได้จากสูตร (3b) นั่นคือ

$$\tau_S[h] = (-h^4/180)(b-a)f^{(iv)}(\lambda) = O(h^4) \quad ...(13b)$$

โดยที่ [เหมือนใน (13a)] λ คือจุดที่ไม่ทราบค่าบางจุดใน $[a,b]$

7.4C <u>การหา S[h] จาก T[h] และ T[2h]</u>

ถ้าเราใช้สูตรของริชาร์ดสัน [สูตร (19a) ของหัวข้อ 7.1D] กับ

T[h] และ T[2h] (ดังนั้น $r = 2$)

แล้ว [เนื่องจากว่า T[h] คือ $O(h^2)$ (นั่นคือ $n = 2$)] เราได้

$$T_1[h] = \{2^2T[h] - T[2h]\}/(2^2-1) \qquad \ldots(14a)$$

$$= (1/3)\{\ 4h\{(f(a)+f(b))/2+\Sigma_{odd}[h]+\Sigma_{even}[h]\}$$

$$-2h\{(f(a)+f(b))/2 + \Sigma_{even}[h]\}\ \}$$

โดยที่ (10) ถูกใช้เพื่อแทนที่ $\Sigma_{interior}[2h]$ ด้วย $\Sigma_{even}[h]$ ใน $T[2h]$ ทำให้อยู่ในรูปที่ง่ายขึ้นจะได้

$$T_1[h] = (h/3)\{\ f(a)+f(b)+4\Sigma_{odd}[h]+2\Sigma_{even}[h]\ \} = S[h]$$

ดังนั้นอาจกล่าวได้ว่า **การใช้สูตรของริชาร์ดสัน ด้วย r = 2 กับ การรวมกฎสี่เหลี่ยมคางหมู จะทำให้ได้ การรวมกฎของซิมป์สัน**

7.4D การหาค่าอินทิกรัลแบบรอมเบิร์ก (Romberg Integration)

เนื่องจากว่า $T_1[h] = S[h]$ คือ $O(h^4)$ [ดู (13b)] เราอาจใช้สูตรของริชาร์ดสัน โดยที่ n = 4 และ r = 2 เพื่อให้ได้

$$T_2[h] = S_1[h] = \{2^4S[h] - S[2h]\}/(2^4-1)$$

$$= \{16T_1[h] - T_1[2h]\}/15 \qquad \ldots(14b)$$

เราอาจแสดงได้ว่าสูตรนี้เป็น $O(h^6)$ ความจริงแล้วเราอาจแสดงได้ว่า อนุกรมของแมคคลอริน สำหรับความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลายของการรวมกฎสี่เหลี่ยมคางหมูนั้นอยู่ในรูป

$$\varepsilon_T[h] = Ch^2 + Dh^4 + Eh^6 + Fh^8 + \ldots \qquad \ldots(15)$$

ดังนั้นจากค่าประมาณโดยใช้กฎสี่เหลี่ยมคางหมู

$$T[h_0],\ T[h_0/2],\ T[h_0/4],\ T[h_0/8],\ldots \quad (r = 2)$$

เราสามารถสร้าง ตารางริชาร์ดสัน (Richardson Table) ดังแสดงในตาราง 7.4-2 เมื่อเราใช้

Richardson improvement ในลักษณะนี้ เราจะเรียกวิธีการนี้ว่า **การหาค่าอินทิกรัลแบบรอมเบิร์ก (Romberg Integration)** และผลที่ได้คือตารางที่มีชื่อว่า **ตารางรอมเบิร์ก (Romberg Table)**

ตาราง 7.4-2 ตารางรอมเบิร์ก

k	h	$T_0 = T(n=2)$	$T_1 = S(n=4)$	$T_2\,(n=6)$	$T_3\,(n=8)$	$T_4\,(n=10)$
0	h_0	$T[h_0]$				
1	$\frac{1}{2}h_0$	$T[\frac{1}{2}h_0]$	$T_1[\frac{1}{2}h_0]$			
2	$(\frac{1}{2})^2h_0$	$T[\frac{1}{4}h_0]$	$T_1[\frac{1}{4}h_0]$	$T_2[\frac{1}{4}h_0]$		
3	$(\frac{1}{2})^3h_0$	$T[\frac{1}{8}h_0]$	$T_1[\frac{1}{8}h_0]$	$T_2[\frac{1}{8}h_0]$	$T_3[\frac{1}{8}h_0]$	
4	$(\frac{1}{2})^4h_0$	$T[\frac{1}{16}h_0]$	$T_1[\frac{1}{16}h_0]$	$T_2[\frac{1}{16}h_0]$	$T_3[\frac{1}{16}h_0]$	$T_4[\frac{1}{16}h_0]$

ถ้า $T_0[h]$ คือสมาชิกทางซ้ายสุดของ row ที่ k ของตารางรอมเบิร์กแล้ว สมาชิกตัวอื่น ๆ ของ row จะหาได้โดย

$$\boxed{T_i[h] = \{4^i T_{i-1}[h] - T_{i-1}[2h]\}/(4^i-1)\ ,\ i=1,2,\ldots,k}$$

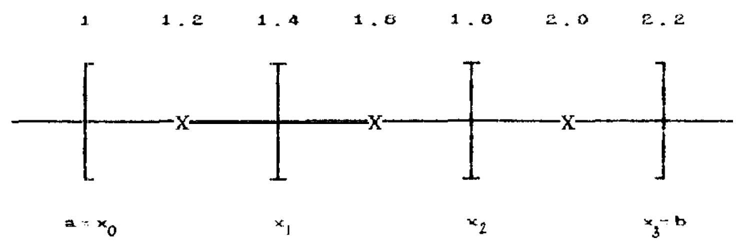
...(16)

การทดสอบเพื่อหยุดการทำงาน (termination test) ที่เหมาะสมสำหรับ การหาค่าอินทิกรัลแบบรอมเบิร์ก คือใช้ $T_k[h]$ ซึ่งเป็น สมาชิกตัวสุดท้ายของ row_k เพื่อเป็นค่าประมาณที่ต้องการของ $\int_a^b f(x)dx$ เมื่อ $T_k[h]$ มีค่าใกล้กับสมาชิกตัวที่มาก่อนใน row_k เดียวกันอย่างเพียงพอ นั่นคือเมื่อ

$T_k[h] - T_{k-1}[h]$ มีค่าใกล้ศูนย์อย่างเพียงพอ ...(17)

ตัวอย่าง* จงใช้การหาค่าอินทิกรัลแบบรอมเบิร์ก เพื่อหา $\int_{1}^{2.2} \ln x \, dx$ (to 5s)

Solution เนื่องจากว่า ln x ไม่มี "wiggles" (นั่นคือ inflection points) บน $[1, 2.2]$ เราจะใช้ h_o ค่อนข้างใหญ่ ลองใช้ $h_o = 0.4$ ในสูตร (2a) สำหรับหา $T[h]$



$k = 0$: $T[0.4] = 0.4\{[\ln(2.2)+\ln(1)]/2+\ln(1.4)+\ln(1.8)\} \doteq 0.527395$

$k = 1$: ใช้ $h = h_o = 0.4$ ใน recursive form (11) ให้ค่า

$$T[0.2] = (1/2)\{T[0.4] + (0.4)[\ln(1.2) + \ln(1.6) + \ln(2.0)]\}$$

$$\doteq \mathbf{0.532792}$$

ดังนั้น (16) เมื่อใช้ $i = 1$ ให้

$$T_1[0.2] = \{4T[0.2] - T[0.4]\}/3$$

$$= \{4(0.532792) - (0.527395)\}/3 \doteq 0.534591$$

เนื่องจากว่า $T_1[0.2]$ และ $T_2[0.2]$ ยังแตกต่างกันน้อยกว่า 5s เราจึงหาอีก 1 แถว

$k = 2$: ใช้ $h = h_o/2 = 0.2$ ใน recursive form (11) ให้ค่า

$$T[0.1] = (1/2)\{T[0.2] + (0.2)\Sigma_{odd}[0.1]\}$$

$$\doteq (1/2)\{0.532792 + (0.2)(2.67756)\} \doteq \mathbf{0.534152}$$

ดังนั้น (16) เมื่อใช้ $i = 1$ ให้

$$T_1[0.1] = \{4T[0.1] - T[0.2]\}/3$$
$$= \{4(0.534152) - (0.532792)\}/3 \doteq 0.534605$$

และเมื่อใช้ $i = 2$ ให้

$$T_2[0.1] = \{16T_1[0.1] - T_1[0.2]\}/15$$
$$= \{16(0.534605) - (0.534591)\}/15 \simeq 0.534606$$

เนื่องจากว่า $T_2[0.1]$ และ $T_1[0.1]$ สอดคล้องกันถึง 4s ดังนั้นเราใช้ $T_2[0.1]$เป็นค่าประมาณที่แม่นยำถึง 5s นั่นคือ

$$\int_1^{2.2} \ln x \, dx \doteq 0.534606 \ (5s)$$

จริง ๆ แล้วค่าประมาณนี้มีความแม่นยำทั้ง 6 ตัวเลขดังแสดงไว้

ตาราง 7.4-3 คือ ตารางรอมเบิร์ก สำหรับการคำนวณที่เพิ่งผ่านมา โปรดสังเกตว่า T[0.1] = 0.534152 นั้นมีความแม่นยำเพียง 3s! สิ่งนั้นแสดงว่าการลู่เข้าอย่างรวดเร็วและความแม่นยำนั้นสามารถได้จากการหาค่าอินทิกรัลแบบรอมเบิร์ก เมื่อ integrand นั้นเป็น ฟังก์ชันที่เรียบ

ตาราง 7.4-3

ตารางรอมเบิร์ก สำหรับการหา $\int_1^2 \ln x\, dx$ ถึง 5s

k	h	$T_0 = T(n=2)$		$T_1 = S(n=4)$		$T_2(n=6)$
0	0.4	0.527395				
1	0.2	0.532792	-->	0.534591		
2	0.1	0.534152	-->	0.534605	-->	0.534606

$T_i[h]$ เป็นค่าที่แท้จริงสำหรับ polynomials of degree <= 2i+1

...(18)

การหาค่าอินทิกรัลแบบรอมเบิร์กจะลู่เข้าหา $I = \int_a^b f(x)dx$ ถึงแม้ว่า f จะไม่เป็นฟังก์ชันที่เรียบ ก็ตาม สิ่งที่ต้องการคือ สำหรับ $T_0[h_0/2k]$ จะเข้าใกล้ I เมื่อ $k \to \infty$

Algorithm ในรูป 7.4-2 จะเอาสมาชิก (k+1) ตัวคือ

$$T_0[h],\ T_1[h],\ T_2[h], \ldots,\ T_k[h] \qquad ...(19a)$$

ใส่ใน row ที่ k ของเมตริกซ์ T โดยใช้ดรรชนีต่อไปนี้ตามลำดับ

$$T_{k,0},\ T_{k,1},\ T_{k,3}, \ldots,\ T_{k,k} \qquad ...(19b)$$

ขีดจำกัดบน MaxRowsโดยทั่ว ๆ ไปจะใช้ประมาณ 7 ค่าเริ่มต้นของ h คือ h_0 นั้นควรจะเล็กพอที่จะทำให้ $T[h_0]$ มีความแม่นยำอยู่บ้าง แต่ต้องใหญ่พอที่จะทำให้สามารถคำนวณค่าของ $T[h_0/2^{MaxRows}]$ โดยปราศจากการสะสมของความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษอย่างรุนแรง

Algorithm: Romberg Integration”

Purpose: To find $\int_a^b f(x)\,dx$ to *NumSig* significant digits. The matrix T is the Romberg table, with the kth iteration $(h = h_0/2^k)$ yielding

$$\text{row}_k\, T = [\,T_{k,0},\ \ T_{k,1}\ \ \ldots\ \ T_{k,k-1}\ \ \ T_{k,k}\,]$$

for $k = 0, 1, \ldots, MaxRows$.

{*initialize*}
GET a, *b*, [endpoints of the interval of integration)
n, (initial number of panels)
MaxRows, *NumSig* (termination parameters)
$h \leftarrow (b-a)/n$ (This is h_0}

$$T_{0,0} \leftarrow h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \Sigma_{\text{interior}}[h]\right)$$ (Composite Trapezoidal Rule}

$RelTol \leftarrow 10^{-NumSig}$

(iterate)
DO FOR $k = 1$ TO *MaxRows* UNTIL termination test is satisfied
BEGIN
$h \leftarrow h/2$ {h is now $h_0/2^k$}
$T_{k,0} \leftarrow \frac{1}{2}(T_{k-1,0} + 2h\,\Sigma_{\text{odd}}[h])$ [Recursive Trapezoidal Rule]
DO FOR $i = 1$ TO k (Get ith entry of $\text{row}_k\, T$}
$T_{k,i} \leftarrow (4^i T_{k,i-1} - T_{k-1,i-1})/(4^i - 1)$ (This is $T_i[h]$)
(termination **test:** $|T_{k,k} - T_{k,k-1}| \leqslant RelTol * |T_{k,k}|$)
END

IF **termination** test succeeded
THEN OUTPUT ($\int_a^b f(x)\,dx$ is $T_{k,k}$ to *NumSig* **significant** digits.)
ELSE OUTPUT (*MaxRows* iterations did not yield the desired accuracy.)

รูป 7.4-2 รหัสเทียมสำหรับขั้นตอนวิธี Romberg Integration

7.5 การหาค่าอินทิกรัลแบบเกาส์ (Gauss Quadrature)

สูตรสำหรับควอดราเจอร์(Quadrature formulas)ซึ่งได้พิจารณามาแล้วอยู่ในรูป

$$\int_a^b f(x)dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + \ldots + w_n f(x_n) \qquad \ldots(1)$$

โดยที่จุดถูกเลือกมาล่วงหน้า โดยทั่ว ๆ ไปสูตรดังกล่าวจะเป็นค่าที่แท้จริงสำหรับ polynomials ที่มี ส.ป.ส. n ตัว (นั่นคือ มี degree <= n-1) สิ่งที่เกาส์ทำคือ ให้ทั้ง n จุด และ n weights เป็นตัวแปร แล้วจะทำให้ (1) เป็นค่าที่แท้จริง

สำหรับ polynomials ซึ่งมี ส.ป.ส. 2n ตัว (นั่นคือมี degree <= 2n-1) สูตรที่ได้จากมาตรการนี้ถูกเรียกว่า **สูตรของเกาส์-เลอจองด์ (Gauss-Legendre** **(หรือเรียกเพียง เกาส์ (Gauss)) สำหรับการหาค่าอินทิกรัล**

7.5A <u>การหาค่าอินทิกรัลแบบเกาส์ บน [-1,1]</u>

เราจะเริ่มต้นด้วยการพิจารณา **normalized interval** [-1,1] ก่อน สำหรับ n >= 1 จุดประสงค์ของเราคือหา n จุด

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\dots,\ \lambda_n \text{ ใน } [-1,1] \qquad \dots(2a)$$

และ weights ซึ่งสมนัยกัน

$$\gamma_1,\ \gamma_2,\dots,\ \gamma_n \qquad \dots(2b)$$

ซึ่งจะทำให้ n-point สูตรสำหรับหาค่าอินทิกรัลแบบเกาส์ บน [-1,1] คือ

$$\boxed{\int_{-1}^{1} f(\lambda) \approx \gamma_1 f(\lambda_1) + \gamma_2 f(\lambda_2) + \dots + \gamma_n f(\lambda_n)} \qquad \dots(3)$$

เป็นค่าที่แท้จริงสำหรับ polynomials of degree <= 2n-1

เราจะเรียก λ_k's ใน (2a) ว่า **Gaussian sample points** ของ [-1,1] และเรียก γ_k's ใน (2b) ว่า **Gaussian weights**

การทำให้ (3) เป็นค่าที่แท้จริงสำหรับ $f(\lambda) = 1,\ \lambda,\ \lambda^2,\dots,\ \lambda^{2n-1}$ จะทำให้ได้ 2n สมการในรูป

$$\boxed{(E_k)\quad \gamma_1\lambda_1^{k-1} + \gamma_2\lambda_2^{k-1} + \dots + \gamma_n\lambda_n^{k-1} = \int_{-1}^{1} \lambda^{k-1}d\lambda \quad ,\ k = 1,\ 2,\dots,\ 2n} \qquad \dots(4a)$$

โดยที่สมการที่ k (E_k) นั้นทำให้ได้ค่าที่แท้จริงของ (3) สำหรับ $f(\lambda) = \lambda^{k-1}$ จากแคลคูลัส

$$\int_{-1}^{1} \lambda^{k-1} d\lambda = \lambda^{k}/k \Big]_{-1}^{1} = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } k \text{ เป็นเลขคู่} \\ 2/k & \text{ถ้า } k \text{ เป็นเลขคี่} \end{cases}$$

ระบบ (4) ไม่เป็นเชิงเส้น ในตัวแปร 2n ตัวคือ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \omega_1, \ldots, \omega_n$ การหาผลเฉลยของระบบไม่เป็นเชิงเส้น นั้นจะใช้วิธีวิเคราะห์เชิงตัวเลขเช่น NRSYS (ในหัวข้อ 4.6)

<u>ตัวอย่าง</u> จงหา สูตร two-point สำหรับการหาค่าอินทิกรัลแบบเกาส์ บน [-1,1]

<u>Solution</u> ใช้ n = 2 ใน (4) เราจะได้ระบบไม่เป็นเชิงเส้น ใน

$\lambda_1, \lambda_2, \omega_1, \omega_2$:

$$\begin{array}{llll} f(\lambda) = 1 & : (E_1)\ \omega_1 1 \ t\ \omega_2 1 & = \int 1\, d\lambda = 2/1 & = 2 \\ f(\lambda) = \lambda & : (E_2)\ \omega_2\lambda_1 \ t\ \omega_2\lambda_2 & = \int \lambda\, d\lambda & = 0 \\ f(\lambda) = \lambda^2 & : (E_3)\ \omega_1\lambda_1^2 \ t\ \omega_2\lambda_2^2 & = \int \lambda^2\, d\lambda & = 2/3 \\ f(\lambda) = \lambda^3 & : (E_4)\ \omega_1\lambda_1^3 \ t\ \omega_2\lambda_2^3 & = \int \lambda^3\, d\lambda & = 0 \end{array} \qquad \ldots(5)$$

<u>หมายเหตุ</u> ใน (5) $\int = \int_{-1}^{1}$

จากการหาผลเฉลยของระบบไม่เป็นเชิงเส้น (5) จะได้

$\omega_1 = \omega_2 = 1,\ \lambda_1 = -1/\sqrt{3},\ \lambda_2 = 1/\sqrt{3}$

ดังนั้น **สูตร two-point สำหรับการหาค่าอินทิกรัลแบบเกาส์ บน [-1,1] คือ**

$$\boxed{\int_{-1}^{1} f(\lambda)d\lambda \approx f(-1/\sqrt{3}) + f(1/\sqrt{3}) \text{ โดยที่ } 1/\sqrt{3} \doteq 0.5773502692} \qquad \ldots(6)$$

สูตร (6) จะเป็นค่าที่แท้จริงสำหรับ polynomial of degree <= 3

ในทำนองเดียวกัน สูตร three-point สำหรับการหาค่าอินทิกรัลแบบเกาส์ คือ

$$\int_{-1}^{1} f(\lambda)d\lambda \approx (1/9)[5f(-\sqrt{0.6})+8f(0)+5f(\sqrt{0.6})]$$
$$\text{โดยที่ } \sqrt{0.6} \doteq 0.7745966692 \qquad \ldots(7)$$

สูตร (7) จะเป็นค่าที่แท้จริงสำหรับ polynomials of degree < (2)(3)-1 = 5 ตาราง 7.5-1 แสดง Gauss sample point λ_k และ weights γ_k สำหรับ n = 2, 3, 4, 5, 6

ตาราง 7.5-1

λ_k **และ** γ_k **สำหรับ** $\int_{-1}^{1} f(\lambda)d\lambda \approx \sum_{k=1}^{n} \gamma_k f(\lambda_k)$, n = 2,..., 6

n	λ_k	γ_k
2	$\pm 1/\sqrt{3}$	1
3	$\pm\sqrt{0.6}$ 0	5/9 8/9
4	±0.8611363116 ±0.3399810436	0.3478548451 0.6521451549
5	±0.9061798459 ±0.5384693101 0	0.2369268850 0.4786266705 0.5688888889
6	±0.9324695142 ±0.6612093865 ±0.2386191861	0.1713244924 0.3607615730 0.4679139346

โปรดสังเกตว่าจากตาราง 7.5-1 นั้น

(i) Gaussian sample points มีค่าสมมาตรในช่วงเปิด (-1,1) ดังนั้น (3) คือ open formula

(ii) density ของ Gaussian sample points λ_k นั้นมีค่าใหญ่ที่สุดใกล้ ๆ จุดปลาย (endpoints) ของ (-1,1) และ

(iii) γ_i's มีค่าเป็นบวกทุกตัว

7.5B การหาค่าอินทิกรัลแบบเกาส์ บน [a,b]

ในการใช้ สูตรการหาค่าอินทิกรัลแบบเกาส์-เลอจองด์ เพื่ออินทิเกรท f(x) เหนือช่วงปิด (closs interval) [a,b] ใด ๆ เราเพียงแต่ map X-interval [-1,1] มายัง x-interval [a,b] โดยการใช้ linear transformation

$$x = a+[(b-a)/2](\lambda+1)\ ,\quad dx = [(b-a)/2]\, d\lambda \qquad \ldots(8)$$

แทนค่าลงใน $\int_a^b f(x)dx$ จะได้

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\lambda=-1}^{1} f\{a+(b-a)/2](\lambda+1)\}[(b-a)/2]\, d\lambda$$

$$= [(b-a)/2] \int_{\lambda=-1}^{1} f\{a+[(b-a)/2](\lambda+1)\}\, d\lambda \qquad \ldots(9)$$

ถ้าเราใช้สูตรของเกาส์ บน [-1,1] เพื่อประมาณค่าอินทิกรัลสุดท้ายใน (9) เราได้

$$\boxed{\int_{x=a}^{b} f(x)dx \approx [(b-a)/2]\{\gamma_1 f(x_1) + \gamma_2 f(x_2) + \ldots + \gamma_n f(x_n)\}}$$

...(10a)

โดยที่ σ_k คือ Gaussian weights ซึ่งสมนัยกับ Gaussian sample point λ_k ใน $[-1,1]$ และ x_k ได้มาจาก λ_k ดังนี้

$$\boxed{x_k = a+[(b-a)/2](\lambda_k+1)\ ,\ k = 1,\ 2,\dots,\ n} \qquad \dots(10b)$$

เราเรียก x_k's ว่า **n Gaussian sample point of [a,b]**

ดังนั้น **n-point สูตรการหาค่าอินทิกรัลแบบเกาส์ บน** $[a,b]$ จะประกอบด้วย 2 ขั้นคือ

<u>**ขั้นที่ 1:**</u> ใช้ (10b) เพื่อหา n sample points $x_1,\dots,\ x_n$

<u>**ขั้นที่ 2:**</u> แทน $x_1,\dots,\ x_n$ ใน (10a) เพื่อหาอินทิกรัลที่ต้องการ

<u>**ตัวอย่าง**</u> จงใช้สูตรการหาค่าอินทิกรัลแบบเกาส์ เพื่อประมาณค่า

(a) $\int_0^{0.5} e^x dx$ (b) $\int_1^{2.2} \ln x\ dx$

<u>Solution</u>

(a) จาก (10b) Gaussian **sample** points บน $[0,0.5]$ คือ

$$x_k = 0 + [(0.5-0)/2](\lambda_k+1)$$

$$= (1/4)(\lambda_k+1)\ ,\ k = 1,\dots,\ n \qquad \dots(11a)$$

เนื่องจากว่า e^x ไม่มี inflection points เราจึงสามารถประมาณได้ดีโดยใช้ polynomial degree 3 (cubic) บนช่วงแคบ ๆ $[0,0.5]$ ดังนั้นเราคาดว่า n-point สูตรการหาค่าอินทิกรัลแบบเกาส์จะให้ความแม่นยำที่ดีเมื่อ $2n-1 = 3$ [นั่นคือ $n = 2$] จาก (11a) และตาราง 7.5-I

$$x_1 \doteq (1/4)[(-1/\sqrt{3})+1] \doteq 0.105662 \text{ และ}$$

$$x_2 = (1/4)[(1/\sqrt{3})+1] \doteq 0.394338 \qquad \dots(11b)$$

แทนค่าเหล่านี้ในสูตร (10a) เราได้

$$\int_0^{0.5} e^x dx \approx [(0.5-0)/2]\{1\ e^{x_1} + 1\ e^{x_2}\}$$

$$\doteq 0.648712 \quad (\text{Error} = 0.648721-0.648712 = 0.000009)$$

open two-point formula นี้จะทำให้ได้ความแม่นยำถึงเกือบ 5s เปรียบเทียบกับเมื่อ

ใช้ กฎ six-point ของซิมป์สัน ใน (c) ของตัวอย่างในหัวข้อ 7.3B

(b) จาก (10b) Gauss sample points บน [1,2.2] คือ

$x_k = 1+[(2.2-1)/2](\lambda_k+1) = 1+0.6(\lambda_k+1) = 1.6+0.6\lambda_k$ ...(12a)

f(x) ไม่มี inflection points อย่างไรก็ดี [1,2.2] ไม่ใช่ thin interval ดังนั้นเราจะใช้ three-point formula จากตาราง 7.5-1 และ (12a)

$x_1 \doteq 1.6 + 0.6(-\sqrt{0.6}) \doteq 1.135242$

$x_2 = 1.6$ และ

$x_3 \doteq 1.6 + 0.6(\sqrt{0.6}) \doteq 2.064756$

ดังนั้นจาก (10a)

$$\int_1^{2.2} \ln x\, dx \approx [(2.2-1)/2]\{(5/9)\ln x_1 + (8/9)\ln x_2 + (5/9)\ln x_3\}$$

$\doteq 0.534622$ (Error = 0.534606 -0.534622 =-0.000016)

...(12b)

ความแม่นยำจากการใช้สูตรนี้สามารถเทียบได้กับการประมาณโดยใช้ 7 จุด คือ S[0.2] ที่ได้ใน (7) ของตัวอย่างในหัวข้อ 7.4A ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า

การหาค่าอินทิกรัลแบบเกาส์ จะให้ความแม่นยำตามต้องการโดยการใช้จุดประมาณเพียงครึ่งหนึ่งของวิธีนิวตัน-โคตส์ ของหัวข้อ 7.4

7.6 <u>ควอดราเจอร์อื่น ๆ</u>

นอกจาก การหาค่าอินทิกรัลแบบเกาส์ แล้วยังมีวิธีอื่น ๆ อีกเช่น

การหาค่าอินทิกรัลแบบลาแกร์

(Laguerre Quadrature) : $\int_0^{\infty} e^{-x} f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k)$

การหาค่าอินทิกรัลแบบแฮร์มิต

(**Hermite** Quadrature): $\int_{-\infty}^{\infty} (1/\sqrt{2\pi}) \exp((-1/2)\, x^2) f(x) dx \approx \sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k)$

การหาค่าอินทิกรัลแบบเชบิเชฟ

(**Chebysheff** Quadrature): $\int_{-1}^{1} (1/\pi)(1/\sqrt{1-x^2}) f(x) dx \approx \sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k)$

ทั้งนี้ w_k , $k = 0, \ldots, n$ จะแตกต่างกันในแต่ละควอดราเจอร์

แบบฝึกหัดบทที่ 7

จงทำ (a) และ (b) สำหรับ $F(h)$ ที่กำหนดให้

(a) ประมาณค่าอนุพันธ์ที่กำหนดให้ โดยใช้ $F(h)$ และ $F(h/r)$ แล้วจงแสดงว่า $\epsilon[h/r] \approx \epsilon[h]/r^n$ โดยที่ n คือ order ของ $F(h)$

(b) จงใช้ Richardson improvement 1 ครั้ง แล้วอภิปรายความแม่นยำของ $F_1[h/r]$

(**หมายเหตุ** h จะใหญ่กว่า h/r ดังนั้นใช้ h แทน h_{larger} ในสูตร)

7.1 $d(x^2-2x)/dx$, $x = 0$, $h = 0.6$, $r = 3$: $F(h) = \Delta f(x)/h$

[Ans. $F(0.6) = F(0.6)=-1.4$, $F(0.2)=-1.8$, $F_1(0.2)=-2$(exact)]

7.2 $d^2(\ln x)/dx^2$, $x = 1$, $h = 0.2$, $r = 4$; $F(h) = \delta^2 f(x)/h^2$

[Ans. $F(0.2)=-1.0205$, $F(0.05)=-1.0013$, $F_1(0.05)=-0.99997$]

7.3 $d\sqrt{x}/dx$, $x = 0.2$, $h = 0.2$, $r = 2$; $F(h) = \delta f(x)/2h$

[Ans. $F(0.2)=1.5811$, $F(0.1)=1.1575$, $F_1(0.1)= 1.0163$(worse!)]

7.4 dx^4/dx, $x = 1$, $h = 1$, $r = 2$; $F(h) = \delta f(x)/2h$

[Ans. $F(1)=8$, $F(0.5)=5$, $F_1(0.5)=4$(exact)]

7.5 กำหนดให้ $f(x) = e^x$, $x = 0$ และ $F(h) = \Delta f(x)/h$

(a) จงประมาณค่า $f'(x)$ โดย $F(h)$, $h = 0.5$, 0.1, และ 0.05

(b) จงสร้างตารางริชาร์ดสัน สำหรับ $F(0.5)$, $F(0.1)$ และ $F(0.05)$

Cn = 1, m = 21

7.6 ทำเช่นเดียวกับข้อ 7.5 แต่ใช้ $F(h) = \delta f(x)/2h$ เปรียบเทียบความแม่นยำของ $F_2(0.05)$ กับค่าที่ได้จากข้อ 7.5 [$n = 2$, $m = 4$]

7.7 ทำเช่นเดียวกับข้อ 7.5 แต่สำหรับ $f(x) = x^{(3/2)}$ เปรียบเทียบความแม่นยำของ $F_2(0.05)$ กับ $F(h)$

[Ans.

	$F(0.5)$	$F(0.1)$	$F(0.05)$	$F_1(0.1)$	$F_1(0.05)$	$F_2(0.05)$
7.5:	1.2974	1.0517	1.0254	0.99028	0.99913	1.0021
7.6:	1.0422	1.0017	1.0004	0.99998	1.0000	1.0000
7.7:	0.70711	0.31623	0.22361	0.21851	0.13099	0.101811

7.8

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
f(x)	3.96	1.00	0.74	2.04	4.00	5.96	7.50	8.44	8.44

จงใช้ค่าจากตารางเพื่อประมาณ

(a) $\int f(x)dx$ โดยใช้กฎจุดกึ่งกลาง บน [0,1], [1,2], และ [2,3]

(b) $\int f(x)dx$ โดยใช้ $T(h)$, $h = 1$ (3 panels)

(c) $\int f(x)dx$ โดยใช้ $S(h)$, $h = 1/2$ (6 panels)

(d) $\int f(x)dx$ โดยใช้การหาค่าอินทิกรัลแบบรอมเบิร์ก เริ่มจาก 3 panels

(e) $\int f(x)dx$ โดยใช้การหาค่าอินทิกรัลแบบรอมเบิร์ก เริ่มจาก 1 panel

(f) $\int f(x)dx$ โดยใช้ $S(h)$ on [0,2] และกฎเศษสามส่วนแปดของซิมป์สัน บน [2,3.5]

__หมายเหตุ__ ใน (a)-(d) $\int$ คือ $\int_0^3$ ใน (e) $\int$ คือ $\int_0^4$ และใน (f) $\int$ คือ $\int_0^{3.5}$

[Ans. (a) 9 (b) 10.47 (c) 9.49 (d) 9.49 (e) 17.773

(f) $3.6+9.90375 \doteq 13.501$

7.9

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
f(x)	150	149	142	123	86	25	99	137	151	153	155

จงใช้ค่าจากตารางเพื่อประมาณ

(a) $\int f(x)dx$ โดยใช้การหาค่าอินทิกรัลแบบรอมเบิร์ก เริ่มจาก 1 panels

[Ans. 888]

(b) $\int f(x)dx$ โดยใช้สูตรตัวแก้ของอาดามส์ (18a) ของหัวข้อ 7.3B

[Ans. 307]

(c) $\int f(x)dx$ โดยใช้สูตรตัวแก้ของอาดามส์ $h = -2$ [Ans. 299.5]

(d) $\int f(x)dx$ โดยใช้กฎเศษหนึ่งส่วนสามของซิมป์สัน บน [0,4] และ

กฎเศษสามส่วนแปดของซิมป์สัน บน [4,10]

(e) $\int f(x)dx$ โดยใช้กฎเศษสามส่วนแปดของซิมป์สัน บน [0,6] และ

กฎเศษหนึ่งส่วนสามของซิมป์สัน บน [6,10]

หมายเหตุ $\int$ ใน (a) $\int_{2}^{10}$, (b) $\int_{18}^{20}$, (c) $\int_{0}^{2}$, (d) $\int_{0}^{10}$, (e) $\int_{0}^{10}$

7.10 จงคำนวณถึง 5s โดยใช้การหาค่าอินทิกรัลแบบรอมเบิร์ก

ให้เริ่มต้นด้วย n_o panels

(a) $\int_{-4}^{0} x^5\, dx$, $n_o = 1$ (b) $\int_{0}^{1} e^{-x}\, dx$, $n_o = 2$

(c) $\int_{-1/2}^{1/2} e^{-x^2} dx$, $n_o = 1$ (d) $\int_{-2}^{2} (x^4-x)dx$, $n_o = 1$

[Ans. (a)

h	$T_o=T$	$T_1=S$	T_2
4	-2048		
2	-1088	-768	
1	-788	-688	-682 2/3

(b)

h	$T_0=T$	$T_1=S$	T_2
1/2	0.645235		
1/4	0.635409	0.632134	
1/8	0.632943	0.632121	0.632121

(c) 0.922507 (h = 1/4 นั่นคือ 4 panels)

(d) exactly 12.8 (h = 1 นั่นคือ 4 panels)]

7.11 จงใช้ n-point Gauss quadrature เพื่อประมาณอินทิกรัลที่กำหนดให้

(a) $\int_0^3 x^3 dx$, $n=2$ (b) $\int_{-1}^{2} e^{-x^2} \cos x \, dx$, $n=3$ (c) $\int_{-1}^{1} e^{-x^2} \sin x \, dx$, $n=4$

[Ans. (a) 20.25 exact (b) 1.3307 (c) 0 exact]

7.12 จงใช้ (n_0+2)-point Gauss quadrature สำหรับอินทิกรัลในข้อ 7.10 (a)-(d)

[Ans. (a) -662 2/3 (b) 0.632121 (c) 0.4226156 (d) 12.61

7.13* ประมาณค่า $\int_0^4 \sqrt{x} \, dx$ โดยใช้ (a) 3-point Gauss quadrature

(b) 5-point Gauss quadrature

[Ans. (a) 5.3534 (b) 5.33841