บทที่ 6
การประมาณค่าในช่วง
(Interpolation)

หน้า

บทที่ 6
การประมาณค่าในช่วง
(Interpolation)

การประมาณค่าในช่วง คือการหาฟังก์ชันที่เรียบฟังก์ชันหนึ่ง(a smooth function) ซึ่งกราฟของฟังก์ชัน ผ่านจุดทุกจุดที่กำหนด [นั่นคือ goes through (not just near) P_k's]

เราใช้การประมาณค่าในช่วง เพื่อหาค่าซึ่งไม่ได้แสดงไว้ในตารางที่มีอยู่ เหตุผลอีกอย่างหนึ่งในการศึกษาการประมาณค่าในช่วง ก็เพื่อให้เข้าใจวิธีการวิเคราะห์เชิง-ตัวเลขสำหรับการอินทิเกรท และ การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งวิธีทั้งสองนั้นจะมีพื้นฐานจากสูตรของการประมาณค่าในช่วง

กราฟที่ผ่านจุด (m+1) จุดมักจะเป็นฟังก์ชัน polynomial ซึ่งมีสัมประสิทธิ์ (m+1) ตัว (นั่นคือ of degree <= m) ซึ่งเราเรียกว่า การประมาณค่าในช่วงแบบโพลิโนเมียล (**polynomial interpolation**)

วิธีที่จะศึกษา 2 วิธีคือ

1) **วิธีของลากรองก์ (Lagrange's Method)** ซึ่งจะเป็นเครื่องมือทางทฤษฎีที่สำคัญในการหาสูตรสำหรับการอินทิเกรท และ การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

2) **วิธีของนิวตัน (Newton's Method)** ซึ่งขึ้นอยู่กับ difference table และจะให้วิธีการที่จะกำหนดหรือบอกได้ว่า polynomial degree เท่าใดที่เหมาะสมกับการประมาณค่าในช่วงเพื่อหาค่าที่ต้องการ

6.1 การประมาณค่าในช่วงแบบโพลิโนเมียล (Interpolating Polynomial) สำหรับ $P_k, P_{k+1}, \ldots, P_{k+m}$

จากจุด (n+1) จุดที่กำหนดให้ ดังนี้

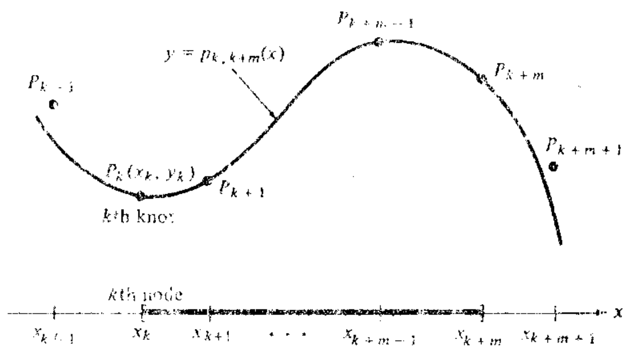
$$P_0(x_0,y_0),\ P_1(x_1,y_1),\ldots,\ P_n(x_n,y_n) \qquad \ldots(1a)$$

ซึ่งจะถูกเรียกว่า **knots** ใน xy-plane เราไม่กำหนดข้อจำกัดใด ๆ กับค่า y's

แต่เราจะสมมุติว่า x's (ซึ่งจะถูกเรียกว่า **nodes**) นั้นมีค่าต่างกันหมด และเรียงลำดับกันดังนี้

$$x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n \qquad \dots(1b)$$

จุดประสงค์ของเราคือต้องการหา polynomials ซึ่ง **interpolate** จุดตั้งแต่หนึ่งจุดหรือมากกว่านั้นจากจุดเหล่านี้ นั่นคือหาสมการของเส้นกราฟซึ่งผ่านจุดบางกลุ่มหรือจุดทุกจุดจาก $P_0, \dots, P_n$ ดังแสดงในรูป 6.1-1



รูป 6.1-1 การประมาณค่าในช่วงแบบโพลิโนเมียลสำหรับ m+1 จุด $P_k, P_{k+1}, \dots, P_{k+m}$

<u>หมายเหตุ</u> เพื่อหลีกเลี่ยงการสับสน เราจะใช้ p's สำหรับ polynomials และ

P's สำหรับจุดที่ถูก interpolate

ดังนั้น $p_{k,k+m}(x)$ จะแทน polynomial ที่ interpolate (m+1) จุดที่อยู่ต่อเนื่องกันคือ $P_k, P_{k+1}, \dots, P_{k+m}$

และช่วงปิด (closed interval) $[x_k, x_{k+m}]$ (ช่วงทึบในรูป 6.1-1) จะถูกเรียกว่า **ช่วงสำหรับการประมาณค่าในช่วง (interpolating interval)** สำหรับ $p_{k,k+m}(x)$

6.1A ตัวอย่างการประมาณค่าในช่วงกำลังสอง (Quadratic Interpolation)

จงหา $p_{2,4}(x)$ สำหรับจุด 5 จุดต่อไปนี้คือ

$$P_0(-2,-8),\ P_1(0,0),\ P_2(1,1),\ P_3(4,64),\ P_4(5,125)$$

<u>Solution</u>

เนื่องจากว่า $p_{2,4}(x)$ ต้อง interpolate จุด 3 จุดที่ต่อเนื่องกันคือ P_2, P_3, และ P_4 เราจะลองใช้ polynomial ซึ่งมี ส.ป.ส. 3 ตัว นั่นคือ

$$p_{2,4}(x) = A + Bx + Cx^2 \quad (\text{degree} \le 2)$$

ในการหาค่า A, B, และ C เรากำหนดเงื่อนไข 3 เงื่อนไข สำหรับการประมาณค่าในช่วง ดังนี้

$p_{2,4}(x_2) = y_2$ นั่นคือ $p_{2,4}(1) = A + B + C = 1$

$p_{2,4}(x_3) = y_3$ นั่นคือ $p_{2,4}(4) = A + 4B + 16C = 64$

$p_{2,4}(x_4) = y_4$ นั่นคือ $p_{2,4}(5) = A + 5B + 25C = 125$

หาผลเฉลยของระบบเชิงเส้นนี้โดยการใช้วิธีในบทที่ 3 ได้

$[\bar{A} \quad \bar{B} \quad \bar{C}]' = [20 \quad -29 \quad 10]'$

เราอาจตรวจสอบได้ว่า quadratic $p_{2,4}(x) = 20 - 29x + 10x^2$ นั้นจริง ๆ แล้ว interpolate P_2, P_3 และ P_4

6.1B ปัญหาการประมาณค่าในช่วงแบบโพลิโนเมียล (Polynomial Interpolation Problem)

เราเรียกวิธีที่ใช้ใน 6.1A นั้นว่า method **of undetermined coefficients** ถ้าต้องการกราฟของ $p_{k,k+m}(x)$ ซึ่งผ่าน (m+1) จุด $P_k, P_{k+1}, \ldots, P_{k+m}$ เราต้องกำหนดเงื่อนไขทั้งหมด (m+1) เงื่อนไขดังนี้

$$\boxed{p_{k,k+m}(x_i) = y_i \text{ สำหรับ } i = k, k+1, \ldots, k+m} \qquad \ldots(2a)$$

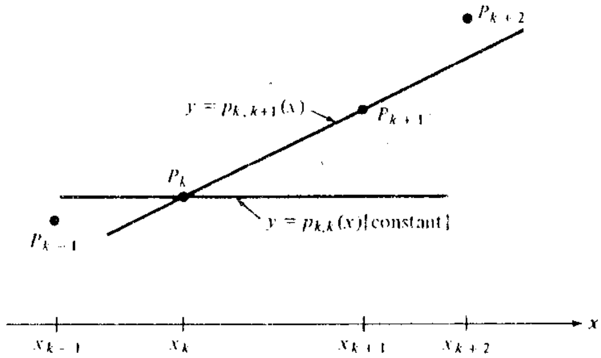
สิ่งนี้ชี้ว่า $p_{k,k+m}(x)$ จะมีส.ป.ส.อย่างมาก (m+1) ตัว นั่นคือ

$$\boxed{p_{k,k+m}(x) \text{ จะมี degree อย่างมาก } m} \qquad \ldots(2b)$$

จากจุดที่กำหนดให้ $P_0, \ldots, P_n$ และ endpoint indices k และ k+m ปัญหาของการหา polynomial $p_{k,k+m}(x)$ ซึ่งสอดคล้องกับ (2a) และ (2b) จะถูกเรียกว่าปัญหาการประมาณค่าในช่วงแบบโพลิโนเมียล

เมื่อ m = 0 $p_{k,k}(x)$ คือ zeroth-degree polynomial ซึ่งกราฟคือเส้นตรงแนวราบซึ่งผ่านจุด 1 จุด $P_k(x_k,y_k)$ นั่นคือ

$$p_{k,k}(x) = y_k \quad \text{(constant function!} \qquad ...(3)$$



รูป 6.1-2 การประมาณค่าในช่วงสำหรับ 1 จุด (m = 0) และ 2 จุด (m = 1)

เมื่อ m = 1 $p_{k,k+1}(x)$ คือ first-degree polynomial ซึ่งกราฟคือเส้นตรงซึ่งผ่านจุด $P_k(x_k,y_k)$ และ $P_{k+1}(x_{k+1},y_{k+1})$ นั่นคือ

$$p_{k,k+1}(x) = y_k + [(y_{k+1}-y_k)/(x_{k+1}-x_k)](x-x_k) \qquad ...(4a)$$

จัดเทอมใน (4a) ใหม่จะได้

$$p_{k,k+1}(x) = y_k[(x-x_{k+1})/(x_k-x_{k+1})] + y_{k+1}[(x-x_k)/(x_{k+1}-x_k)] \qquad ...(4b)$$

การใช้ (4) เมื่อ m=1 นั่นคือ <u>การประมาณค่าในช่วงเชิงเส้น</u> (linear interpolation) นั่นเอง เมื่อ m > 1 วิธี undetermined coefficients อาจถูกใช้เพื่อแปลง (2a)ไปเป็นระบบเชิงเส้นขนาด (m+1)x(m+1) ซึ่งผลเฉลยของระบบนี้จะให้ส.ป.ส.ของ $p_{k,k+m}(x)$ อย่างไรก็ดีวิธีนี้จะไม่ให้สูตรทั่วไปในการหา $p_{k,k+m}(x)$ และจะไม่เหมาะในการคำนวณด้วยมือเมื่อ m >= 3

6.1C <u>รูปของ $p_{k,k+m}(x)$; รูปแบบของลากรองจ์ (Lagrange's Form)</u>

เมื่อระบุ node x_j จาก (m+1) nodes ที่ต่างกันคือ $x_k, x_{k+1}, ..., x_{k+m}$

ผลคูณ $\prod_{i \neq j} (x-x_i) = (x-x_k)(x-x_{k+1})\ldots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\ldots(x-x_{k+m})$

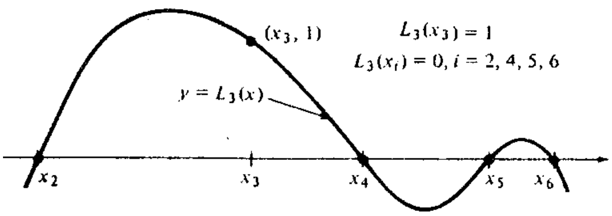
เป็นตัวกำหนด mth degree polynomial ซึ่งมี

$$x_k,\ x_{k+1},\ldots,x_{j-1},\ x_{j+1},\ldots,x_{k+m}$$

เป็น m รากที่ต่างกัน แต่ค่าของผลคูณนี้ที่ $x = x_j$ คือ $\prod_{i \neq j} (x_j-x_i)$ ไม่เป็นศูนย์ ดังนั้นถ้าเรากำหนด

$$L_j(x) = \prod_{i \neq j} (x-x_i) / \prod_{i \neq j} (x_j-x_i)$$

$$= \frac{(x-x_k)\ldots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\ldots(x-x_{k+m})}{(x_j-x_k)\ldots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\ldots(x_j-x_{k+m})} \qquad \ldots(5)$$



รูป 6.1-3 $L_3(x)$ สำหรับ 5 nodes x_2, x_3, x_4, x_5, x_6

แล้ว $L_j(x)$ คือ mth-degree polynomial ซึ่ง select x_j จาก $x_k,\ldots,x_{k+m}$ โดยให้ (ดูรูป 6.1-3)

$$L_j(x_j) = 1 \text{ แต่ } L_j(x_i) = 0 \text{ สำหรับ } i=k,k+1,\ldots, j-1,j+1,\ldots, k+m \qquad \ldots(6)$$

เพราะว่าแต่ละ $L_k(x),\ldots,L_{k+m}(x)$ มี degree m ดังนั้น polynomial

$$y_k L_k(x) + y_{k+1} L_{k+1}(x) + \ldots + y_{k+m} L_{k+m}(x)$$

มี degree <= m และด้วยคุณสมบัติที่เลือกไว้ (selected property) ใน (6)

ค่าของ polynomial นี้ที่ x_j คือ

$$y_k.0 + y_{k+1}.0 + \ldots + y_{j-1}.0 + y_j.1 + y_{j+1}.0 + \ldots + y_{k+m}.0 = y_j$$

สำหรับ $j = k, k+1, \ldots, k+m$ ดังนั้น <u>ปัญหาของการประมาณค่าในช่วงแบบโพลิโนเมียล</u> (polynomial interpolation problem) จะมีผลเฉลยอย่างน้อยหนึ่งผลเฉลยเสมอ นั่นคือ

$$\boxed{p_{k,k+m}(x) = y_k L_k(x) + y_{k+1} L_{k+1}(x) + \ldots + y_{k+m} L_{k+m}(x)} \quad \ldots (7)$$

โปรดสังเกตว่า (7) กลายเป็น (4b) เมื่อ m=1

สำหรับ 5 จุดในตัวอย่างใน 6.1A ดังนี้

$P_0(-2,-8)$, $P_1(0,0)$, $P_2(1,1)$, $P_3(4,64)$, $P_4(5,125)$

เราอาจหา $p_{2,4}(x)$ จาก P_2, P_3, และ P_4 ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
p_{2,4}(x) &= y_2L_2(x) + y_3L_3(x) + y_4L_4(x) \\
&= 1\, L_2(x) + 64\, L_3(x) + 125\, L_4(x) && \text{[โดย (7)]} \\
&= 1\,\frac{(x-4)(x-5)}{(1-4)(1-5)} + 64\,\frac{(x-1)(x-5)}{(4-1)(4-5)} + 125\,\frac{(x-1)(x-4)}{(5-1)(5-4)} && \text{[โดย (5)]} \\
&= 1\,\frac{x^2-9x+20}{12} + 64\,\frac{x^2-6x+5}{-3} + 125\,\frac{x^2-5x+4}{4} \\
&= 10x^2 - 29x + 20 && \text{(คำตอบเดียวกับใน 6.1A)}
\end{aligned}$$

เทอมที่ใช้ เราเรียกนิพจน์สำหรับ $p_{k,k+m}(x)$ ใน (7) ว่า <u>รูปแบบของลากรองจ์</u> (Lagrange's Form) ของ $p_{k,k+m}(x)$
ส่วน mth-degree polynomials $L_k(x), \ldots, L_{k+m}(x)$ จากสูตร (5) ถูกเรียกว่า Lagrange **Polynomials** สำหรับ (m+1) nodes $x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+m}$

โปรดสังเกตว่า $L_j(x)$'s นั้นขึ้นอยู่กับค่าของ x_i's เท่านั้น เราต้องการค่า y_j สำหรับการหารูปแบบของลากรองจ์ของ $p_{k,k+m}(x)$ เท่านั้น

รูป 6.1-4 คือ Algorithm สำหรับการหารูปแบบของลากรองจ์ของ $p_{k,k+m}(z)$

Algorithm: Lagrange Interpolation*

Purpose: To evaluate the Lagrange form of $p_{k,k+m}(z)$, that is,

$$p_{k,k+m}(z) = y_k L_k(z) + y_{k+1} L_{k+1}(z) + \dots + y_{k+m} L_{k+m}(z)$$

where $L_j(x) = \Pi_{i \neq j}(x - x_i)/(x_j - x_i)$, the jth Lagrange polynomial for the $m + 1$ knots $P_k(x_k, y_k), \dots, P_{k+m}(x_{k+m}, y_{k+m})$, and Z is a specified point near the interpolating nodes $x_k, \dots, x_{k+m}$.

GET n, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\{\mathbf{x} = [x_0 \; x_1 \cdots x_n], \; \mathbf{y} = [y_0 \; y_1 \; y_n]\}$
k, m, [starting index, degree of interpolating polynomial]
z (point at which interpolated value is desired)

```
PofZ ← 0
DO FOR j = k TO k + m   [Form Termj = yj *Lj(x).]
   BEGIN
   Termj ← yj
   DO FOR i = k TO k + m
      IF i ≠ j THEN Termj ← Termj*(z − xi)/(xj − xi)
   Pof Z ← Pof Z + Termj
   END
```

OUTPUT (The interpolated value $p_{k,k+m}(z)$ is $PofZ$.)

รูป 6.1-4 การหา $p_{k,k+m}(x)$ ที่ $x = z$ โดยใช้รูปแบบของลากรองส์

6.1D การมีรูปเดียวของ $p_{k,k+m}(x)$

เราทราบว่า polynomial $p(x)$ ใด ๆ ถ้ามี $(m+1)$ รากที่ต่างกันคือ $x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+m}$ นั้นสามารถแยกตัวประกอบได้เป็น

$$p(x) = (x-x_k)(x-x_{k+1})\dots(x-x_{k+m})\, q(x) \qquad \dots(8a)$$

โดยที่ $q(x)$ คือ polynomial ซึ่งมี

$$q(x) = 0 \text{ หรือ } (\text{degree of } q) = (\text{degree of } p)-(m+1) \qquad \dots(8b)$$

จากการยึดสิ่งที่กล่าวมาข้างต้น สมมุติว่าทั้ง $p_{k,k+m}(x)$ และ $\tilde{p}_{k,k+m}(x)$ ต่างมี degree $<= m$ และทั้งคู่ interpolate $P_k, P_{k+1}, \ldots, P_{k+m}$ แล้ว

$p(x) = p_{k,k+m}(x) - \tilde{p}_{k,k+m}(x)$ จะสอดคล้องกับ (8a)

เนื่องจากว่า degree ของ $p(x) <= m$ จาก (8b) ได้ว่า $q(x) = 0$ ดังนั้น $p(x) = 0$ นั่นคือ $p_{k,k+m}(x) \equiv \tilde{p}_{k,k+m}(x)$ นั่นแสดงว่า ถ้าเราหา(โดยวิธีใดก็ตาม) polynomial $p_{k,k+m}(x)$ หนึ่งซึ่งมี degree $<= m$ และ interpolate $P_k, \ldots, P_{k+m}$ $p_{k,k+m}(x)$ นั้นมีเพียงรูปเดียวเท่านั้น เราเรียก $p_{k,k+m}(x)$ (ซึ่งมีเพียงรูปเดียว) ว่า **การประมาณค่าในช่วงแบบโพลิโนเมียล (interpolating polynomial)** สำหรับ $P_k, \ldots, P_{k+m}$ เมื่อ $m > 2$ แล้ว การหา $p_{k,k+m}(x)$ โดยใช้รูปแบบของลากรองจ์ (7) จะง่ายกว่าการใช้วิธี undetermined coefficients

<u>ตัวอย่าง</u> จงหา (a) $p_{2,3}(x)$ (b) $p_{1,3}(x)$ และ (c) $p_{0,3}(x)$ สำหรับ

$$P_0(-2,-8),\ P_1(0,0),\ P_2(1,1),\ P_3(4,64),\ P_4(5,125) \qquad \ldots(9)$$

<u>S</u>olution

(a) สำหรับ 2 จุด $P_2(1,1)$ และ $P_3(4,64)$

จาก (4b); $p_{2,3}(x) = y_2L_2(x) + y_3L_3(x)$

$= 1[(x-4)/(1-4)]+64[(x-1)/(4-1)] = 21x - 20$

(b) สำหรับ 3 จุด $P_1(0,0)$, $P_2(1,1)$, และ $P_3(4,64)$

จาก (7); $p_{1,3}(x) = y_1L_1(x) + y_2L_2(x) + y_3L_3(x)$

$= 0\,L_1(x) + 1\,L_2(x) + 64\,L_3(x)$

ในที่นี้ $L_2(x)$ และ $L_3(x)$ ต่างเป็นนิพจน์กำลังสอง (quadratic,

$$p_{1,3}(x) = 0\,L_1(x) + 1\frac{(x-0)(x-4)}{(1-0)(1-4)} + 64\frac{(x-0)(x-1)}{(4-0)(4-1)}$$

$= 0 - (1/3)(x^2 - 4x) + (64/12)(x^2 - x)$

$= 5x^2 - 4x$

(c) สำหรับ 4 จุด $P_0(-2,-8)$, $P_1(0,0)$, $P_2(1,1)$, และ $P_3(4,64)$

จาก (7); $p_{0,3}(x) = -8\ L_0(x)\ t\ 0\ L_1(x)\ t\ 1\ L_2(x)\ t\ 64\ L_3(x)$

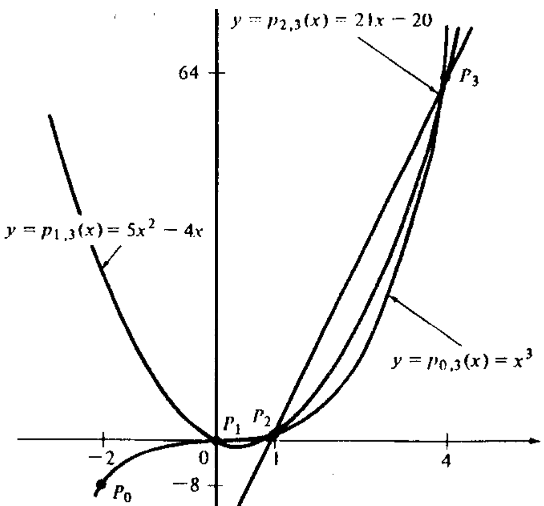
$$= -8 \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(-2-0)(-2-1)(-2-4)} \ t\ 0$$

$$+1 \frac{(x+2)(x-0)(x-4)}{(1+2)(1-0)(1-4)} \ t64 \frac{(x+2)(x-0)(x-1)}{(4+2)(4-0)(4-1)}$$

$$= (8/10)(x^3-5x^2+4x) +0 -(1/6)(x^3-3x^2-4x)$$

$$+(64/60)(x^3-x) = x^3$$

ถ้าเราได้พิจารณา (9) แล้วพบว่า $y_k = x_k^3$, $k=0,1,2,3$ เราก็อาจหลีกเลี่ยงการคำนวณข้างต้นได้ และสรุปว่า x^3 มี degree <= 3 และ interpolate $P_0,\ldots, P_3$ แสดงว่าสิ่งนี้ต้องเป็นการประมาณค่าในช่วงแบบโพลิโนเมียลรูปเดียวสำหรับจุดทั้ง 4 นั่นคือ $p_{0,3}(x) = x^3$ (ดูรูป 6.1-5) และในทำนองเดียวกันแสดงว่า $p_{1,4}(x) = x^3$ และ $p_{0,4}(x) = x^3$



รูป 6.1-5 $p_{2,3}(x)$, $p_{1,3}(x)$ และ $p_{0,3}(x)$ สำหรับ $P_0,\ldots,P_4$
บนกราฟ $y = x^3$

6.2 Divided Differences และ Recursive Form ของ $p_k(x)$

จากหัวข้อที่ผ่านมาเราทราบว่า จุด 6 จุด

$$P_o(-2,69),\ P_1(-1,10),\ P_2(0,3),\ P_3(1,0),\ P_4(2,1),\ P_5(3,54) \quad \ldots(1)$$

สามารถถูก interpolate โดย unique polynomial p(x) ซึ่งมี degree <= 5 แต่จริง ๆ แล้ว $p_{o,5}(x)$ มี degree < 5 จริงหรือ? degree ของ $p_{o,n}(x)$ อาจจะมีประโยชน์ในการพยายามที่จะสร้างฟังก์ชันให้แก่จุดที่มากขึ้นถึง (n+1) จุด

$$P_o(x_o,y_o),\ P_1(x_1,y_1),\ldots,P_n(x_n,y_n) \quad \ldots(2)$$

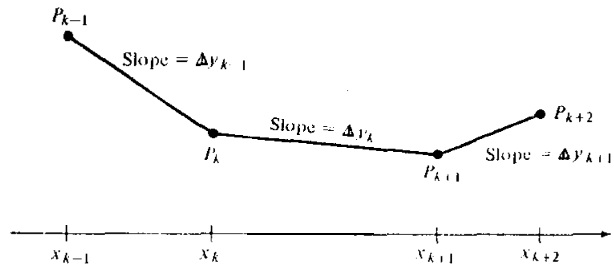
โชคไม่ดีที่รูปแบบของลากรองจ์ของ $p_{k,k+m}(x)$ ในหัวข้อ 6.1C นั้นไม่สามารถให้คำตอบได้ ในหัวข้อนี้จะได้กล่าวถึง **รูปแบบของนิวตัน (Newton Form)** ของ $p_{k,k+m}(x)$ ซึ่งหาไม่ยากไปกว่ารูปแบบของลากรองจ์ แต่จะทำให้เราสามารถบอกว่า degree ของ polynomial ที่ best interpolate $P_o,\ldots, P_n$ ทุกจุดหรือบางส่วนในช่วงของการประมาณค่าในช่วง $[x_o,x_n]$

6.2A Divided Differences และ Divided Difference Tables

จำนวน

$$\boxed{\Delta y_k = (y_{k+1} - y_k)/(x_{k+1} - x_k), \quad k = 0,1,\ldots,n-1} \quad \ldots(3)$$

ถูกเรียกว่า **first divided difference** (ใช้ตัวย่อว่า 1st DD) ที่ P_k ในเรขาคณิตวิเคราะห์ Δy_k คือ **forward slope** ที่ P_k นั่นคือ slope ของเส้นตรงที่ผ่าน P_k และ P_{k+1} (ดูรูป 6.2-1) ดังนี้ Δy_k คืออนุพันธ์อันดับหนึ่งของ $p_{k,k+1}(x)$



รูป 6.2-1 รูปแสดง Δy_{k-1}, Δy_k, และ Δy_{k+1}

second divided difference (ใช้ตัวย่อว่า 2nd DD) ที่ P_k คือ

$$\boxed{\Delta^2 y_k = (\Delta y_{k+1} - \Delta y_k)/(x_{k+2} - x_k) \text{ ,k=0,1,...,n-2}} \quad \ldots(4)$$

เนื่องจากว่า $\Delta^2 y_k$ มีหน่วยเป็น (change in slope)/(change in x) เราคาดว่าจำนวน $\Delta^2 y_k$ จะให้ข้อมูลเกี่ยวกับอนุพันธ์อันดับสองของการประมาณค่าในช่วง-กำลังสองสำหรับ P_k, P_{k+1}, และ P_{k+2} ตัวอย่างเช่นในการหา $\Delta^2 y_1$ สำหรับจุดจาก cubic function คือ

$P_0(-2,-8)$, $P_1(0,0)$, $P_2(1,1)$, $P_3(4,64)$, $P_4(5,125)$

เริ่มแรกเราใช้ coordinates ของ P_1, P_2 และ P_3 เพื่อหา slope

$$\Delta y_1 = (y_2-y_1)/(x_2-x_1) = (1-0)/(1-0) = 1$$

และ $$\Delta y_2 = (y_3-y_2)/(x_3-x_2) = (64-1)/(4-1) = 21$$

แทนค่าทั้งสองใน (4) (โดยที่ k = 1) เราได้

$$\Delta^2 y_1 = (\Delta y_2 - \Delta y_1)/(x_3-x_1) = (21-1)/(4-0) = 5$$

ค่าบวกของ 2nd DD แสดงว่า $p_{1,3}(x)$ มีลักษณะเป็น concave up (ดูรูป 6.1-5)

สำหรับ m >= 1 เรากำหนด **mth divided difference** (ใช้ตัวย่อว่า **nth** DD) ที่ P_k ว่าคือจำนวน

$$\boxed{\Delta^m y_k = (\Delta^{m-1} y_{k+1} - \Delta^{m-1} y_k)/(x_{k+m}-x_k), \text{ k=0,1,...,n-m}} \quad \ldots(5)$$

ถ้าให้ $\Delta^0 y_k = y_k$ และ $\Delta^1 y_k = \Delta y_k$ แล้ว (5) กลายเป็น (3) เมื่อ $m = 1$ และกลายเป็น (4) เมื่อ $m = 2$

ใช้ $m = 3$ จาก (5) ได้ 3rd DD ที่ P_k ดังนี้

$$\Delta^3 y_k = (\Delta^2 y_{k+1} - \Delta^2 y_k)/(x_{k+3}-x_k) \ , \ k=0,1,\ldots,n-3 \qquad \ldots(6)$$

ใน 6.2D เราจะเห็นว่า $\Delta^3 y_k$ นั้นเกี่ยวข้องกับอนุพันธ์อันดับสาม (third derivative) ของ $p_{k,k+3}(x)$

เนื่องจากว่าการคำนวณ mth DD นั้นต้องใช้ (m-1)st DDs 2 ตัวมาลบกัน จึงเป็นการสะดวกที่จะเขียน 0th, 1st,...,nth DDs เป็นคอลัมน์ของ triangular array ซึ่งถูกเรียกว่า **divided difference** (หรือ DD) **Table** ดังแสดงในรูป 6.2-2 โปรดสังเกตว่า $\Delta^m y_k$ เกี่ยวข้องกับ coordinates ของ P_k, $P_{k+1}, \ldots, P_{k+m}$ เท่านั้น จำนวน 4 จำนวนคือ $\Delta^{m-1} y_{k+1}$, $\Delta^{m-1} y_k$, x_{k+m} และ x_k ซึ่งต้องใช้ในการคำนวณ $\Delta^m y_k$ นั้นอาจได้มาโดยการย้อนรอยลูกศร โดยเริ่มจาก $\Delta^m y_k$ ไปหาคอลัมน์ Δ^{m-1} และย้อนไปถึงคอลัมน์ **node** ในรูป 6.2-1 แสดงการหา 4 จำนวนสำหรับ $\Delta^4 y_1$ จากการสังเกตนี้ทำให้เราไม่จำเป็นต้องแทนค่าใน (5) เมื่อสร้าง DD Table ด้วยมือ

Knot	x_k	$y_k = \Delta^0$	Δ^1 = 1st DD	Δ^2 = 2nd DD	Δ^3 = 3rd DD	Δ^4 = 4th DD	Δ^5 = 5th DD
P_0	x_0	$\to y_0$	$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \Delta y_0$	$\frac{\Delta y_1 - \Delta y_0}{x_2 - x_0} = \Delta^2 y_0$	$\frac{\Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0}{x_3 - x_0} = \Delta^3 y_0$	$\frac{\Delta^3 y_1 - \Delta^3 y_0}{x_4 - x_0} = \Delta^4 y_0$	$\frac{\Delta^4 y_1 - \Delta^4 y_0}{x_5 - x_0} = \Delta^5 y_0$
P_1	x_1	$\to y_1$	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \Delta y_1$	$\frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{x_3 - x_1} = \Delta^2 y_1$	$\frac{\Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1}{x_4 - x_1} = \Delta^3 y_1$	$\frac{\Delta^3 y_2 - \Delta^3 y_1}{x_5 - x_1} = \Delta^4 y_1$	
P_2	x_2	$\to y_2$	$\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \Delta y_2$	$\frac{\Delta y_3 - \Delta y_2}{x_4 - x_2} = \Delta^2 y_2$	$\frac{\Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2}{x_5 - x_2} = \Delta^3 y_2$		
P_3	x_3	$\to y_3$	$\frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} = \Delta y_3$	$\frac{\Delta y_4 - \Delta y_3}{x_5 - x_3} = \Delta^2 y_3$			
P_4	x_4	$\to y_4$	$\frac{y_5 - y_4}{x_5 - x_4} = \Delta y_4$				
P_5	x_5	$\to y_5$					

Circled entries are used to calculate $\Delta^4 y_1$

รูป 6.2-2 Divided Difference สำหรับ $P_o(x_o,y_o),\ldots, P_5(x_5,y_5)$

Knot	Node	$y = \Delta^0$	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
P_0	-2	$\to -8$	$\frac{0 - (-8)}{0 - (-2)} = 4 = \Delta y_0$	$\frac{1 - 4}{1 - (-2)} = -1 = \Delta^2 y_0$	$\frac{5 - (-1)}{4 - (-2)} = (1) = \Delta^3 y_0$	$\frac{1 - 1}{5 - (-2)} = 0 = \Delta^4 y_0$
P_1	0	$\to 0$	$\frac{1 - 0}{1 - 0} = 1 = \Delta y_1$	$\frac{21 - 1}{4 - 0} = (5) = \Delta^2 y_1$	$\frac{10 - 5}{5 - 0} = 1 = \Delta^3 y_1$	
P_2	1	$\to 1$	$\frac{64 - 1}{4 - 1} = (21) = \Delta y_2$	$\frac{61 - 21}{5 - 1} = (10) = \Delta^2 y_2$		
P_3	4	$\to 64$	$\frac{125 - 64}{5 - 4} = 61 = \Delta y_3$			
P_4	5	$\to 125$				

Note. The four circled entries will be discussed in Section 6.2B.

รูป 6.2-3 Divided Difference สำหรับ 5 จุดบน $y = x^3$

ตัวอย่าง จงสร้าง DD Table สำหรับจุด 5 จุด

$P_0(-2,-8)$, $P_1(0,0)$, $P_2(1,\ )$, $P_3(4,64)$, $P_4(5,125)$

Solution

ตารางในรูป 6.2-3

ค่าในคอลัมน์ Δ^1, Δ^2, Δ^3 และ Δ^4 นั้นหามาจากค่าในคอลัมน์ Δ^0, Δ^1, Δ^2 และ Δ^3 ตามลำดับ

รูป 6.2-4 แสดงขั้นตอนวิธีสำหรับการสร้าง DD Table เก็บในส่วน upper triangular ของเมตริกซ์จัตุรัส DD

Algorithm: FORMDD (Forming a Divided Difference Table) *

Purpose: To form the divided difference table for n given knots $P_1(x_1, y_1)$, , $P_n(x_n, y.)$ and store it in the matrix $DD_{n\times n}$; specifically, to store $\Delta^m y_k$ in $DD(k, m+1)$.

GET n, **x**, **y** {**x** = $[x_1\ x_2 \cdots x_n]$ and **y** = $[y_1\ y_2 \cdots y_n]$}

```
DO FOR k = 1 TO n              [Put Δ⁰ values in col₁DD]
    DD(k, 1) ← y_k
DO FOR m = 1 TO n − 1          (Put Δ^m values in col_{m+1}DD]
    DO FOR k = 1 TO n − m
        DD(k, m + 1) ← [DD(k + 1, m) − DD(k, m)]/(x_{k+m}   x_k)
```

OUTPUT (The Δ^0, Δ^1, , Δ^{n-1} values are $col_1 DD$, , $col_n DD$)

รูป 6.2-4 รหัสเทียมสำหรับขั้นตอนวิธี FORMDD (การสร้างตาราง DD)

6.2B Recursive Formulas สำหรับ $p_{k,k+m}(x)$

จากการสำรวจสมาชิกในรูป 6.2-3 ซึ่งถูกวงรอบไว้ และการประมาณค่าในช่วงแบบโพลิโนเมียลที่ได้จากตัวอย่างในหัวข้อ 6.1A และ 6.1D พบว่า

$\Delta^2 y_2 = 10$ คือ ส.ป.ส.ตัวนำ (leading coefficient) ของ

$$p_{2,4}(x) = 10x^2 - 29x - 20$$

$\Delta^1 y_2 = 21$ คือ ส.ป.ส.ตัวนำของ $p_{2,3}(x) = 21x - 20$

$\Delta^2 y_1 = 5$ คือ ส.ป.ส.ตัวนำของ $p_{1,3}(x) = 5x^2 - 4x$

$\Delta^3 y_0 = 1$ คือ ส.ป.ส.ตัวนำของ $p_{0,3}(x) = x^3$

ดังนั้น $\boxed{\Delta^m y_k \text{ คือ ส.ป.ส.ตัวนำของ } p_{k.k+m}(x)}$ ...(7a)

$$p_{k.k+m}(x) = \Delta^m y_k x^m + \text{a polynomial of degree} < m \qquad ...(7b)$$

ดังนั้นส.ป.ส.ตัวนำของ $p_{k.k+m}(x)$ จะอยู่ที่ที่ลูกศรที่เริ่มจาก **endpoint nodes** ทั้งสองคือ x_k และ x_{k+m} พบกัน นั่นคือสมาชิกตัวที่ m โดยเริ่มนับจาก y_k ลงมาตาม diagonal ของ DD Table สำหรับ $P_0, \ldots, P_n$

สูตร (7b) ทำให้เราสามารถสร้าง $p_{k.k+m}(x)$ จาก

$p_{Prev}(x)$ = interpolating polynomial สำหรับทุกตัวยกเว้น 1 ตัวของ

$P_k, \ldots, P_{k+m}$ ...(8)

จริง ๆ แล้วเราทราบว่า $p_{Prev}(x)$ มี degree < m ดังนั้นถ้าเราให้ $\delta_m(x)$ แทน increment ที่จะบวกเข้ากับ $p_{Prev}(x)$ เพื่อให้ได้ $p_{k.k+m}(x)$ ดังนั้นโดย (7b)

$$\delta_m(x) = p_{k.k+m}(x) - p_{Prev}(x)$$
$$= \Delta^m y_k x^m + (\text{a polynomial of degree} < m) \qquad ...(9)$$

แต่ nodes x_i ที่ถูกใช้มาก่อน m ตัว คือรากที่ต่าง ๆ กันของ $\delta_m(x)$ เพราะว่า

$$\delta_m(x_i) = p_{k.k+m}(x_i) - p_{Prev}(x_i) = y_i - y_i = 0$$

เนื่องจากว่า degree $\delta_m(x) <= m$ จาก (8) ของหัวข้อ 5.4D ได้ว่า

$$\delta_m(x) = C \prod_{Prev}(x-x_i) \quad (C = \text{constant}) \qquad ...(10)$$

โดยที่ $\prod_{Prev}$ แทนผลคูณเมื่อ x_i แปรค่าไปตาม nodes ที่ถูกใช้มาก่อน

จากการเปรียบเทียบ (10) กับ (9) เราพบว่า $C = \Delta^m y_k$

$$p_{k.k+m}(x) = p_{Prev}(x) + \delta_m(x)$$

โดยที่ $\delta_m(x) = \Delta^m y_k \prod_{Prev}(x-x_i)$ ...(11)

ถ้าเราให้ $p_{Prev}(x)$ เป็น $p_{k.k+m-1}(x)$ หรือ $p_{k+1.k+m}(x)$ เราจะได้สูตรที่เป็น

ประโยชน์มากสำหรับการหา $p_{k,k+m}(x)$

Forward Recursive Form

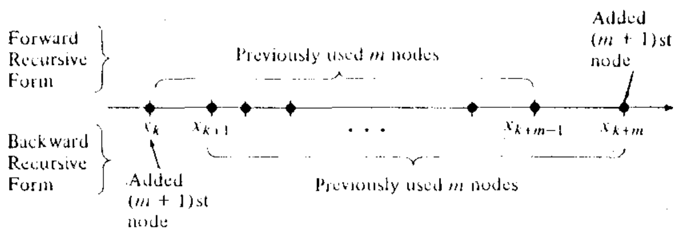
(จุด x_{k+m} ที่เพิ่มเข้าไปอยู่ทางขวาของ $x_k, \ldots, x_{k+m-1}$)

$$p_{k,k+m}(x) = p_{k,k+m-1}(x) \ t \ \Delta^m y_k (x-x_k)(x-x_{k+1})\ldots(x-x_{k+m-1}) \qquad \ldots(12a)$$

Backward Recursive **Form**

(จุด x_k ที่เพิ่มเข้าไปอยู่ทางซ้ายของ $x_{k+1}, \ldots, x_{k+m}$)

$$p_{k,k+m}(x) = p_{k+1,k+m}(x) \ t \ \Delta^m y_k (x-x_{k+1})(x-x_{k+2})\ldots(x-x_{k+m}) \qquad \ldots(12b)$$



รูป 6.2-5 แสดงรูปต่อเนื่องของ $p_{k,k+m}(x)$

ดังนั้นถ้าเราทราบ $p_{2,4}(x)$ [$= p_{prev}(x)$] แล้วเราอาจใช้ (12a) เพื่อหา

$$p_{2,5}(x) = p_{2,4}(x) + \Delta^3 y_2 (x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$$

หรือใช้ (12b) เพื่อหา

$$p_{1,4}(x) = p_{2,4}(x) \ t \ \Delta^3 y_1 (x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$$

เมื่อ $m = 0$ $p_{k,k}(x)$ และ $p_{k+1,k+1}(x)$ ต่างก็เป็น constant function

$$\boxed{p_{k,k}(x) = y_k \text{ และ } p_{k+1,k+1}(x) = y_{k+1}} \qquad \ldots(13)$$

ดังนั้นเมื่อ $m = 1$ (12a) และ (12b) กลายเป็นรูปที่คุ้นเคยของเส้นตรงที่ผ่านจุด P_k และ P_{k+1}

$$
\boxed{\begin{array}{ll} p_{k,k+1}(x) = y_k + \Delta y_k(x-x_k) & \text{(forward)} \\ p_{k,k+1}(x) = y_{k+1} + \Delta y_k(x-x_{k+1}) & \text{(backward)} \end{array}}
\begin{array}{l} \ldots(14a) \\ \ldots(14b) \end{array}
$$

ตัวอย่าง จงใช้ DD Table สำหรับ 5 จุด

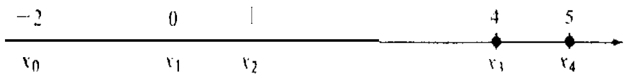
$P_0(-2,-8)$, $P_1(0,0)$, $P_2(1,1)$, $P_3(4,64)$, $P_4(5,125)$

เพื่อหา (a) $p_{1,2}(x)$ (b) $p_{1,3}(x)$ (c) $p_{0,3}(x)$ (d) $p_{1,4}(x)$

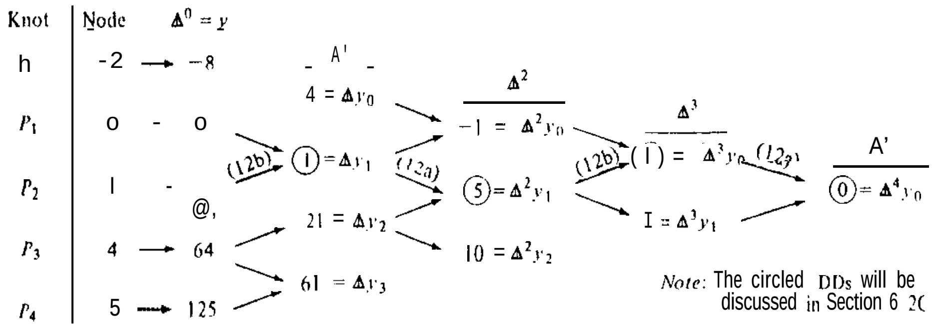
(e) $p_{0,4}(x)$

Solution

เพื่อความสะดวกเราแสดง $x_0,\ldots,x_4$ ในรูป 6.2-6 DD Table สำหรับ $P_0,\ldots,P_4$ อยู่ในรูป 6.2-7



รูป **6.2-6** Nodes ของ $P_0,\ldots,P_4$ บนกราฟ $y = x^3$



รูป **6.2-7** ตาราง DD สำหรับ $P_0,\ldots,P_4$ บนกราฟ $y = x^3$

(a) เราอาจหา $p_{1,2}(x)$ [สำหรับ $P_1(0,0)$ และ $P_2(1,2)$] ได้ 2 ทาง:

$$p_{1,2}(x) = y_1 + \Delta y_1(x-x_1) = 0 + 1(x-0) = x \quad \text{[โดยใช้ (14a)]}$$

$$p_{1,2}(x) = y_2 + \Delta y_1(x-x_2) = 1 + 1(x-1) = x \quad \text{[โดยใช้ (14b)]}$$

(b) เพื่อหา $p_{1,3}(x)$ จาก $p_{1,2}(x)$ เราเพิ่ม $P_3(4,64)$ เข้าไปทางขวา

$$p_{1,3}(x) = p_{1,2}(x) + \Delta^2 y_1(x-0)(x-1) \quad \text{[โดยใช้ (12a)]}$$

$$= x + 5(x^2-x) = 5x^2 - 4x$$

(c) เพื่อหา $p_{0,3}(x)$ จาก $p_{1,3}(x)$ เราเพิ่ม $P_0(-2,-8)$ เข้าไปทางซ้าย

$$p_{0,3}(x) = p_{1,3}(x) \text{ t } \Delta^3 y_0 (x-0)(x-1)(x-4) \quad \text{[โดยใช้ (12b)]}$$
$$= (5x^2 - 4X) \text{ t } 1(x^3 - 5x^2 + 4x) = x^3$$

(d) เพื่อหา $p_{1,4}(x)$ จาก $p_{1,3}(x)$ เราเพิ่ม $P_4(5,125)$ เข้าไปทางขวา

$$p_{1,4}(x) = p_{1.3}(x) \text{ t } \Delta^3 y_1 (x-0)(x-1)(x-4) \quad \text{[โดยใช้ (12a)]}$$
$$= (5x^2 - 4X) + 1(x^3 - 5x^2 + 4x) = x^3$$

(e) เราอาจหา $p_{0,4}(x)$ จาก $p_{0,3}(x)$ [โดยเพิ่ม P_4 เข้าไปทางขวา] หรือ

จาก $p_{1,4}(x)$ [โดยเพิ่ม P_0 เข้าไปทางซ้าย]

แต่เนื่องจาก $\Delta^4 y_0 = 0$ ทั้ง 2 วิธีจะทำให้

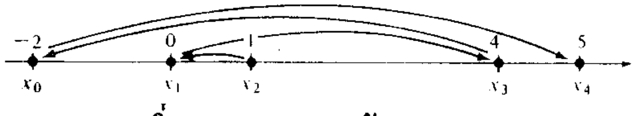
$$p_{0,4}(x) = p_{0,3}(x) = p_{1,4}(x) = x^3 \quad \text{[โดยใช้ (12a) หรือ (12b)]}$$

เนื่องจากว่า $P_0, \ldots, P_4$ อยู่บน $y = x^3$ เราจึงคาดว่า x^3 เองเป็น unique interpolating polynomial ของ 4 จุดใด ๆ หรือทั้ง 5 จุดข้างต้น

6.2C การหาสัมประสิทธิ์ตัวนำ (Leading Coefficients) โดยการตรวจสอบ

ลองสร้าง $p(x)$ โดยเริ่มจาก $x_2 = 1$ แล้วใช้ (12a) และ (12b) สลับกันในการเพิ่ม n o d e แสดงด้วยลูกศรในรูป 6.2-8 ผลของการหา $p_{0,4}(x)$ คือ

$$p_{0,4}(x) = \underbrace{y_2 \text{ t } \Delta^1 y_1 (x-1)}_{(12b)} \text{ t } \underbrace{\Delta^2 y_1 (x-1)(x-0)}_{(12a)}$$
$$\text{t } \underbrace{\Delta^3 y_0 (x-1)(x-0)(x-4)}_{(12b)} + \underbrace{\Delta^4 y_0 (x-1)(x-0)(x-4)(x+2)}_{(12a)}$$



รูป 6.2-8 การเพิ่ม nodes โดยใช้ (12a) และ (12b) สลับกัน

โปรดสังเกตเครื่องหมายลูกศรในรูป 6.2-8 นั้นสมนัยกับเส้นทาง zigzag ผ่าน ส.ป.ส.ตัวนำ โดยเริ่มจาก y_2, $\Delta^1 y_1$, $\Delta^2 y_1$, $\Delta^3 y_0$, $\Delta^4 y_0$ คือสมาชิกที่ถูกวงรอบในรูป 6.2-7

ตาราง 6.2-1 การแสดงสูตร (12a) และ (12b) บนตาราง DD

Formulo	*Added Node*	*Direction to New* $\Delta^m y_k$
(12a)	to right	↘ on DD table
(12b)	to left	↗ on DD table

6.2D การใช้ DD Table ในการพิจารณาข้อมูลแบบโพลิโนเมียล

จาก (7b) เราได้ว่า

$$p_{k.k+m}(x) = \Delta^m y_k x^m + \text{a polynomial of degree} < m$$

ถ้าดิฟเฟอเรนชิเอท m ครั้ง เราพบว่า

$$d^m[p_{k.k+m}(x)]/dx^m = m!\ \Delta^m y_k \text{ (constant)} \qquad \ldots(15a)$$

ผลที่สำคัญนี้ทำให้เราสามารถให้ความหมายของ $\Delta^m y_k$ ในรูป mth derivative ดังนี้

$$\boxed{\Delta^m y_k = (1/m!)\frac{d^m}{dx^m}[\text{interpolating polynomial สำหรับ } P_k,\ldots,P_{k+m}]}$$

...(15b)

ถ้า $P_0,\ldots, P_n$ อยู่บนกราฟของ mth-degree polynomial $p(x)$ แล้ว

$$p_{k.k+m}(x) = p(x) \text{ สำหรับ } k \text{ ใด ๆ}$$

ดังนั้นโดย (15) mth DDs ทุกตัวจะเป็นค่าคงที่ $p^{(m)}(x)/m!$ ดังที่ได้เห็นในรูป 6.2-6 ว่า $p(x) = x^3$ ($m = 3$) ในทางกลับกัน ถ้าคอลัมน์ที่ m ของ DD Table มีค่าคงที่ แล้วทุกคอลัมน์ที่ตามมาเป็นศูนย์(นั่นคือ $\Delta^r y_k = 0$ สำหรับ $r > m$) ดังนั้นจาก recursive forms (12)ได้ว่า

$$p_{k.k+r}(x) = p_{k.k+m}(x) \text{ สำหรับ } k \text{ ใด ๆ และทุก } r >= m$$

โดยเฉพาะ $p_{0,n}(x) = p_{k,k+m}(x)$ สำหรับ k ใด ๆ

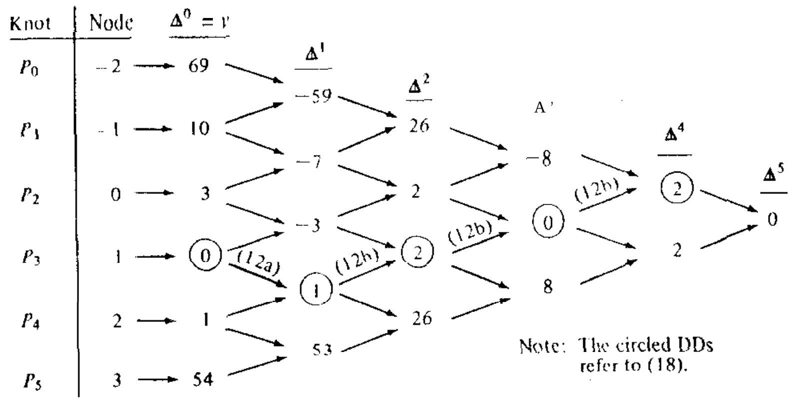
โดยสรุปคือ

ใน DD Table หนึ่ง คอลัมน์ Δ^m จะมีค่าคงที่ ก็ต่อเมื่อ $P_0, \dots, P_n$ ทุกจุดอยู่บนกราฟของ mth-degree polynomial เราจะหา polynomial นี้ได้จาก $p_{k,k+m}(x)$ โดยการใช้ (m+1) จุดใด ๆ ที่ต่อเนื่องกันคือ $P_k, \dots, P_{k+m}$

ตัวอย่าง จงหา polynomial ซึ่งมี degree ต่ำสุดซึ่ง interpolate

$P_0(-2,69), P_1(-1,10), P_2(0,3), P_3(1,0), P_4(2,1), P_5(3,54)$

Solution รูป 6.2-9 แสดง DD Table ของจุดทั้ง 6



รูป 6.2-9 ตาราง DD สำหรับ $P_0, \dots, P_5$

Δ^4 มีค่าคงที่ แสดงว่าจุดเหล่านี้ทั้งหมดอยู่บนกราฟของ 4th-degree polynomial p(x) ดังนั้นการใช้ 5 จุดใด ๆ จะสามารถหา p(x)ได้ ตัวอย่างเช่นเราจะเพิ่ม 5 nodes แรกตามลำดับเดิมคือ $x_0 = -2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$ เพื่อหา p(x) โดยหา $p_{0,4}(x)$ และใช้เฉพาะ (12a) [**forward Newton form** ของ p(x)]:

$$p(x) = 69 - 59(x+2) + 26(x+2)(x+1) - 8(x+2)(x+1)x + 2(x+2)(x+1)x(x-1) \qquad \dots(16)$$

ทำนองเดียวกัน เราอาจเพิ่ม 5 nodes สุดท้ายในลำดับกลับกันกับลำดับเดิม คือ

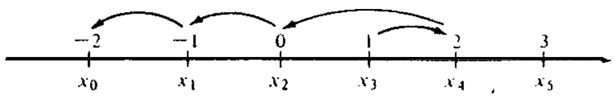
$$x_5 = 3,\ x_4 = 2,\ x_3 = 1,\ x_2 = 0,\ x_1 = -1$$

ในการหา p(x) โดยหา $p_{1.5}(x)$ และใช้เพียง (12b) [backward **Newton** form ของ p(x)]

$$p(x) = 54 + 53(x-3) + 26(x-3)(x-2) + 8(x-3)(x-2)(x-1) + 2(x-3)(x-2)(x-1)x \quad \ldots(17)$$

เราต้องการเพิ่ม nodes เพื่อทำให้การใช้ DD's สะดวกที่สุด เพื่อเป็นตัวอย่างเราได้ใช้ 0, ±1, ±2อีกหนทางหนึ่ง(ที่วงรอบในรูป 6.2-9) นั้นสมนัยกับลำดับที่แสดงในรูป 6.2-10 แล้วใช้ (12a) ครั้งหนึ่ง หลังจากนั้นใช้ (12b) โดยตลอด เมื่อหา p(x) โดยหา $p_{1.5}(x)$ จะได้

$$p(x) = 0 + 1(x-1) + 2(x-1)(x-2) + 0(x-1)(x-2)x + 2(x-1)(x-2)x(x+1) \quad \ldots(18)$$



รูป 6.2-10 การเพิ่ม nodes ตามลำดับต่อไปนี้ x_3, x_4, x_2, x_1, x_0

เมื่อกระจาย (16), (17) หรือ (18) (ซึ่งทำได้ง่ายที่สุด) จะได้

$$p(x) = 2x^4 - 4x^3 - x^2 + 3 \ (\text{degree} = 4) \quad \ldots(19)$$

ซึ่ง interpolate $P_0, \ldots, P_5$

โปรดสังเกตว่า รูปแบบของนิวตัน (Newton form) ทั้ง 3 ของ p(x) ใน (16)-(18) นั้นสามารถเขียนใน nested form ได้ตามลำดับดังนี้

$$p(x) = [[[2(x-1)-8]x+26](x+1)+59](x+2)+69 \quad \ldots(20a)$$

$$p(x) = [[[2x+8](x-1)+26](x-2)+53](x-3)+54 \quad \ldots(20b)$$

$$p(x) = [[[2(x+1)+0]x+2](x-2)+1](x-1)+0 \quad \ldots(20c)$$

เราอาจหาค่า p(z) สำหรับ z ที่กำหนดให้ได้อย่างง่ายจาก (19) แต่ถ้าเราไม่ได้หา (19) เราอาจใช้ (20c) ในการหาค่า p(z) ตามต้องการ เช่น

$$p(4) = [[[2(5)+0](4)+2](2)+1](3)+0 = 255$$

6.2E Difference Tables สำหรับจุดที่อยู่ห่างเท่า ๆ กัน

ถ้า $x_0, x_1, \dots, x_n$ อยู่ห่างกันเท่า ๆ กันคือ h นั่นคือ

$$x_k = x_0 + kh \,, \quad h = 0, 1, \dots, n \qquad \dots(21)$$

กำหนดให้ mth forward difference ที่ x_k คือ

$$\boxed{\Delta^m y_k = \Delta^{m-1} y_{k+1} - \Delta^{m-1} y_k \,, \quad m = 1, 2, \dots} \qquad \dots(22)$$

โดยที่ zeroth forward difference $\Delta^0 y_k$ คือ y_k นั่นเอง ดังนั้น

$$\Delta^1 y_k = y_{k+1} - y_k \qquad \dots(23a)$$

$$\Delta^2 y_k = \Delta^1 y_{k+1} - \Delta^1 y_k = y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k \qquad \dots(23b)$$

$$\Delta^3 y_k = \Delta^2 y_{k+1} - \Delta^2 y_k = y_{k+3} - 3y_{k+2} + 3y_{k+1} - y_k \qquad \dots(23c)$$

$$\Delta^4 y_k = \Delta^3 y_{k+1} - \Delta^3 y_k = y_{k+4} - 4y_{k+3} + 6y_{k+2} - 4y_{k+1} + y_k \qquad \dots(23d)$$

ส.ป.ส.(ไม่สนใจเครื่องหมาย)ของ $y_{k+m}, \dots, y_{k+1}, y_k$ ในการกระจาย $\Delta^m y_k$ อาจหาได้จาก row ที่ m ของสามเหลี่ยมของปาสกาล (Pascal's triangle) (รูป 6.2-11)

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

รูป 6.2-11 สามเหลี่ยมของปาสกาล (Pascal's Triangle)

จากคำจำกัดความของ $\Delta^m y_k$ และ $\blacktriangle^m y_k$ [ดู (22) และหัวข้อ 6.2A] และความจริงที่ว่า $x_{k+m} - x_k = mh$ เราจะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง forward difference และ divided difference

$$\boxed{\blacktriangle^m y_k = (1/(m!h^m))\Delta^m y_k\ ,\quad m = 0,1,2,\ldots} \qquad \ldots(24)$$

ดังนั้นจาก (15)

$$\Delta^m y_k/h^m = d^m[p_{k\ k+m}(x)]/dx^m \quad \text{(constant)} \qquad \ldots(25)$$

ผลที่ตามมาคือเราสามารถใช้ $\Delta^m y_k/h^m$ สำหรับประมาณค่าอนุพันธ์ที่ m (mth derivatives)

เรามักคำนวณ forward differences แล้วแสดงในรูปตารางที่เรียกว่า **Forward Difference Table หรือ Difference Table** ในรูป **6.2-12** เป็น Difference Table ของ equispaced knots

$$P_0(-2,69),\ P_1(-1,10),\ P_2(0,3),\ P_3(1,0),\ P_4(2,1),\ P_5(3,54) \qquad \ldots(26)$$

ซึ่งเป็นจุดที่ใช้คำนวณค่าใน DD Table ในรูป 6.2-9 นั่นเอง

	Node	$\Delta^0 = y$	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
P_0	-2	69					
			$-59 = \Delta y_0$				
P_1	-1	10		$52 = \Delta^2 y_0$			
			$-7 = \Delta y_1$		$-48 = \Delta^3 y_0$		
P_2	0	3		$4 = \Delta^2 y_1$		$48 = \Delta^4 y_0$	
			$-3 = \Delta y_2$		$0 = \Delta^3 y_1$		$0 = \Delta^5 y_0$
P_3	1	0		$4 = \Delta^2 y_2$		$48 = \Delta^4 y_1$	
			$1 = \Delta y_3$		$48 = \Delta^3 y_2$		
P_4	2	1		$52 = \Delta^2 y_3$			
			$53 = \Delta y_4$				
P_5	3	54					

รูป 6.2-12 ตาราง Forward Difference สำหรับ P,,...., P_5

$\Delta^m y_k$ จาก forward difference table นั้นอาจแสดงในรูปของ ● th backward differences $\nabla^m y_k$ หรือในรูปของ mth central differences $\delta^m y_k$ ดังนี้

$$\Delta^m y_k = \nabla^m y_{k+m} = \delta^m y_{k+(m/2)} \qquad \ldots(27)$$

จากรูป 6.2-12 สมาชิก 3 ตัวซึ่งอ่านลงในแนวเส้นทะแยงมุมจาก $y_1 = 10$ คือ

$$-7 = \Delta^1 y_1 = \nabla^1 y_2 = \delta^1 y_{3/2}$$

$$4 = \Delta^2 y_1 = \nabla^2 y_3 = \delta^2 y_2$$

$$0 = \Delta^3 y_1 = \nabla^3 y_4 = \delta^3 y_{5/2}$$

Knot	Node	$\Delta^0 = y$	∇^1	∇^2	∇^3	∇^4	∇^5
P_0	x_0	y_0					
			∇y_1				
P_1	x_1	y_1		$\nabla^2 y_2$			
			∇y_2		$\nabla^3 y_3$		
P_2	x_2	y_2		$\nabla^2 y_3$		$\nabla^4 y_4$	
			∇y_3		$\nabla^3 y_4$		$\nabla^5 y_5$
P_3	x_3	y_3		$\nabla^2 y_4$		$\nabla^4 y_5$	
			∇y_4		$\nabla^3 y_5$		
P_4	x_4	y_4		$\nabla^2 y_5$			
			∇y_5				
P_5	x_5	y_5					

(a)

Knot	Node	$\delta^0 = y$	δ^1	δ^2	δ^3	δ^4	δ^5
P_0	x_0	y_0					
			$\delta y_{1/2}$				
P_1	x_1	y_1		$\delta^2 y_1$			
			$\delta y_{3/2}$		$\delta^3 y_{3/2}$		
P_2	x_2	y_2		$\delta^2 y_2$		$\delta^4 y_2$	
			$\delta y_{5/2}$		$\delta^3 y_{5/2}$		$\delta^5 y_{5/2}$
P_3	x_3	y_3		$\delta^2 y_3$		$\delta^4 y_3$	
			$\delta y_{7/2}$		$\delta^3 y_{7/2}$		
P_4	x_4	y_4		$\delta^2 y_4$			
			$\delta y_{9/2}$				
P_5	x_5	y_5					

(b)

รูป 6.2-13 ตำแหน่งของ $\nabla^m y_k$ และ $\delta^m y_k$ บนตาราง Difference

Central Difference Interpolating Formulas ซึ่งจะพบในสูตรของสเตอร์ลิง (Stirling), เบสเซล (Bessel) และ เกาส์ (Gauss) นั้นจะให้ค่าประมาณในช่วง ซึ่งโดยทั่ว ๆ ไปนั้น อย่างน้อยที่สุดจะมีความแม่นยำเท่ากับค่าที่ได้จากการประมาณค่าในช่วงแบบโพลิโนเมียล

6.3 ยุทธวิธีในทางปฏิบัติสำหรับการประมาณค่าแบบโพลิโนเมียล

กำหนดจุด (n+1) จุดซึ่งอยู่บนกราฟ f ให้ดังนี้คือ

$P_i(x_i, y_i)$ โดยที่ $y_i = f(x_i)$, $i=0,1,\ldots,n$ ...(1)

เราอาจประมาณ f(z) สำหรับ z ที่เราระบุไว้ดังนี้

$f(z) \approx p_{k,k+m}(z)$ สำหรับ m และ k ที่เลือกมาอย่างเหมาะสม ...(2)

ปัญหาคือ เราจะเลือก m และ k อย่างไรจึงจะรับประกันความแม่นยำที่ดีที่สุด

6.3A ยุทธวิธีสำหรับการประมาณค่าแบบโพลิโนเมียลอย่างมีประสิทธิภาพ

ให้ m เป็น degree ที่ระบุไว้ ในระหว่างจำนวนต่อไปนี้คือ

$p_{o,m}(z),\ p_{1,m+1}(z), \ldots,\ p_{n-m,n}(z)$ ...(3)

จำนวนใดที่จะถูกใช้เป็น mth-degree approximation ของ f(z) จำนวนที่น่าจะเป็นค่าประมาณที่แม่นยำที่สุดของ f(z) คือ

$$\hat{p}_m(z) = p_{k,k+m}(z) \text{ โดยเลือก } k \text{ ซึ่งทำให้ } z \text{ อยู่กึ่งกลางช่วง } [x_k, x_{k+m}] \qquad \ldots(4)$$

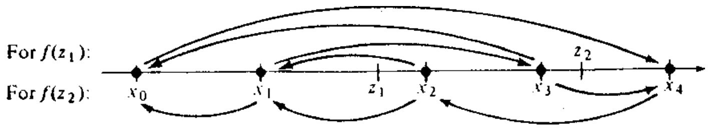
เราจะเรียก $\hat{p}_m(z)$ ว่า **best mth interpolant of f(z)**

เพื่อหาค่าประมาณที่แม่นยำของ f(z) เมื่อกำหนด z เราหา

$\hat{p}_o(z),\ \hat{p}_1(z),\ \hat{p}_2(z), \ldots$ ...(5)

อย่างต่อเนื่อง ในการเพิ่ม node ใหม่นั้นต้องยึดหลักว่าให้ z_1 อยู่กึ่งกลาง ลูกศรในรูป 6.3-1 แสดงการเพิ่ม node ตัวใหม่สำหรับ z ซึ่งอยู่ระหว่าง x_1 และ x_2 และสำหรับ z_2 ซึ่งอยู่ระหว่าง x_3 และ x_4 เราจะเห็นจากรูป 6.3-1 ว่า ถ้าระยะห่างระหว่าง nodes ต่าง ๆ ค่อนข้างจะใกล้เคียงกันแล้ว ค่าต่าง ๆ ใน (5) จะได้มาโดยใช้

$\hat{p}_o(z) = y_k$ โดยที่ x_k คือ node ที่อยู่ใกล้ z มากที่สุด ...(6)



รูป 6.3-1 การเพิ่ม nodes เพื่อให้ได้ best interpolant ของ z_1 และ z_2

เป็น best zero interpolant แล้ว การเพิ่ม node (ถ้ายังมีอยู่) คือเอา node ที่อยู่ข้างซ้ายและขวาของ z สลับกัน เราอาจเขียนสูตร (11) ใน 6.2B ดังนี้

$$\hat{p}_m(z) = \hat{p}_{m-1}(z) + \delta_m(z) \text{ โดยที่ } \delta_m(z) = \Delta^m y_k \ \pi_{prev}(z-x_i) \qquad \ldots(7)$$

สูตรนี้ทำให้ง่ายต่อการหา $\hat{p}_o(z)$, $\hat{p}_1(z)$,... ไปเรื่อย ๆ จนกระทั่ง $\delta_m(z)$ ไม่เปลี่ยนแปลง ซึ่งแสดงว่าความแม่นยำได้ถูกปรับปรุงอย่างมีนัยสำคัญแล้ว

ตัวอย่าง จาก normalized cummulative distribution function

$$\Phi(x) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{x} \exp(-t^2/2)dt \qquad ...(8)$$

ซึ่งมีความสำคัญในวิชาสถิติ ค่าของ $\Phi(x)$ จะอ่านได้จากตารางลักษณะเดียวกับตาราง 6.3-1 จากค่าต่าง ๆ ในตารางเราต้องการประมาณ

(a) $\Phi(.52)$ (b) $\Phi(0.22)$ (c) $\Phi(1.4)$

ตาราง 6.3-1 ตารางแสดงค่า $\Phi(x)$

x	$\Phi(x)$(4d)
x_0 = 0.0	0.5000
x_1 = 0.2	0.5793
x_2 = 0.4	0.6554
x_3 = 0.6	0.7257
x_4 = 0.6	0.7861
x_5 = 1.0	0.6413

Solution

(a) DD Table (to 5s) สำหรับ 6 จุดอยู่ในรูป 6.3-2 สำหรับ z = 0.52 การเพิ่ม node สำหรับ best mth interpolants ของ $\Phi(z)$ ควรเป็นไปตามลำดับดังนี้ x_3, x_2, x_4, x_1, x_5, x_o ดังแสดงในรูป 6.3-3 ส.ป.ส.ตัวนำของ $\hat{p}_o(z)$,... $\hat{p}_5(z)$ ถูกวงรอบในรูป 6.3-2

เริ่มต้นด้วย $\hat{p}_o(z) = \Phi(x_3) = \Phi(0.6) = 0.7257$ จาก (7) จะได้(to 5d)

$\hat{p}_1(z) = \hat{p}_0(z)+(0.3515)(z-0.6) = 0.7257+(-0.02812) \doteq 0.69756$

$\hat{p}_2(z) = \hat{p}_1(z)+(-0.09875)(z-0.6)(z-0.4) \doteq 0.69758+(0.00095)$

$= 0.69653$

$\hat{p}_3(z) = \hat{p}_2(z)+(-0.04375)(z-0.6)(z-0.4)(z-0.8)$

$\doteq 0.69853+(-0.00012) = 0.69841$

$\hat{p}_4(z) = \hat{p}_3(z)+(0.020833)(z-0.6)(z-0.4)(z-0.8)(z-0.2)$

$\doteq 0.69643$

$\hat{p}_5(z) = \hat{p}_4(z)+(0.0078123)(z-0.6)(z-0.4)(z-0.8)(z-0.2)(z-1)$

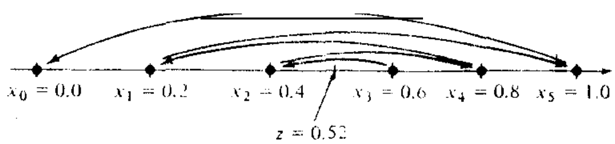
$\doteq 0.69643 \doteq \hat{p}_4(z)$

Knot	Node	$\Delta^0 = y$	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
P_0	0.0	0.5000					
			0.3965				
P_1	0.2	0.5793		−0.04			
			0.3805		−0.054167		
P_2	0.4	0.6554		−0.0725		0.013021	
			0.3515		−0.04375		0.0078123
P_3	0.6	0.7257		−0.09875		0.020833	
			0.3120		−0.027083		
P_4	0.8	0.7881		−0.115			
			0.2660				
P_5	1.0	0.8413					

Key: DDs for $z = 0.52$; DDs for $z = 0.22$; DDs for $z = 1.4$

Note: Entries are rounded to 5s.

รูป 6.3-2 ตาราง DD สำหรับข้อมูล $\Phi(x)$



รูป 6.3-3 การเพิ่ม nodes เพื่อให้ได้ best, interpolant ของ z = 0.52

(b) และ (c) ทำนองเดียวกัน สำหรับ z = 0.22 และ z = 1.4 การเพิ่ม node เป็นไปดังนี้

สำหรับ $z = 0.22$: $x_1, x_2, x_0, x_3, x_4, x_5$

สำหรับ $z = 1.4$: $x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, x_0$

ผลลัพธ์ของ (a), (b) และ (c) แสดงในตาราง 6.3-2 ในการคำนวณกับข้อมูล 4d เราใช้เกิน 5s สำหรับค่าของ $\Delta^m y_k$ และ $\pi_{Prev}(z-x_i)$ และแสดงค่าของ $\delta_m(z)$ และของ $\hat{p}_m(z)$ ถึง 5d

ตาราง 6.3-Z การประมาณค่า $\Phi(z)$ เมื่อ $z = 0.52$, $z = 0.22$ และ $z = 1.4$

	(a) $z = 0.52$, $\hat{p}_0(z) = $ (P(0.6)			(b) $z = 0.22$, $\hat{p}_0(z) = \Phi(0.2)$			(c) $z = 1.4$, $\hat{p}_0(z) = \Phi(1.0)$		
m	New Node	$\delta_m(z)$	$\hat{p}_m(z)$	New Node	$\delta_m(z)$	$\hat{p}_m(z)$	New Node	$\delta_m(z)$	$\hat{p}_m(z)$
0	0.6		0.1251	0.2		0.5793	1.0		0.8413
1	0.4	-0.02812	0.69758	0.4	0.00761	0.58691	0.8	0.1064	0.94770
2	0.8	−0.00095	0.69853	0.0	0.00014	0.58705	0.6	-0.0276	0.92010
3	0.2	−0.00012	0.69841	0.6	0.00004	0.58709	0.4	-0.0052	0.91490
4	1.0	0.00002	0.69843	0.8	0.00000	0.58709	0.2	0.00400	0.91890
5	0.0	0.00000	0.69843	1.0	0.00000	0.58709	0.0	0.00180	0.92070

6.3B ความแม่นยำของการประมาณค่าในช่วงแบบโพลิโนเมียล

ค่าของ $\Phi(0.52)$ คือ 0.6985(4s) ไม่ใช่ 0.6984 ซึ่งคือค่าประมาณในช่วงที่ดีที่สุด (best interpolate) จากตาราง 6.3-2 เนื่องจากว่าเราได้ใช้เกิน 5s ในการคำนวณในขั้นต่าง ๆ ความคลาดเคลื่อนขนาดเล็กนี้ไม่ได้เนื่องมาจากความคลาดเคลื่อนแพร่กระจายเนื่องจากการปัดเศษ (propagate roundoff error) แต่เนื่องจากความคลาดเคลื่อนแบบฝังติด (inherent error) ของค่าในตาราง

เมื่อทำการ interpolate f(z) ความแม่นยำที่ดีที่สุดที่เราจะหวังได้คือความแม่นยำของค่าตาราง เราควรจะเตรียมตัวยอมรับความคลาดเคลื่อนขนาดเล็กที่เกิดขึ้นจากการปัดเศษ

เมื่อ $z = 0.22$, $\hat{p}_3(z) = 0.5871(4s)$ ประมาณค่า $\Phi(0.22)$ อย่างไรก็ดีค่าของ $\Phi(1.4)$ คือ 0.9192(4s) ดังนั้น $\hat{p}_4(1.4) = 0.9189$ ประมาณ $\Phi(1.4)$ ดีกว่า $\hat{p}_5(1.4) = 0.9207$ และไม่แม่นยำเท่ากับค่าประมาณของ $\Phi(0.52)$ และ $\Phi(0.22)$

สำหรับ z ที่อยู่ใกล้จุดปลายของช่วงสำหรับการประมาณค่าในช่วง (interpolating interval) หนึ่ง และ/หรือ ค่อนข้างห่างจาก node ที่อยู่ใกล้ที่สุด ดังนั้นจึงสำคัญมากที่จะไม่ใช้ m ขนาดใหญ่ นอกเสียจากว่าการทำเช่นนั้นจะทำให้เพิ่มจำนวนตัวเลขนัยสำคัญของความแม่นยำ

คำว่า **การประมาณค่านอกช่วง (Extrapolation)** ถูกใช้เมื่อทำการประมาณค่าในช่วงสำหรับ $f(z)$ เมื่อ $z < x_0$ หรือ $z > x_n$ เมื่อทำการประมาณค่านอกช่วงจะเป็นการมีค่ามากที่จะทำการสำรวจ DD Table ใกล้ปลายที่เหมาะสมของช่วง$[x_1, x_n]$ ในตัวอย่างข้างต้น สมาชิกของคอลัมน์ Δ^4 เกือบคงที่ ซึ่งชี้ว่า $\hat{p}_4(x)$ จะให้ค่าประมาณที่เชื่อได้ของ $\Phi(x)$ สำหรับ $x > 1$ ในกรณีใดก็ตาม ค่า $\delta_m(z)$ ที่ใหญ่ (of order of 10^{-3}) จะทำให้เราคาดว่าจะเกิดความคลาดเคลื่อนในทศนิยมตำแหน่งที่ 4 ของทั้ง $\hat{p}_4(z)$ และ $\hat{p}_5(z)$ เมื่อ $z = 1.4$

เราควรหลีกเลี่ยงการประมาณค่านอกช่วงถ้าทำได้ แต่ถ้าจำเป็นจะต้องทำโดยใช้ **lowest degree** ที่จะให้ความแม่นยำที่พอจะเป็นไปได้ และด้วยความคาดหวังว่าจะได้ความแม่นยำที่ไม่ค่อยดีนัก

6.3C <u>การแพร่กระจายของความผิดพลาดใน DD Table</u>

ในตัวอย่างใน 6.3A ถ้าค่าของ $\Phi(x)$ ที่กำหนดให้เป็น 3d (แทนที่จะเป็น 4d) ถ้าผลของ DD Table (ใช้เกิน 5s เช่นเดียวกับตัวอย่างใน 6.3A) แสดงในรูป 6.3-4

การเปรียบเทียบรูป 6.3-2 และรูป 6.3-4 แสดงว่าสมาชิกของคอลัมน์ Δ^1 ต่างกันในตัวเลขนัยสำคัญตัวที่ 3 ส่วนของคอลัมน์ Δ^2 และ Δ^3 ต่างกันในตัวเลขนัยสำคัญตัวที่สองหรือตัวที่หนึ่ง และ $\Delta^4 y_0$ มีเครื่องหมายต่างกัน คำอธิบายเกี่ยวกับความแตกต่างนี้ คือเกิดการขาดนัยสำคัญ เมื่อค่าของ $\Phi(x)$ ที่เกือบจะเท่ากันถูกนำมาลบกันเมื่อทำการคำนวณ 1st DD's และความคลาดเคลื่อนนี้จะแพร่กระจายไปในคอลัมน์ที่สูงขึ้นของ DD และมีขนาดใหญ่ขึ้น ๆ ดังที่ปรากฏอยู่

Knot	Node	$\Delta^0 = y$	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
P_0	0.0	0.500					
			0.395				
P_1	0.2	0.579		−0.0375			
			0.38		0.041667		
P_2	0.4	0.655		−0.0625		−0.052083	
			0.355		0.083333		0.15624
P_3	0.6	0.726		−0.1125		0.10416	
			0.31		0		
P_4	0.8	0.788		−0.1125			
			0.265				
P_5	1.0	0.841					

Note: Entries are rounded to 5s.

รูป 6.3-4 ตาราง DD สำหรับ $\Phi(x)$ ที่ใช้ 3d

6.3D ความผิดพลาดของการประมาณค่าในช่วงแบบโพลิโนเมียล

สำหรับ z ที่กำหนดให้และจุดที่ต่อเนื่องกัน (m+1) จุดคือ $P_k, \ldots, P_{k+m}$ ซึ่งอยู่บนกราฟของฟังก์ชัน f เราต้องการจะพิจารณาความคลาดเคลื่อนของการประมาณค่า f(z) โดยใช้ $p_{k,k+m}(z)$ นั่นคือ

$$E_{k,k+m}(z) = f(z) - p_{k,k+m}(z) \qquad \ldots(9)$$

เราต้องการผลสรุปจากสูตรของความคลาดเคลื่อน

$$\boxed{E_{k,k+m}(z) = [f^{(m+1)}(c_{k\ \ k+m})/(m+1)!](z-x_k)(\ _{k+1})\ldots(z-x_{k+m})}$$

...(10)

โดยที่ $c_{k,k+m}$ คือจุดในช่วงปิดที่เล็กที่สุด (smallest closed interval) ซึ่งมีค่าของ $x_k, \ldots, x_{k+m}$ และ z อยู่ในช่วง เราให้ I แทนช่วงดังกล่าว ถ้าให้ **max-norm of $f^{(m+1)}$ on I** คือ

$$\left\| f^{(m+1)} \right\|_I = \text{ค่าสูงสุดของ } \left| f^{(m+1)}(x) \right| \text{ บน I} \qquad \ldots(11)$$

เนื่องจากว่า

$$\left| f^{(m+1)}(c_{k,k+1}) \right| <= \left\| f^{(m+1)} \right\|_I$$

จาก (10)

$$\left| E_{k,k+m}(z) \right| <= [\left\| f^{(m+1)} \right\|_I/(m+1)!] \left|z-x_o\right| \left|z-x_1\right| \ldots \left|z-x_n\right| \qquad \ldots(12)$$

ดังนั้นสำหรับ z ที่กำหนดให้ และ m ที่ระบุ ความคลาดเคลื่อนของการประมาณค่า f(z) โดยใช้ $p_{k,k+m}(z)$ จะมีค่าเล็กที่สุดเมื่อแฟคเตอร์ $\left|z-x_i\right|$ ใน (12) เล็กที่สุด นั่นคือเมื่อ $x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+m}$ เป็น (m+1) nodes ซึ่งมี z อยู่ตรงกลาง ดังนั้น $\left|E_{k,k+m}(z)\right|$ จะมีค่ามากที่สุดเมื่อ z ไม่อยู่ใกล้ nodes ใด ๆ เลย โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อ z อยู่นอกช่วงสำหรับการประมาณค่าในช่วง $[x_k, x_{k+m}]$

แบบฝึกหัดบทที่ 6

6.1 For the cubic knots $P_1(0,0)$, $P_2(1,1)$, $P_3(2,8)$, $P_4(3,37)$, find $p_{1,3}(x)$ two ways:

(a) Use the method of undetermined coefficients (Section 6.1A).

(b) Use the Lagrange form of $p_{1,3}(x)$ (Section 6.1C)

Ans. $p_{1,3}(x) = 6x^2 - 11x + 6$

6.2 For the knots $P_0(-2,-15)$, $P_1(-1,-2)$, $P_2(0,1)$, $P_3(2,1)$, $P_4(3,10)$ find the Lagrange form (do not simplify) of

(a) $p_{2,3}(x)$ (b) $p_{2,4}(x)$ (c) $p_{1,4}(x)$ (d) $p_{0,4}(x)$

6.3 For the knots $P_0(-3,1)$, $P_1(0,9)$, $P_2(2,1)$, $P_3(3,1)$, $P_4(5,81)$, find the Lagrange form (do not simplify) of

(a) $p_{1,2}(x)$ (b) $p_{0,2}(x)$ (c) $p_{0,3}(x)$ (d) $p_{0,4}(x)$

6.4 Let $L_0(x),\ldots,L_4(x)$ denote the Lagrange polynomials for $P_0,\ldots,P_4$.

(a! For $P_0,\ldots,P_4$ of Exercise 6.2, use the **selecting property** (6) of Section 6.1C to evaluate *by inspect ion*

(i) $L_2(3)$ (ii) $L_2(0)$ (iii) $L_3(3)$ (iv) $L_3(2)$ (v) $L_2(2)$

(b) Repeat part (a) for $P_0,\ldots,P_4$ of Exercise 6.3.

6.5 Let $x_0, x_1, \ldots, x_n$ denote any ntl distinct nodes. Use the uniqueness of $p_{0,n}(x)$ to show that their Lagrange polyniaials $L_0(x),\ldots,L_n(x)$ must satisfy

(a) $L_0(x)+L_1(x)+\ldots+L_n(x) \equiv 1$ (constant) for all x.

(b) $x_0L_0(x)+x_1L_1(x)+\ldots+x_nL_n(x) = x$ for all x.

You do not have to write out the $L_j(x)$'s. Consider $f(x)=1$ in part (a) and $f(x)=x$ in part (b).

6.6 What (if anything) can you conclude about the knots P_2, P_3, P_4, P_5 if $\Delta^3 y_2 = 0$? If $\Delta^2 y_3 = 0$?

6.7 Consider the knots $P_0(-3,1)$, $P_1(-1,9)$, $P_2(0,1)$, $P_3(3,1)$, $P_4(5,-39)$.

(a) Form a DD **table** for $P_0,\ldots,P_4$ and use it in (b)-(d).

(b) What are the values of $\Delta^1 y_3$, $\Delta^3 y_1$, $\Delta^4 y_0$, $\Delta^2 y_1$, and $\Delta^2 y_2$?

(c) Find tin the order given): $p_{1,2}(x)$, $p_{1,3}(x)$, $p_{0,3}(x)$, $p_{0,4}(x)$.

(d) Find (in the order given): $p_{2,3}(x)$, $p_{1,3}(x)$, $p_{1,4}(x)$, $p_{0,4}(x)$.

6.8 Complete the following DD table up to the Δ^3 column.

P_k	x_k	y_k	Δ^1	Δ^2	Δ^3
P_0	-3				
P_1	-2				
					13
P_2	-1			17	
			1		
P_3	0				
			49		
P_4	3			67	
P_5	4	463			

6.9 For the DD table shown, form [without simplifying, as in (17) in section 6.2D] $p_{0,5}(x)$ by adding nodes in the following orders:

(a) $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ [forward: use only (12a) of Section 6.2B]

(b) $x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, x_0$ [backward: use only (12b) of Section 6.2B]

(c) $x_2, x_1, x_3, x_4, x_5, x_0$

(d) $x_3, x_2, x_1, x_4, x_0, x_5$

Circle the leading coef f icieuts used.

Knot	Node	y	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
P_0	-2	21					
			-14				
P_1	-1	7		4			
			-6		-1		
P_2	0	1		1		0	
			-4		-1		1
P_3	1	-3		-2		5	
			-8		19		
P_4	2	-11		55			
			102				
P_5	3	91					

6.10 For (a)-(d) of Exercise 6.9, form $p_{0,5}(x)$ in nested form, and use it to evaluate $p_{0,5}(-3)$.

6.11 By inspection of the DD table in Exercise 6.9, find the leading coefficient of $p_{1,3}(x)$, $p_{2,5}(x)$, and $p_{0,4}(x)$.

6.12 Form a DD table for the six knots

$P_0(-3,200), P_1(-2,46), P_2(-1,6), P_3(0,2), P_4(2,30), P_5(3,146)$

and use it to determine the degree of $p_{0,5}(x)$.

6.13 For $P_0,\ldots,P_5$ of Exercise 6.12, find $p_{0,5}(x)$ as indicated in (a)-(d) of Exercise 6.9. Use any nested form to evaluate $p_{0,5}(1)$.

6.14 Make a forward difference table for the knots used in Exercise 6.9. Verify that $\Delta^m y_k = h^m\, m!\, \Delta^m y_k$ for $\Delta^3 y_0$, $\Delta^4 y_1$, and $\Delta^2 y_2$.

6.15 (a) Show that the entries of a forward difference table with h-spaced nodes can be used to get the forward recursive formula

$$p_{k,k+m}(x) = p_{k,k+m-1}(x) + (\Delta^m y_k/(m!\,h^m))(x-x_k)(x-x_{k+1})\ldots(x-x_{k+m-1})$$

(b) Deduce the Newton **forward difference formula for- m>= 1:**

$$p_{k,k+m}(x) = y_k + (\Delta y_k/(1!\,h))(x-x_k) + (\Delta^2 y_k/(2!\,h^2))(x-x_k)(x-x_k-h)$$

$$+\ldots+(\Delta^m y_k/(m!\,h^m)) \prod_{j=0}^{m-1} (x-x_k-jh)$$

(c) Conjecture a ***back-ward*** difference formula for $p_{k,k+m}(x)$.

6.16 Make a forward difference table for the following data:

$P_0(1,263), P_1(1.5,230), P_2(2,200), P_3(2.5,174), P_4(3,150)$

Use it to find the Newton forward difference formula for p,,,,(x).

6.17 Using the 5s DD Table of Figure 6.3-2, set up a Worksheet Table as in 6.3-Z for getting $\hat{p}_0(z),\ldots,\hat{p}_5(z)$ when z is (a) 0.1 (b) 0.75

[Note: When z is the midpoint of $[x_k, x_{k+1}]$, take either y_k or y_{k+1} as $\hat{p}_0(z)$.]

6.16 Using the 5s DD Table of Figure 6.3-2, estimate $\Phi(-0.5) \doteq 0.3085$ two ways:

(a) Extrapolate: Find $\hat{p}_m(-0.5)$, $m=0,1,\ldots,5$.

(b) Use the fact that $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$.

Which of parts (a) and (b) is more accurate? Did you expect this? Was the most accurate $\hat{p}_m(z)$ in part (a) the one with for which $\delta_m(z)$ is smallest? Can you suggest a rule of thumb for which $\hat{p}_m(z)$ to use when $\delta_m(z)$ stops shrinking substantially as m is increased?

6.19 Estimate (a) $\Phi(0.52)$, (b) $\Phi(0.22)$, and (c) $\Phi(1.4)$ using the DD table in Figure 6.3-4; compare your accuracy with that obtained in Table 6.3-Z..

Ans. (a) $\hat{p}_5(0.52) \doteq 0.69648$

(b) $\hat{p}_4(0.22) \doteq 0.58675$

(c) $\hat{p}_3(1.4) \doteq 0.92000$

6.20 In (a)-(c), use a 7d DD table based on the 6d values of $\sinh x = 1/2\,[\exp(x)-\exp(-x)]$ shown in the accompanying table.

x	sinh x
0.2	0.201336
0.4	0.410752
0.6	0.636654
0.8	0.888106
1.0	1.175201

(a) With $z = 0.55$, find the best interpolants $\hat{p}_0(z)$, $\hat{p}_1(z), \hat{p}_2(z), \ldots$, stopping when either $\delta_m(z) = 0$ or $\left|\delta_{m+1}(z)\right| > \left|\delta_m(z)\right|$.

(b) Repeat part (a) with $z = 0.66$.

(c) Repeat part (a) with $z = 1.3$ (extrapolation).

(d) Discuss the accuracy of the approximations $\sinh z \approx \hat{p}_m(z)$ obtained in (a)-(c). Did you expect some to be more accurate than others? Explain.