บทที่ 5
การหาโค้งกระชับ
(Curve Fitting)

หน้า

บทที่ 5
การหาโค้งกระชับ
(Curve Fitting)

ปัญหาทางคณิตศาสตร์: เมื่อกำหนดจุด $P_k(x_k, y_k)$ ให้เพียงพอ แล้วหา **สมการแสดงความสัมพันธ์** $y = g(x)$ ที่เกี่ยวข้องกับปริมาณ x และ y ในลักษณะที่กราฟของฟังก์ชัน **go near** (not through) P_k's

ปัญหาข้างต้นนั้นเราเรียกว่า **การหาโค้งกระชับ**

เมื่อเราทราบรูปทั่วไปของ $g(x)$ เช่น

$$g(x) = \alpha + \beta x$$

หรือ $g(x) = \alpha \exp(\beta x)$

หรือ $g(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$

สิ่งที่เราจะทำคือหาค่า α, β, γ (ซึ่งเรียกว่า พารามิเตอร์) ซึ่งจะทำให้ curve $y = g(x)$ fit กับ data อย่างดี

วิธีหนึ่งที่จะใช้แก้ปัญหาข้างต้นคือ **วิธีกำลังสองน้อยที่สุด (least square method)** ซึ่งทำได้โดยการหาผลเฉลยของระบบของ normal equations

ถ้าไม่ทราบรูปของฟังก์ชันซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง y และ x เราจะใช้วิธีเดา $g(x)$'s จนกว่าจะได้ $g(x)$ ที่เหมาะสมหรือพอดี (fit) กับข้อมูลเป็นอย่างดี

5.1 <u>การหาโค้งกระชับสำหรับข้อมูลแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete)</u>

5.1A <u>อภิปรายปัญหา</u>

ข้อมูล m จุด : $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, ..., $P_m(x_m, y_m)$ ...(1)

พลอต m จุด บนแกน-xy ถ้าจำนวนจุด (data) พอเพียงและแม่นยำพอ เราก็สามารถเดารูปร่างของ **ฟังก์ชันเดา (guess function)** $g(x)$ ซึ่ง $g(x) \approx$ **นิพจน์แสดงความสัมพันธ์** ของ y บน x ได้

<u>**ตัวอย่าง**</u> จากจุด 5 จุด

$P_1(1,5.12)$, $P_2(3,3)$, $P_3(6,2.48)$, $P_4(9,2.34)$, $P_5(15,2.18)$ ...(2)

พลอต ทั้ง 5 จุดลงบนแกน-xy ดังแสดงในรูปข้างล่าง จะเห็นว่า เส้นตรงนั้นไม่พอดีกับจุดทั้ง 5 จุด

ฟังก์ชันเดาแบบ linear : $\alpha + \beta x$, α = y-intercept ≈ 4

และ β = slope $\approx -1/6$ ...(3a)

exponential curve นั้น fit ดีขึ้นเล็กน้อย

ฟังก์ชันเดาแบบ exponential : $\alpha \exp(\beta x)$,

α = y-intercept $\approx 4\ 1/2$

และ β = damping factor $\approx -1/10$

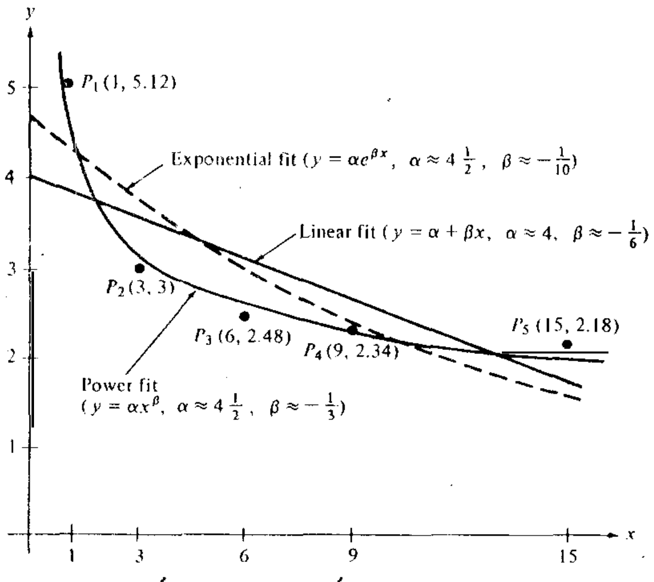
...(3b)

power (of x) curve นั้น fit ดีขึ้นอีกเล็กน้อย

ฟังก์ชันเดาแบบ power (ของ x): αx^{β}, α = y-scale-factor $\approx 4\ 1/2$

และ β = power $\approx -1/3$

...(3c)



รูป 5.1-1 ฟังก์ชันเดา 3 ฟังก์ชันสำหรับ $P_1, P_2, \ldots, P_5$

เมื่อเลือกฟังก์ชันเดาแล้ว เราต้องหาค่าของพารามิเตอร์ และต้องพิจารณาว่าฟังก์ชันนั้น **good fit** แล้วหรือยัง หรือฟังก์ชันใดที่ fit กับข้อมูลได้ดีที่สุด

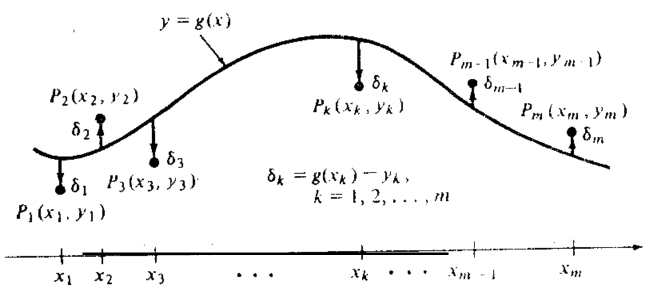
5.1B เกณฑ์กำลังสองของความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด (Least Square Error Criterion)

ปริมาณใด ๆ ที่ใช้วัดว่าฟังก์ชันเดา $g(x)$ นั้น fit กับข้อมูล $P_1,\ldots,P_m$ ได้ดีหรือไม่ ควรจะเกี่ยวข้องกับจำนวนต่าง ๆ คือ

$$\delta_k = g(x_k) - y_k = \text{ส่วนเบี่ยงเบนของ } g(x) \text{ ที่ } x_k \qquad \ldots(4)$$

$$k = 1,\ldots,m$$

ภาพต่อไปนี้แสดง δ_k, $k = 1,\ldots,m$



รูป 5.1-2 การ fit ฟังก์ชัน $g(x)$ กับ $P_1,\ldots,P_m$

เพื่อเป็นตัวอย่าง พิจารณาจำนวนซึ่งไม่เป็นลบ (nonnegative numbers) ต่อไปนี้คือ

$$E_1(g) = |\delta_1| + \ldots + |\delta_m| = \sum_{k=1}^{m} |\delta_k|,$$

ผลบวกสัมบูรณ์ (absolute sum) ของ δ_k's $\qquad \ldots(5a)$

$$E_2(g) = \delta_1^2 + \ldots + \delta_m^2 = \sum_{k=1}^{m} \delta_k^2 ,$$

ผลบวกกำลังสอง (square sum) ของ δ_k's $\qquad \ldots(5b)$

$$E_\infty(g) = \max\{|\delta_1|, \ldots, |\delta_m|\} = \max_{1 \le k \le m} \{|\delta_k|\},$$

ค่าสูงสุด (maximum) ของ $|\delta_k|$'s ...(5c)

ซึ่งจะมีค่าเป็นศูนย์ทุกตัวถ้า $g(x_k) = y_k$ สำหรับทุก x_k และจะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ δ_k's เริ่มมีค่าต่างไปจากศูนย์ ไม่ว่า $g(x_k) > y_k$ หรือ $g(x_k) < y_k$ ดังนั้นค่าเล็กของ $E_1(g)$, $E_2(g)$, $E_\infty(g)$ หรือ $E(g)$ อื่น ๆ แสดงว่า $g(x)$ fit กับข้อมูลอย่างดี

คำถามที่เกิดขึ้นคือเราควรจะใช้ $E(g)$ ตัวใดช่วยในการตัดสินว่า $g(x)$ ใดดีที่สุด

จากวิชาสถิติเราทราบว่า

ถ้าสำหรับแต่ละ k

ตัวแปรเชิงสุ่ม e_k = ความคลาดเคลื่อนของ y_k

มีการแจกแจงแบบปกติ นั่นคือมี **Gaussian** density function ซึ่งเป็นรูประฆัง แล้ว **กำลังสองของความคลาดเคลื่อน (square error)** $E_2(g)$ จะเป็นตัวชี้ที่ดีที่สุด เพื่อเป็นตัวกำหนดว่า $g(x)$ จะประมาณ "ความสัมพันธ์ที่แท้จริงของ y บน x" (actual dependence of y on x) ได้ดีหรือไม่ นอกไปจากนั้นการ minimize $E(g)$ นั้นทำได้ง่ายมากเมื่อ $E(g)$ เป็น $E_2(g)$ ดังนั้นถ้าไม่ระบุเป็นอย่างอื่น $E(g)$ จะหมายถึง $E_2(g)$ และ จะได้ **best fit** เมื่อเรา

$$\boxed{\text{minimize } E(g), \text{ โดยที่ } E(g) = \sum_{k=1}^{m} [g(x_k) - y_k]^2} \quad \ldots(6)$$

นั่นคือ เมื่อเราได้ **กำลังสองของความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด (least square error)**

5.1C โค้งกระชับที่เป็นเส้นตรง (Straight Line)

เพื่อแสดงการประมาณโดยวิธีกำลังสองของความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด เราจะพิจารณาปัญหาสำคัญของการ fit สมการเส้นตรง โดยจะใช้ฟังก์ชันเดา ในรูปพิเศษดังนี้

$$\boxed{L(x) = a + bx \quad (a=\text{y-intercept},\ b=\text{slope})} \qquad \ldots(7)$$

กำหนดข้อมูล m จุดคือ $P_1(x_1,y_1),\ldots,P_m(x_m,y_m)$ เราต้องการหาค่าของพารามิเตอร์ a และ b ซึ่งทำให้กำลังสองของความคลาดเคลื่อนมีค่าต่ำสุด

$$E(L) = \sum_{k=1}^{m} [a + bx_k - y_k]^2 = [a + bx_1 - y_1]^2 + \ldots + [a + bx_m - y_m]^2 \qquad \ldots(8)$$

จากวิชาแคลคูลัส เราทราบว่าสิ่งนี้จะเกิดขึ้นเมื่อ

$$\partial E(L)/\partial a = 0 \text{ และ } \partial E(L)/\partial b = 0 \qquad \ldots(9)$$

เนื่องจากว่า x_k's และ y_k's เป็นค่าคงที่

$$\partial E(L)/\partial a = \sum_{k=1}^{m} 2[a + bx_k - y_k]^1\, \partial[a + bx_k - y_k]/\partial a$$

$$= 2\sum_{k=1}^{m} [a + bx_k - y_k]$$

$$= 2[ma + b(\sum_{k=1}^{m} x_k) - \sum_{k=1}^{m} y_k] \qquad \ldots(10a)$$

$$\partial E(L)/\partial b = \sum_{k=1}^{m} 2[a + bx_k - y_k]x_k$$

$$= 2[a(\sum_{k=1}^{m} x_k) + b(\sum_{k=1}^{m} x_k^2) - \sum_{k=1}^{m} x_k y_k] \qquad \ldots(10b)$$

ให้ (10a) และ (10b) เท่ากับศูนย์ ทำให้ได้ระบบเชิงเส้นขนาด (2 x 2) ซึ่งเรียกว่า **Normal equations**

$$ma + (\Sigma x_k)b = \Sigma y_k \qquad \ldots(11a)$$

$$(\Sigma x_k)a + (\Sigma x_k^2)b = \Sigma x_k y_k \qquad \ldots(11b)$$

เขียน (11a) และ (11b) ในรูปเมตริกซ์ดังนี้

$$\boxed{\begin{bmatrix} m & \Sigma x_k \\ \Sigma x_k & \Sigma x_k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y_k \\ \Sigma x_k y_k \end{bmatrix}} \qquad \ldots(11c)$$

การหาผลเฉลยรูปเดียวของระบบขนาด (2 x 2) (11) คือ $[\hat{a} \;\; \hat{b}]'$ นั้นหาจาก $A^{-1}b$

$$\boxed{\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \frac{1}{m\Sigma x_k^2 - (\Sigma x_k)^2} \begin{bmatrix} \Sigma x_k^2 & -\Sigma x_k \\ -\Sigma x_k & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma y_k \\ \Sigma x_k y_k \end{bmatrix}}$$

$$\ldots(12)$$

เราจะเรียก $\hat{a}$ และ $\hat{b}$ ว่า **least square linear parameters** ดังนั้นฟังก์ชันเคาเชิงเส้นตรง โดยใช้พารามิเตอร์เหล่านี้คือ

$$\hat{L}(x) = \hat{a} + \hat{b}x \qquad \ldots(13)$$

ซึ่งจะถูกเรียกว่า **เส้นกำลังสองน้อยที่สุด** (least square line) หรือ
เส้นของการถดถอย (regression line)

ตัวอย่าง จงหาเส้นกำลังสองน้อยที่สุด สำหรับข้อมูลต่อไปนี้

$P_1(1,5.12)$, $P_2(3,3)$, $P_3(6,2.48)$, $P_4(9,2.34)$, $P_5(15,2.18)$ . ..(14)

Solution $m = 5$

$\Sigma x_k = 34$, $\Sigma x_k^2 = 352$, $\Sigma y_k = 15.12$, และ $\Sigma x_k y_k = 62.76$ . ..(15)

Normal equations (11) คือ

$$\begin{bmatrix} 5 & 34 \\ 34 & 352 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15.12 \\ 82.76 \end{bmatrix} \qquad \ldots(16a)$$

ดังนั้นโดย (12)

$$\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = (1/604) \begin{bmatrix} 352 & -34 \\ -34 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15.12 \\ 82.76 \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} 4.15298 \\ -0.166027 \end{bmatrix} \qquad \ldots(16b)$$

ดังนั้นเส้นกำลังสองน้อยที่สุดที่ต้องการคือ

$$\hat{L}(x) = \hat{a} + \hat{b}x \doteq 4.153 - 0.1660\ x \qquad \ldots(17)$$

ความคลาดเคลื่อนกำลังสองที่ค่อนข้างใหญ่คือ

$$E(\hat{L}) = \sum_{k=1}^{m} [\hat{a} + \hat{b}x_k - y_k]^2 \doteq 2.54 \qquad \ldots(18)$$

ซึ่งค่านี้คือความคลาดเคลื่อนกำลังสองที่เล็กที่สุดที่ *straight-line fit* จะมีค่าได้ แต่เพื่อให้ได้ ***a better fit*** เราต้องลองใช้ฟังก์ชันเดาแบบ ***curved***

5.1D ซับรูทีนในภาษาฟอร์แทรนสำหรับการหาโค้งกระชับที่เป็นเส้นตรง

ซับรูทีน LINFIT คือ FORTRAN subroutine ซึ่งจะให้ค่า slope (SLOPE) y-intercept (YCEPT) และ square error (SQUERR) ของ least square line สำหรับ (X(K),Y(K)), K=1,...,M SLOPE และ YCEPT ถูกคำนวณโดย (12) ของ 5.1C SQUERR ถูกคำนวณโดยสูตร

$$E(\hat{L}) = \sum_k y_k^2 - [\,\text{YCEPT}.\sum_k y_k + \text{SLOPE}.\sum_k x_k y_k\,] \qquad \ldots(19)$$

Σ_k ถูกคำนวณใน extended precision เพื่อหลีกเลี่ยงการขาดนัยสำคัญเมื่อทำการลบใน (19) เมื่อ $E(\hat{L})$ มีขนาดเล็ก

```
      SUBROUTINE LINFIT(M,XDAT,YDAT,SQUERR,YCEPT,SLOPE)
      DIMENSION XDAT(M),YDAT(M)
      DOUBLE PRECISION SIGMAX,SIGMAY,SIGMXY,SIGMX2,SIGMY2
C -------------------------------------------------------- C
C THIS SUBROUTINE FINDS THE LEAST SQUARE LINE Y = SLOPE*X + YCEPT C
C FOR M DATA PAIRS (XDAT(I),YDAT(I)) AND SQUERR, THE SQUARE    C
C ERROR FOR THIS FIT. IT RETURNS SQUERR, YCEPT AND SLOPE.       C
C -------------------------------------- VERSION 1: 5/1/81 -- C
C FORM THE SUMS NEEDED TO SOLVE THE NORMAL EQUATIONS
      SIGMAX = 0.D0
      SIGMAY = 0.D0
      SIGMXY = 0.D0
      SIGMX2 = 0.D0
      SIGMY2 = 0.D0
      DO 100 K=1,M
         SIGMAX = SIGMAX + DBLE(XDAT(K))
         SIGMAY = SIGMAY + DBLE(YDAT(K))
         SIGMXY = SIGMXY + DBLE(XDAT(K))*DBLE(YDAT(K))
         SIGMX2 = SIGMX2 + DBLE(XDAT(K))**2
         SIGMY2 = SIGMY2 + DBLE(YDAT(K))**2
  100 CONTINUE
C
C SOLVE NORMAL EQUATIONS FOR SLOPE AND YCEPT, AND GET SQUERR
      DETER = SNGL(M*SIGMX2 - SIGMAX**2)
      YCEPT = SNGL(SIGMX2*SIGMAY - SIGMAX*SIGMXY)/DETER
      SLOPE = SNGL(M*SIGMXY - SIGMAX*SIGMAY)/DETER
      SQUERR = SNGL(SIGMY2 - YCEPT*SIGMAY - SLOPE*SIGMXY)
C
      RETURN
      END
```

รูป 5.1-3 LINFIT: ซับรูทีนสำหรับการหาโค้งกระชับที่เป็นเส้นตรง

5.2 การหาโค้งกระชับ (ซึ่งมีพารามิเตอร์ 2 ตัว) สำหรับข้อมูลที่เป็น Monotone และ Convex

เราจะจำกัดความสนใจของเรากับข้อมูลที่อาจจะ fit กับฟังก์ชันเดา $g(x)$ ซึ่งมีลักษณะดังนี้

1) Monotone ซึ่งอาจเป็น strictly increasing หรือ strictly decreasing

2) Convex ซึ่งอาจเป็น concave up หรือ concave down

ในตลอดช่วง fitting interval $[x_1, x_m]$ ดังนั้นเราจะพิจารณาเฉพาะข้อมูลที่ไม่มี turning points และไม่มี inflection points ในช่วง $[x_1, x_m]$

ข้อมูลในรูปใน 5.1A เป็น monotone และ convex ทั้งนี้เพราะมีลักษณะเป็น strictly decreasing และ concave up ในช่วง [1,15]

ในทางปฏิบัติข้อมูลมักจะเป็น Monotone และ convex ดังนั้นเราจะใช้ฟังก์ชันเดาดังตัวอย่างต่อไปนี้

$$g(x) = \alpha \exp(\beta x), \quad g(x) = \alpha x^{\beta}, \quad g(x) = \alpha t(\beta/x)$$

ซึ่งมีพารามิเตอร์ 2 ตัว คือ α และ β

5.2A Normal Equations สำหรับฟังก์ชันเดาซึ่งมีพารามิเตอร์ 2 ตัว (Two-Parameter Guess Function)

กำหนด $P_k(x_k, y_k), k=1,\ldots,m$ และฟังก์ชันเดาซึ่งมีพารามิเตอร์ 2 ตัวคือ $g(x)$ เราต้องการที่จะ

$$\text{minimize } E(g) \quad \text{โดยที่} \quad E(g) = \sum_{k=1}^{m} [g(x_k) - y_k]^2 \qquad \ldots(1)$$

ซึ่งทำได้โดยการแก้ **normal equations** (ซึ่งจะไม่เป็นเชิงเส้นใน α และ β)

$$\partial E(g)/\partial\alpha = 0 \text{ และ } \partial E(g)/\partial\beta = 0 \qquad \ldots(2)$$

เพื่อหา least square parameters $\hat{\alpha}$ และ $\hat{\beta}$ ดังนั้น $g(x)$ ที่ใช้พารามิเตอร์เหล่านี้จะถูกเรียกว่า least square $g(x)$ [$\hat{g}(x)$]

ตัวอย่าง จงหา normal equations สำหรับฟังก์ชันเดาแบบ **exponential**

$$g(x) = \alpha \exp(\beta x) \qquad \ldots(3)$$

Solution เราต้องการทำให้กำลังสองของความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด

$$E(g) = \sum_{k=1}^{m} [\alpha \exp(\beta x_k) - y_k]^2$$

$$= [\alpha \exp(\beta x_1) - y_1]^2 + \ldots + [\alpha \exp(\beta x_m) - y_m]^2$$

ทำการแก้สมการ normal equations

$$0 = \partial E(g)/\partial\alpha = \sum_{k=1}^{m} 2[\alpha \exp(\beta x_k) - y_k]^1 \,\partial[\alpha \exp(\beta x_k) - y_k]/\partial\alpha$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{m} [\alpha \exp(\beta x_k) - y_k] \exp(\beta x_k)$$

$$0 = \partial E(g)/\partial\beta = \sum_{k=1}^{m} 2[\alpha \exp(\beta x_k) - y_k]^1 \,\partial[\alpha \exp(\beta x_k) - y_k]/\partial\beta$$

$$= 2\alpha \sum_{k=1}^{m} [\alpha \exp(\beta x_k) - y_k] x_k \exp(\beta x_k)$$

$$\alpha[\exp(2\beta x_1) + \exp(2\beta x_2) + \ldots + \exp(2\beta x_m)]$$

$$-[y_1 \exp(\beta x_1) + y_2 \exp(\beta x_2) + \ldots + y_m \exp(\beta x_m)] = 0 \qquad \ldots(4a)$$

$$\alpha[x_1 \exp(2\beta x_1) + \ldots + x_m \exp(2\beta x_m)]$$

$$-[x_1 y_1 \exp(\beta x_1) + \ldots + x_m y_m \exp(\beta x_m)] = 0 \qquad \ldots(4b)$$

ระบบ (4) ไม่เป็นเชิงเส้นใน α และ β ซึ่งในการหาผลเฉลยของ (4) นั้น ทำได้โดย

1) ขจัด α แล้ว ใช้วิธีเซแคนต์เพื่อหา β

หรือ 2) ใช้ NRSYS โดยตรง

ไม่ว่าเราจะใช้วิธีใด เราอาจหาค่าเดาเริ่มต้น $\alpha \approx 4\ 1/2$ และ $\beta \approx -1/10$ จากการร่าง exponential $g(x)$ อย่างหยาบ ๆ แล้วใช้คอมพิวเตอร์ทำการทำซ้ำต่อไป

สำหรับข้อมูลใน 5.1 นั่นคือ

$$P_1(1,5.12),\ P_2(3,3),\ P_3(6,2.48),\ P_4(9,2.34),\ P_5(15,2.18) \qquad \ldots(5)$$

least square parameters(to 4s) คือ $\hat{\alpha} \doteq 4.677$ และ $\hat{\beta} \doteq -0.07472$ ดังนั้น least square exponential สำหรับข้อมูลเหล่านั้นคือ

$$\hat{g}(x) \doteq 4.677\ \exp(-0.07472\ x)$$

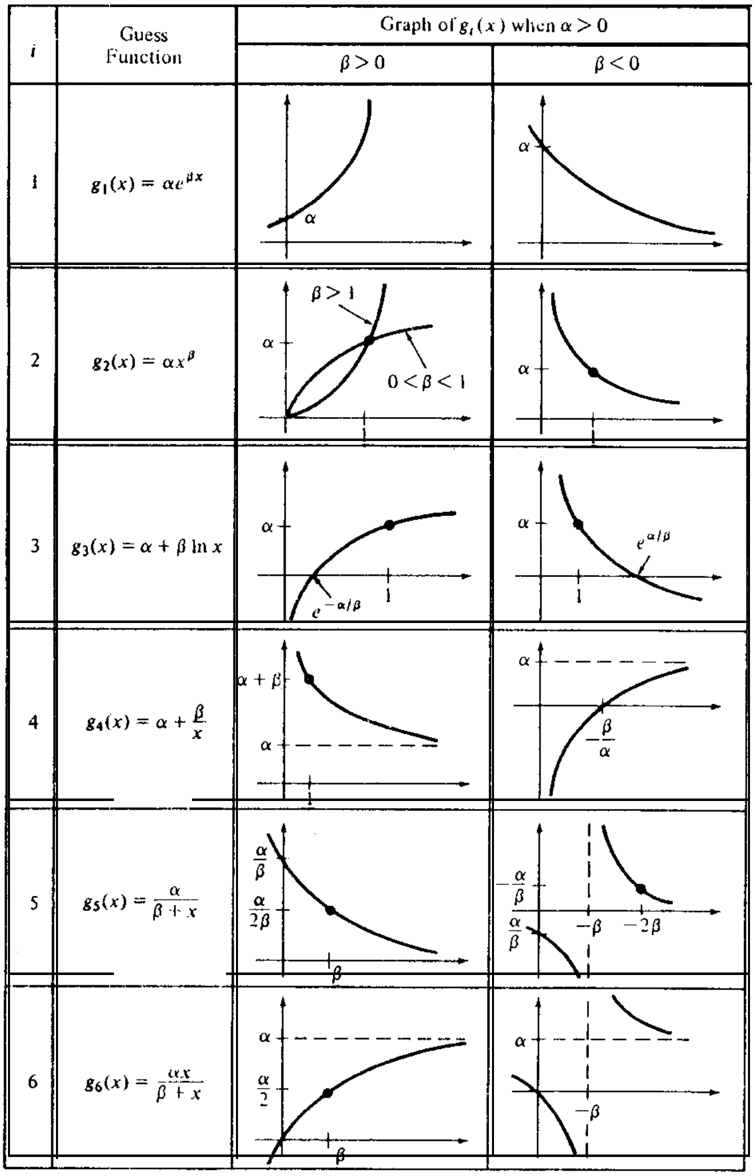
ซึ่ง
$$E(\hat{g}) = \sum_{k=1}^{m} [\hat{g}(x_k) - y_k]^2 \doteq 1.84 \qquad \ldots(6)$$

โปรดสังเกตว่า $E(\hat{g})$ ไม่ได้เล็กกว่า $E(\hat{L}) = 2.54$ มากนัก แสดงว่า least square exponential ไม่ได้ fit กับข้อมูลดีกว่า least square line ซึ่งรูป 5.1-1 ก็ยืนยันสิ่งนี้ด้วย

ในหัวข้อนี้ได้แสดงให้เห็นว่า จะเกิดความยุ่งยากมากเมื่อ normal equations ไม่เป็นเชิงเส้น แต่โชคดีที่เราสามารถหา good fit กับข้อมูลที่เป็น monotone และ convex $P_k(x_k,y_k)$ ได้อย่างรวดเร็วโดยการ fit เส้นตรงกับข้อมูล $Q_k(X_k,Y_k)$ ซึ่งจะได้อธิบายในหัวข้อถัดไป

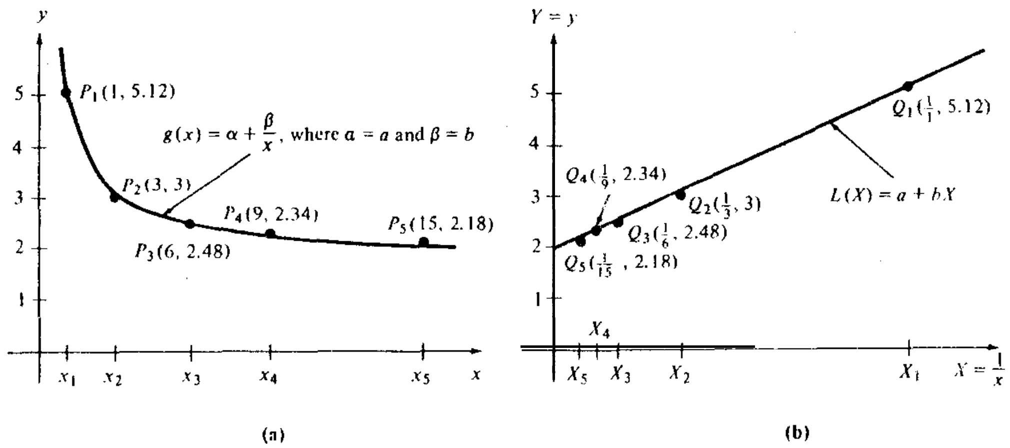
5.2B การปรับให้เป็นเส้นตรง (Linearizing) สำหรับข้อมูลที่เป็น Monotone และ Convex

รูปต่อไปคือกราฟของฟังก์ชันเดา 6 ฟังก์ชัน ซึ่งอาจถูกใช้เพื่อ fit กับข้อมูลที่เป็น monotone และ convex



รูป 5.2-1 รูปแสดงฟังก์ชันเดา 6 ฟังก์ชัน สำหรับข้อมูลที่เป็น Monotone และ convex

ตัวอย่าง สำหรับ $P_1,\ldots,P_5$ ใน (5)



รูป 5.2-2 การปรับให้เป็นเส้นตรงสำหรับ $P_1,\ldots,P_5$ โดยการใช้การเปลี่ยนแปลง

$Y = y,\ X = 1/x$

จากรูปแสดงให้เห็นว่า

1) y-axis ($x=0$) เป็น vertical asymptote

21 line $y = 2$ เป็น horizontal asymptote

31 ไม่มี x- หรือ y-intercepts

จากรูป 5.2-1 curve ที่เป็นไปตามเงื่อนไขทั้ง 3 คือ

$$y = g_4(x) = a\ t\ (\beta/x) \quad (\alpha>0,\ \beta>0) \qquad \ldots(7a)$$

ดังนั้นเราจึงคาดว่าฟังก์ชันเดาแบบ ***hyperbolic*** $\alpha + (\beta/x)$ จะ fit กับ $P_1,\ldots,P_5$ ได้ดีกว่า $a + bx$, $\alpha \exp(\beta x)$ หรือ curve ใด ๆ ในรูป 5.2-1 เพื่อเป็นการยืนยัน โปรดสังเกตว่าเราอาจเขียน (7a) ในรูป linear equation ดังนี้

$$Y = L(X) = a + bX,\ \text{โดยที่ } a = \alpha \text{ และ } b = \beta,\ Y = y \text{ และ } X = 1/x \qquad \ldots(7b)$$

ดังนั้นถ้าเราแปลงจุด $P_k(x_k,y_k)$ ไปเป็นจุด $Q_k(X_k,Y_k)$ โดยที่

$X_k = 1/x_k$ และ $Y_k = y_k$ นั่นคือแปลงไปเป็น

$Q_1(1/1,5.12), Q_2(1/3,3), Q_3(1/6,2.48), Q_4(1/9,2.34),$

$Q_5(1/15,2.18)$ ...(8)

แล้ว $Q_1,\ldots,Q_5$ ดูเป็นเส้นตรงเมื่อพลอตลงบนแกน-XY [ดูรูป 5.2-2(b)]

พิจารณา (7) จากความจริงที่ว่า $Y_k \approx L(X_k)$ แสดงว่า $y_k \approx g_4(x_k) = \alpha+\beta/x_k$ สำหรับ $k = 1,\ldots,5$

โดยการใช้ Natural logarithm กับทั้งสองข้างของสมการ

$y = g_1(x) = \alpha \exp(\beta x)$ และ $y = g_2(x) = \alpha x^{\beta}$

และโดยการจัดการใหม่อย่างตรงไปตรงมากับ $y = g_3(x),\ldots, y = g_6(x)$

$$\boxed{y = g_i(x) \text{ อาจถูกแปลงเป็นรูป linear } Y = L(X) = a + bX} \quad \ldots(9)$$

เพื่อเป็นตัวอย่าง การแปลง $y = g_5(x)$ คือ

$$y = \alpha/(\beta+x) \longleftrightarrow \beta y + xy = \alpha \longleftrightarrow y = (\alpha/\beta)-(1/\beta)xy$$

นิพจน์สุดท้ายอยู่ในรูป $Y = a+bX$ โดยที่ $a = \alpha/\beta$, $b = -1/\beta$, $X = xy$, และ $Y = y$ เราเรียกการแปลง $y = g(x)$ ไปเป็น $Y = L(X)$ ว่า **linearizing** $y = g(x)$

ตาราง 5.2-1 การเปลี่ยนแปลง (Transformation) สำหรับการปรับให้เป็นเส้นตรงของกราฟ 6 รูป ในรูป 5.2-1

i	$y=g_i(x)$	*Linearized Form* $Y=L(X)=a+bX$	*Transformation Relations* $X=$	$Y=$	$a=$	$b=$	$\alpha=$	$\beta=$
1	$y=\alpha e^{\beta x}$	$\ln y=\ln\alpha+\beta x$	x	$\ln y$	$\ln\alpha$	β	e^{a}	b
2	$y=\alpha x^{\beta}$	$\ln y=\ln\alpha+\beta(\ln x)$	$\ln x$	$\ln y$	$\ln\alpha$	β	e^{a}	b
3	$y=\alpha+\beta \ln x$	$y=\alpha+\beta(\ln x)$	$\ln x$	y	α	β	a	b
4	$y=a+\dfrac{\beta}{x}$	$y=\alpha+\beta\left(\dfrac{1}{x}\right)$	$\dfrac{1}{x}$	Y	α	β	a	b
5	$y=\dfrac{\alpha}{\beta+x}$	$y=\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{-1}{\beta}(xy)$	xy	Y	[illegible]	$-\dfrac{1}{\beta}$	$\dfrac{-a}{b}$	$\dfrac{-1}{b}$
6	$y=\dfrac{\alpha x}{\beta+x}$	$y=\alpha+(-\beta)\left(\dfrac{y}{x}\right)$	$\dfrac{y}{x}$	Y	α	$-\beta$	a	$-b$

จากการพิจารณาที่ผ่านมาได้แนะเราว่า เราอาจหลีกเลี่ยงการหาผลเฉลยของ normal equations ซึ่งเป็นระบบไม่เป็นเชิงเส้นโดยการใช้ Linearization Algorithm ต่อไปนี้

Linearization Algorithm

Purpose: To fit a two-parameter g(x) to the monotone, convex data $P_1(x_1, y_1)$, $\ldots$, $P_m(x_m, y_m)$ when g(x) is one of $g_1(x), \ldots, g_6(x)$ in Table 5.2-1.

GET m, **x**, **y** (arrays of x_k, y_k values)

{*linearize*} Form the "linearized points" $Q_k(X_k, Y_k)$ from the given points $P_k(x_k, y_k)$ as indicated in the "$X =$" and "$Y =$" columns of Table 5.2-1.

{get $\hat{a}, \hat{b}$} Get $\hat{a}$ and $\hat{b}$ for the least square line $\hat{L}(X) = \hat{a} + \hat{b}X$ for the linearized points $Q_k(X_k, Y_k)$ using the formula

$$\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \frac{1}{m(\sum X_k^2) - (\sum X_k)^2} \begin{bmatrix} \sum X_k^2 & -\sum X_k \\ -\sum X_k & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum Y_k \\ \sum X_k Y_k \end{bmatrix} \qquad \textbf{(10)}$$

{*get* α, β} Get α and β from $\hat{a}$ and $\hat{b}$ using the last two columns of Table 5.2-1.

OUTPUT (α and β are the desired parameters of g(x).)

(Note: The g(x) obtained by using α and β of the get α, β step will generally nor be the least square g(x), that is, g(x) $\neq$ g(x). However, this g(x) will give good fit to the given data $P_1, \ldots, P_m$ whenever $\hat{L}(X)$ obtained in the ***get*** $\hat{a}, \hat{b}$ step gives good fit to the linearized data $Q_1, \ldots, Q_m$.)

รูป 5.2-3 รหัสเทียมสำหรับขั้นตอนวิธีในการปรับให้เป็นเส้นตรง

(Linearizing Algorithm)

ตัวอย่าง จงใช้ Linearization Algorithm เพื่อ fit

$$(a)\ g_4(x) = \alpha\ t\ (\beta/x) \quad (b)\ g_1(x) = \alpha \exp(\beta x)$$

กับข้อมูล

$$P_1(1,5.12), P_2(3,3), P_3(6,2.48), P_4(9,2.34), P_5(15,2.18) \qquad \ldots(11)$$

Solution

(a) Linearize: สำหรับ $g_4(x)$, $X_k = 1/x_k$ และ $Y_k = y_k$

ดังนั้นจุดที่ถูกแปลงแล้วคือ

$$Q_1(1/1,5.12), Q_2(1/3,3), Q_3(1/6,2.48), Q_4(1/9,2.34),$$

$$Q_5(1/15,2.18) \qquad \ldots(12)$$

Get $\hat{a}$, $\hat{b}$: เพื่อหา $\hat{L}(X) = \hat{a} + \hat{b}X$ สำหรับ $Q_1, \ldots, Q_5$ ใช้ (10)

$$\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \frac{1}{5(9361/8100)-(151/90)^2} \begin{bmatrix} 9361/8100 & -151/90 \\ -151/90 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15.12 \\ 6.9387 \end{bmatrix}$$

$$\doteq \begin{bmatrix} 1.9681 \\ 3.1468 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $\hat{L}(X) \doteq 1.968\ t\ 3.147\ x$

Get 4 , β: สำหรับฟังก์ชันเคานี้ $\alpha = \hat{a}$ และ $\beta = \hat{b}$

$$g_4(x) \doteq 1.968\ t\ (3.147/x) \qquad \ldots(13)$$

(b) Linearize: สำหรับ g,(x), $X_k = x_k$ และ $Y_k = \ln y_k$

ดังนั้นจุดที่ถูกแปลงแล้วคือ

$Q_1(1,1.6332), Q_2(3,1.0986), Q_3(6,0.90826), Q_4(9,0.85015),$

$Q_5(15,0.77832)$ ...(14)

Get $\hat{a}, \hat{b}$: เนื่องจากว่า $X_k = x_k$ เมตริกซ์สัมประสิทธิ์จะเหมือนกับใน (16)ใน 5.1C แต่ $[\Sigma Y_k \quad \Sigma X_k Y_k]' = C5.2695 \quad 29.7201'$

ดังนั้น

$$\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = (1/604)\begin{bmatrix} 352 & -34 \\ -34 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5.2695 \\ 29.720 \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} 1.3980 \\ -0.050601 \end{bmatrix} \quad ...(15)$$

$$\hat{L}(X) \doteq 1.398 - 0.0506 \; X$$

Get α, β: จากตาราง 5.2-l $\alpha = \exp(\hat{a}) \doteq \exp(1.398) \doteq 4.047$ และ

$\beta = \hat{b} \doteq -0.0506$

ดังนั้น $g,(x) \doteq 4.047 \exp(-0.0506\, x)$ ...(16)

ค่าของพารามิเตอร์ของ $g_1(x)$ ใกล้เคียงกับของ least square exponential guess function $\hat{g}_1(x) = 4.677 \exp(-0.07472\, x)$ ซึ่งได้จากตัวอย่างใน 5.2A

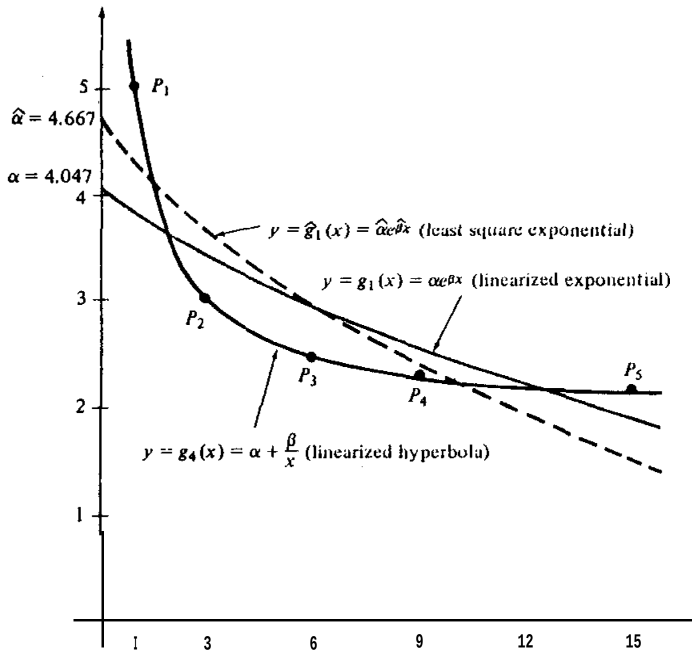
จากรูป 5.2-4 แสดงให้เห็นว่า $g_1(x)$ และ $\hat{g}_1(x)$ fit กับข้อมูลดีพอ ๆ กัน แต่อย่างไรก็ดี

$$E(\hat{g}_1) = 1.64 < 2.24 = \sum_{k=1}^{5} [4.047 \exp(-0.0506\, x_k) - y_k]^2 = E(g_1) \qquad \ldots(17)$$

จาก linearized hyperbola $g_4(x)$ ใน (13) จะสอดคล้องกับ

$$E(g_4) = \sum_{k=1}^{5} [(1.966 + 3.147/x_k) - y_k]^2 \doteq 0.00097 \qquad \ldots(18)$$

ซึ่งแสดงว่า fit ดีกว่าทั้ง $g_1(x)$ และ $\hat{g}_1(x)$ อย่างมาก ความจริงคือ $y_1,\ldots,y_5$ นั้นได้มาจากการดัดแปลง $2 + 3/x_k$ สำหรับ $k=1,\ldots,5$



รูป 5.2-4 รูปของ g_1, $\hat{g}_1$, และ g_4

5.2C โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการหาโค้งกระชับ สำหรับข้อมูลที่เป็น Monotone และ Convex

คอมพิวเตอร์ส่วนมากมักจะมีโปรแกรมเพื่อ fit สมการเส้นตรงซึ่งใช้ Linearization Algorithm ในการ fit monotone, convex curves ทั้ง 6 ในรูป 5.2-1

ต่อไปนี้คือตัวอย่างการใช้โปรแกรมในลักษณะดังกล่าว ข้อมูลคือ $P_1,\ldots,P_5$ จากรูป 5.2-5 ในคอลัมน์ SQUARE ERROR นั้นคือค่าของ $E(\hat{L})$ [แทนที่จะเป็น $E(g_i)$] ซึ่งถูกใช้เป็นตัวชี้ว่า $g_i(x)$ นั้น fit กับข้อมูลดีเพียงใด

```
RUN CURFIT


INPUT NUMBER OF DATA PAIRS
5

INPUT X[I] , Y[I] (I=1,N)
1, 5.12
fc7--
6, 2.48
9, 2.34
15, 2.18


CURRENT LISTING OF DATA PAIRS:
 I          X[I]            Y[I]
 1          1.0000          5.1200
 2          3.0000          3.0000
 3          6.0000          2.4800
 4          9.0000          2.3400
 5          15.000          2.1800


INPUT:              0     IF DATA OK
                   -K     TO REMOVE (X[K],Y[K])
                    K     TO REPLACE (X[K],Y[K])

0
  CURVE TYPE               SQUARE ERROR       A               B
  1. Y = A + B*X             2.54009       0.41530E+01    -0.16603E+00
  2. Y = A*EXP(B*X)          0.16632       0.40471E+01    -0.50603E-01
  3. Y = A*(X**B)            0.03069       0.47037E+01    -0.31713E+00
  4. Y = A + B*LN(X)         0.68486       0.47119E+01    -0.10826E+01
  5. Y = A + B/X             0.011097      0.19681E+01     0.31468E+01
  6. Y = A/(B + X)           2.54757       0.52580E+02     0.11914E+02
  7. Y = A*X/(B + X)         0.06007       0.22322E+01    -0.57059E+00


        EQUATION #5. Y = A + B/X       HAS THE BEST LINEARIZED FIT

INPUT EQUATION # (1-7) FOR DETAILS OF FIT (TYPE "0" FOR NO DETAILS).
5

DETAILS: YCALC IS OBTAINED USING CURVE #5. Y = A + B/X
       XDATA            YDATA            YCALC           % DIFF.
       1.0000           5.1200           5.1149            0.1
       3.0000           3.0000           3.0170           -0.6
       6.0000           2.4800           2.4925           -0.5
       9.0000           2.3400           2.3177            1.0
       15.0000          2.1800           2.1779            0.1
```

รูป 5.2-5 การวิ่งโปรแกรม CURFIT

5.3 การหาโค้งกระชับซึ่งเป็นเชิงเส้นในพารามิเตอร์ n ตัว ; Polynomial Fitting

ถ้าข้อมูลที่มีอยู่มีลักษณะที่มี turning points หรือ inflection points แล้วฟังก์ชันเดาซึ่งมีพารามิเตอร์มากกว่า 2 ตัว จึงจะ fit กับข้อมูลอย่างดี

เราพิจารณาฟังก์ชันเดาซึ่งมีพารามิเตอร์ n ตัว: g(x)'s
โดยที่ g(x) เป็น linear combination ของฟังก์ชันซึ่งระบุไว้ n ฟังก์ชัน $\phi_j(x)$ นั่นคือ

$$g(x) = \gamma_1 \Phi_1(x) + \gamma_2 \Phi_2(x) + \ldots + \gamma_n \Phi_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \Phi_j(x) \qquad \ldots(1)$$

ฟังก์ชันเดาในรูปนี้เป็น linear function ของพารามิเตอร์ $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ และ normal equations ก็จะเป็นระบบเชิงเส้นด้วย ดังนั้นเราสามารถหาผลเฉลยได้โดยวิธีในบทที่ 3

กรณีพิเศษกรณีหนึ่งที่สำคัญคือ การใช้ $\phi_j(x) = x^{j-1}$ ซึ่งทำให้ $g(x)$ กลายเป็น (n-1)st-degree polynomial นั่นเอง

$$g_n(x) = \gamma_1 + \gamma_2 x + \gamma_3 x^2 + \ldots + \gamma_n x^{n-1} = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j x^{j-1} \qquad \ldots(2)$$

5.3A Normal Equations สำหรับ $g(x) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \Phi_j(x)$

สำหรับข้อมูล m จุด : $P_k(x_k, y_k)$, $k=1,\ldots,m$

Normal equations คือระบบเชิงเส้นซึ่งอยู่ในรูปเมตริกซ์ต่อไปนี้

$$A_{n\times n} \gamma_{n\times 1} = b_{n\times 1} \qquad \ldots(3)$$

$$
\begin{bmatrix}
\Sigma\, \Phi_1(x_k)\Phi_1(x_k) & \dots & \Sigma\, \Phi_1(x_k)\Phi_n(x_k) \\
\Sigma\, \Phi_2(x_k)\Phi_1(x_k) & \dots & \Sigma\, \Phi_2(x_k)\Phi_n(x_k) \\
 & \dots & \\
\Sigma\, \Phi_n(x_k)\Phi_1(x_k) & \dots & \Sigma\, \Phi_n(x_k)\Phi_n(x_k)
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \Sigma\, \Phi_1(x_k)y_k \\ \Sigma\, \Phi_2(x_k)y_k \\ \dots \\ \Sigma\, \Phi_n(x_k)y_k \end{bmatrix}
$$

Least square parameter vector $\hat{\gamma} = A^{-1}b = [\hat{\gamma}_1 \;\; \hat{\gamma}_2 \dots \hat{\gamma}_n]'$

ดังนั้น $$\hat{g}(x) = \sum_{j=1}^{n} \hat{\gamma}_j \, \Phi_j(x) \qquad \dots(4)$$

5.3B <u>Normal Equations สำหรับ</u> $g(x) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \, x^{j-1}$

จากข้อมูล m จุด

$P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, ..., $P_m(x_m,y_m)$ ...(5)

และ n ที่ได้กำหนดค่าไว้ก่อนแล้ว (n = จำนวนพารามิเตอร์ นั่นคือ $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$)

เราต้องการหา least square parameters $\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \dots, \hat{\gamma}_n$ ซึ่ง

ทำให้กำลังสองของความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด $E(g) = \sum_{k=1}^{m} (g(x_k) - y_k)^2$

เราใช้วิธีการทางแคลคูลัส แล้วหาผลเฉลยของ normal equations ซึ่งประกอบด้วย n สมการซึ่งได้จาก (6)

$$\boxed{\partial E(g)/\partial \gamma_i = 0 \;,\; i = 1,\dots,n} \qquad \dots(6)$$

ถ้า $g_n(x) = \gamma_1 + \gamma_2 x + \gamma_3 x^2 + \ldots + \gamma_n x^{n-1} = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j x^{j-1}$

แล้ว normal equations ในรูปเมตริกซ์คือ $A_{n\times n}\,\hat{\gamma}_{n\times 1} = b_{n\times 1}$

$$\begin{bmatrix} m & \Sigma x_k & \Sigma x_k^2 & \ldots & \Sigma x_k^{n-1} \\ \Sigma x_k & \Sigma x_k^2 & \Sigma x_k^3 & \ldots & \Sigma x_k^{n} \\ \Sigma x_k^2 & \Sigma x_k^3 & \Sigma x_k^4 & \ldots & \Sigma x_k^{n+1} \\ & & \cdots & & \\ \Sigma x_k^{n-1} & \Sigma x_k^{n} & \Sigma x_k^{n+1} & \ldots & \Sigma x_k^{2n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\gamma}_1 \\ \hat{\gamma}_2 \\ \hat{\gamma}_3 \\ \vdots \\ \hat{\gamma}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y_k \\ \Sigma x_k y_k \\ \Sigma x_k^2 y_k \\ \vdots \\ \Sigma x_k^{n-1} y_k \end{bmatrix} \quad \ldots(7)$$

หาผลเฉลยของ (7); $\hat{\gamma} = A^{-1} b$

ตัวอย่าง จงหา least square polynomials $\hat{g}_2(x)$, $\hat{g}_3(x)$, $\hat{g}_4(x)$

สำหรับ $P_1(1,6), P_2(2,1), P_3(4,2), P_4(5,3), P_5(10,4), P_6(16,5)$ ...(8)

Solution สำหรับ $g_2(x) = \gamma_1 + \gamma_2 x$ ($n = 2$) และข้อมูลใน (8)

จาก (7) ได้

$$\begin{bmatrix} m & \Sigma x_k \\ \Sigma x_k & \Sigma x_k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\gamma}_1 \\ \hat{\gamma}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y_k \\ \Sigma x_k y_k \end{bmatrix}$$

นั่นคือ

$$\begin{bmatrix} 6 & 38 \\ 38 & 402 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\gamma}_1 \\ \hat{\gamma}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 151 \end{bmatrix} \quad \ldots(9)$$

เมื่อหาผลเฉลยของ (9) คือ $\hat{ซ}_1$ และ $\hat{ซ}_2$ ดังนั้น $\hat{g}_2(x) = \hat{ซ}_1 + \hat{ซ}_2 x$

สำหรับ $g_3(x) = ซ_1$ t $ซ_2$ x t $ซ_3$ x^2 (n = 3) และข้อมูลใน (8)
จาก (7)ได้

$$\begin{bmatrix} 6 & 38 & 402 \\ 35 & 402 & 5294 \\ 402 & 5294 & 76434 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{ซ}_1 \\ \hat{ซ}_2 \\ \hat{ซ}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 151 \\ 1797 \end{bmatrix} \qquad \ldots(10)$$

เมื่อหาผลเฉลยของ (10) คือ $\hat{ซ}_1$, $\hat{ซ}_2$ และ $\hat{ซ}_3$
ดังนั้น $\hat{g}_3(x) = \hat{ซ}_1 + \hat{ซ}_2 x + \hat{ซ}_3 x^2$

สำหรับ $g_4(x) = ซ_1 + ซ_2 x + ซ_3 x^2 + ซ_4 x^3$ (n = 4) และข้อมูลใน(8)
จาก (7)ได้

$$\begin{bmatrix} 6 & 36 & 402 & 5294 \\ 36 & 402 & 5294 & 76434 \\ 402 & 5294 & 76434 & 1152758 \\ 5294 & 76434 & 1152756 & 17797002 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{ซ}_1 \\ \hat{ซ}_2 \\ \hat{ซ}_3 \\ \hat{ซ}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 151 \\ 1797 \\ 24997 \end{bmatrix} \qquad \ldots(11)$$

เมื่อหาผลเฉลยของ (11) คือ $\hat{ซ}_1$, $\hat{ซ}_2$, $\hat{ซ}_3$, $\hat{ซ}_4$
ดังนั้น $\hat{g}_4(x) = \hat{ซ}_1 + \hat{ซ}_2 x + \hat{ซ}_3 x^2 + \hat{ซ}_4 x^3$

แบบฝึกหัดบทที่ 5

5.1 Find "a, $\hat{b}$ and $E(\hat{L})$ for $\hat{L}(x) = \hat{a}$ t $\hat{b}x$, the least square straight line for the data shown in (a) and (b).

(a)

x	0	1	2	3
y	3.0	1.2	-0.3	-1.5

(b)

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
Y	-5	-3	-2	0	3

5.2 Find the normal equations for the following guess functions. Are they linear7

(a) $g(x) = \alpha x^{\beta}$

[Note: $dx^{\beta}/d\beta = x^{\beta} \ln x$ l

(b) $g(x) = \alpha x/(\beta+x)$

(c) $g(x) = \alpha \exp(-x)$ t $\beta \exp(-4x)$

(d) $g(x) = \alpha$ t $\beta \sin(\gamma x)$

[Note: The answer is a 3 x 3 systems.1

5.3 (a) Deteraine graphically from Figure 5.2-1 which of $g(x) = \alpha \exp(\beta x)$ or $h(x) = \alpha x^{\beta}$ seems best suited to fit the following data:

$P_1(1,2.3), P_2(2,6.1), P_3(3,10.7), P_4(4,16.0), P_5(5,21.9)$, $P_6(6,28.3)$

(b)*Use the Linearization Algorithm to fit $g(x)$ and $h(x)$ to the data, and find $E(g)$ and $E(h)$. Do your results confirm your answer to part (a)7

Note: $E(g) = E[g(x)] = \sum_{k=1}^{m} [g(x_k)-y_k]^2$

$E(h) = E[h(x)] = \sum_{k=1}^{m} [h(x_k)-y_k]^2$

Ans. $g(x) \doteq 1.9942 \exp(0.47962\ x)$

$h(x) \doteq 2.3032\ x^{1.3995}$

(c) Find $E(\hat{L})$ for the linearized data [i.e., $Q_k(X_k,Y_k)$] for $g(x)$ and for $h(x)$. Do your results confirm your answer to part (a)?

Note: $E(\hat{L}) = \sum_{k=1}^{m} [\hat{a}+ \hat{b}\ X_k - Y_k]^2$

5.4 Do (a)-(c) of the Exercise 5.3 for $g(x) = \alpha/(\beta+x)$, $h(x) = \alpha\ x/(\beta+x)$, and $P_1(0.1,0.04)$, $P_2(1,0.51)$, $P_3(2,1.2)$, $P_4(3,2.2)$, $P_5(4,3.8)$, $P_6(6,13.2)$.

Ans. (b) $g(x) \doteq -4.5772/(-6.2710+x)$;

$h(x) \doteq -3.1629\ x/(-7.4254 + x)$

5.5 Do (a)-(c) of Exercise 5.3 for $g(x) = \alpha+\beta \ln x$, $h(x) = \alpha+(\beta/x)$, and $P_1(1,0.2)$, $P_2(2,1.8)$, $P_3(3,2.6)$, $P_4(5,3.8)$, $P_5(7,4.5)$, $P_6(10,5.3)$.

Ans. (b) $g(x) \doteq 0.21887 + 2.2075 \ln x$;

$h(x) \doteq 5.0403 - 5.2902 / x$

5.6 Do (a)-(c) of Exercise 5.3 for $g(x) = \alpha/(\beta+x)$, $h(x) = \alpha \exp(\beta x)$, and $P_1(1,0.9)$, $P_2(2,2.2)$, $P_3(3,5.4)$, $P_4(4,13.2)$, $P_5(5,32.6)$, $P_6(6,77.4)$.

Ans. (b) $g(x) \doteq -17.499/(-6.1252+x)$;

$h(x) \doteq 0.36979 \exp(0.89295\ x)$