การประเมินผลหลังการเรียน

ตัวอย่างข้อสอบ ชุดที่ 1

ข้อสอบชุดนี้มี 5 ข้อ ให้ทำทุกข้อ 100 คะแนน

ข้อ 1.1 จากจุดที่กำหนดให้ k จุด คือ $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$,..., $P_k(x_k,y_k)$ จงอธิบายเรื่องการปรับโค้ง (Curve fitting) และการอินเทอร์โพเลท (Interpolating) ให้พอเห็นความแตกต่างของวิธีทั้งสอง รวมถึงการประยุกต์ใช้ด้วย

(6 คะแนน)

ข้อ 1.2 กำหนด nonlinear system ให้ดังนี้

$$2 \ln y - x = 0$$

$$xy - x - 1 = 0$$

จงอธิบายการใช้วิธีการทางกราฟฟิค เพื่อประมาณรากของ system นี้ (ไม่ต้องลงมือ plot จุด) (4 คะแนน)

ข้อ 1.3 กำหนด (3 x 3) linear systen (10 คะแนน)

(E_1) $x_1 + 3x_3 = 2$

(E_2) $5x_1 + x_2 + 2x_3 = -5$

(E_3) $x_1 + 6x_2 + 2x_3 = -11$

ถ้าเขียนระบบข้างต้นในรูปเมตริกซ์ คือ AX = b จงบอกสมาชิกของ A, x และ b

จงหาผลเฉลยของระบบที่กำหนดให้ โดยใช้วิธี Gauss-Seidel และใช้วิธีที่จะทำให้วิธี Gauss-Seidel ลู่เข้า จงทำ 2 iterations (คำนวนโดยใช้ 3s)

Solve E_3 for x : $x^{(new)}$

then E_2 for x : $x^{(new)}$ =

then E_1 for x___ : $x^{(new)}$ =

1st iteration:

เริ่มต้นด้วย $x = x_0 = [0 \quad 0 \quad 0]'$

ดังนั้น $x^{(new)}$ =

$x^{(new)}$ =

$x^{(new)}$ =

$x' = x_1' =$

2nd iteration:

$x^{(new)}$ =

$x^{(new)}$ =

$x^{(new)}$ =

$x' = x_2' =$

ข้อ 2.1 จงหา $\hat{A}$, A และ det A = |A| โดยกำหนด $\hat{L}\backslash\hat{U}$ (Partial pivoting) ใน LU-factorization ให้ดังนี้คือ

$$\hat{L}\backslash\hat{U} = \left[\begin{array}{c|cc} 2 & -1/2 & 3/2 \\ \hline 0 & 2 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 5/4 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} (\rho_1 \rightleftarrows \rho_3) \\ (\rho_2 \rightleftarrows \rho_3) \end{array}$$

(ต้องแสดงการหาให้ชัดเจน) (6 คะแนน)

ข้อ 2.2 ในการหาผลเฉลยของสมการเมตริกซ์ AX = B

จาก LU-decomposition สำหรับ A ถ้า $\hat{A} = \hat{L}\hat{U}$

แล้วเราจะหา $\hat{B}$ จาก B โดยการทำ row interchanges ตามวิธีที่จะหา $\hat{A}$ จาก A

แล้ว $\hat{A}X = \hat{B}$ เป็น equivalent system

เราจะหา $\bar{X}$ ได้จาก Forback matrix $[\hat{L}\backslash\hat{U} : \hat{B} : \bar{C} : \bar{X}]$

จาก $[\hat{L} : \hat{B}]$ หา $\bar{C}$ ทีละแถว โดยใช้ Forward substitution

$$row_i\bar{C} = (1/\hat{l}_{ii})\{row_i\hat{B} - [\leftarrow]_{\hat{L}}[\uparrow]_{\bar{C}}\}, \quad i=1,\ldots,n$$

จาก $[\hat{U} : \bar{C}]$ หา $\bar{X}$ ทีละแถว โดยใช้ Backward substitution

$$row_i\bar{X} = row_i\bar{C} - [\leftarrow]_{\hat{U}}[\downarrow]_{\bar{X}}, \quad i=n,n-1,\ldots,1$$

จงหา A^{-1} โดยใช้ $\hat{L}\backslash\hat{U}$ ที่กำหนดให้ในข้อ 2.1 และจงบอกวิธีตรวจสอบว่า A^{-1} ที่หาได้นั้นถูกต้อง

Hint: หา $\bar{C}$ และ $\bar{X}$ สำหรับ Forback matrix $[\hat{L}\backslash\hat{U} : \hat{I}_3 : \bar{C} : \bar{X}]$

$I_3 = \begin{bmatrix} \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \end{bmatrix}$, $\hat{I}_3 = \begin{bmatrix} \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \end{bmatrix}$

Forback matrix คือ

o	2	-1/2	3/2	:		:	
0	0	2	1/2	:	:	:	
-1		1/2	0 5/4	:			

$row_1\bar{C}$ = ____________________

____

$row_2\bar{C}$ = ____________________

____

$row_3\bar{C}$ = ____________________

____

$row_3\bar{X}$ = ____________________

____

$row_2\bar{X}$ = ____________________

____

$row_1\bar{X}$ = ____________________

____

ดังนั้น

$A^{-1} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \end{bmatrix}$

วิธีตรวจสอบว่า A^{-1} นี้ถูกต้องคือ

____

____

____

(14 คะแนน)

ข้อ 3.1 การประมาณค่า $f'(x)$ 2 วิธีคือ

โดยใช้ $\Delta f(x)/h = [f(x+h)-f(x)]/h$ ...(1)

และ โดยใช้ Central difference approximation คือ

$\delta f(x)/2h = [f(x+h) - f(x-h)]/2h$ ...(2)

โดยทั่ว ๆ ไปแล้ววิธีใดที่จะประมาณ ได้แม่นยำกว่า ______________________

ถ้า $f(x) = \ln x$

$f'(x)$ = ____________________ และ $f'(1.2)$ = ____________________

จงหาค่าประมาณ $f'(x)$ โดยใช้สูตร (1) และ (2) โดยที่ $f(x) = \ln x$ ณ $x = 1.2$ โดยใช้ $h = 0.1$ และค่า $\ln x$ จากตารางที่กำหนดให้ แทนค่าในสูตรให้ชัดเจน ก่อนหาค่าสำเร็จ จงหา actual error ของการใช้สูตรทั้ง 2 ด้วย

x	f(x) = ln x
1.0	0.00000
1.1	0.09531
1.2	0.16232
1.3	0.26236
1.4	0.33647
1.5	0.40547
1.6	0.47000

____

____

____

____

____

____

ข้อ 3.2 จาก ln x , x = 1.0(0.1)1.6 ในข้อ 3.1

จงหาค่า definite integrals ต่อไปนี้

(1) $\int_{1}^{1.2} \ln x \, dx$ และ (2) $\int_{1}^{1.5} \ln x \, dx$ (6 คะแนน)

ข้อ 3.3 กำหนดสูตรต่าง ๆ ดังนี้

สูตร (1) Simpson's l/u-Rule:

$$\int_{x_j}^{x_{j+2}} f(x)dx \approx (h/3)[f(x_j) \text{ t } 4f(x_{j+1}) \text{ t } f(x_{j+2})]$$

สูตร (2) Simpson's 3/8-Rule:

$$\int_{x_j}^{x_{j+3}} f(x)dx \approx (3h/8)[f(x_j) \text{ t } 3f(x_{j+1}) \text{ t } 3f(x_{j+2}) \text{ t } f(x_{j+3})$$

โดยที่

$$x_j \overbrace{\qquad}^{h} x_{j+1} \overbrace{\qquad}^{h} x_{j+2} \overbrace{\qquad}^{h} x_{j+3} \overbrace{\qquad}^{h} x_{j+4}$$

1) จงใช้สูตร (1) เพื่อประมาณค่า $\int_{1}^{1.2} \ln x \, dx$ โดยกำหนด h = .1

2) จงใช้สูตร (1) และ (2) เพื่อประมาณค่า $\int_{1}^{1.5} \ln x \, dx$ โดยกำหนด h = .1

จงอภิปรายเปรียบเทียบคำตอบ 1)-2) กับค่าในข้อ 3.2 ด้วย (หา actual errors ประกอบการเปรียบเทียบด้วย) (8 คะแนน)

ข้อ 4 จงเติมตาราง Divided Difference สำหรับ 6 knots ให้สมบูรณ์

$P_0(-2,21), P_1(-1,7), P_2(0,1), P_3(1,-3), P_4(2,-11)$ และ $P_5(3,91)$

Knot	Node	$\Delta^0 = y$	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
P_0	-2	21					
			-14				
P_1	-1	7		4			
			-6		-1		
P_2	0	1		1		0	
			-4		____		
P_3	1	-3		-2		____	
			-8		____		
P_4	2	-11		55			
			102				
P_5	3	91					

4.1) จาก DD table ข้างต้น

leading coefficient ของ $p_{0,5}(x)$ คือ ____________________

ดังนั้น $p_{0,5}(x)$ คือ polynomial ที่มี degree เท่ากับ ____________________

และ leading coefficient ของ $p_{0,4}(x)$ คือ ____________________

ดังนั้น $p_{0,4}(x)$ คือ polynomial ที่มี degree เท่ากับ ____________________

และ leading coefficient ของ $p_{1,5}(x)$ คือ ____________________

ดังนั้น $p_{1,5}(x)$ คือ polynomial ที่มี degree เท่ากับ ____________________

4.2) จงเขียน $p_{0,5}(x)$ โดยการเพิ่ม nodes ตามลำดับดังนี้ x,, x,, x_1, x_4, x_0, x_5

จงวงรอบค่าใน DD table ซึ่งจะใช้ในการหา $p_{0,5}(x)$ (ให้วงรอบด้วยปากกา)

$p_{0,5}(x)$ = ____

____

(ไม่ต้องกระจายเทอม)

และ $p_{0,5}(x)$ ใน nested form คือ

$p_{0,5}(x)$ = ____________________

4.3) ในการหา $p_{0,5}(x)$ ลำดับการเพิ่ม nodes ตามวิธี Neuton backward

คือ ____________________

จงวงรอบค่าใน DD table ซึ่งจะใช้หา $p_{0,5}(x)$ ตามวิธีนี้

(โดยวงรอบด้วยดินสอ แต่ไม่ต้องเขียน $p_{0,5}(x)$)

4.4) จงหา $p_{0,4}(x)$ โดยกระจายเทอมด้วย

$p_{0,4}(x)$ = ____________________

____

____

4.5) จงหา $p_{1,5}(x)$ โดยกระจายเทอมด้วย

ลำดับการเพิ่ม nodes (ซึ่งจะทำให้การกระจายเทอมง่าย) คือ ____________________

$p_{1,5}(x)$ = ____________________

____

____

ข้อ 5.1 ในการใช้ Linearization Algorithm (10 คะแนน)

เพื่อ fit $y = \alpha \exp(\beta x)$

กับข้อมูลต่อไปนี้ $P_1(1,5.12), P_2(3,3), P_3(6,2.48), P_4(9,2.34), P_5(15,2.18)$

Linearized form คือ $Y = a + bX$

จงแสดงการวิธีการหา Transformation relations

____

____

____

ดังนั้น Transformation relations คือ X_i = ______________ , $i=1,\ldots,5$

Y_i = ______________ , $i=1,\ldots,5$

a = ______________

b = ______________

α = ______________

β = ______________

Transformed points คือ $Q_i(X_i,Y_i)$, $i=1,\ldots,5$ นั่นคือ Q_1(______________

____

จาก $Q_i(X_i,Y_i)$, $i=1,\ldots,5$ กำหนด $\Sigma X_i = 34$

$\Sigma Y_i = 5.2695$

$\Sigma X_i^2 = 352$

$\Sigma X_iY_i = 29.72$

โดยที่ $\Sigma = \sum_{i=1}^{5}$

จงเขียน normal equations ในรูปเมตริกซ์ สำหรับหา $\hat{a}$ และ $\hat{b}$

____

____

____

จาก normal equations จงบอกวิธีหา $\hat{a}$ และ $\hat{b}$ (ไม่ต้องหาคำตอบ)

____

____

____

ข้อ 5.2 ถ้า $p(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + \ldots + a_nx + a_{n+1}$, $(a_1 \neq 0)$

และ $q(x) = x^2 - rx - s$

$p(x) = q(x)\ Q(x) + R(x)$

$= (x^2-rx-s)(b_1x^{n-2}+b_2x^{n-3}+ \ldots +b_{n-2}x+b_{n-1})+b_n(x-r)+b_{n+1}$

ค่าของ b_i's ซึ่งเป็นตัวกำหนด $Q(x)$ และ $R(x)$ หาได้อย่าง synthetically ดังแสดงในตารางข้างล่างนี้

	a_1	a_2	a_3	a_4	---	a_{n-1}	a_n	a_{n+1}
x r ⟩		$+b_1r$	$+b_2r$	$+b_3r$	...	$+b_{n-2}r$	$+b_{n-1}r$	$+b_nr$
x s ⟩			$+b_1s$	$+b_2s$	...	$+b_{n-3}s$	$+b_{n-2}s$	$+b_{n-1}s$
	b_1	b_2	b_3	b_4	...	b_{n-1}		b_{n+1}

5.2.1 $p(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 2$ คือ polynomial ที่มี

degree = ________

5.2.2 ดังนั้น $p(x)$ จะมีรากจำนวน = ________ ราก

5.2.3 ถ้ากำหนด $q(x) = x^2 - 2x + 2$ จงหา $Q(x)$ โดยวิธี Synthetic Division ที่กำหนดให้ จากนั้นจงหารากทั้งหมดของ $p(x)$

(10 คะแนน)

เฉลยข้อสอบ ชุดที่ 1

ข้อสอบชุดนี้มี 5 ข้อ ให้ทำทุกข้อ 100 คะแนน

ข้อ 1.1 จากจุดที่กำหนดให้ k จุด คือ $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$,..., $P_k(x_k,y_k)$ จงอธิบายเรื่องการปรับโค้ง (Curve fitting) และการอินเทอร์โพเลท (Interpolating) ให้พอเห็นความแตกต่างของวิธีทั้งสอง รวมถึงการประยุกต์ใช้ด้วย

การปรับโค้ง คือการหาฟังก์ชันของเส้นที่อยู่ใกล้จุดทั้ง k จุดมากที่สุด ทั้งนี้โดยอาจเดารูปของฟังก์ชันตั้งแต่ 1 รูปขึ้นไป แล้วหามาตรการในการเลือกว่าฟังก์ชันใดเหมาะสมกับจุดทั้ง k จุดมากที่สุด (best fit) และจะต้องหาค่าประมาณของพารามิเตอร์สำหรับฟังก์ชันที่เลือกไว้

ส่วน การอินเทอร์โพเลท คือการหาฟังก์ชันของเส้นที่ผ่านจุดทั้ง k จุด ซึ่งฟังก์ชันจะอยู่ในรูปของโพลีโนเมียลฟังก์ชันที่มี degree <= (k-1)

การประยุกต์ใช้: ทั้งสองวิธีใช้ในการทำนายค่าของ y เมื่อระบุค่า x โดยที่ $x \neq x_i$, $i=1,\ldots,k$

ข้อ 1.2 กำหนด nonlinear system ให้ดังนี้

$$2 \ln y - x = 0$$

$$xy - x - 1 = 0$$

จงอธิบายการใช้วิธีการทางกราฟฟิค เพื่อประมาณรากของ system นี้ (ไม่ต้องลงมือ plot จุด) (4 คะแนน)

$$2 \ln y - x = 0$$

$$\ln y = x/2$$

$$y = \exp(x/2) \quad \ldots(1)$$

$$xy - x - 1 = 0$$

$$y = (1 + x)/x \quad \ldots(2)$$

จุดตัดของ (1) และ (2) จะเป็นค่าประมาณของรากของระบบนี้

ข้อ 1.3 กำหนด (3 x 3) linear system (10 คะแนน)

$(E_1)\quad x_1 \qquad\quad t\ 3x_3 = 2$

$(E_2)\ 5x,\ t\ x_2\ t\ 2x_3 = -5$

$(E_3)\quad x_1 + 6x_2 + 2x_3 = -11$

ถ้าเขียนระบบข้างต้นในรูปเมตริกซ์ คือ **Ax** = **b** จงบอกสมาชิกของ **A, x** และ **b**

$$A = \left|\begin{array}{ccc} 10 & & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 2 \end{array}\right|,\ \mathbf{x} = \left|\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\right|,\ \mathbf{b} = \left|\begin{array}{c} 2 \\ -5 \\ -11 \end{array}\right|$$

จงหาผลเฉลยของระบบที่กำหนดให้ โดยใช้วิธี Gauss-Seidel และใช้วิธีที่จะทำให้วิธี Gauss-Seidel ลู่เข้า **จงทำ 2 iterations (คำนวนโดยใช้ 3s)**

Solve E_3 for x_2 : $x_2^{(new)} = (-1/6)(11\ t\ x_1\ t\ 2x_3)$

then E_2 for x_1 : $x_1^{(new)} = (-1/5)(5\ t\ x_2\ t\ 2x_3)$

then E_1 for x_3 : $x_3^{(new)} = (2 - x_1)/3$

1st iteration:

เริ่มต้นด้วย $x = \mathbf{x_0}$ = co 0 01'

ดังนั้น $x_2^{(new)} = (-1/6)(11\ t\ 0\ t\ 0) = -1.83$

$x_1^{(new)} = (-1/5)(5\ t\ (-1.83)) = -3.17/5 = -0.634$

$x_3^{(new)} = (2\ t\ 0.634)/3 = 0.878$

$x' = x_1' =$ C-0.634 -1.83 0.8781

2nd iteration:

$x_2^{new)} = (-1/6)[11 - 0.634\ t\ 2(0.878)] = -12.122/6 = -2.02$

$x_1^{new)} = (-1/5)[5 +$ C-2.02) $t\ 2(0.878)] = -4.736/5 = -0.947$

$x_3^{new} = (1/3)(2\ t\ 0.947) = 0.982$

$x' = x_2' =$ c-o.947 -2.02 0.9821

ข้อ 2.1 จงหา $\hat{A}$, A และ det A = $|A|$ โดยกำหนด $\hat{L}\backslash\hat{U}$ (Partial pivoting) ใน LIJ-factorization ให้ดังนี้คือ

$$\hat{L}\backslash\hat{U} = \begin{bmatrix} 2 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 5/4 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} (\rho_1 \rightleftarrows \rho_3) \\ (\rho_2 \rightleftarrows \rho_3) \end{array}$$

(ต้องแสดงการหาให้ชัดเจน) (6 คะแนน)

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\rho_2 \rightleftarrows \rho_3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\rho_1 \rightleftarrows \rho_3} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} = A$$

$$|A| = (-1)^2(2)(2)(5/4) = 5$$

ข้อ 2.2 ในการหาผลเฉลยของสมการเมตริกซ์ Ax = B

จาก LU-decomposition สำหรับ A ถ้า $\hat{A} = \hat{L}\hat{U}$

แล้วเราจะหา $\hat{B}$ จาก B โดยการทำ row interchanges ตามวิธีที่จะหา $\hat{A}$ จาก A

แล้ว $\hat{A}X = \hat{B}$ เป็น equivalent system

เราจะหา $\bar{X}$ ได้จาก Forback matrix $[\hat{L}\backslash\hat{U} : \hat{B} : \bar{C} : X]$

จาก $[\hat{L} : \hat{B}]$ หา $\bar{C}$ ทีละแถว โดยใช้ Forward substitution

$$\text{row}_i\bar{C} = (1/\hat{l}_{ii})\{\text{row}_i\hat{B} - [\leftarrow]_{\hat{L}}[\uparrow]_{\bar{C}}\}, \quad i=1,\dots,n$$

จาก $[\hat{U} : \bar{C}]$ หา $\bar{X}$ ทีละแถว โดยใช้ Backward substitution

$$\text{row}_i\bar{X} = \text{row}_i\bar{C} - [\leftarrow]_{\hat{U}}[\downarrow]_{\bar{X}}, \quad i=n,n-1,\dots,1$$

จงหา A^{-1} โดยใช้ $\hat{L}\backslash\hat{U}$ ที่กำหนดให้ในข้อ 2.1 และจงบอกวิธีตรวจสอบว่า A^{-1} ที่หาได้นั้นถูกต้อง

Hint: หา $\bar{C}$ และ $\bar{X}$ สำหรับ Forback matrix $[\hat{L}\backslash\hat{U} : \hat{I}_3 : \bar{C} : \bar{X}]$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{I}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Forback matrix คือ

$$\left[\begin{array}{ccccccccccccccc} 0 & 2 & -1/2 & 312: & 0 & 0 & 1 : & 0 & 0 & 1/2 & : & 3/5 & -7/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 2 & 11'2 : & 1 & 0 & 0 : & 1/2 & 0 & 0 & : & 3/5 & -2/5 & -1/5 \\ -1 & 1/2 & 0 & 51'4 : & 0 & 1 & 0 : & -1/5 & 4/5 & 2/5 & : & -1/5 & 4/5 & 2/5 \end{array}\right]$$

$row_1\bar{C}$ = 1/(2)[0 0 11 = CO 0 1/2]

$row_2\bar{C}$ = 1/(2){[1 0 0 1 - [0][0 1/2]} = [1/2 0 01

$row_3\bar{C}$ = [1/(5/4)]{[0 1 0] - C - 1 1/2] $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

= C - 1 / 5 4/5 2/5]

$row_3\bar{X}$ = row,? = C-1/5 4/5 2/5]

$row_2\bar{X}$ = [1/2 0 01 - (1/2)[-1/5 4/5 2/5] = [3/5 -2/5 -1/5]

$row_1\bar{X}$ = CO 0 1/2] - C-1/2 3/2] $\begin{bmatrix} 3/5 & -2/5 & -1/5 \\ -1/5 & 4/5 & 2/5 \end{bmatrix}$

= [3/5 -7/5 -1/5]

ดังนั้น

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} 3/5 & -7/5 & -1/5 \\ 3/5 & -2/5 & -1/5 \\ -1/5 & 4/5 & 2/5 \end{vmatrix}$$

วิธีตรวจสอบว่า A-= นี้ถูกต้องคือ

AA-* = I

(14 คะแนน)

ข้อ 3.1 การประมาณค่า $f'(x)$ 2 วิธีคือ

โดยใช้ $\Delta f(x)/h = [f(x+h)-f(x)]/h$ ... (1)

และ โดยใช้ Central difference approximation คือ

$\delta f(x)/2h = [f(x+h) - f(x-h)]/2h$ ... (2)

โดยทั่ว ๆ ไปแล้ววิธีใดที่จะประมาณ ได้แม่นยำกว่า วิธีที่ (2)

ถ้า $f(x) = \ln x$

$f'(x) = 1/x$ และ $f'(1.2) = 1/1.2 = 0.8333333$

จงหาค่าประมาณ $f'(x)$ โดยใช้สูตร (1) และ (2) โดยที่ $f(x) = \ln x$ N $x = 1.2$ โดยใช้ $h = 0.1$ และค่า ln x จากตารางที่กำหนดให้ แทนค่าในสูตรให้ชัดเจน ก่อนหาค่าสำเร็จ จงหา actual error ของการใช้สูตรทั้ง 2 ด้วย

X	f(x) = ln x
1.0	0.00000
1.1	0.09531
1.2	0.18232
1.3	0.26236
1.4	0.33647
1.5	0.40547
1.6	0.47000

(6 คะแนน)

(1) $f'(1.2) \approx$ Cf11.3) - f(1.2)]/0.1 = (0.26236 - 0.18232)/0.1

= 0.8004

actual error = 0.8333333 - 0.8004 = 00329333

(2) $f'(1.2) \approx$ Cf(1.3) - f(1.1)]/[2(0.1)]

= (0.26236 - 0.09531)/0.2 = 0.83525

actual error = 0.8333333 - 0.83525 = -0.0019167

ข้อ 3.2 จาก ln x , x = 1.0(0.1)1.6 ในข้อ 3.1

จงหาค่า definite integrals ต่อไปนี้

(1) $\int_{1}^{1.2} \ln x \, dx$ และ (2) $\int_{1}^{1.5} \ln x \, dx$ (6 คะแนน)

$\int \ln x \, dx = x \ln x - x$

(1) $\int_{1}^{1.2} \ln x \, dx = (x \ln x - x)\Big|_{1}^{1.2} = (1.2\ln 1.2 - 1.2) - (1\ln 1 - 1)$

$= 1.2(0.18232) - 1.2 \text{ t } 1 = 0.018784$

(2) $\int_{1}^{1.5} \ln x \, dx = (1.5\ln 1.5 - 1.5) - (1\ln 1 - 1)$

$= 1.5(0.40547) - 1.5 \text{ t } 1 = 0.108205$

ข้อ 3.3 กำหนดสูตรต่าง ๆ ดังนี้

สูตร (1) Simpson's 1/3-Rule:

$$\int_{x_j}^{x_{j+2}} f(x)dx \approx (h/3)[f(x_j) \text{ t } 4f(x_{j+1}) \text{ t } f(x_{j+2})]$$

สูตร (2) Simpson's 3/8-Rule:

$$\int_{x_j}^{x_{j+3}} f(x)dx \approx (3h/8)[f(x_j) \text{ t } 3f(x_{j+1}) \text{ t } 3f(x_{j+2}) \text{ t } f(x_{j+3})]$$

โดยที่ $\underbrace{x_j \quad x_{j+1}}_{h} \underbrace{\quad x_{j+2}}_{h} \underbrace{\quad x_{j+3}}_{h} \underbrace{\quad x_{j+4}}_{h}$

1) จงใช้สูตร (1) เพื่อประมาณค่า $\int_1^{1.2} \ln x \, dx$ โดยกำหนด $h = .1$

2) จงใช้สูตร (1) และ (2) เพื่อประมาณค่า $\int_1^{1.5} \ln x \, dx$ โดยกำหนด $h = .1$

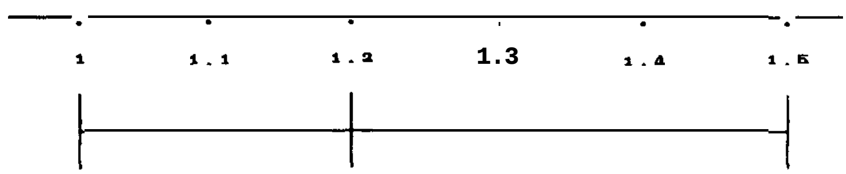
จงอภิปรายเปรียบเทียบค่าตอบ 1)-2) กับค่าในข้อ 3.2 ด้วย (หา actual errors ประกอบการเปรียบเทียบด้วย) (8 คะแนน)

1) $h = 0.1$ จาก (1)

$$\begin{aligned}\int_1^{1.2} \ln x \, dx &\approx (0.1/3)[f(1) + 4f(1.1) + f(1.2)] \\ &= (0.1/3)[0 + 4\ln 1.1 + \ln 1.21 \\ &= (0.1/3)[4(0.09531) + (0.18232)] \\ &= (0.1/3)(0.56356) \\ &= 0.0187853\end{aligned}$$

actual error = 0.016784 - 0.0187853 = -0.0000013

2)



$$\int_1^{1.5} \ln x \, dx = \int_1^{1.2} \ln x \, dx + \int_{1.2}^{1.5} \ln x \, dx$$

$$\begin{aligned}\int_{1.2}^{1.5} \ln x \, dx &\approx [3(0.1)/8][f(1.2) + 3f(1.3) + 3f(1.4) + f(1.51 \\ &= (0.3/8)[\ln 1.2 + 3\ln 1.3 + 3\ln 1.4 + \ln 1.51 \\ &= (0.3/8)(2.38428) \\ &= 0.0894105\end{aligned}$$

$$\int_1^{1.5} \ln x \, dx \approx 0.0187853 + 0.0894105 = 0.1081958$$

actual error = 0.108205 - 0.1081958 = 0.0000092

ข้อ 4 จงเติมตาราง Divided Difference สำหรับ 6 knots ให้สมบูรณ์

$P_0(-2,21), P_1(-1,7), P_2(0,1), P_3(1,-3), P_4(2,-11)$ และ $P_5(3,91)$

Knot	Node	$\Delta^0=y$	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
P_0	-2	21					
			-14				
P_1	-1	7		4			
			-6		-1		
P_2	0	1		0 1		0 0	
			-4		-1		1
P_3	1	-3		-2		5	
			-a		19:		
P_4	2	-11	1e	55		4.3	
P_5	3	91				4.2	

4.1) จาก DD table ข้างต้น

leading coefficient ของ $p_{0,5}(x)$ คือ 1

ดังนั้น $p_{0,5}(x)$ คือ polynomial ที่มี degree เท่ากับ 5

และ leading coefficient ของ $p_{0,4}(x)$ คือ o

ดังนั้น $p_{0,4}(x)$ คือ polynomial ที่มี degree เท่ากับ 3

และ leading coefficient ของ $p_{1,5}(x)$ คือ 5

ดังนั้น $p_{1,5}(x)$ คือ polynomial ที่มี degree เท่ากับ 4

4.2) จงเขียน $p_{0,5}(x)$ โดยการเพิ่ม nodes ตามลำดับดังนี้ x_3, x_2, x_1, x_4, x_0, x_5

จงวงรอบค่าใน DD table ซึ่งจะใช้ในการหา $p_{0,5}(x)$ (ให้วงรอบด้วยปากกา)

$p_{0,5}(x) = -3 - 4(x-1) + 1(x-1)(x-0) - 1(x-1)(x-0)(x+1)$

$+ 0(x-1)(x-0)(x+1)(x-2) + 1(x-1)(x-0)(x+1)(x-2)(x+2)$

(ไม่ต้องกระจายเทอม)

และ $p_{0.5}(x)$ ใน nested form คือ

$$p_{0.5}(x) = [[[[1(x+2)](x-2)-1](x+1)+1]x-4](x-1)-3$$

4.3) ในการหา $p_{0.5}(x)$ ลำดับการเพิ่ม nodes ตามวิธี Newton backward

คือ x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, x_0

จงวงรอบค่าใน DD table ซึ่งจะใช้หา $p_{0.5}(x)$ ตามวิธีนี้

(โดยวงรอบด้วยดินสอ แต่ไม่ต้องเขียน $p_{0.5}(x)$)

4.4) จงหา $p_{0.4}(x)$ โดยกระจายเทอมด้วย

$$\begin{aligned} p_{0.4}(x) &= -3 - 4(x-1) + 1(x-1)x - 1(x-1)x(x+1) \\ &= -3 - 4x + 4 + x^2 - x - x^3 + x \\ &= -x^3 + x^2 - 4x + 1 \end{aligned}$$

4.5) จงหา $p_{1.5}(x)$ โดยกระจายเทอมด้วย

ลำดับการเพิ่ม nodes (ซึ่งจะทำให้การกระจายเทอมง่าย) คือ

x_2, x_3, x_1, x_4, x_5

$$\begin{aligned} p_{1.5}(x) &= 1 - 4(x-0) + 1(x-0)(x-1) - 1(x-0)(x-1)(x+1) \\ &\quad + 5(x-0)(x-1)(x+1)(x-2) \\ &= 5x^4 - 11x^3 - 4x^2 + 6x + 1 \end{aligned}$$

ข้อ 5.1 ในการใช้ Linearization Algorithm (10 คะแนน)

เพื่อ fit $y = \alpha \exp(\beta x)$

กับข้อมูลต่อไปนี้ $P_1(1,5.12), P_2(3,3), P_3(6,2.48), P_4(9,2.34), P_5(15,2.18)$

Linearized form คือ $Y = a + bX$

จงแสดงการวิธีการหา Transformation relations

$$y = \alpha \exp(\beta x)$$

$$\ln y = \ln \alpha + \beta x$$

ดังนั้น Transformation relations คือ $X_i = x_i$, $i=1,\dots,5$

$Y_i = \ln y_i$, $i=1,\dots,5$

$a = \ln \alpha$, $b = \beta$

$\alpha = \exp(a)$, $\beta = b$

Transformed points คือ $Q_i(X_i,Y_i)$, $i=1,\dots,5$ นั่นคือ $Q_1(1, \ln 5.12)$

$Q_2(3, \ln 3), \dots, Q_5(15, \ln 2.18)$

จาก $Q_i(X_i,Y_i)$, $i=1,\dots,5$ กำหนด $\Sigma X_i = 34$

$\Sigma Y_i = 5.2695$

$\Sigma X_i^2 = 352$

$\Sigma X_i Y_i = 29.72$

โดยที่ $\Sigma = \sum_{i=1}^{5}$

จงเขียน normal equations ในรูปเมตริกซ์ สำหรับหา $\hat{a}$ และ $\hat{b}$

$$\begin{bmatrix} m & \Sigma X \\ \Sigma X & \Sigma X^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma Y \\ \Sigma XY \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 5 & 34 \\ 34 & 352 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.2695 \\ 29.72 \end{bmatrix}$$

จาก normal equations จงบอกวิธีหา $\hat{a}$ และ $\hat{b}$ (ไม่ต้องหาคำตอบ)

$$\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 34 \\ 34 & 352 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5.2695 \\ 29.72 \end{bmatrix}$$

ข้อ 5.2 ถ้า $p(x) = a_1x^n \; t \; a_2x^{n-1} \; t \; . \; . \; . \; t \; a_nx \; t \; a_{n+1}$, (a, ≠ 0)

และ $q(x) = x^2 - rx - s$

$p(x) = q(x)\,Q(x) \; t \; R(x)$

$= (x^2-rx-s)(b_1x^{n-2}+b_2x^{n-3}+ \; . \; . \; . \; +b_{n-2}x+b_{n-1})+b_n(x-r)+b_{n+1}$

ค่าของ b_i's ซึ่งเป็นตัวกำหนด Q(x) และ R(x) หาได้อย่าง synthetically ดังแสดงในตารางข้างล่างนี้

	a_1	a_2	a_3	a_4	. . .	a_{n-1}	a_n	a_{n+1}
x r >		$+b_1r$	$+b_2r$	$+b_3r$	. . .	$+b_{n-2}r$	$tb_{n-1}r$	tb_nr
x s >			$+b_1s$	$+b_2s$	. . .	$+b_{n-3}s$	$+b_{n-2}s$	$t\,b_{n-1}s$
	b_1	b_2	b_3	b_4	. . .	b_{n-1}	b_n	b_{n+1}

5.1 $p(x) = x^4 - x^3 \; t \; x^2 \; t \; 2$ คือ polynomial ที่มี degree = 4

5.2 ดังนั้น p(x) จะมีรากจำนวน = 4 ราก

5.3 ถ้ากำหนด $q(x) = x^2 - 2x \; t \; 2$ จงหา Q(x) โดยวิธี Synthetic Division ที่กำหนดให้ จากนั้นจงหารากทั้งหมดของ p(x)

a_i's	1	-1	1	0	2
2x (2)	2		2		0
x (-2)	-2		-2		-2
	1	1	1	0	0

ดังนั้น $Q(x) = x^2 + x + 1$

$p(x) = q(x)Q(x) = (x^2 - 2x \; t \; 2)(x^2 \; t \; x \; t \; 1)$

$p(x) = 0$ ---> $q(x) = 0$

$(x^2 - 2x \; t \; 2) = 0$

$x = [2 + \sqrt{-4}]/2, c2 - \sqrt{-4}]/2$

$= 1 \; t \; i, \; 1 - i$

และ $Q(x) = 0$

$(x^2 \; t \; x \; t \; 1) = 0$

$x = C\text{-}l \; t \; i \; 3]/2,$

$C\text{-}l - i\sqrt{3}]/2$

(10 คะแนน)

ตัวอย่างข้อสอบชุดที่ 2

ข้อสอบชุดนี้มี 5 ข้อ 100 คะแนน

ข้อ 1.1 **จง** solve system **ที่กำหนดให้ โดยใช้** Gauss-Seidel iteration **และใช้วิธีที่จะทำให้** Gauss-Seidel iteration converges **โดยให้เริ่มต้น** $x_0 = 0$ **จงทำ** 1 iterations **(คำนวนโดยใช้ 3s)**

$(E_1)\quad x_1 - x_2 + 3x_4 = 1$

$(E_2)\quad 5x_1 + x_3 = 3$

$(E_3)\quad 4x_2 + x_3 - x_4 = -1$

$(E_4)\quad 3x_3 + x_4 = -4$

1st iteration:

แก้สมการ E_1 **เพื่อหา** $x\_$: $x\_^{(new)}$ = ____________________

แล้วแก้ E_2 **เพื่อหา** $x\_$: $x\_^{(new)}$ = ____________________

แล้วแก้ E_3 **เพื่อหา** x : $x\_^{(new)}$ = ____________________

และ E_4 **เพื่อหา** $x\_$: $x\_^{(new)}$ = ____________________

เริ่มต้นด้วย $x = x_0$ = co 0 0 01'

ดังนั้น $x\_^{(new)}$ = ____________________

$x\_^{(new)}$ = ____________________

$x\_^{(new)}$ = ____________________

$x\_^{(new)}$ ____________________

$x' = x_1'$ = ____________________

จงเขียน 4 simultaneous equations ในรูป matrix แล้วเมตริกซ์สัมประสิทธิ์เป็น strictly dominant matrix หรือไม่ เพราะเหตุใด จงแสดงการตรวจสอบด้วย

____

____

____

____________________ (10 คะแนน)

1.2 จงหา $\hat{A}$, A และ det A = $|A|$ (ต้องแสดงการหาให้ชัดเจน)

โดยกำหนด $\hat{L}\backslash\hat{U}$ (Basic pivoting) ใน LU-factorization ให้ดังนี้คือ

(ไม่ต้องแสดงการหา $\hat{L}\backslash\hat{U}$)

$$\hat{L}\backslash\hat{U} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 1 & -1 \\ -5 & -4 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ (\rho_2 \rightleftarrows \rho_3) \\ (\rho_3 \rightleftarrows \rho_4) \\ \\ \end{matrix}$$

(10 คะแนน)

ข้อ 2.1 ระบบต่อไปนี้เป็นระบบเชิงเส้น (linear system) หรือไม่ เพราะเหตุใด

$$\left|\begin{array}{r} x^2 - 3\sin y - z^2 = 0 \\ z - 2xy + 1 = 0 \\ e^{x+y} + z^2 = 0 \end{array}\right| \quad \text{หรือ} \quad \left|\begin{array}{l} f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \\ f_3(x) = 0 \end{array}\right| \quad \text{โดยที่ } x = \left|\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right|$$

ถ้า $J = f'(x)$ คือ Jacobian matrix

จงหา

$$J = \left|\begin{array}{ccc} \partial f_1(x)/\partial x & \partial f_1(x)/\partial y & \partial f_1(x)/\partial z \\ \partial f_2(x)/\partial x & \partial f_2(x)/\partial y & \partial f_2(x)/\partial z \\ \partial f_3(x)/\partial x & \partial f_3(x)/\partial y & \partial f_3(x)/\partial z \end{array}\right|$$

จงใช้ NRSYS โดยใช้ $x_o = 0$ เพื่อหา $x_1 = x_o + dx$

(นั่นคือหาผลเฉลยของสมการ $f'(x_o)dx = -f(x_o)$ เพื่อหา dx

โดยการแก้สมการตามปกติ)

(10 คะแนน)

ข้อ 2.2 การประมาณค่า $f'(x)$ 2 วิธีคือ

โดยใช้ $\Delta f(x)/h = [f(x+h)-f(x)]/h$ ...(1)

และ โดยใช้ Central difference approximation คือ

$\delta f(x)/2h = [f(x+h) - f(x-h)]/2h$ ...(2)

โดยทั่ว ๆ ไปแล้ววิธีใดที่จะประมาณ ได้แม่นยำกว่า ____________________

ถ้า $f(x) = e^x$

$f'(x) =$ ____________________ และ $f'(1) =$ ____________________

จงหาค่าประมาณ $f'(x)$ โดยใช้สูตร (1) และ (2) โดยที่ $f(x) = e^x$ ณ $x = 1$ โดยใช้ $h = 0.02$ และค่า e^x จากตารางที่กำหนดให้ แทนค่าในสูตรให้ชัดเจน ก่อนหาค่าสำเร็จ จงหา actual error ของการใช้สูตรทั้ง 2 แล้วสรุปว่าสูตรใดประมาณได้แม่นยำกว่า

x	$f(x) = e^x$	x	$f(x) = e^x$
0.0	1.000000	0.92	2.509290
0.1	1.105171	0.94	2.559981
0.2	1.221403	0.96	2.611696
0.3	1.349859	0.98	2.664456
0.4	1.491825	1.00	2.718282
0.5	1.648721	1.02	2.773194
0.6	1.822119	1.04	2.829216
0.7	2.013753	1.06	2.886370
0.8	2.225541	1.08	2.944679
0.9	2.459603	1.10	3.004165

(10 คะแนน)

ข้อ 3. จาก e^x , $x = 0.0(0.1)0.9(0.02)1.10$ ในข้อ 2.2

3.1 จงหาค่า definite integrals ต่อไปนี้

(1) $\int_{.1}^{.3} e^x \, dx$ และ (2) $\int_{0}^{.5} e^x \, dx$ (4 คะแนน)

ข้อ 3.2 กำหนดสูตรต่าง ๆ ดังนี้

สูตร (1) Midpoint Rule: $\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\, f[(a+b)/2]$

สูตร (2) Trapezoidal Rule: $\int_a^b f(x)dx \approx [(b-a)/2][f(a)+f(b)]$

สูตร (3) Simpson's 1/3-Rule:

$$\int_{x_j}^{x_{j+2}} f(x)dx \approx (h/3)[f(x_j) + 4f(x_{j+1}) + f(x_{j+2})]$$

สูตร (4) Simpson's 3/8-Rule:

$$\int_{x_j}^{x_{j+3}} f(x)dx \approx (3h/8)[f(x_j) + 3f(x_{j+1}) + 3f(x_{j+2}) + f(x_{j+3})]$$

โดยที่ $\underset{x_j}{\bullet}\overbrace{\qquad\quad}^{h}\underset{x_{j+1}}{\bullet}\overbrace{\qquad\quad}^{h}\underset{x_{j+2}}{\bullet}\overbrace{\qquad\quad}^{h}\underset{x_{j+3}}{\bullet}\overbrace{\qquad\quad}^{h}\underset{x_{j+4}}{\bullet}$

1) จงใช้สูตร (1) เพื่อประมาณค่า $\int_{.1}^{.3} e^x \, dx$ (2 คะแนน)

2) จงใช้สูตร (2) เพื่อประมาณค่า $\int_{1}^{.3} e^x \, dx$ (ให้ใช้ Composite Trapezoidal rule) (6 คะแนน)

3) จงใช้สูตร (3) และ (4) เพื่อประมาณค่า $\int_{0}^{.5} e^x \, dx$ (6 คะแนน)

(แทนค่าในสูตรให้ชัดเจนก่อนหาค่าสำเร็จ)

จงอภิปรายเปรียบเทียบค่าตอบ 1)-3) กับค่าในข้อ 3.1 ด้วย (หา actual errors ประกอบการเปรียบเทียบด้วย) (2 คะแนน)

ข้อ 4. กำหนด Lagrange interpolation Algorithm ให้ดังนี้

Algorithm: Lagrange Interpolation

Purpose: To evaluate the Lagrange form of $p_{k,k+m}(z)$, that is,

$$p_{k,k+m}(z) = y_k L_k(z) + y_{k+1} L_{k+1}(z) + \cdots + y_{k+m} L_{k+m}(z)$$

where $L_j(x) = \prod_{i \neq j} (x - x_i)/(x_j - x_i)$, the jth Lagrange polynomial for the $m + 1$ knots $P_k(x_k, y_k), \ldots, P_{k+m}(x_{k+m}, y_{k+m})$, and z is a specified point near the interpolating nodes $x_k, \ldots, x_{k+m}$.

```
GET n, x, y,  {x = [x0 x1 ... xn], y = [y0 y1 ... yn]}
    k, m,     {starting index, degree of interpolating polynomial}
    z         {point at which interpolated value is desired}

PofZ ← 0
DO FOR j = k TO k + m    {Form Termj = yj * Lj(x).}
  BEGIN
  Termj ← yj
  DO FOR i = k TO k + m
     IF i ≠ j THEN Termj ← Termj*(z − xi)/(xj − xi)
  PofZ ← PofZ + Termj
  END
```

OUTPUT (The interpolated value $p_{k,k+m}(z)$ is $PofZ$.)

กำหนดจุด 5 จุดคือ $P_0(-2,-8)$, $P_1(0,0)$, $P_2(1,\ )$, $P_3(4,64)$, $P_4(5,125)$

ข้อ 4.1 จงหา $p_{1,3}(z)$ (กระจายเทอมด้วย)

$p_{1,3}(z)$ = ______________________________

____

____

____

$p_{1,3}(2)$ = ______________________________

____

(4 คะแนน)

ข้อ 4.2 จากจุดที่กำหนดให้ในข้อ4.1 และส่วนหนึ่งของ Divided Difference Table

(16 คะแนน)

1) **จงเติม** Divided Difference Table **ให้สมบูรณ์**

Knot	Node	$\Delta^0 = y$	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4
P_0	-2	-8				
			______			
P_1	0	0		______		
			______		______	
P_2	1	1		______		______
			21		1	
P_3	4	64		**10**		
			6			
P_4	5	125				

2) จาก DD table ให้แสดงวิธีหา $p_{1,3}(x)$ ให้ชัดเจน

(เทียบคำตอบกับวิธีใน 4.1 ด้วย)

จงหา $p_{1,3}(x)$ ตามวิธี **forward recursive form** (กระจายเทอมด้วย)

$p_{1,3}(x)$ = ____

____

____

____

3) **จงหา** $p_{1,3}(x)$ **ตามวิธี backward recursive form** (กระจายเทอมด้วย)

$p_{1,3}(x)$ = ____

____

____

____

4) วิธีการในข้อ 4.1 เรียกว่า ______________________________

วิธีการในข้อ 4.2 นี้เรียกว่า ______________________________

5) จงหา $p_{0,3}(x)$ โดยหาจาก $p_{1,3}(x)$ ซึ่งหาไว้แล้วใน 2)

$p_{0,3}(x)$ = ______________________________

____

6) จาก DD table แสดงว่าจากจุดทั้ง 5 จุด (คือ P_0 ถึง P_4) degree สูงสุดของ interpolating polynomial [$p_{0,4}(x)$] คือ ______ เพราะ ______

7) จงหา $p_{0,4}(x)$ ตามวิธี **forward recursive formula** (กระจายเทอมด้วย)

$p_{0.4}(x)$ = ______________________________

____

____

____

ข้อ 5.1 ในการใช้ Linearization Algorithm เพื่อ fit $y = \alpha x/(\beta + x)$ กับจุดจำนวน k จุด Linearized form คือ $Y = a + bX$

Transformation relations คือ X_i = ____________ , $i=1,\ldots,k$

Y_i = ____________ , $i=1,\ldots,k$

a = ____________

b = ____________

α = ____________

β = ____________

ถ้าจุดทั้ง 5 คือจุด $P_1(1,5.12), P_2(3,3), P_3(6,2.48), P_4(9,2.34), P_5(15,2.18)$

Transformed points คือ ______________________________

____

(6 คะแนน)

ข้อ 5.2 ในการ fit, polynomial function degree 3 คือ

$$g_4(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3$$

สำหรับ k จุด คือ $P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2), \ldots, P_k(x_k,y_k)$

จงเขียน normal equations สำหรับหา least square estimates

ของ α_1 , α_2 , α_3 และ α_4 (เขียนในรูปเมตริกซ์) (4 คะแนน)

ข้อ 5.3 ถ้า $p(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + \ldots + a_nx + a_{n+1}$, $(a_1 \neq 0)$

และ $q(x) = x^2 - rx - s$

$p(x) = q(x)Q(x) + R(x)$

$= (x^2-rx-s)(b_1x^{n-2}+b_2x^{n-3}+ \ldots +b_{n-2}x+b_{n-1})+b_n(x-r)+b_{n+1}$

ค่าของ b_i's ซึ่งเป็นตัวกำหนด Q(x) และ R(x) หาได้อย่าง synthetically ดังแสดงในตารางข้างล่างนี้

	a_1	a_2	a_3	a_4	...	a_{n-1}	a_n	a_{n+1}	
x r)		$+b_1r$	$+b_2r$	$+b_3r$	. . .	$+b_{n-2}r$	$+b_{n-1}r$	$+b_nr$	
x s)			$+b_1s$	$+b_2s$	...	$+b_{n-3}s$	$+b_{n-2}s$	$+b_{n-1}s$	
7									
	b_1	b_2	b_3	b_4	...	b_{n-1}	b_n	b_{n+1}	

5.3.1 $p(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$ คือ polynomial ที่มี

degree = ________

5.3.2 ดังนั้น p(x) จะมีรากจำนวน = ________ ราก

5.3.3 ถ้ากำหนด $q(x) = x^2 - 7x \; t \; 12$ จงหา $Q(x)$ โดยวิธี Synthetic Division ที่กำหนดให้ จากนั้นจงหารากทั้งหมดของ $p(x)$

(10 คะแนน)

เฉลยข้อสอบชุดที่ 2

ข้อสอบชุดนี้มี 5 ข้อ 100 คะแนน

ข้อ 1.1 จง solve system ที่กำหนดให้ โดยใช้ Gauss-Seidel iteration และใช้วิธีที่จะทำให้ Gauss-Seidel iteration converges

โดยให้เริ่มต้น $x_0 = 0$ จงทำ 1 iterations (คำนวนโดยใช้ 3s)

$$
\begin{aligned}
(E_1)\quad & x_1 - x_2 + 3x_4 = 1 \\
(E_2)\quad & 5x_1 + x_3 = 3 \\
(E_3)\quad & 4x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\
(E_4)\quad & 3x_3 + x_4 = -4
\end{aligned}
$$

1st iteration:

แก้สมการ E_1 เพื่อหา x_4 : $x_4^{(new)} = (1/3)(1 - x_1 + x_2)$

แล้วแก้ E_2 เพื่อหา x_1 : $x_1^{(new)} = (1/5)(3 - x_3)$

แล้วแก้ E_3 เพื่อหา x_2 : $x_2^{(new)} = (1/4)(-1 - x_3 + x_4)$

และ E_4 เพื่อหา x_3 : $x_3^{(new)} = (1/3)(-4 - x_4)$

เริ่มต้นด้วย $x = x_0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]'$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
x_4^{(new)} &= (1/3)(1 - 0 + 0) = 1/3 \approx \mathbf{0.333} \\
x_1^{(new)} &= (1/5)(3 - 0) = 3/5 = \mathbf{0.600} \\
x_2^{(new)} &= (1/4)(-1 - 0 + 0.333) \approx \mathbf{-0.167} \\
x_3^{(new)} &= (1/3)(-4 - 0.333) = \mathbf{-1.44}
\end{aligned}
$$

$$x' \approx x_1' = [0.600 \quad -0.167 \quad -1.44 \quad 0.333]'$$

จงเขียน 4 simultaneous equations ในรูป matrix แล้วเมตริกซ์สัมประสิทธิ์เป็น strictly dominant matrix หรือไม่ เพราะเหตุใด จงแสดงการตรวจสอบด้วย

$$Ax = b \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

A เป็น strictly dominant matrix (ตรวจสอบคุณสมบัติจากตำรา)

ข้อ 1.2 จงหา $\hat{A}$, A และ $\det A = |A|$ (ต้องแสดงการหาให้ชัดเจน)

โดยกำหนด $\hat{L}\backslash\hat{U}$ (Basic pivoting) ใน LU-factorization ให้ดังนี้คือ

(ไม่ต้องแสดงการหา $\hat{L}\backslash\hat{U}$)

$$\hat{L}\backslash\hat{U} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 1 & -1 \\ -5 & -4 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (\rho_2 \rightleftarrows \rho_3) \\ (\rho_3 \rightleftarrows \rho_4) \end{matrix}$$

(10 คะแนน)

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \qquad \hat{U} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \hat{L}\hat{U} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & 6 & 5 & -7 \\ -5 & 1 & 0 & -6 \\ 3 & -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ในการหา A ทำโดยการสลับ rows ของ $\hat{A}$ ดังนี้ $(\rho_3 \rightleftarrows \rho_4)$ แล้ว $(\rho_2 \rightleftarrows \rho_3)$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & 6 & 5 & -7 \\ 3 & -3 & 0 & -1 \\ -5 & 1 & 0 & -6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 0 & -1 \\ -1 & 6 & 5 & -7 \\ -5 & 1 & 0 & -6 \end{bmatrix} = A$$

$$|A| = (-1)^2(2)(5)(4)(-7) = -280$$

ข้อ 2.1 ระบบต่อไปนี้เป็นระบบเชิงเส้น (linear system) หรือไม่ เพราะเหตุใด

$$\begin{vmatrix} x^2 - 3\sin y - z^2 = 0 \\ z - 2xy + 1 = 0 \\ e^{x+y} + z^2 = 0 \end{vmatrix} \quad \text{หรือ} \quad \begin{vmatrix} f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \\ f_3(x) = 0 \end{vmatrix} \quad \text{โดยที่ } x = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$$

ระบบนี้ไม่เป็นระบบเชิงเส้น เพราะกำลังของตัวไม่ทราบค่า (x, y, z) ไม่เป็นหนึ่งทุกตัว

ถ้า $J = f'(x)$ คือ Jacobian matrix

จงหา

$$J = \begin{bmatrix} \partial f_1(x)/\partial x & \partial f_1(x)/\partial y & \partial f_1(x)/\partial z \\ \partial f_2(x)/\partial x & \partial f_2(x)/\partial y & \partial f_2(x)/\partial z \\ \partial f_3(x)/\partial x & \partial f_3(x)/\partial y & \partial f_3(x)/\partial z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 3\cos y & -2z \\ -2y & -2x & 1 \\ e^{x+y} & e^{x+y} & 2z \end{bmatrix}$$

จงใช้ NRSYS โดยใช้ $x_0 = 0$ เพื่อหา $x_1 = x_0 + dx$ (นั่นคือหาผลเฉลยของสมการ $f'(x_0)dx = -f(x_0)$ เพื่อหา dx โดยการแก้สมการตามปกติ)

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} -3\ dy = 0 \longrightarrow dy = 0 \\ dz = -1 \\ dx + dy = -1 \longrightarrow dx = -1 \end{array}$$

ดังนั้น $x_1 = x_0 + dx = [-1\ \ 0\ \ -1]'$

(10 คะแนน)

/

ข้อ 2.2 การประมาณค่า $f'(x)$ 2 วิธีคือ

โดยใช้ $\Delta f(x)/h = [f(x+h)-f(x)]/h$ ...(1)

และ โดยใช้ Central difference approximation คือ

$\delta f(x)/2h = [f(x+h) - f(x-h)]/2h$ ...(2)

โดยทั่ว ๆ ไปแล้ววิธีใดที่จะประมาณ ได้แม่นยำกว่า ตอบ วิธีที่ (2)

ถ้า $f(x) = e^x$

$f'(x) = e^x$ และ $f'(1) = e^1 = 2.718282$

จงหาค่าประมาณ $f'(x)$ โดยใช้สูตร (1) และ (2) โดยที่ $f(x) = e^x$ ณ $x = 1$ โดยใช้ $h = 0.02$ และค่า e^x จากตารางที่กำหนดให้ แทนค่าในสูตรให้ชัดเจน ก่อนหาค่าสำเร็จ จงหา actual error ของการใช้สูตรทั้ง 2 แล้วสรุปว่าสูตรใดประมาณได้แม่นยำกว่า

X	$f(x) = e^x$	X	$f(x) = e^x$
0.0	1.000000	0.92	2.509290
0.1	1.105171	0.94	2.559981
0.2	1.221403	0.96	2.611696
0.3	1.349859	0.98	2.664456
0.4	1.491625	1.00	2.716262
0.5	1.646721	1.02	2.773194
0.6	1.822119	1.04	2.629216
0.7	2.013753	1.06	2.886370
0.8	2.225541	1.08	2.944679
0.9	2.459603	1.10	3.004165

จาก (1) $f'(x) \approx \Delta f(x)/h = [f(x+h)-f(x)]/h$

$= [f(1+0.02) - f(1)]/0.02$

$= (e^{1.02} - e^{1})/0.02$

$= (2.773194 - 2.718282)/0.02$

$= 0.054912/0.02$

$= \mathbf{2.7456}$

จาก (2) $f'(x) \approx \delta f(x)/2h = [f(x+h) - f(x-h)]/2h$

$= [f(1+0.02) - f(1-0.02)]/0.04$

$= [f(1.02) - f(0.98)]/0.04$

$= (e^{1.02} - e^{0.98})/0.04$

$= (2.773194 - 2.664456)/0.04$

$= 0.108738/0.04$

$= \mathbf{2.71845}$

ค่า exact $f'(x) = e^{x}\big|_{x=1} = e^{1} = 2.716282$

หา actual error ของ (1) = 2.718262 - 2.7456 = -0.027318

หา actual error ของ (2) = 2.718282 - 2.71845 = -0.000168

การประมาณค่าโดยใช้สูตรที่ (2) ประมาณค่าได้แม่นยำกว่าสูตรที่ (1)

(10 คะแนน)

ข้อ 3. จาก e^x , $x = 0.0(0.1)0.9(0.02)1.10$ ในข้อ 2.2

3.1 จงหาค่า definite integrals ต่อไปนี้

(1) $\int_{.1}^{.3} e^x \, dx$ และ (2) $\int_{0}^{.5} e^x \, dx$ (4 คะแนน)

$$(1) \int_{.1}^{.3} e^x \, dx = e^x \Big|_{0.1}^{0.3} = e^{0.3} - e^{0.1} = 1.349859 - 1.105171$$
$$= 0.244688$$

$$(2) \int_{0}^{.5} e^x \, dx = e^x \Big|_{0}^{0.5} = e^{0.5} - e^{0} = 1.648721 - 1.000000$$
$$= 0.648721$$

ข้อ 3.2 กำหนดสูตรต่าง ๆ ดังนี้

สูตร (1) Midpoint Rule: $\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\, f[(a+b)/2]$

สูตร (2) Trapezoidal Rule: $\int_a^b f(x)dx \approx [(b-a)/2][f(a)+f(b)]$

สูตร (3) Simpson's 1/3-Rule:

$$\int_{x_j}^{x_{j+2}} f(x)dx \approx (h/3)[f(x_j) + 4f(x_{j+1}) + f(x_{j+2})]$$

สูตร (4) Simpson's 3/8-Rule:

$$\int_{x_j}^{x_{j+3}} f(x)dx \approx (3h/8)[f(x_j) + 3f(x_{j+1}) + 3f(x_{j+2}) + f(x_{j+3})]$$

โดยที่

$$x_j \overbrace{\qquad\quad}^{h} x_{j+1} \overbrace{\qquad\quad}^{h} x_{j+2} \overbrace{\qquad\quad}^{h} x_{j+3} \overbrace{\qquad\quad}^{h} x_{j+4}$$

1) จงใช้สูตร (1) เพื่อประมาณค่า $\int_{.1}^{.3} e^x\,dx$ (2 คะแนน)

2) จงใช้สูตร (2) เพื่อประมาณค่า $\int_{.1}^{.3} e^x\,dx$ (ให้ใช้ Composite Trapezoidal rule) (6 คะแนน)

3) จงใช้สูตร (3) และ (4) เพื่อประมาณค่า $\int_{0}^{.5} e^x\,dx$ (6 คะแนน)

(แทนค่าในสูตรให้ชัดเจนก่อนหาค่าสำเร็จ)

จงอภิปรายเปรียบเทียบคำตอบ 1)-3) กับค่าในข้อ 3.1 ด้วย (หา actual errors ประกอบการเปรียบเทียบด้วย) (2 คะแนน)

(1) a=0.1,b=0.3:

$$\int_{.1}^{.3} e^x\,dx \approx (0.3-0.1)f[(0.1+0.3)/2] = 0.2f(0.2)$$
$$= 0.2e^{0.2}$$
$$= 0.2(1.221403) = 0.2442606$$

actual error = 0.244688 - 0.2442806 = 0.0004074

(2) a=0.1,b=0.2:

$$\int_{.1}^{.2} e^x\,dx \approx [(0.2-0.1)/2][f(0.1)+f(0.2)]$$
$$= (0.1/2)(e^{0.1} + e^{0.2})$$
$$= 0.1163287$$

a = 0.2,b=0.3:

$$\int_{.2}^{.3} e^x\,dx \approx [(0.3-0.2)/2][f(0.2)+f(0.3)]$$
$$= (0.1/2)(e^{0.2} + e^{0.3})$$
$$= 0.1285636$$

$$\int_{I}^{.3} e^{x}\,dx \approx 0.1163287 \text{ t } 0.1285636 = 0.2448923$$

actual error = 0.244688 - 0.2448923 = -0.0002043

เมื่อทำการเปรียบเทียบ actual error ของ (1) และ (2) ปรากฏว่า (2) ประมาณได้แม่นยำกว่า (1)

(3)
$$\int_{0}^{.5} e^{x}\,dx = \int_{0}^{.2} e^{x}\,dx \text{ t } \int_{.2}^{.5} e^{x}\,dx$$

ใช้สูตร (3) ประมาณ

$$\int_{0}^{.2} e^{x}\,dx \approx (0.1/3)[e^{0} + 4e^{0.1} + e^{0.2}] = 0.2214029$$

ใช้สูตร (4) ประมาณ

$$\int_{.2}^{.5} e^{x}\,dx \approx (0.3/8)[e^{0.2} + 3e^{0.3} + 3e^{0.4} + e^{0.5}] = 0.4273191$$

ดังนั้น

$$\int_{0}^{.5} e^{x}\,dx \approx 0.2214029 \text{ t } 0.4273191 = 0.648722$$

actual error = 0.648721 - 0.648722 = -0.000001

แสดงว่า (3) ประมาณได้แม่นยำถึง 6s

ข้อ 4. กำหนด Lagrange Interpolation Algorithm ให้ดังนี้

Algorithm: Lagrange Interpolation

Purpose: To evaluate the Lagrange form of $p_{k,k+m}(z)$, that is,

$$p_{k,k+m}(z) = y_k L_k(z) + y_{k+1} L_{k+1}(z) + \cdots + y_{k+m} L_{k+m}(z)$$

where $L_j(x) = \prod_{i \neq j} (x - x_i)/(x_j - x_i)$, the jth Lagrange polynomial for the $m + 1$ knots $P_k(x_k, y_k), \ldots, P_{k+m}(x_{k+m}, y_{k+m})$, and z is a specified point near the interpolating nodes $x_k, \ldots, x_{k+m}$.

```
GET n, x, y,   {x = [x0  x1  ···  xn], y = [y0  y1  ···  yn]}
    k, m,      {starting index, degree of interpolating polynomial}
    z          {point at which interpolated value is desired}

PofZ ← 0
DO FOR j = k TO k + m   {Form Termj = yj * Lj(x).}
  BEGIN
  Termj ← yj
  DO FOR i = k TO k + m
     IF i ≠ j THEN Termj ← Termj*(z − xi)/(xj − xi)
  PofZ ← PofZ + Termj
  END

OUTPUT (The interpolated value pk,k+m(z) is PofZ.)
```

กำหนดจุด 5 จุดคือ $P_0(-2,-8), P_1(0,0), P_2(1,1), P_3(4,64), P_4(5,125)$

ข้อ 4.1 จงหา $p_{13}(z)$ (กระจายเทอมด้วย)

$$p_{1,3}(z) = 0\frac{(z-1)(z-4)}{(0-1)(0-4)} + 1\frac{(z-0)(z-4)}{(1-0)(1-4)} + 64\frac{(z-0)(z-1)}{(4-0)(4-1)}$$

$$= (z^2 - 4z - 16z^2 + 16z)/-3 = 5z^2 - 4z$$

$$p_{1,3}(2) = 5(2)^2 - 4(2) = 12$$

(4 คะแนน)

ข้อ 4.2 จากจุดที่กำหนดให้ในข้อ4.1 และส่วนหนึ่งของ Divided Difference Table

(16 คะแนน)

1) จงเติม Divided Difference Table ให้สมบูรณ์

Knot	Node	$\Delta^0 = y$	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4
P_0	-2	-8				
			4			
P_1	cl	0		-1		
			1		1	
P_2	1	1		5		0
			21		1	
P_3	4	64		10		
			61			
P_4	5	125				

2) จาก DD table ให้แสดงวิธีหา $p_{1,3}(x)$ ให้ชัดเจน

(เทียบคำตอบกับวิธีใน 4.1 ด้วย)

จงหา $p_{1,3}(x)$ ตามวิธี forward recursive form (กระจายเทอมด้วย)

$$p_{1.3}(x) = 0+1(x-0) + 5(x-0)(x-1)$$
$$= x \text{ t } 5x^2 - 5x$$
$$= 5x^2 - 4x$$

3) จงหา $p_{1,3}(x)$ ตามวิธี backward recursive form (กระจายเทอมด้วย)

$$p_{1,3}(x) = 64 \text{ t } 21(x-4) \text{ t } 5(x-4)(x-1)$$
$$= 64 \text{ t } 21x - 84 \text{ t } 5x^2 - 25x \text{ t } 20$$
$$= 5x^2 - 4x$$

4) วิธีการในข้อ 4.1 เรียกว่า Lagrange's method

วิธีการในข้อ 4.2 นี้เรียกว่า Newton's method

5) จงหา $p_{0,3}(x)$ โดยหาจาก $p_{1,3}(x)$ ซึ่งหาไว้แล้วใน 2)

$$\begin{aligned} p_{0,3}(x) &= p_{1,3}(x) + 1(x-0)(x-1)(x-4) \\ &= 5x^2 - 4x + x^3 - 5x^2 + 4x \\ &= x^3 \end{aligned}$$

6) จาก DD table แสดงว่าจากจุดทั้ง 5 จุด (คือ P_0 ถึง P_4) degree สูงสุดของ interpolating polynomial $[p_{0,4}(x)]$ คือ 3 เพราะ $\Delta^4 y_0 = 0$

7) จงหา $p_{0,4}(x)$ ตามวิธี **forward recursive formula** (กระจายเทอมด้วย)

$$\begin{aligned} p_{0,4}(x) &= -8 + 4(x+2) - 1(x+2)(x-0) + 1(x+2)(x-0)(x-1) \\ &= -8 + 4x + 8 - x^2 - 2x + x^3 + x^2 - 2x \\ &= x^3 \end{aligned}$$

ข้อ 5.1 ในการใช้ Linearization Algorithm เพื่อ fit $y = \alpha x/(\beta + x)$ กับจุดจำนวน k จุด Linearized form คือ $Y = a + bX$

$y = \alpha x/(\beta + x) \dashrightarrow y = a + (-\beta)(y/x)$

Transformation relations คือ $X_i = y_i/x_i$, $i=1,\dots,k$

$Y_i = Y,$, $i=1,\dots,k$

$a = \alpha$

$b = -\beta$

$\alpha = a$

$\beta = -b$

ถ้าจุดทั้ง 5 คือจุด $P_1(1,5.12), P_2(3,3), P_3(6,2.48), P_4(9,2.34), P_5(15,2.18)$

Transformed points คือ $Q_1(5.12/1,5.12)$, $Q_2(3/3,3)$, $Q_3(2.48/6,2.48),\dots, Q_5(2.18/15,2.18)$

(6 คะแนน)

ข้อ 5.2 ในการ fit polynomial function degree 3 คือ

$$g_4(x) = \gamma_1 + \gamma_2 x + \gamma_3 x^2 + \gamma_4 x^3$$

สำหรับ k จุด คือ $P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2), \ldots, P_k(x_k,y_k)$

จงเขียน normal equations สำหรับหา least square estimates

ของ γ_1 , γ_2 , γ_3 และ γ_4 (เขียนในรูปเมตริกซ์) (4 คะแนน)

$$\begin{bmatrix} k & \Sigma x & \Sigma x^2 & \Sigma x^3 \\ \Sigma x & \Sigma x^2 & \Sigma x^3 & \Sigma x^4 \\ \Sigma x^2 & \Sigma x^3 & \Sigma x^4 & \Sigma x^5 \\ \Sigma x^3 & \Sigma x^4 & \Sigma x^5 & \Sigma x^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\gamma}_1 \\ \hat{\gamma}_2 \\ \hat{\gamma}_3 \\ \hat{\gamma}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y \\ \Sigma xy \\ \Sigma x^2 y \\ \Sigma x^3 y \end{bmatrix}$$

ข้อ 5.3 ถ้า $p(x) = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \ldots + a_n x + a_{n+1}$, $(a_1 \neq 0)$

และ $q(x) = x^2 - rx - s$

$$p(x) = q(x)\,Q(x) + R(x)$$

$$= (x^2-rx-s)(b_1 x^{n-2}+b_2 x^{n-3}+\ldots+b_{n-2}x+b_{n-1})+b_n(x-r)+b_{n+1}$$

ค่าของ b_i's ซึ่งเป็นตัวกำหนด Q(x) และ R(x) หาได้อย่าง synthetically ดังแสดงในตารางข้างล่างนี้

	a_1	a_2	a_3	$a_4 \ldots a_{n-1}$	a_n	a_{n+1}	
x r)		$+b_1 r$	$+b_2 r$	$+b_3 r \ldots +b_{n-2} r$	$+b_{n-1} r$	$+b_n r$	
x s)			$+b_1 s$	$+b_2 s \ldots +b_{n-3} s$	$+b_{n-2} s$	$+b_{n-1} s$	
	b_1	b_2	b_3	$b_4 \ldots b_{n-1}$	b_n		b_{n+1}

5.3.1 $p(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$ คือ polynomial ที่มี degree = 4

5.3.2 ดังนั้น p(x) จะมีรากจำนวน = 4 ราก

5.3.3 ถ้ากำหนด $q(x) = x^2 - 7x + 12$ จงหา $Q(x)$ โดยวิธี Synthetic Division ที่กำหนดให้ จากนั้นจงหารากทั้งหมดของ $p(x)$

a_i's		-10	35	50	24
x 7		7	-21	14	0
x(-12			-12	36	-24
	1	-3	2	0	0

ดังนั้น $Q(x) = x^2 - 3x +$

$$p(x) = Q(x)q(x) = (x^2 - 3x + 2)(x^2 - 7x + 12)$$

$$= (x-2)(x-1)(x-3)(x-4)$$

ถ้า $p(x) = 0$

ดังนั้นรากของ $p(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$ คือ

$$x = 1, 2, 3, 4$$

(10 คะแนน)