เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 8

โจทย์ข้อ 8.1-8.5 จะต้องใช้ IVP's ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(A) $y' = (y/t) - 2,\ y(1) = 2;\ h = 0.1$

[ผลเฉลยแม่นตรง: $y(t) = 2t(1-\ln t)$]

(B) $y' = (1/2)[(y/t)+(t/y)],\ y(1) = 3;\ h = 0.2$

[ผลเฉลยแม่นตรง: $y(t) = t^2$ **t** 8tl

(C) $y' = y^{(1/2)}$, $y(0) = 1;\ h = 0.2$

[ผลเฉลยแม่นตรง: $y(t)$ = (t **t** 2)$^2/4$]

8 . 1 จงแสดงว่า y(t)'s ใน (A)-(C) คือผลเฉลยของ IVP's ที่กำหนดให้

8.1(A) $y(t) = 2t(1 - \ln t)$

$= 2t - 2t \ln t$

$t = 1$, $y(1) = 2(1)(1 - \ln 1) = 2$

y'(t) = 2 - 2[t d(ln t)/dt t ln t dt/dt]

= 2 - 2[t(1/t) t ln tl

$= 2 - 2 - 2 \ln t$

$= -2 \ln t$ ...(1)

แทน **y** ด้วย 2t - **2t** ln t ใน

$y' = y/t - 2$

$= (2t - 2t \ln t)/t - 2$

$= 2 - 2 \ln t - 2$

$= -2 \ln t$ ...(2)

8.1(B) $y(t) = (t^2$ t $8t)^{(1/2)}$

$t = 1$, $y(1) =$ **Cl t** $8(1)1^{(1/2)} = 3$

$y'(t) = (1/2)(t^2$ t $8t)^{(-1/2)}\ d(t^2$ t $8t)/dt$

$= (1/2)(t^2$ t $8t)^{(-1/2)}(2t$ t $8)$

$= (2t$ t $8)/2(t^2 + 8t)^{(1/2)}$

$= (t + 4)/(t^2$ t $8t)^{(1/2)}$ ...(1)

แทน y ด้วย $(t^2\ t\ 8t)^{(1/2)}$ ใน

$$y' = (1/2)[(y/t)+(t/y)]$$

$$= (1/2)[(t^2\ t\ 8t)^{(1/2)}/t\ t\ t/(t^2\ t\ 8t)^{(1/2)}]$$

$$= (1/2)[(t^2\ t\ 8t)+t^2]/t(t^2\ t\ 8t)^{(1/2)}$$

$$= (2t^2\ t\ 8t)/2t(t^2\ t\ 8t)^{(1/2)}$$

$$= (t\ t\ 4)/(t^2\ t\ 8t)^{(1/2)} \qquad ...(2)$$

8.1(C) $\quad y(t) = (t\ t\ 2)^2/4$

$t = 0, \quad y(0) = (0\ t\ 2)^2/4 = 1$

$$y'(t) = [2(t\ t\ 2)]/4 = (t\ t\ 2)/2 \qquad ...(1)$$

แทน y ด้วย $(t\ t\ 2)^2/4$ ใน $y' = y^{(1/2)}$

$$= [(t\ t\ 2)^2/4]^{(1/2)}$$

$$= (t\ t\ 2)/2 \qquad ...(2)$$

8.2 (a) สำหรับ (A)-(C) จงใช้วิธีของออยเลอร์เพื่อทำ

(i) 2 h-steps เพื่อหาถึง $t = t_o + 2h$

(ii) 4 (h/2)-steps เพื่อหาถึง $t = t_o + 2h$

(b) ค่าประมาณ $y(t_o + h)$ และ $y(t_o + 2h)$ ที่ได้จาก (a) นั้นยืนยันหรือไม่ว่าวิธีของออยเลอร์ นั้นคือวิธีอันดับหนึ่ง (นั่นคือ $E(h/2) \approx E(h)/2$) ถ้าเป็นดังกล่าวจงใช้สูตรของริชาร์ดสัน เพื่อหาค่าประมาณที่ถูกปรับปรุงแล้วของ $y(t_o + 2h)$ และอภิปรายถึงความแม่นยำที่ได้รับด้วย

วิธีของออยเลอร์: $y_{j+1} = y_j\ t\ h\ f(t_j,y_j),\ j = 0,\ldots,\ n-1$

8.2(A)(a)(i) $y' = y/t - 2 = f(t,y)$

$$f(t_j,y_j) = y_j/t_j - 2$$

$$y(1) = 2,\ h = 0.1\ (t_o = 1,\ y_o = 2)$$

$j = 0$: $y_1 = y_o + 0.1\ f(t_o,y_o) = 2\ t\ 0.1[(2/1) - 2] = 2 \approx y(1.1)$

$j = 1$: $y_2 = y_1 + 0.1\ f(t_1,y_1) = 2\ t\ 0.1[(2/1.1) - 2]$

$$= 1.9818182 \approx y(1.2)$$

8.2(A)(a)(ii) $h = 0.1/2 = 0.05$

$t_o = 1,\ t_1 = 1.05,\ t_2 = 1.1,\ t_3 = 1.15,\ t_4 = 1.2$

$j = 0$: $y, = y_o$ t $0.05f(t_o,y_o) = 2$ t $0.05[(2/1) - 21 = 2 \approx y(1.05)$

$j = 1$: $y_2 = y_1 + 0.05f(t_1,y_1) = 2$ t $0.05[(2/1.05) - 21$

$= 1.9952381 \approx y(1.1)$

$j = 2$: $y_3 = y_2$ t $0.05f(t_2,y_2)$

$= 1.9952381$ t $0.05[(1.9952381/1.1) - 21$

$= 1.9859307 \approx y(1.15)$

$j = 3$: $y_4 = y_3$ t $0.05f(t_3,y_3)$

$= 1.9859307$ t $0.05(1.9859307/1.15 - 2)$

$= 1.9722756 \approx y(1.2)$

8.2(A)(b) $\overset{d}{n}$ $t = 1.1$: $y(0.05)_{\text{improved}} = 2(1.9952381) - 2$

$= 1.9904762$

$\overset{d}{n}$ $t = 1.2$: $y(0.05)_{\text{improved}} = 2y(0.05) - y(0.1)$

$= 2(1.9722756)-1.9818182$

$= 1.962733$

8.2(B)(a)(i) $y' = (1/2)[(y/t)+(t/y)],\ y(1) = 3;\ h = 0.2$

$f(t_j,y_j) = (1/2)[(y_j/t_j)$ t $(t_j/y_j)]$

$t_o = 1,\ y_o = 3$

$t_o = 1,\ t_1 = 1.2,\ t_2 = 1.4$

$j = 0$: $y_1 = y_o$ t $0.2\{(1/2)[(y_o/t_o)$ t $(t_o/y_o)]\}$

$= 3$ t $0.2\{[(3/1)$ t $(1/3)]/2\}$

$= 3.3333333 \approx y(1.2)$

$j = 1$: $y_2 = y_1$ t $0.2\{(1/2)[(y_1/t_1)$ t $(t_1/y_1)]\}$

$= 3.3333333$ t $0.2\{[(3.3333333/1.2)+(1.2/3.3333333)]/2\}$

$= 3.647111 \approx y(1.4)$

8.2(B) (a) (ii) $h = 0.2/2 = 0.1$

$t_0 = 1,\ t_1 = 1.1,\ t_2 = 1.2,\ t_3 = 1.3,\ t_4 = 1.4$

$j = 0$: $y_1 = y_0 + 0.1\{(1/2)[(3/1)\ t\ (1/3)]\} = 3.1666666$

$j = 1$: $y_2 = y_1 + 0.1\{(1/2)[(y_1/1.1)\ t\ (1.1/y_1)]\}$

$= 3.3279744 \approx y(1.2)$

$j = 2$: $y_3 = y_2 + 0.1\{(1/2)[(y_2/1.2)\ t\ (1.2/y_2)]\} = 3.4846689$

$j = 3$: $y_4 = y_3 + 0.1\{(1/2)[(y_3/1.3)\ t\ (1.3/y_3)]\} = 3.6373477$

$\approx y(1.4)$

8.2(B) (b) ñ $t = 1.2$: $y(0.10)_{\text{improved}} = 2y(0.1) - y(0.2)$

$= 2(3.3279744)-3.3333333$

$= 3.3226155$

ñ $t = 1.4$: $y(0.10)_{\text{improved}} = 2y(0.1) - y(0.2)$

$= 2(3.6373477)-3.647111$

$= 3.6275844$

8.2(C) (a) i) $y' = y^{(1/2)}$, $y(0) = 1$; $h = 0.2$

$t_0 = 0,\ y_0 = 1$

$t_0 = 0,\ t_1 = 0.2,\ t_2 = 0.4$

$j = 0$: $y_1 = y_0\ t\ 0.2(y_0)^{(1/2)} = 1\ t\ 0.2(1)^{(1/2)} = 1.2 \approx y(0.2)$

$j = 1$: $y_2 = y_1\ t\ 0.2(y_1)^{(1/2)} = 1.2\ t\ 0.2(1.2)^{(1/2)}$

$= 1.419089 \approx y(0.4)$

8.2(C) (a) ii) $h = 0.1$

$t_0 = 0,\ t_1 = 0.1,\ t_2 = 0.2,\ t_3 = 0.3,\ t_4 = 0.4$

$j = 0$: $y_1 = y_0\ t\ 0.1(y_0)^{(1/2)} = 1\ t\ 0.1(1)^{(1/2)} = 1.1$

$j = 1$: $y_2 = y_1\ t\ 0.1(y_1)^{(1/2)} = 1.1\ t\ 0.1(1.1)^{(1/2)}$

$= 1.2048808 \approx y(0.2)$

$j = 2$: $y_3 = y_2\ t\ 0.1(y_2)^{(1/2)} = 1.2048808\ t\ 0.1(1.2048808)^{(1/2)}$

$= 1.3146478$

$j = 3$: $y_4 = y_3\ t\ 0.1(y_3)^{(1/2)} = 1.3146478\ t\ 0.1(1.3146478)^{(1/2)}$

OR 205(H) $= 1.4293058 \approx y(0.4)$

8.2(C) (b) ที่ $t = 0.2$: $y(0.1)_{improved} = 2y(0.1) - y(0.2)$

$= 2(1.2048808)-1.2$

$= 1.2097616$

ที่ $t = 0.4$: $y(0.1)_{improved} = 2y(0.1) - y(0.2)$

$= 2(1.4293058)-1.419089$

$= 1.4395226$

8.3 สำหรับ (A)-(C) จงใช้วิธีของเทย์เลอร์อันดับสอง เพื่อทำ

(i) 1 h-step เพื่อหาถึง $t = t_o + h$

(ii) 2 (h/2)-steps เพื่อหาถึง $t = t_o + h$

วิธีของเทย์เลอร์อันดับสอง: $y_{j+1} = y_j + h\,\Phi_{T.2}$

โดยที่ $\Phi_{T.2} = f_j + (h/2)[f_t + f_y f]_j$

$f = f(t,y)$

$f_t = \partial f(t,y)/\partial t$

$f_y = \partial f(t,y)/\partial y$

8.3(A) $f = (y/t) - 2 = yt^{-1} - 2$, $f_t = -yt^{-2}$, $f_y = 1/t$

$y_{j+1} = y_j + h\{f_j + (h/2)[f_t + f_y f]_j\}$

$= y_j + h\{[(y_j/t_j)-2]+(h/2)[-y_j t_j^{-2}+(1/t_j)[(y_j/t_j)-2]]\}$

$= y_j + h[(y_j/t_j) - 2 - (h/t_j)]$

(i) $h = 0.1$

$j = 0$: $y_1 = y_o + h[(y_o/t_o) - 2 - (h/t_o)]$

$= 2 + (0.1)[(2/1) - 2 - (0.1/1)]$

$= 2 + (0.1)(-0.1) = 2 - 0.01 = 1.99 \approx y(1.1)$

(ii) $h = 0.05$

$j = 0$: $y_1 = y_o + h[(y_o/t_o) - 2 - (h/t_o)]$

$= 2 + (0.05)[(2/1) - 2 - (0.05/1)]$

$= 2 + (0.05)(-0.05) = 1.9975 \approx y(1)$

$j = 1$: $y_2 = y_1$ t $h[(y_1/t_1) - 2 - (h/t_1)]$

$= 1.9975$ t $(0.05)[(1.9975/1.1) - 2 - (0.05/1.1)]$

$= 1.9660226 \approx y(1.1)$

Richardson's improvement,

ñ **t = 1.1:** $y(0.05)_{\text{improved}} = [4y(0.05) - y(0.1)]/3$

$= [4(1.9860228) - 1.99]/3$

$=$ **1.9649706**

8.3(C) $f = y^{(1/2)}$, $f_t = 0$, $f_y = y^{(-1/2)}/2$

$y_{j+1} = y_j + h\{f_j$ t $(h/2)[f_t$ t $f_y f]_j\}$

$= y_j$ t $h\{y_j^{(1/2)}$ t $(h/2)[0$ t $(1/2)y_j^{(-1/2)}\ y_j^{(1/2)}]\}$

$= y_j$ **t** $h[y_j^{(1/2)}$ t $h/4]$

$= y_j + hy_j^{(1/2)} + h^2/4$

(i) $h = 0.2$

$j = 0$: $y_1 = y_0$ t $hy_0^{(1/2)}$ t $h^2/4$

= 1 t $0.2(1)^{(1/2)}$ **t** $(0.2)^2/4$

= 1 + 0.2 + 0.01 = 1.21 $\approx y(0.2)$

(ii) h **= 0.1**

$j = 0$: $y_1 = y_0$ t $hy_0^{(1/2)}$ t $h^2/4$

= 1 **t** $0.1(1)^{(1/2)}$ **t** $(0.1)^2/4$

= **1 t** 0.1 t 0.0025 = 1.1025

$j = 1$: $y_2 = y_1$ t $hy_1^{(1/2)}$ t $h^2/4$

= **1.1025 t** $(0.1)(1.1025)^{(1/2)}$ **t** $(0.1)^2/4$

= **1.21** $\approx y(0.2)$

Richardson's improvement

ñ t **= 0.2:** $y(0.1)_{\text{improved}} = [4y(0.1) - y(0.2)]/3$

$= [4(1.21) - 1.21]/3 =$ **1.21**

8.4 สำหรับ (A)-(C) จงทำซ้ำข้อ 8.3 สำหรับวิธีของออยเลอร์ที่ปรับปรุงแล้ว (Modified Euler method)

วิธีของออยเลอร์ที่ปรับปรุงแล้ว : $y_{j+1} = y_j + h\, f(t_j + h/2,\ y_j + hf_j/2)$

8.4(A) $y_{j+1} = y_j + h\{[y_j + (1/2)h(y_j/t_j - 2)]/[t_j + h/2] - 2\}$

$= y_j + h\{[y_j + (y_j h/2t_j) - h]/[t_j + h/2] - 2\}$

(i) $h = 0.1$

$j = 0$: $y_1 = y_0 + h\{[y_0 + (y_0 h/2t_0) - h]/[t_0 + h/2] - 2\}$

$= 2 + (0.1)\{[2+(2)(0.1)/2(1) - 0.1]/[1 + (0.1)/2] - 2\}$

$= 2 + (0.1)[(2/1.05) - 2] = 1.9904762 \approx y(1.1)$

(ii) $h = 0.05$. $t_0 = 1$, $t_1 = 1.05$

$j = 0$: $y_1 = y_0 + h\{[y_0 + (y_0 h/2t_0) - h]/[t_0 + h/2] - 2\}$

$= 2+(0.05)\{[2+(2)(0.05)/2(1) - 0.05]/[1+(0.05)/2] - 2\}$

$= 2 + (0.05)[(2/1.025) - 2] = 1.997561$

$j = 1$: $y_2 = y_1 + h\{[y_1 + (y_1 h/2t_1) - h]/[t_1 + h/2] - 2\}$

$y_2 = 1.997561+(0.05)\{[1.997561+(1.997561(0.05)/2(1.05)) - (0.05)]/$

$[1.05 + (0.05/2)] - 2\}$

$= 1.997561 + (0.05)[(1.9951219/1.075) - 2]$

$= 1.997561 + (-0.0072036) = 1.9903574 \approx y(1.1)$

Richardson's improvement ($n = 2$)

ที่ $t = 1.1$: $y(0.05)_{\text{improved}} = [4y(0.05) - y(0.1)]/3$

$= [4(1.9903574) - 1.9904762]/3$

$= 1.9903178$

8.3(C) $y_{j+1} = y_j + h[y_j + (1/2)hy_j^{(1/2)}]^{(1/2)}$

(i) $h = 0.2$

$j = 0$: $y_1 = y_0 + (0.2)[y_0 + (1/2)hy_0^{(1/2)}]^{(1/2)}$

$= 1 + (0.2)[1 + (1/2)(0.2)(1)^{(1/2)}]^{(1/2)}$

$= 1 + (0.2)(1.1)^{(1/2)} = 1.2097617 \approx y(1.2)$

(ii) $h = 0.1$

$j = 0$: $y_1 = y_0 + (0.1)[y_0 + (1/2)hy_0^{(1/2)}]^{(1/2)}$

$= 1 + (0.1)[1 + (1/2)(0.1)(1)^{(1/2)}]^{(1/2)}$

$= 1 + (0.1)(1.05)^{(1/2)} = 1.1024695$

$j = 1$:

$y_2 = 1.1024695 + (0.1)[1.1024695 + (1/2)(0.1)1.1024695^{(1/2)}]^{(1/2)}$

$= 1.1024695 + 0.1074694 = 1.2099389 \approx y(1.2)$

Richardson's improvement (n = 2)

ที่ $t = 1.2$: $y_j(0.1)_{improved} = [4y_j(0.1) - y_j(0.2)]/3$

$= [4(1.2099389) - 1.2097617]/3$

$= 1.2099979$

8.5 สำหรับ (A)–(C) จงทำซ้ำข้อ 8.3 สำหรับวิธีของฮวน (Huen's method)

วิธีของฮวน: $y_{j+1} = y_j + (h/2)[f_j + f(t_j + h, y_j + hf_j)]$

8.5(A)

$y_{j+1} = y_j + (h/2)\{(y_j/t_j) - 2 + [y_j + h((y_j/t_j) - 2)]/[t_j + h] - 2\}$

$= y_j + (h/2)\{(y_j/t_j) + [y_j + h((y_j/t_j) - 2)]/[t_j + h] - 4\}$

(i) $h = 0.1,\ t_0 = 1,\ t_1 = 1.1$

$j = 0$: $y_1 = y_0+[(0.1)/2]\{(2/1)+[2+(0.1)((2/1) - 2)][1+0.1] - 4\}$

$= 2 + [(0.1)/2][-2 + (2/1.1)] = 1.9909091 \approx y(1.1)$

(ii) $h = 0.05,\ t_0 = 1,\ t_1 = 1.05,\ t_2 = 1.1$

$j = 0$: $y_1 = 2 + [(0.05)/2][(2/1)+[2+(0.05)((2/1)-2)]/[1+0.05] -4\}$

$= 2 + [(0.05)/2][-2 + (2/1.05)] = 1.9976191$

$j = 1$:

$y_2 = y_1+[(0.05)/2]\{(y_1/1.05)+[y_1+0.05((y_1/1.05)-2)/[1.05+0.05] -4\}$

$= 1.9976191 + [(0.05)/2](-0.2859204)$

$= 1.9976191 - 0.007148 = 1.3904711 \approx y(1.1)$

Richardson's improvement (n = 2)

At $t = 1.1$: $y_j(0.05)_{\text{improved}} = [4y_j(0.05) - y_j(0.1)]/3$

$= [4(1.9904711) - 1.9909091]/3$

$= 1.9903251$

8.5(C) $y_{j+1} = y_j + (h/2)\{y_j^{(1/2)} + [y_j + hy_j^{(1/2)}]^{(1/2)}\}$

(i) $h = 0.2,\ t_0 = 0,\ t_1 = 0.2$

$j = 0$: $y_1 = y_0 + (0.2/2)\{y_0^{(1/2)} + [y_0 + (0.2)y_0^{(1/2)}]^{(1/2)}\}$

$= 1 + (0.1)[1 + (1.2)^{(1/2)}]$

$= 1.2095445 \approx y(0.2)$

(ii) $h = 0.1,\ t_0 = 0,\ t_1 = 0.1,\ t_2 = 0.2$

$j = 0$: $y_1 = y_0 + (0.1/2)\{y_0^{(1/2)} + [y_0 + (0.1)y_0^{(1/2)}]^{(1/2)}\}$

$= 1 + (0.1/2)[1 + (1.1)^{(1/2)}] = 1.1024404$

$j = 1$: $y_2 = y_1 + (0.1/2)\{y_1^{(1/2)} + [y_1 + (0.1)y_1^{(1/2)}]^{(1/2)}\}$

$= 1.2098807 \approx y(0.2)$

Richardson's improvement (n = 2)

ที่ t = 0.2: $y_J(0.1)_{improved} = [4y_J(0.1) - y_J(0.2)]/3$

$= [4(1.2098807) - 1.2095445]/3$

$= 1.2099927$

8.6 สำหรับ (A)-(C) จงทำ 2 h-steps ของ RK4 จงเปรียบเทียบความแม่นยำที่ $t_o + h$ กับค่าอย่างเดียวกันที่ได้จากวิธีอื่น ๆ

8.6(A) จากการใช้โปรแกรมภาษาฟอร์แทรนซึ่งเรียกใช้ซับรูทีน RK4 (ในหัวข้อ 8.2C) โดยเปลี่ยน FTEST ในฟังก์ชัน FTEST เป็น FTEST = Y/T - 2.0
ผลการวิ่งโปรแกรมคือ

```
INPUT TO,TF,YO UNIT 5? con
1 2 2

INPUT # STEPS NPRINT 10 I

   T           Y
  1.000     .2000000D+01
  1.100     .1990318D+01
  1.200     .1962429D+01
  1.300     .1917854D+01
  1.400     .1857879D+01
  1.500     .1783607D+01
  1.600     .1695990D+01
  1.700     .1595866D+01
  1.800     .1483971D+01
  1.900     .1360958D+01
  2.000     .1227414D+01Stop - Program terminated,
```

8.6(B) จากการใช้โปรแกรมภาษาฟอร์แทรนซึ่งเรียกใช้ซับรูทีน RK4 (ในหัวข้อ 8.2C) โดยเปลี่ยน FTEST ในฟังก์ชัน FTEST เป็น FTEST = (Y/T + T/Y)/2.0

ผลการวิ่งโปรแกรมคือ

```
INPUT TO,TF,YO UNIT 5? con
1 3 3
INPUT # STEPS NPRINT 10 1

      Output for Problem 8.6b
      T            Y
    1.000      .3000000D+01
    1.200      .3322651D+01
    1.400      .3627674D+01
    1.600      .3919187D+01
    1.800      .4200004D+01
    2.000      .4472140D+01
    2.200      .4737092D+01
    2.400      .4996003D+01
    2.600      .5249767D+01
    2.800      .5499096D+01
    3.000      .5744568D+01Stop - Program terminated.
```

8.6(C) จากการใช้โปรแกรมภาษาฟอร์แทรนซึ่งเรียกใช้ซับรูทีน RK4 (ในหัวข้อ 8.2C) โดยเปลี่ยน FTEST ในฟังก์ชัน FTEST เป็น FTEST = SQRT(Y)

ผลการวิ่งโปรแกรมคือ

```
INPUT TO,TF,YO UNIT 5? con
0 2 1
INPUT # STEPS NPRINT 10 1

      T            Y
     .000      .1000000D+01
     .200      .1210000D+01
     .400      .1439999D+01
     .600      .1689999D+01
     .800      .1959999D+01
    1.000      .2249998D+01
    1.200      .2559998D+01
    1.400      .2889998D+01
    1.600      .3239998D+01
    1.800      .3609997D+01
    2.000      .3999997D+01Stop - Program terminated.
```

8.7 สำหรับ (A)-(C) จงทำ 2 h-steps ของ RKF4 โดยใช้ Rmax = h^4 และค่า h จาก (A)-(C) จงเปรียบเทียบความแม่นยำที่ t_o + h กับค่าอย่างเดียวกันที่ได้จากวิธีอื่น ๆ

8.7(A) จากการใช้โปรแกรมภาษาฟอร์แทรนซึ่งเรียกใช้ซับรูทีน RKF4 (ในหัวข้อ 8.2C) โดยเปลี่ยน F(1) ในซับรูทีน EVALF เป็น F(1) = Y(1)/T - 2
ผลการวิ่งโปรแกรมคือ

```
INPUT N, TO ,TF ,NPRINT UNIT 5? con
1 1 2 1

INPUT 1 COMPONENTS OF Y0 2

INTEGRATING FROM 1.0000 TO 2.0000, PRINTING EVERY 1 STEPS

 J     T          H          ------Y----->
 0  1.0000   .1000000E+00   .2000000E+01
 1   1.1000  .1000000E+00   .1990318E+01
 2  1.4279   .3279346E+00   .1838524E+01
 3  1.8308   .4029132E+00   .1447175E+01
 4  2.0000   . 1691521E+00  . 1227408E+01Stop - Program terminated.
```

8.7(B) จากการใช้โปรแกรมภาษาฟอร์แทรนซึ่งเรียกใช้ซับรูทีน RKF4 (ในหัวข้อ 8.2C) โดยเปลี่ยน F(1) ในซับรูทีน EVALF เป็น F(1) = (Y(1)/T + T/Y(1))/2
ผลการวิ่งโปรแกรมคือ

```
INPUT N, TO ,TF ,NPRINT UNIT 5? con
1 1 3 1

INPUT 1 COMPONENTS OF Y0 3

INTEGRATING FROM 1.0000 TO 3.0000, PRINTING EVERY 1 STEPS

 J     T          H          -----Y----->
 0  1.0000   .2000000E+00   .3000000E+01
 1   1.2000  .2000000E+00   .3322650E+01
 2  2.0000   .8000000E+00   .4472165E+01
 3  3.0000   .1000000E+01   .5744604E+01Stop - Program terminated.
```

8.7(C) จากการใช้โปรแกรมภาษาฟอร์แทรนซึ่งเรียกใช้ซับรูทีน RKF4 (ในหัวข้อ 8.2C) โดยเปลี่ยน F(1) ในซับรูทีน EVALF เป็น F(1) = SQRT(Y(1))
ผลการวิ่งโปรแกรมคือ

```
INPUT N, TO ,TF ,NPRINT UNIT 5? con
1 0 2 1

INPUT 1 COMPONENTS OF YO 1

INTEGRATING  FROM   .0000  TO  2.0000,  PRINTING  EVERY    1  STEPS

    J      T          H           ------Y----->
    0    .0000   .2000000E+00    .1000000E+01
    1    .2000   .2000000E+00    .1210000E+01
    2   I .0000  .8000000E+00    .2250006E+01
    3   2.0000   .1000000E+01    .4000017E+01Stop - Program terminated.
```