เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 7

จงทำ (a) และ (b) สำหรับ F(h) ที่กำหนดให้

(a) ประมาณค่าอนุพันธ์ที่กำหนดให้ โดยใช้ F(h) และ F(h/r) แล้วจงแสดงว่า $\varepsilon[h/r] \approx \varepsilon[h]/r^n$ โดยที่ n คือ order ของ F(h)

(b) จงใช้ Richardson improvement 1 ครั้ง แล้วอภิปรายความแม่นยำของ $F_1[h/r]$

(**หมายเหตุ** h จะใหญ่กว่า h/r ดังนั้นใช้ h แทน h_{larger} ในสูตร)

7.1 $d(x^2-2x)/dx$, $x = 0$, $h = 0.6$, $r = 3$: $F(h) = \Delta f(x)/h$

[**Ans.** $F(0.6) = -1.4$, $F(0.2) = -1.8$, $F_1(0.2) = -2$(exact)]

(a) $f(x) = x^2 - 2x$

$$d(x^2-2x)/dx \approx F(h) = [f(x+h) - f(x)]/h$$

$$F(0.6) = [f(0+0.6) - f(0)]/0.6 = [(0.6)^2 - 2(0.6) - 0]/0.6 = -1.4$$

$$F(0.2) = [f(0+0.2) - f(0)]/0.2 = [(0.2)^2 - 2(0.2) - 0]/0.2 = -1.8$$

(b) n = 1:

$$F_1(0.2) = [3^1F(0.2) - F(0.6)]/(3^1 - 1) = [3(-1.8) - (-1.4)]/2 = -2$$

7.2 $d^2(\ln x)dx^2$, $x = 1$, $h = 0.2$, $r = 4$; $F(h) = \delta^2 f(x)/h^2$

[**Ans.** $F(0.2) \approx -1.0205$, $F(0.05) \approx -1.0013$, $F_1(0.05) \approx -0.99997$]

(a) $f(x) = \ln x$

$$d^2(\ln x)dx^2 \approx F(h) = \delta^2 f(x)/h^2$$

$$F(h) = \delta^2 f(x)/h^2$$

$$= (1/h^2)[f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)]$$

$$F(0.2) = [1/(0.2)^2][f(0.8) - 2f(1) + f(1.2)]$$

$$= (1/0.04)[\ln(0.8) - 2\ln(1) + \ln(1.2)]$$

$$= (1/0.04)[-0.2231435 - 2(0) + 0.18232151$$

$$= (-0.040822)/0.04$$

$$= -1.02055$$

$$F(0.05) = [1/(0.05)^2][f(0.95) - 2f(1) + f(1.05)]$$

$$= (1/0.0025)[\ln(0.95) - 2\ln(1) + \ln(1.05)]$$

$$= (1/0.0025)[-0.0512932 + 0.04879021$$

$$= (-0.002503)/0.0025$$

$$= -1.0012$$

$n = 2$: $$F_1(0.05) = [4^2F(0.05) - F(0.2)]/(4^2 - 1)$$

$$= [16(-1.0012) - (-1.02055)]/15$$

$$= -14.99865/15$$

$$= -0.99991$$

7.3 $d\sqrt{x}/dx$, $x = 0.2$, $h = 0.2$, $r = 2$; $F(h) = \delta f(x)/2h$

[Ans. $F(0.2)=1.5811$, $F(0.1)=1.1575$, $F_1(0.1)= 1.0163$(worse!)]

(a) $f(x) = \sqrt{x}$

$$d\sqrt{x}/dx \approx F(h) = \delta f(x)/2h$$

$$= [f(x+h) - f(x-h)]/2h$$

$$F(0.2) = [f(0.2+0.2) - f(0.2-0.2)]/[2(0.2)]$$

$$= [f(0.4) - f(0)]/0.4$$

$$= \sqrt{0.4}/0.4 = 1.5811387$$

$F(0.1) = [f(0.2+0.1) - f(0.2-0.1)]/[2(0.1)]$

$= [f(0.3) - f(0.1)]/0.2$

$\approx 0.2314948/0.2$

$= 1.157474$

(b) n=2: $F_1(0.1) = [2^2 F(0.1) - F(0.2)]/(2^2 - 1)$

$\approx [4(1.157474) - 1.5811387]/3$

$= 3.0487573/3$

$= 1.0162524$

7.4 dx^4/dx, $x = 1$, $h = 1$, $r = 2$; $F(h) = \delta f(x)/2h$

[Ans. $F(1)=8$, $F(0.5)=5$, $f_1(0.5)=4$(exact)]

(a) $f(x) = x^4$

$dx^4/dx \approx F(h) = \delta f(x)/2h$

$= [f(x+h) - f(x-h)]/2h$

$F(1) = [f(2) - f(0)]/2(1)$

$= 2^4/2 = 2^3 = 8$

$F(0.5) = [f(1.5) - f(0.5)]/2(0.5)$

$= [(1.5)^4 - (0.5)^4]/1$

$= (5.0625 - 0.0625)/1$

$= 5$

(b) n = 2: $F_1(0.5) = [2^2 F(0.5) - F(1)]/(2^2 - 1)$

$= [4(5) - 8]/3 = 4$

7.5 กำหนดให้ $f(x) = e^x$, $x = 0$ และ $F(h) = \Delta f(x)/h$

(a) จงประมาณค่า $f'(x)$ โดย $F(h)$, $h = 0.5, 0.1,$ และ 0.05

(b) จงสร้างตารางริชาร์ดสัน สำหรับ $F(0.5)$, $F(0.1)$ และ $F(0.05)$

[n = 1, m = 2]

(a) $f'(x) \approx F(h) = \Delta f(x)/h$

$$= [f(x+h) - f(x)]/h$$

$$F(0.5) = [f(0.5) - f(0)]/0.5$$
$$= [e^{0.5} - e^{0}]/0.5$$
$$= [1.646721 - 1]/0.5$$
$$= 1.297442$$

$$F(0.1) = [f(0.1) - f(0)]/0.1$$
$$= [e^{0.1} - e^{0}]/0.1$$
$$= [1.1051710 - 1]/0.1$$
$$= 1.05171$$

$$F(0.05) = [f(0.05) - f(0)]/0.05$$
$$= [e^{0.05} - e^{0}]/0.05$$
$$= 1.025422$$

(b) $F_1(0.05) = [2F(0.05) - F(0.1)]/(2 - 1)$

$$= [2(1.025422) - 1.05171]/1$$
$$= 0.999134$$

$$F_1(0.1) = [5F(0.1) - F(0.5)]/(5 - 1)$$
$$= [5(1.05171) - 1.297442]/4$$
$$= 0.990277$$

$$F_2(0.05) = [2^2F(0.05) - F(0.1)]/(2^2 - 1)$$
$$= [4(0.999134) - 0.990277]/3$$
$$= 1.0020663$$

ตารางริชาร์ดสัน

r	h	$F(h)$ $\tau(h) = O(h^1)$	$F_1(h)$ $\tau(h) = O(h^2)$	$F_2(h)$ $\tau(h) = O(h^3)$
	0.5	1.297442		
5	0.1	1.05171	0.990277	
2	0.05	1.025422	0.999134	1.0020863

7.6 ทำเช่นเดียวกับข้อ 7.5 แต่ใช้ $F(h) = \delta f(x)/2h$ เปรียบเทียบความแม่นยำของ $F_2(0.05)$ กับค่าที่ได้จากข้อ 7.5 [n = 2, m = 4]

(a) $f'(x) \approx F(h) = \delta f(x)/2h$

$$= [f(x+h) - f(x-h)]/2h$$

$$F(0.5) = [f(0.5) - f(-0.5)]/[2(0.5)]$$

$$= [e^{0.5} - e^{-0.5}]/1$$

$$= 1.0421906$$

$$F(0.1) = [f(0.1) - f(-0.1)]/[2(0.1)]$$

$$[e^{0.1} - e^{-0.1}]/0.2$$

$$= 1.0016675$$

$$F(0.05) = [f(0.05) - f(-0.05)]/[2(0.05)]$$

$$= [e^{0.05} - e^{-0.05}]/0.1$$

$$= 1.0004167$$

(b) $F_1(0.05) = [2^2 F(0.05) - F(0.1)]/(2^2 - 1)$

$$[2^2(1.0004167) - 1.0016675]/3$$

$$= 0.9999997$$

$$F_1(0.1) = [5^2F(0.1) - F(0.5)]/(5^2 - 1)$$

$$= [25(1.0016675) - 1.0421906]/24$$

$$= 0.9999790$$

$$F_2(0.05) = [2^4F(0.05) - F(0.1)]/(2^4 - 1)$$

$$= [16(0.9999997) - 0.999979]/15$$

$$= 1.000001$$

ตารางริชาร์ดสัน

r	h	$F(h)$ $\tau(h) = O(h^2)$	$F_1(h)$ $\tau(h) = O(h^4)$	$F_2(h)$ $\tau(h) = O(h^6)$
	0.5	1.0421906		
5	0.1	1.0016675	0.9999790	
2	0.05	1.0004167	0.9999997	-71.000001

7.7 ทำเช่นเดียวกับข้อ 7.5 แต่สำหรับ $f(x) = x^{(3/2)}$ เปรียบเทียบความแม่นยำของ $F_2(0.05)$ กับ $F(h)$

(a) $f'(x) \approx F(h) = \Delta f(x)/h$

$$= [f(x+h) - f(x)]/h$$

$$F(0.5) = [f(0.5) - f(0)]/0.5$$

$$= 0.7071067$$

$$F(0.1) = [f(0.1) - f(0)]/0.1$$

$$0.3162277$$

$$F(0.05) = [f(0.05) - f(0)]/0.05$$

$$= 0.2236067$$

$$F_1(0.05) = [2F(0.05) - F(0.1)]/(2 - 1)$$
$$= [2(0.2236067) - 0.3162277]/1$$
$$= 0.1309857$$
$$F_1(0.1) = [5F(0.1) - F(0.5)]/(5 - 1)$$
$$= [5(0.3162277) - 0.7071067114$$
$$= 0.2185079$$
$$F_2(0.05) = [2^2F(0.05) - F(0.1)]/(2^2 - 1)$$
$$= [4(0.1309857) - 0.2185079]/3$$
$$= 0.1018116$$

ตารางริชาร์ดสัน

r	h	$F(h)$ $\tau(h) = O(h^1)$	$F_1(h)$ $\tau(h) = O(h^2)$	$F_2(h)$ $\tau(h) = O(h^3)$
	0.5	0.7071067		
5	0.1	0.3162277	0.2185079	
	5	0.2236067	0.1309857	0.1018116

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
f(x)	3.96	1.00	0.74	2.04	4.00	5.96	7.50	6.44	8.44

จงใช้ค่าจากตารางเพื่อประมาณ

(a) $\int f(x)dx$ โดยใช้กฎจุดกึ่งกลาง บน [0,1], [1,2], และ [2,3]

(b) $\int f(x)dx$ โดยใช้ $T(h)$, $h = 1$ (3 panels)

(c) $\int f(x)dx$ โดยใช้ $S(h)$, $h = 1/2$ (6 panels)

(d) $\int f(x)dx$ โดยใช้การหาค่าอินทิกรัลแบบรอมเบิร์ก เริ่มจาก 3 panels

(e) $\int f(x)dx$ โดยใช้การหาค่าอินทิกรัลแบบรอมเบิร์ก เริ่มจาก 1 panel

(f) $\int f(x)dx$ โดยใช้ S(h) on [0,2] และกฎเศษสามส่วนแปดของซิมป์สัน บน [2,3.5]

หมายเหตุ ใน (a)-(d) $\int$ คือ $\int_0^3$ ใน (e) $\int$ คือ $\int_0^4$ และใน (f) $\int$ คือ $\int_0^{3.5}$

[Ans. (a) 9 (b) 10.47 (c) 9.49 (d) 9.49 (e) 17.773
(f) 3.6+9.90375 ≑ 13.501

(a) ประมาณ $\int_0^3 f(x)dx$ โดยใช้กฎจุดกึ่งกลาง บน [0,1], [1,2], และ [2,3]

$$\int_0^3 f(x)\,dx \approx (1-0)f[(0+1)/2]+(2-1)f[(1+2)/2]+(3-2)f[(2+3)/2]$$
$$= f(0.5) \text{ t } f(1.5) \text{ t } f(2.5)$$
$$= 1.0 \text{ t } 2.04 \text{ t } 5.96$$
$$= 9.0$$

(b) ประมาณ $\int_0^3 f(x)\,dx$ โดยใช้ T(h), h = 1 (3 panels)

0 1 2 3

$$\int_0^3 f(x)\,dx \approx T(h) = h\{[f(a) \text{ t } f(b)]/2 \text{ t } \Sigma_{interior}(h)\}$$
$$= 1\{[f(0) \text{ t } f(3)]/2 \text{ t } f(1) \text{ t } f(2)\}$$
$$= \{[3.96 \text{ t } 7.5]/2 \text{ t } 0.74 \text{ t } 4.01$$
$$= 10.47$$

(c) ประมาณ $\int_{0} f(x)dx$ โดยใช้ S(h), h = 1/2 (6 panels)

0   0.5   1   1.5   2   2.5   3

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6

$\int_{0}^{3} f(x)dx \approx S(h) = (h/3)\{f(a)$ t $f(b)$ t $4\Sigma_{odd}(h)$ t $2\Sigma_{even}(h)\}$

=(0.5/3){f(0) t f(3) t 4[f(0.5) t f(1.5) t f(2.5)]

t 2[f(1) t f(2)]}

= (0.5/3)[3.96 t 7.5 + 4(1.0 t 2.04 t 5.96)

t 2co.74 t 4.0)]

= 9.4933

(d) ประมาณ $\int_{0}^{3} f(x)dx$ โดยใช้การหาค่าอินทิกรัลแบบรอมเบิร์ก

เริ่มจาก 3 panels

k = 0 (h = 1): T(1) = 1{[f(0) t f(3)]/2 t f(1) t f(2)}

= IC3.96 t 7.5]/2 t 0.74 t 4.0}

= 10.47

k = 1 (h = 0.5): T(0.5) = (0.5){[f(0) t f(3)]/2 t f(0.5)

t f(1.5) t f(2) t f(2.5)}

= 0.5{[3.96 t 7.5]/2 t (1.0 t 0.74

t 2.04 t 4.0 t 5.96))

= 19.47/2 = 9.735

หรือ ใช้สูตร (11) Ti0.5) = (1/2)[T(1) t 1.0 Σ_{odd}(h/2)]

= (1/2){10.47 t 1.0[f(0.5) t f(1.5)

t f(2.5)]}

= (1/2)[10.47 t 1.0(1.0+2.04+5.96)]

= 19.4712 = 9.735

จากสูตร (14a) T_1(0.5) = C4Ti0.51 - T(1)]/3

= [4(9.735) - 10.47]/3 = 9.49

(e) ประมาณ $\int_0^4$ f (x)dx โดยใช้การหาค่าอินทิกรัลแบบรอมเบิร์ก

เริ่มจาก 1 panels

T(4) = 4{[f(0) t f(4)]/2} = 2i3.96 t 6.44, =2(12.4)=24.8

T(2) = (1/2)[T(4)+4f(2)] = (1/2)[24.8 t 4(4)] = 20.4

T(1) = (1/2){T(2) t 2[f(1) t f(3)]}

= (1/2)[20.4 t 2(0.74 t 7.5)]

= 36.88/2 = 16.44

Ti0.5) = (1/2){T(1) t 1[f(0.5) t fi1.5) t f(2.5) t f(3.5)]}

= 17.94

T_1(0.5) = [4T(0.5) - T(1)]/3 = [4(17.94) - 18.44]/3

= 17.773333

T_1(1) = [4T(1) - T(2)]/3 = [4(18.44) - 20.4113

= 17.766667

T_1(2) = [4T(2) - T(4)]/3 = [4(20.4) - 24.8]/3 = 16.933333

T_2(0.5) = [16T_1(0.5) - T_1(1)]/15

= [16(17.773333) - 17.786667]/15 = 17.772444

T_2(1) = [16T_1(1) - T_1(2)]/15

= C16i17.786667) - 18.933333]/15 = 17.710222

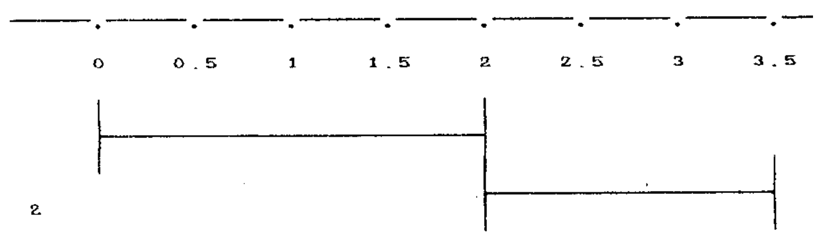
T_3(0.5) = [64T_2(0.5) - T_2(1)]/63

= [64(17.772444) - 17.710222]/63 = 17.773431

ตารางรอมเบิร์ก

h	T_0	T_1	T_2	T_3
4	24.8			
2	20.4	18.333333		
1	18.44	17.786667	17.710222	
0.5	17.94	17.773333	17.772444	17.773431

(f) $\int_0^{3.5} f(x)dx$ โดยใช้ $S(h)$ บน $[0,2]$ และ Simpson's 3/8 บน $[2,3.5]$



$$\int_0^2 f(x)dx \approx S(h) = (0.5/3)\{f(0) + f(2) + 4[f(0.5) + f(1.5)] + 2f(1)\}$$
$$= (0.5/3)[3.96 + 4.0 + 4(1.0 + 2.04) + 2(0.74)]$$
$$= (0.5/3)(21.6) = 3.6$$

$$\int_2^{3.5} f(x)dx \approx (3h/8)[f(2) + 3f(2.5) + 3f(3) + f(3.5)]$$
$$= [3(0.5)/8][4.0 + 3(5.96) + 3(7.5) + 8.44]$$
$$= [3(0.5)/8](52.82) = 9.90375$$

ดังนั้น $\int_0^{3.5} f(x)dx \approx 3.6 + 9.90375 = 13.50375$

7.9

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
f(x)	150	149	142	123	86	25	99	137	151	153	155

จงใช้ค่าจากตารางเพื่อประมาณ

(a) $\int f(x)dx$ โดยใช้การหาค่าอินทิกรัลแบบรอมเบิร์ก เริ่มจาก 1 panel
[**Ans.** 888]

(b) $\int f(x)dx$ โดยใช้สูตรตัวแก้ของอาดามส์ (18a) ของหัวข้อ 7.3B
[**Ans.** 307]

(c) $\int f(x)dx$ โดยใช้สูตรตัวแก้ของอาดามส์ $h = -2$ [**Ans.** 299.5]

(d) $\int f(x)dx$ โดยใช้กฎเศษหนึ่งส่วนสามของซิมป์สัน บน [0,4] และ
กฎเศษสามส่วนแปดของซิมป์สัน บน [4,10]

(e) $\int f(x)dx$ โดยใช้กฎเศษสามส่วนแปดของซิมป์สัน บน [0,6] และ
กฎเศษหนึ่งส่วนสามของซิมป์สัน บน [6,10]

หมายเหตุ $\int$ ใน (a) $\int_2^{10}$, (b) $\int_{18}^{20}$, (c) $\int_0^{2}$, (d) $\int_0^{10}$, (e) $\int_0^{10}$

(a) ประมาณ $\int_2^{10} f(x)dx$ โดยการใช้การหาค่าอินทิกรัลแบบรอมเบิร์ก

เริ่มจาก 1 panel

$h = 10 - 2 = 8$

$k = 0\ (h = 8)$: $T(8) = 8\{[f(2) \text{ t } f(10)]/2\}$

$= (8/2)(149 \text{ t } 25) = 696$

$k = 1\ (h = 4)$: $T(4) = (1/2)[T(8) \text{ t } 8f(6)]$

$= (1/2)[696 \text{ t } 8(123)] = 840$

$k = 2\ (h = 2)$: $T(2) = (1/2)\{T(4) \text{ t } 4[f(4) \text{ t } f(6)]\}$

$= (1/2)[840 \text{ t } 4(142 \text{ t } 86)] = 876$

$$T_1(2) = [2^2 T(2) - T(4)]/(2^2 - 1)$$
$$= [4(876) - 840]/3 = 888$$
$$T_1(4) = [4T(4) - T(8)]/3$$
$$= [4(840) - 696]/3 = 888$$
$$T_2(2) = [16T_1(2) - T_1(4)]/15$$
$$= [16(888) - 888]/15 = 888$$

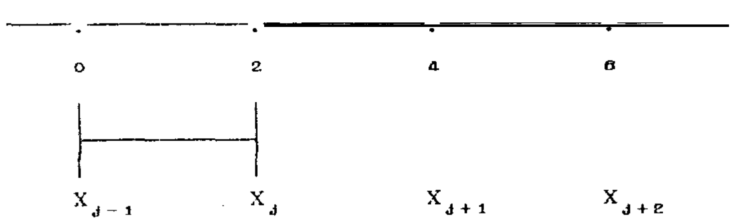
ตารางรอมเบิร์ก

k	h	T	T_1	T_2
0	8	636		
1	4	840	888	
2	2	876	888	888

(b) ประมาณ $\int_{18}^{20} f(x)dx$ โดยใช้สูตรตัวแก้ของอาดามส์ (18a) ของหัวข้อ 7.3B

$$\int_{18}^{20} f(x)dx \approx (2/24)[f(14) - 5f(16) + 19f(18) + 9f(20)]$$
$$= (2/24)[137 - 5(151) + 19(153) + 9(155)]$$
$$= 307$$

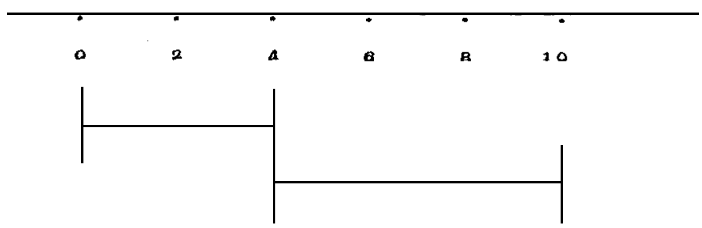
(c) ประมาณ $\int_{0}^{2} f(x)dx$ โดยใช้สูตรตัวแก้ของอาดามส์ h = -2 [**Ans.** 299.5]



$$\int_0^8 f(x)dx \approx (2/24)[f(6) - 5f(4)\ t\ 19f(2)\ t\ 9f(0)]$$
$$= (1/12)[123 - 5(142) + 19(149) + 9(150)]$$
$$= 3594/12 = 299.5$$

(d) ประมาณ $\int_0^{10} f(x)dx$ โดยใช้กฎเศษหนึ่งส่วนสามของซิมป์สัน บน [0,4] และ

กฎเศษสามส่วนแปดของซิมป์สัน บน [4,10]



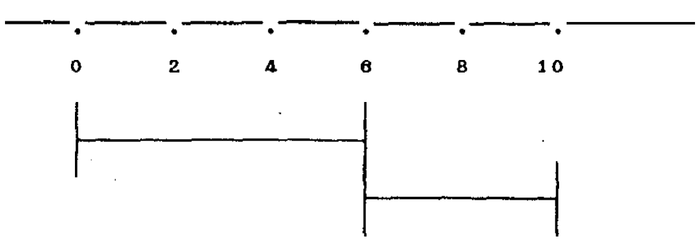
$$\int_0^4 f(x)dx \approx (2/3)[f(0)\ t\ 4f(2)\ t\ f(4)]$$
$$= (2/3)[150\ t\ 4(149)\ t\ 1421 = 592$$

$$\int_4^{10} f(x)dx \approx [3(2)/8][f(4)\ t\ 3f(6)\ t\ 3f(8)\ t\ f(10)]$$
$$= (6/8)[142\ t\ 3(123)\ t\ 3(86)\ t\ 251 = 595.5$$

$$\int_0^{10} f(x)dx \approx 592\ t\ 595.5 = 1187.5$$

(e) ประมาณ $\int_0^{10} f(x)dx$ โดยใช้กฎเศษสามส่วนแปดของซิมป์สัน บน [0,6] และ

กฎเศษหนึ่งส่วนสามของซิมป์สัน บน [6,10]



$$\int_{0}^{6} f(x)dx \approx [3(2)/8][f(0)\ t\ \ 3f(2)\ t\ \ 3f(4)\ t\ \ f(6)]$$

$$= (6/8)[150\ t\ 3(149)\ t\ 3(142)\ t\ 1231 = 859.5$$

$$\int_{a}^{10} f(x)dx = (2/3)[f(6)\ t\ \ 4f(8)\ t\ \ f(10)]$$

$$= (2/3)[123\ t\ 4(86)\ t\ 251 = 328$$

$$\int_{a}^{10} f\ (x)dx \approx 659.5\ t\ 326 = 1187.5$$

7.10 จงคำนวณถึง 5s โดยใช้การหาค่าอินทิกรัลแบบรอมเบิร์ก ให้เริ่มต้นด้วย n_o panels

(a) $\int_{-4}^{0} x^5\ dx\ ,\ n_o = 1$

(b) $\int_{0}^{1} e^{-x}\ dx\ ,\ n_o = 2$

(c) $\int_{-1/2}^{1/2} e^{-x^2}\ dx\ ,\ n_o = 1$

(d) $\int_{-2}^{2} (x^4-x)dx\ ,\ n_o = 1$

ผลจากการใช้ซับรูทีน ROMBERG ในภาคผนวก ค สำหรับข้อ (a)-(d) คือ

(a)

```
ENTER a,b,N,MAXROWS,NUMSIG UNIT 5? con
-40185

T( 1, 1)=  -2048.000000
T( 2, 1)=-1088.000000
T( 2, 2)=  -768.000000
T(  3, 1)= -788.000000
T( 3, 2)=  -688.000000
T( 3, 3)=  -682.666700
T(  4, 1)= -709.250000
T( 4, 2)=  -683.000000
T( 4, 3)=  -682.666700
T( 4, 4)=  -682.666700
ESTIMATED INTEGRAL IS T( 4, 4) -682.666700
ENTER 1 TO CONTINUE,2 TO STOP 2
stop - Program terminated.
```

h	$T_0=T$	$T_1=S$	T_2
4	-2048		
2	-1088	-768	
1	-788	-688	-682 2/3

(b)

```
ENTER a,b,N,MAXROWS,NUMSIG UNIT 5? con
0 1 2 1 0 5

T( 1, 1)=      .645235
T( 2, 1)=     .635409
T( 2, 2)=      .632134
T( 3, 1)=     .632943
T( 3, 2)=      .632121
T( 3, 3)=      .632121
T( 4, 1)=     .632326
T( 4, 2)=      .632121
T( 4, 3)=      .632121
T( 4, 4)=      .632121
ESTIMATED  INTEGRAL  IS T( 4, 4)      .632121
ENTER  1  TO  CONTINUE,2  TO  STOP
```

h	$T_0=T$	$T_1=S$	T_2
1/2	0.655235		
1/4	0.635409	0.632134	
1/8	0.632943	0.632121	0.632121

(c)

```
ENTER a,b,N,MAXROWS,NUMSIG UNIT 5? con
-.5 .5 1 6 5

T( 1, 1)=      .778801
T( 2, 1)=     .889400
T( 2, 2)=      .926267
T( 3, 1)=     .914407
T( 3, 2)=      .922742
T( 3, 3)=      .922507
T( 4, 1)=     .920531
T( 4, 2)=      .922573
T( 4, 3)=      .922562
T( 4, 4)=      .922562
T( 5, 1)=     .922055
T( 5, 2)=      .922563
T( 5, 3)=      .922562
T( 5, 4)=      .922562
T( 5, 5)=      .922562
OR 205(H) ESTIMATED INTEGRAL IS T( 5, 5)      .922562
```

(d)

```
ENTER a,b,N,MAXROWS,NUMSIG UNIT 5? con
-2 2 1 6 5

T( 1, 1)=     64.000000
T( 2, 1)=    32.000000
T( 2 , 2)=    21.333330
T( 3, 1)=    18.000000
T( 3 , 2)=    13.333330
T( 3, 3)=     12.800000
T( 4, 1)=    14.125000
T( 4 , 2)=    12.833330
T( 4 , 3)=    12.800000
T( 4 , 4)=    12.800000
ESTIMATED INTEGRAL IS T( 4, 4)      12.800000
```

7.11 จงใช้ n-point Gauss quadrature เพื่อประมาณอินทิกรัลที่กำหนดให้

(a) $\int_0^3 x^3 dx$, n=2 (b) $\int_{-1}^{2} e^{-x^2}\cos x dx$, n=3 (c) $\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\sin x dx$, n=4

(a) a = 0, b = 3

$x_1 = 0 + [(3 - 0)/2][(1/\sqrt{3}) + 1]$

$= 2.3660253$, $\gamma_1 = 1$

$x_2 = 0 + [(3 - 0)/2][(-1/\sqrt{3}) + 1]$

$= 0.6339747$, $\gamma_2 = 1$

$\int_0^3 x^3 dx \approx [(3 - 0)/2][1f(x_1) + 1f(x_2)]$

$= (3/2)[x_1^3 + x_2^3]$

$= 1.5(13.245188 + 0.2548095)$

$= 1.5(13.499997)$

$= 20.249995$

(b) โปรแกรมภาษาฟอร์แทรน และผลการวิ่งโปรแกรมสำหรับปัญหานี้คือ

```
      DIMENSION X(3),GAMMA(3)
      FUNC(X)=EXP(-X**2)*COS(X)
      DATA A,B/-1.0,2.0/
      DATA     X/-.6618949,1.6618949,0.5/
      DATA GAMMA/.5555556,.5555556,.8888889/
      OPEN(6,FILE='A:PR711.OUT',STATUS='NEW')
      PINT=0
      DO 10 I=1,3
      Y=FUNC(X(I))
      Z=GAMMA(I)*Y
      WRITE(6,1)I,X(I),Y,Z
1     FORMAT(1X,'X(',I1,')=',F12.7,' F(X)=',F12.7,' GAMMA(I)*F(X(I))='
     +,F12.7)
10    PINT=PINTtZ
      PINT=(B-A)/2.*PINT
      WRITE(6,2)PINT
2     FORMAT(1X,'ESTIMATED PROPER INTEGRAL = ',F12.7)
      STOP
      END
```

```
X(l)=    -.6618949 F(X)=     .5089983 GAMMA(I)*F(X(I))=     .2827769
X(2)=    1.6618950  F(X)=   -.0057469 GAMMA(I)*F(X(I))=    -.0031927
X(3)=      . 5000000 F(X)=    .6834620 GAMMA(I)*F(X(I))=     .6075218
ESTIMATED  PROPER  INTEGRAL  =     1.3306590
```

(c) โปรแกรมภาษาฟอร์แทรน และผลการวิ่งโปรแกรมสำหรับปัญหานี้คือ

```
      DIMENSION X(4),GAMMA(4)
      FUNC(X)=EXP(-X**2)*SIN(X)
      DATA A,B/-1.0,1.0/
      DATA      X/-.8611363,.8611363,-.3399810,.3399810/
      DATA GAMMA/.3478548,.3478548,.6521452,.6521452/
      OPEN(6,FILE='A:PR711C.OUT',STATUS='NEW')
      PINT=0
      DO 10 I=1,4
      Y=FUNC(X(I))
      Z=GAMMA(I)*Y
      WRITE(6,1)I,X(I),Y,Z
1     FORMAT(1X,'X(',I1,')=',F12.7,' F(X)=',F12.7,' GAMMA(I)*F(X(I))='
     +,F12.7)
10    PINT=PINT+Z
      PINT=(B-A)/2.*PINT
      WRITE(6,2)PINT
2     FORMAT(1X,'ESTIMATED PROPER INTEGRAL = ',F12.7)
      STOP
      END
 X(1)=    -.8611363 F(X)=    -.3613681 GAMMA(I)*F(X(I))=    -.1257036
 X(2)=     .8611363 F(X)=     .3613681 GAMMA(I)*F(X(I))=     .1257036
 X(3)=    -.3399810 F(X)=    -.2970687 GAMMA(I)*F(X(I))=    -.1937319
 X(4)=     .3399810 F(X)=     .2970687 GAMMA(I)*F(X(I))=     .1937319
 ESTIMATED PROPER INTEGRAL =      .0000000
```

7.12 จงใช้ (n_o+2)-point Gauss quadrature สำหรับอินทิกรัลในข้อ 7.10 (a)-(d)

(a) โปรแกรมภาษาฟอร์แทรน และผลการวิ่งโปรแกรมสำหรับปัญหานี้คือ

```
      DIMENSION X(3),GAMMA(3),XI(3)
      FUNC(X)=X**5
      DATA A,B/-4.0,0.0/
      DATA XI/.7745967,-.7745967,.0/
      DATA GAMMA/.5555556,.5555556,.8888889/
      OPEN(6,FILE='B:PR712A.OUT',STATUS='NEW')
      DO 90 I = 1,3
90    X(1) = A t (B-A)/2.*(XI(I) t 1.)
      PINT=0
      DO 10 I=1,3
      Y=FUNC(X(I))
      Z=GAMMA(I)*Y
      WRITE(6,1)I,X(I),Y,Z
1     FORMAT(1X,'X(',I1,')=',F12.7,' F(X)=',F12.7,' GAMMA(I)*F(X(I))='
     +,F12.7)
10    PINT=PINTtZ
      PINT=(B-A)/2.*PINT
      WRITE(6,2)PINT
2     FORMAT(1X,'ESTIMATED PROPER INTEGRAL = ',F12.7)
      STOP
      END
```

```
   X(l)=   -.4508066 F(X)=   -.0186188 GAMMA(I)*F(X(I))=   -.0103438
X(2)=  -3.5491930 F(X)=-563.1814000  GAMMA(I)*F(X(I))=-312.8786000
X(3)=  -2.01300000 F(X)= -32.0000000 GAMMA(I)*F(X(I))= -28.4444400
ESTIMATED PROPER INTEGRAL ▫ -682.6667000
```

(b) โปรแกรมภาษาฟอร์แทรน และผลการวิ่งโปรแกรมสำหรับปัญหานี้คือ

```
      DIMENSION X(4),GAMMA(4),XI(4)
      FUNC(X)=EXP(-X)
      DATA A,B/0.0,1.0/
      DATA XI/-.8611363,.8611363,-.3399810,.3399810/
      DATA GAMMA/.3478548,.3478548,.6521452,.6521452/
      OPEN(6,FILE='B:PR712B.OUT',STATUS='NEW')
      DO 90 I=1,4
90    X(I) = A+(B-A)/2.*(XI(I)+1.0)
      PINT=0
      DO lo I=1,4
      Y=FUNC(X(I))
      Z=GAMMA(I)*Y
      WRITE(6,1)I,X(I),Y,Z
1     FORMAT(1X,'X(',I1,')=',F12.7,' F(X)=',F12.7,' GAMMA(I)*F(X(I))='
     +,F12.7)
```

```
10    PINT=PINT+Z
      PINT=(B-A)/2.*PINT
      WRITE(6,2)PINT
2     FORMAT(1X,'ESTIMATED PROPER INTEGRAL = ',F12.7)
      STOP
      END
```

```
 X(l)=    .0694318 F(X)=    .9329237 GAMMA(I)*F(X(I))=    .3245220
X(2)=    .9305682 F(X)=    .3943296 GAMMA(I)*F(X(I))=    .1371695
X(3)=    .3300095 F(X)=    .7189169 GAMMA(I)*F(X(I))=    .4688382
X(4)=    .6699905 F(X)=    .5117134 GAMMA(I)*F(X(I))=    .3337115
ESTIMATED PROPER INTEGRAL =     .6321205
```

(c) และ (d) ใช้โปรแกรมเดียวกับข้อ 7.12(a) โดยเปลี่ยน FUNC(X) และ

ค่าของ A และ B ดังนี้

(c) FUNC(X) = EXP(-X**2), A = -0.5, B = 0.5

(d) FUNC(X) = X**4 - X, A = -2.0, B = 2.0

ผลการวิ่งโปรแกรมคือ

(c)

```
 X(l)=    .3872983 F(X)=    .8607080 GAMMA(I)*F(X(I))=    .4781711
X(2)=   -.3872983 F(X)=    .8607080 GAMMA(I)*F(X(I))=    .4781711
X(3)=    .0000000 F(X)=   1.0000000 GAMMA(I)*F(X(I))=    .8888889
ESTIMATED PROPER JNTEGRAL =     .9226156
```

(d)

```
 X(l)=  1.5491930  F(X)=   4.2108070  GAMMA(I)*F(X(I))=  2.3393380
X(2)= -1.5491930  F(X)=   7.3091940  GAMMA(I)*F(X(I))=  4.0606640
X(3)=    .0000000 F(X)=    .0000000 GAMMA(I)*F(X(I))=    .0000000
ESTIMATED PROPER INTEGRAL =   12.8000000
```

7.13 ประมาณค่า $\int_0^4 \sqrt{x}\,dx$ โดยใช้ (a) 3-point Gauss quadrature

(b) 5-point Gauss quadrature

(a) โปรแกรมภาษาฟอร์แทรน และผลการวิ่งโปรแกรมสำหรับปัญหานี้คือ

```
C*****PR713A*****
C*****Problem 7.13a*****
C*****3-point GAUSS QCADRATURE for integral of SQRT(X)*****
C*****over [0,4]*****
      DIMENSION XI(3),X(3),GAMMA(3)
      FUNC(X)=SQRT(X)
      DATA A,B/0.0,4.0/
C*****GAUSS SAMPLE POINTS (XI's)*****
C*****and GAUSS SAMPLE WEIGHTS (GAMMA's)*****
C*****from TABLE 7.5-1*****
      XI(1)=SQRT(.6)
      XI(2)=-XI(1)
      XI(3)=0
      GAMMA(1)=5./9.
      GAMMA(2)=GAMMA(1)
      GAMMA(3)=8./9.
      OPEN(6,FILE='B:PR713A.OUT',STATUS='NEW')
      WRITE(6,5)
5     FORMAT(1X,'Problem 7.13a, 3-Point Gauss Quadrature'/)
      DO 11 I=1,3
11    X(I)=A+(B-A)/2*(XI(I)+1)
      PINT=0
      DO 10 I=1,3
      Y=FUNC(X(I))
      Z=GAMMA(I)*Y
      WRITE(6,1)I,X(I),Y,Z
1     FORMAT(1X,'X(',I1,')=',F12.7,' F(X)=',F12.7,
     t' GAMMA(I)*F(X(I))=',F12.7)
10    PINT=PINT+Z
      PINT=(B-A)/2.*PINT
      WRITE(6,2)PINT
2     FORMAT(/1X,'ESTIMATED DEFINITE INTEGRAL = ',F12.7)
      STOP
      END
```

```
 Problem 7.13a, 3-Point Gauss Quadrature

X(1)=   3.5491930 F(X)=  1.8839300 GAMMA(I)*F(X(I))=   1.0466280
X(2)=    .4508066 F(X)=   .6714213 GAMMA(I)*F(X(I))=    .3730119
S(3)=   2.0000000 F(X)=  1.4142140 GAMMA(I)*F(X(I))=   1.2570790

ESTIMATED DEFINITE INTEGRAL =    5.3534370
```

(b) โปรแกรมภาษาฟอร์แทรน และผลการวิ่งโปรแกรมสำหรับปัญหานี้คือ

```
C*****PR713B*****
C*****Problem 7.13b*****
C*****5-point GAUSS QUADRATURE for INTEGRAL of SQRT(X)*****
C*****over [0,4]*****
      DIMENSION XI(5),X(5),GAMMA(5)
      FUNC(X)=SQRT(X)
      DATA A,B/0.0,4.0/
C*****GAUSS SAMPLE POINTS (XI's)*****
C*****and GAUSS SAMPLE WEIGHTS (GAMMA's)*****
C*****from TABLE 7.5-1*****
      DATA XI/-.9061798,.9061798,-.5384693,.5384693,0./
      DATA GAMMA/.2369269,.2369269,.4786287,.4786287,.5688889/
      OPEN(6,FILE='B:PR713B.OUT',STATUS='NEW')
      WRITE(6,5)
5     FORMAT(1X,'Problem 7.13b, 5-Point Gauss Quadrature'/)
      DO 11 I=1,5
11    X(I)=A+(B-A)/2*(XI(I)+1)
      PINT=0
      DO 10 I=1,5
      Y=FUNC(X(I))
      Z=GAMMA(I)*Y
      WRITE(6,1)I,X(I),Y,Z
1     FORMAT(1X,'X(',I1,')=',F12.7,' F(X)=',F12.7,
     t' GAMMA(I)*F(X(I))=',F12.7)
10    PINT=PINT+Z
      PINT=(B-A)/2.*PINT
      WRITE(6,2)PINT
2     FORMAT(/1X,'ESTIMATED DEFINITE INTEGRAL = ',F12.7)
      STOP
      END
```

```
 Problem 7.13b, 5-Point Gauss Quadrature

X(1)=    .1876404 F(X)=    .4331748 GAMMA(I)*F(X(I))=    .1026308
X(2)=   3.8123600 F(X)=   1.9525260 GAMMA(I)*F(X(I))=    .4626060
X(3)=    .9230614 F(X)=    .9607608 GAMMA(I)*F(X(I))=    .4598477
X(4)=   3.0769390 F(X)=   1.7541200 GAMMA(I)*F(X(I))=    .8395724
X(5)=   2.0000000 F(X)=   1.4142140 GAMMA(I)*F(X(I))=    .8045304

ESTIMATED DEFINITE INTEGRAL =    5.3383750
```