4.1* In a) and b), solve the equation so that you are assured that Gauss-Seidel iteration will converge. Then, with $x_0 = 0$, do four iterations.

(a)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 6x_2 - x_3 &= -3 \\ -8x_1 + 3x_2 + x_3 &= -4 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 &= 5 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 \qquad + 3x_4 \qquad &= 1 \\ 5x_1 \qquad + x_3 \qquad - x_5 &= 3 \\ 4x_2 + x_3 - x_4 \qquad &= -1 \\ 3x_3 + x_4 - x_5 &= -4 \\ x_1 + x_2 \qquad\qquad - 4x_5 &= -3 \end{aligned}$$

Are coefficient matrices in a) and b) strictly dominant matrices?

(a) <u>วิธีที่ 1</u> (E_1) $2x_1 - 6x_2 - x_3 = -3$

(E_2) $-8x_1 + 3x_2 + x_3 = -4$

(E_3) $x_1 + x_2 - 3x_3 = 5$

เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบนี้คือ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -6 & -1 \\ -8 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

ซึ่งเป็น strictly dominant natrix ซึ่งมี

a_{12} strictly dominant entry ของ (E_1)

a_{21} strictly dominant entry ของ (E_2)

a_{33} strictly dominant entry ของ (E_3)

ดังนั้นเพื่อทำให้การใช้วิธี **Gauss-Seidel** ลู่เข้า

เราอาจจะแก้สมการ (E_1) เพื่อหาค่าของ x_2, $x_2^{(new)} = (-1/6)(-3-2x_1+x_3)$

แล้วแก้สมการ (E_2) เพื่อหาค่าของ x_1, $x_1^{(new)} = (-1/8)(-4-3x_2-x_3)$

แล้วแก้สมการ (E_3) เพื่อหาค่าของ x_3, $x_3^{(new)} = (-1/3)(5-x_1-x_2)$

ผลจากการทำซ้ำ 4 ครั้งคือ

x_1' =	CD.68750	0.50000	-1.270631
x_2' =	CO.69401	0.94097	-1.121701
x_3' =	co.70414	0.91628	-1.125661
x_4' =	co.70514	0.92235	-1.124171

หรือ <u>วิธีที่ 2</u> เราอาจจะแก้สมการ (E_3) เพื่อหาค่าของ x_3

แล้วแก้สมการ (E_1) เพื่อหาค่าของ x_2

แล้วแก้สมการ (E_2) เพื่อหาค่าของ x_1

ผลจากการทำซ้ำ 4 ครั้งคือ

x_1' =	CO.58333	0.77780	-1.666701
x_2' =	CO.66460	0.89661	-1.123001
x_5' =	co.70739	0.91613	-1.139601
x_4' =	CO.70584	0.92210	-1.119601

และ <u>วิธีที่ 3</u> เพื่อทำให้สามารถใช้ซับรูทีน GS ในภาคผนวก ค (บทที่ 4) ได้

กำหนดให้ (E_1) $-8x_1 + 3x_2 + x_3 = -4$

(E_2) $2x_1 - 6x_2 - x_3 = -3$

(E_3) x_1 t $x_2 - 3x_3 = 5$

ซึ่งเป็น equivalent system กับ system ในวิธีที่ 1

ในซับรูทีน EQ แก้สมการ (E_1) เพื่อหาค่าของ x_1, $x_1^{(new)} = (1/8)(4+3x_2+x_3)$

แล้วแก้สมการ (E_2) เพื่อหาค่าของ x_2, $x_2^{(new)} = (1/6)(3+2x_1-x_3)$

แล้วแก้สมการ (E_3) เพื่อหาค่าของ x_3, $x_3^{(new)} = (1/3)(-5+x_1+x_2)$

```
C*****SUBROUTINE EQ*****
C*****FOR FINDING XNEW(I) FROM E(I)*****
C*****THIS SUBROUTINE IS TO BE CHANGED FUNCTION OF XNEW(I)*****
      SUBROUTINE EQ(N,X,XOLD,XNEW)
      DIMENSION X(N),XNEW(N),XOLD(N)
      DO 10 I=1,N
10    XOLD(I)=X(I)
      XNEW(1)=(4+3*X(2)+X(3))/8
      X(1)=XNEW(1)
      XNEW(2)=(3+2*X(1)-X(3))/6
      X(2)=XNEW(2)
      XNEW(3)=(-5+X(1)+X(2))/3
      X(3)=XNEW(3)
      RETURN
      END
```

ผลจากการใช้ซับรูทีน GS คือ

```
ENTER NO. OF X'S, MATRIX A (BY COLUMN)UNIT 5? CON
3 -8 2 1 3 -6 1 1 -1 -3

ENTER VECTOR B-4 -3 5

ENTER INITIAL GUESSES XO(1),....,XO(N)0 0 0

  1    .500000    .666667 -1.277778
  2    .590278    .909722 -1.166667
  3    .695313    .926215 -1.126157
  4    .706561    .923213 -1.123409
  5    .705779    .922494 -1.123909
  6    .705447    .922467 -1.124029
  7    .705422    .922479 -1.124033
  8    .705425    .922481 -1.124031
  9    .705426    .922481 -1.124031
 10    .705426    .922481 -1.124031
X(I) APPROXS X-BAR(I) TO  7S
  1    .705426    2    .922481    3 -1.124031
```

(b) <u>วิธีที่ 1</u>

$$
\begin{array}{ll}
(E_1) & x_1 - x_2 + 3x_4 = 1 \\
(E_2) & 5x_1 + x_3 - x_5 = 3 \\
(E_3) & 4x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\
(E_4) & 3x_3 + x_4 - x_5 = -4 \\
(E_5) & x_1 + x_2 - 4x_5 = -3
\end{array}
$$

เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบนี้คือ

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}
$$

ซึ่งเป็น strictly dominant matrix ซึ่งมี

a_{14} strictly dominant entry ของ (E_1)

a_{21} strictly dominant entry ของ (E_2)

a_{32} strictly dominant entry ของ (E_3)

a_{43} strictly dominant entry ของ (E_4)

a_{55} strictly dominant entry ของ (E_5)

ดังนั้นเพื่อทำให้การใช้วิธี Gauss-Seidel ลู่เข้า

เราอาจจะแก้สมการ (E_1) เพื่อหาค่าของ x_4, $x_4^{(new)} = (1/3)(1-x_1+x_2)$

แล้วแก้สมการ (E_2) เพื่อหาค่าของ x_1, $x_1^{(new)} = (1/5)(3-x_3+x_5)$

แล้วแก้สมการ (E_3) เพื่อหาค่าของ x_2, $x_2^{(new)} = (1/4)(-1-x_3+x_4)$

แล้วแก้สมการ (E_4) เพื่อหาค่าของ x_3, $x_3^{(new)} = (1/3)(-4-x_4+x_5)$

แล้วแก้สมการ (E_5) เพื่อหาค่าของ x_5, $x_5^{(new)} = (-1/4)(-3-x_1-x_2)$

ผลจากการทำซ้ำ 4 ครั้งคือ

x_1'= C0.600000 -0.166667 -1.444444 0.333333 0.8563331

x_2' = [1.060600 0.130560 -1.073100 0.077776 1.0476001

x_3' = C1.024185 0.024120 -0.991852 0.023333 1.0127'641

x_4'= C1.000790 -0.002040 -0.995960 -0.000020 0.9996901

และ <u>วิธีที่ 2</u> เพื่อทำให้สามารถใช้ซับรูทีน GS ในภาคผนวก ค (บทที่ 4) ได้กำหนดให้

(E_1) $5x_1$ t x_3 $- x_5 = 3$

(E_2) $4x_2 + x_3 - x_4 = -1$

(E_3) $3x_3$ t $x_4 - x_5 = -4$

(E_4) $x_1 - x_2 + 3x_4 = 1$

(E_5) $x_1 + x_2 - 4x_5 = -3$

ซึ่งเป็น equivalent system กับ system ในวิธีที่ 1

ในซับรูทีน EQ แก้สมการ (E_1) เพื่อหาค่าของ x_1, $x_1^{(new)} = (1/5)(3-x_3+x_5)$

แล้วแก้สมการ (E_2) เพื่อหาค่าของ x_2, $x_2^{(new)} = (1/4)(-1-x_3+x_4)$

แล้วแก้สมการ (E_3) เพื่อหาค่าของ x_3, $x_3^{(new)} = (1/3)(-4-x_4+x_5)$

แล้วแก้สมการ (E_4) เพื่อหาค่าของ x_4, $x_4^{(new)} = (1/3)(1-x_1+x_2)$

แล้วแก้สมการ (E_5) เพื่อหาค่าของ x_5, $x_5^{(new)} = (-1/4)(-3-x_1-x_2)$

```
      SUBROUTINE EQ(N,X,XOLD,XNEW)
      DIMENSION X(N),XNEW(N),XOLD(N)
      DO 10 I=1,N
10    XOLD(I)=X(I)
      XNEW(1)=(3-X(3)+X(5))/5
      X(1)=XNEW(1)
      XNEW(2)=(-1-X(3)+X(4))/4
      X(2)=XNEW(2)
      XNEW(3)=(-4-X(4)+X(5))/3
      X(3)=XNEW(3)
      XNEW(4)=(1-X(1)+X(2))/3
      X(4)=XNEW(4)
      XNEW(5)=(3+X(1)+X(2))/4
      X(5)=XNEW(5)
      RETURN
      END
```

ผลจากการใช้ซับรูทีน GS คือ

```
ENTER NO. OF X'S, MATRIX A (BY COLUMN)UNIT 5? con
5 5 0 0 1 1 0 4 0 -1 1 1 1 3 0 0 0 -1 1 3 0 -1 0 -1 0 4

ENTER VECTOR B3 -1 -1 1 -3

ENTER INITIAL GUESSES XO(1),...,XO(N) 0 0 0 0 0

 1    .600000  -.250000 -1.333333   .050000   .837500
 2   1.034167   .095833 -1.070833   .020556  1.032500
 3   1.020667   .022847  -.996019   .000727  1.010878
 4   1.001379  -.000814  -.996616  -.000731  1.000141
 5    .999352  -.001029  -.999709  -.000127   .999581
 6    .999858  -.000104 -1.000098   .000013   .999938
 7   1.000007   .000028 -1.000025   .000007  1.000009
 8   1.000007   .000008  -.999999   .000000  1.000004
 9   1.00000:   .000000  -.999999   .000000  1.000000
10   1.000000   .000000 -1.000000   .000000  1.000000
11  '1.000000   .000000 -1.000000   .000000  1.000000
12   1.000000   .000000 -1.000000   .000000  1.000000
X(1 ) APPROXS X-BAR(I) TO 7S
 1 1.000000   2  .000000   3 -1.000000  4  .000000   5 1.000000
```

4.2 Let

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Show that x = Cl -1 11' is the solution of both

Ax = [0 -1 51' and Bx = C-2 -3 21'.

(b)* For both systems in part a), solve (E_i) for x_i, i=1,2,3 and perform two iterations of Gauss-Seidel iteration starting with $x_0 = 0$. Why should you expect the iteration for Ax = b to converge if continued ? เพราะเมตริกซ์ A เป็น positive definite matrix

(a) แสดงว่า $Ax = [0\ \ -1\ \ 5]'$

$$Ax = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

แสดงว่า $Bx = [-2\ \ -3\ \ 2]'$

$$Bx = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(b) **$Ax = [0\ \ -3\ \ 5]'$**

ในซับรูทีน EQ นั้น แก้สมการ E_i เพื่อหา x_i, $i = 1, 2, 3$

```
C*****SUBROUTINE EQ*****
C*****FOR FINDING XNEW(I) FROM E(I)*****
C*****THIS SUBROUTINE IS TO BE CHANGED FUNCTION OF XNEW(I)
      SUBROUTINE EQ(N,X,XOLD,XNEW)
      DIMENSION X(N),XNEW(N),XOLD(N)
      DO 10 I=1,N
10    XOLD(I)=X(I)
      XNEW(1)=(2*X(3)-3*X(2))/5
      X(1)=XNEW(1)
      XNEW(2)=(-1+2*X(3)-3*X(1))/2
      X(2)=XNEW(2)
      XNEW(3)=(5+2*X(1)+2*X(2))/5
      X(3)=XNEW(3)
      RETURN
      END
```

จากการใช้ซับรูทีน GS ได้ผลดังนี้

```
ENTER INITIAL GUESSES XO(1),...,XO(N)O O O

  1   .000000  -.500000   .800000
  2   .620000  -.630000   .996000
  3   .776400  -.668600  1.043120
  4   .818406  -.684492  1.053566
  5   .832122  -.694616  1.055002
  6   .838771  -.703154  1.054247
  7   .843591  -.711140  1.052981
  8   .847876  -.718833  1.051617
  9   .851947  -.726303  1.050257
 10   .855885  -.733570  1.048926
 11   .859712  -.740643  1.047628
 12   .863437  -.747527  1.046364
 13   .867062  -.754229  1.045133
 14   .870591  -.760753  1.043935
 15   .874026  -.767103  1.042769
 16   .877370  -.773285  1.041634
 17   .880625  -.779303  1.040529
 18   .883793  -.785162  1.039453
 19   .886878  -.790864  1.038405
 20   .889881  -.796416  1.037386
 21   .892804  -.801820  1.036394
 22   .895649  -.807080  1.035428
 23   .898419  -.812201  1.034487
 24   .901116  -.817186  1.033572
 25   .903740  -.822039  1.032681
CONVERGENCE NOT EVIDENT IN 25ITERATIONS
```

(b) Bx = [-2 -3 2]'

ในซับรูทีน EQ นั้น แก้สมการ E_i เพื่อหา x_i, i = 1, 2, 3

```
C*****SUBROUTINE EQ*****
C*****FOR FINDING XNEW(I) FROM E(I)*****
C*****THIS SUBROUTINE IS TO BE CHANGED FUNCTION OF XNEW(I)
      SUBROUTINE EQ(N,X,XOLD,XNEW)
      DIMENSION X(N),XNEW(N),XOLD(N)
      DO 10 I=1,N
10    XOLD(I)=X(I)
      XNEW(1)=-(5.+X(2)+2.*X(3))/5.
      X(1)=XNEW(1)
      XNEW(2)=-(11.+X(1)+2.*X(3))/6.
      X(2)=XNEW(2)
      XNEW(3)=(2.-X(1))/3.
      X(3)=XNEW(3)
      RETURN
      END
```

จากการใช้ซับรูทีน GS ได้ผลดังนี้

```
ENTER NO. OF X'SUNIT 5? CON
3

ENTER INITIAL GUESSES XO(1),....,XO(N)O O O

  1 -1.000000    .000000   1.000000
  2  -.500000    .125000   1.750000
  3  -.312500    .359375   2.406250
  4  -.335938    .705078   3.074219
  5  -.520508   1.177490   3.834473
  6  -.848999   1.803986   4.758972
  7 -1.326492   2.624355   5.922218
  8 -1.975424   3.692677   7.409930
  9 -2.834050   5.080503   9.326956
 10 -3.957277   6.881435  11.805590
 11 -5.419356   9.217314  15.015270
 12 -7.318335  12.246390  19.174440
 13 -9.782361  16.173990  24.565620
 14-12.978180  21.266440  31.554710
 15-17.122310  27.869090  40.615860
 16-22.495700  36.429700  52.363710
 17-29.462700  47.528880  67.595050
 18-38.495790  61.919370  87.342950
 19-50.207580  80.577160112.946700
 20-65.392370104.767700146.142900
CONVERGENCE NOT EVIDENT IN 20ITERATIONS
```

4.3 Use graphical methods to estimate all roots of the given nonlinear systems.

(a) $2 \ln y - x = 0$

$xy - y - 1 = 0$

(b) $x + y^2 - 9 = 0$

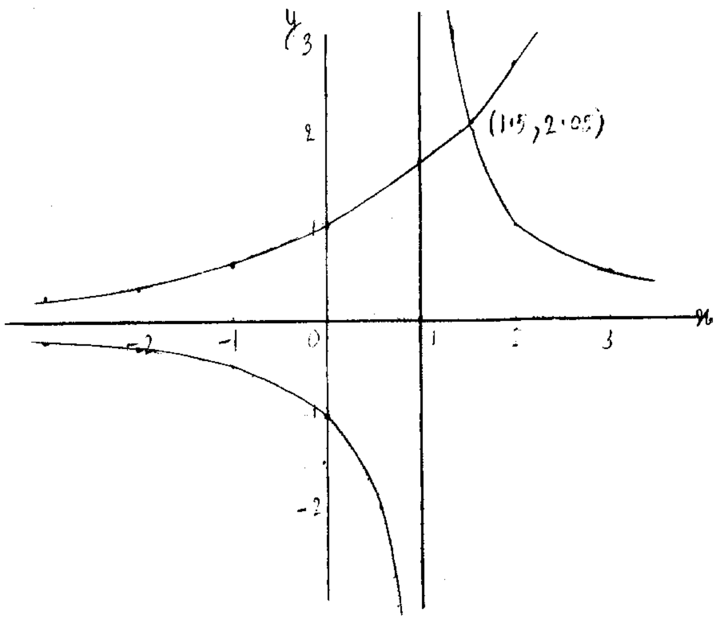
$y - \ln x = 0$

(c) $x^2 - y^2 - 4 = 0$

$y + 1 - 2 \sin x = 0$

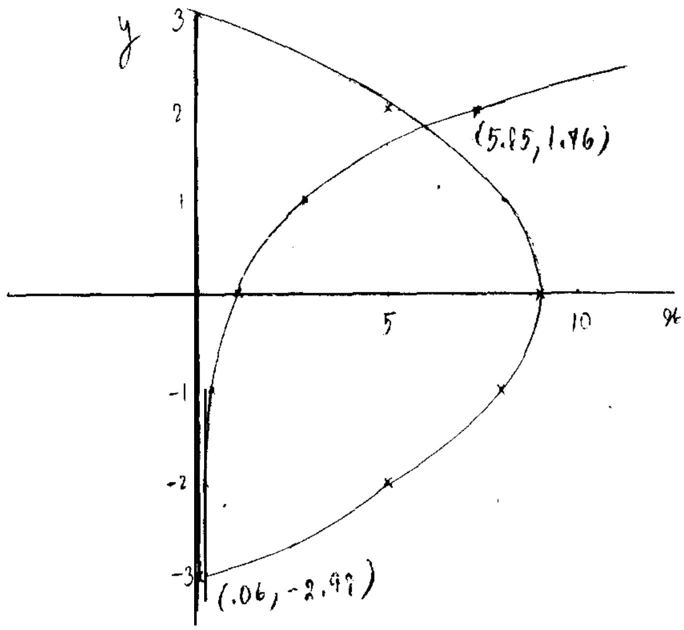
(a) วาด $y = e^{(x/2)}$ และ $y = 1/(x-1)$

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
y=exp(x/2)	0.22	0.36	0.60	1.00	1.64	2.71	4.46
y=1/(x-1)	-0.25	-0.33	-0.50	-1	-	1	0.50



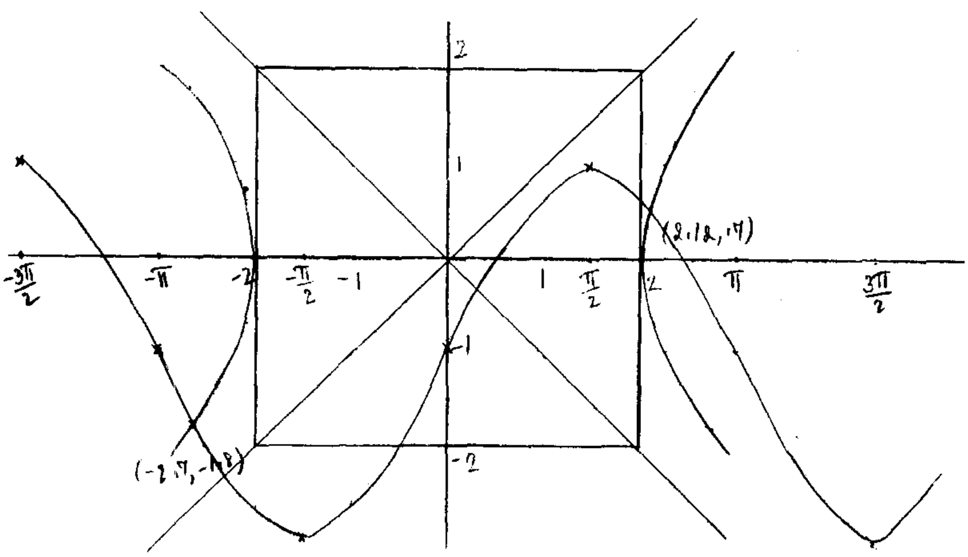
(b) วาด $x = 9-y^2$ และ $y = \ln x$

Y	-3	-2	-1	0	1	2	3
$x=9-y^2$	0	5	8	9	8	5	0
$x = e^y$	0.049	0.135	0.367	1	2.718	7.36	20.06



(c) วาด $(x/2)^2 - (y/2)^2 = 1$ และ $y = 2\sin(x) - 1$

x	-2π	$(-3/2)\pi$	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π	$(3/2)\pi$	2π
sin x	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0
y=2sinx-1	-1	1	-1	-3	-1	1	-1	-3	-1



4.4 Use NRSYS with your answers to Exercise 4.3 as initial guesses to find to 5s all roots of the systems a)-c) of Exercise 4.3.

(a) $2 \ln y - x = 0$

$xy - y - 1 = 0$

หรือ $f(x) = 0$ โดยที่ $f(x) = \begin{bmatrix} 2 \ln y - x \\ xy - y - 1 \end{bmatrix}$

$$J = f'(x) = \begin{bmatrix} \partial(2\ln(y)-x)/\partial x & \partial(2\ln(y)-x)/\partial y \\ \partial(xy-y-1)/\partial x & \partial(xy-y-1)/\partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2/y \\ y & x-1 \end{bmatrix}$$

$$|J| = -x - 1$$

$k = 0 : x_0 = [1.5 \;\; 2.05]'$ [จาก 4.3(a)]

$$f(x_0) = \begin{bmatrix} -0.064320413 \\ 0.025 \end{bmatrix}$$

$$f'(x_0) = \begin{bmatrix} -1 & 0.975609756 \\ 2.05 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$dx_0 = -[f'(x_0)]^{-1} f(x_0) = \begin{bmatrix} -0.022620179 \\ 0.042742738 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = x_0 + dx_0 = \begin{bmatrix} 1.477379821 \\ 2.092742736 \end{bmatrix}$$

k = 1:

$$f(x_1) \quad \begin{bmatrix} -0.000428760 \\ -0.0009666464 \end{bmatrix}$$

$$f'(x_1) = \begin{bmatrix} -1 & 0.955663641 \\ 2.092742736 & 0.47737621 \end{bmatrix}$$

$$dx_1 = \begin{bmatrix} -0.0004287801 \\ -0.0009668464 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1.47767017 \\ 2.093495215 \end{bmatrix}$$

(b) $x + y^2 - 9 = 0$

$y - \ln x = 0$

หรือ $f(x) = 0$ โดยที่ $f(x) = \begin{bmatrix} x + y^2 - 9 \\ y - \ln x \end{bmatrix}$

$$J = f'(x) = \begin{bmatrix} 1 & 2Y \\ -1/x & 1 \end{bmatrix}$$

__สำหรับรากที่ 1__

k= 0 : $\mathbf{x}_0$ = [5.85 1.761' [จาก 4.3(b)]

$$f(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} 5.85+(1.76)^2-9 \\ 1.76 - \ln(5.85) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0524 \\ -6.44 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$f'(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} -1 & 2(1.76) \\ -1/5.85 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3.52 \\ -0.17094 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[f'(\mathbf{x}_0)]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.62433 & -2.19765 \\ 0.10672 & 0.62433 \end{bmatrix}$$

$$d\mathbf{x}_0 = -[f'(\mathbf{x}_0)]^{-1} f'(\mathbf{x}_0)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0185 \\ 0.0096 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 \text{ t } dx, = \begin{bmatrix} 5.66656 \\ 1.76961 \end{bmatrix}$$

k = 1:

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 \text{ t } dx, = \begin{bmatrix} 5.66656 \\ 1.76961 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.00005 \\ 0.00008 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5.66651 \\ 1.76960 \end{bmatrix}$$

k = 2:

$$x_3 = x_2 + dx_2 = \begin{bmatrix} 5.86851 \\ 1.76960 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.946 \times 10^{-8} \\ 1.100 \times 10^{-8} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5.86851 \\ 1.76960 \end{bmatrix}$$

<u>สำหรับรากที่ 2</u>

k = 0 : x_0 = C0.06 -2.981' [จาก 4.3(b)]

$$x_1 = x_0 + dx_0 = \begin{bmatrix} 0.06 \\ -2.98 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.010703106 \\ -0.011795823 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.049296893 \\ -2.991795623 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = x_1 + dx_1 = \begin{bmatrix} 0.049296893 \\ -2.991795823 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.00762 \times 10^{-4} \\ 1.73792 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$x_2 = \begin{bmatrix} 0.050197655 \\ -2.991622031 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = x_2 + dx_2 = \begin{bmatrix} 0.050197655 \\ -2.991622031 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8.34969 \times 10^{-6} \\ 1.40075 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.050206004 \\ -2.99162063 \end{bmatrix}$$

(c) $x^2 - y^2 - 4 = 0$

$y + 1 - 2 \sin x = 0$

หรือ $f(x) = 0$ โดยที่ $f(x) = \begin{bmatrix} x^2 - y^2 - 4 \\ y + 1 - 2 \sin x \end{bmatrix}$

$$J = f'(x) = \begin{bmatrix} 2x & \\ -2 \cos x & 1 \end{bmatrix}$$

<u>สำหรับรากที่ 1</u>

$k = 0 : x_0 =$ c2.12 0.71'

$$f(x_0) = \begin{bmatrix} 2.12^2 - (0.7)^2 - 4 \\ 0.7 + 1 - 2 \sin 2.12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0044 \\ -0.0063 \end{bmatrix}$$

$$J = f'(x_0) = \begin{bmatrix} 2(2.12) & -2(0.7) \\ -2\cos(2.121 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.24 & -1.4 \\ [\ -2(-0.52166) & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4.24 & -1.4 \\ 1.04332 & 1 \end{bmatrix}$$

แล้วหา $dx_0 = -[f'(x_0)]^{-1}f'(x_0)$

$x_1 = x_0 + dx_0$

$dx_1 = -[f'(x_1)]^{-1}f'(x_1)$

$x_2 = x_1 + dx_1$

$dx_2 = -[f'(x_2)]^{-1}f'(x_2)$

$x_3 = x_2 + dx_2$

เรื่อย ๆ ไป จะหยุดวิธีการเมื่อ

$$|dx_i| <= 10^{-5} * \max(1, |x_i|),\ i = 1,\ldots, n$$

<u>สำหรับรากที่ 2</u> ใช้ $x_0 = [-2.7 \quad -1.8]'$ [จาก 4.3(c)] แล้วทำทำนองเดียวกัน กับการหารากที่ 1

4.5 For the system

$$\begin{aligned} x^2 - 3\sin y - z^2 &= 0 \\ z - 2xy + 1 &= 0 \\ e^{x+y} + z^2 &= 0 \end{aligned}$$

(a) Find the Jacobian matrix (J).

(b) Use NRSYS with $x_0 = 0$ to find x_1.

(Note: You can solve $f'(x_0)dx_0 = -f(x_0)$ almost by inspect ion.)

$$f(x) = \begin{vmatrix} x^2 - 3\sin y - z^2 \\ z - 2xy + 1 \\ e^{x+y} + z^2 \end{vmatrix}$$

$$f(x_o) = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad -f(x_o) = \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix}$$

(a)

$$J = f'(x) = \begin{vmatrix} 2x & -3\cos y & -2z \\ -2Y & -2x & 1 \\ e^{x+y} & e^{x+y} & 2z \end{vmatrix}$$

(b)

$$f'(x_o) = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix}$$

หรือ $-3dy = 0$ ...(1)

$dz = -1$ ...(2)

$dx \text{ t } dy = -1$ ...(3)

แก้ 3 สมการเพื่อหาค่าของ dx, dy, dz ตามวิธีปกติ (ไม่ต้องหา inverse ของเมตริกซ์ส.ป.ส.)

จาก (1) $dy = 0$

จาก (2) $dz = -1$

และ จาก (3) $dx = -1$

นั่นคือ

$$\begin{vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix} = \mathbf{dx}$$

$$\mathbf{x_1} = \mathbf{x_0} + \mathbf{dx} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$