บทที่ 6
เกมและอุบาย

คำว่า "เกม" หมายถึง การแข่งขันที่มีผลได้ผลเสียเป็นเดิมพัน ซึ่งมีส่วนเกี่ยวข้องกับภาวะหรือเงื่อนไขการขัดแย้งทางธุรกิจ ดังนั้น คำว่าเกมจึงมีความหมายรวมไปถึงการมีผลประโยชน์ขัดกันระหว่างผู้แข่งขันโดยใช้วิธีการทางคณิตศาสตร์และความคิดสมเหตุสมผลให้เป็นประโยชน์เพื่อบรรลุถึงอุบายที่เป็นไปได้ดีที่สุดเพื่อการชนะหรือได้ผลประโยชน์ของอีกฝ่ายหนึ่ง ซึ่งหมายถึงผู้แพ้หรือผู้เสียผลประโยชน์ของอีกฝ่ายหนึ่ง ทุก ๆ เกมมีจุดหมายหรือภาวะที่สิ้นสุด เมื่อผลประโยชน์ขัดกันในระหว่างคู่แข่งขัน จึงจำเป็นต้องมีการตกลงกันในระเบียบการแข่งขันเพื่อให้ทุกฝ่ายต้องเข้าแข่งขันกันในกรอบระเบียบเดียวกันไม่ว่าจะเป็นเกมกีฬาใด ๆ ต่างก็ต้องเข้ากฎระเบียบการแข่งขันของแต่ละเกมโดยเฉพาะ ถึงแม้ว่าเกมอาจอำนวยผลประโยชน์ให้กับฝ่ายหนึ่งมากกว่าอีกฝ่ายหนึ่ง แต่ละฝ่ายก็จะทำให้ดีที่สุดเพื่อจะให้ผลกำไรของเขามากที่สุด หรือขาดทุนน้อยที่สุด

เกมการแข่งขันระหว่างบุคคลสองคนที่มีผลรวมเป็นศูนย์

ในเกมการแข่งขันระหว่างบุคคล 2 คน ที่มีผลรวมเป็นศูนย์นั้น ผลประโยชน์ที่จะได้จากการแข่งขันทั้งสองฝ่ายขัดกัน การแข่งขันแต่ละครั้งจำนวนผลประโยชน์ที่ฝ่ายหนึ่งได้รวมกันหรือชนะจะต้องเท่ากับจำนวนผลประโยชน์ของอีกฝ่ายหนึ่งที่เสียรวมกันอย่างแน่นอน หรือจะกล่าวได้อีกนัยหนึ่งว่า ผลบวกของเกมรวมกันเท่ากับศูนย์นี้สามารถแสดงได้จากเกมในตารางที่ 1

ผู้แข่งขัน x กับ y สมมติว่ามีความสามารถและสติปัญญาเท่ากัน x มีหนทางที่จะเลือกอุบายที่ 1 หรืออุบายที่ 2 ขณะที่ y สามารถเลือกอุบายที่ 3 หรืออุบายที่ 4 ทั้งสองฝ่ายต่างก็รู้ผลประโยชน์สิ่งตอบแทนทุก ๆ อุบายที่เป็นไปได้ เป็นที่สังเกตว่าเกมนี้อำนวยผลประโยชน์ผู้แข่งขัน x เนื่องจากว่ามูลค่าทั้งหมดเป็นบวก มูลค่าที่อำนวยผู้แข่งขัน y ควรเป็นลบ ขึ้นอยู่กับเงื่อนไขเหล่านี้ เกมจึงมีการเอนเอียงต่อ x อย่างไรก็ตาม เนื่องจากว่า y ต้องเล่นเกม เขา

จึงจำเป็นจะต้องเล่นเพื่อที่จะทำให้ส่วนที่เสียไปน้อยที่สุด ในวงการธุรกิจยังมีเวลาเพื่อหลีกเลี่ยงส่วนที่เสียระยะสั้นไม่ได้ จึงจำเป็นจะต้องทำให้ส่วนที่เสียน้อยที่สุดโดยใช้อุบายที่ดี

ตารางที่ 1 เกมที่ว่าด้วยสองบุคคล

		ผู้แข่งขัน y		
		อุบายที่ 3	**อุบายที่ 4**	**มูลค่าน้อยที่สุดของแถว**
ผู้แข่งขัน x	อุบายที่ 1	+5	+7	5 maximin
	อุบายที่ 2	+4	+6	4
	มูลค่าสูงสุดของคอลัมน์	5	7	

minimax

อุบายทั้งหมดที่เป็นไปได้สำหรับผู้แข่งขันทั้งสองคือ

(1) x ได้มูลค่าเกมที่สูงที่สุด ถ้าเขาเล่นอุบายที่ 1 ตลอดเวลาเนื่องจากว่ามีมูลค่าสูงกว่าอุบายที่ 2

(2) y เข้าใจภาวะนี้และเล่นอุบายที่ 3 เพื่อที่จะทำให้เขาเสียน้อยที่สุด เนื่องจากว่ามูลค่า 5 น้อยกว่ามูลค่า 7 สำหรับอุบายที่ 4 มูลค่า เกมต้องเป็น 5 เนื่องจาก x ได้ 5 จุด ขณะที่ y เสีย 5 จุดของแต่ละครั้งที่เกมดำเนินอยู่ "มูลค่าเกม" เป็นส่วนที่ได้เฉลี่ยต่อครั้ง ตลอดเวลาอันยาวนานของการเล่นเกมได้แสดงในตารางที่ 1 เป็นเกมการแข่งขันระหว่างบุคคลสองคนที่มีผลรวมเป็นศูนย์ เนื่องจาก x ได้ 5 จุด ในแต่ละครั้งขณะที่ y เสียเป็นจำนวนเท่ากัน

เพื่อเป็นการแสดงคุณลักษณะพื้นฐานของตัวแบบทฤษฎีเกม ให้เรามาพิจารณาการเล่นเกมง่าย ๆ ของการโยนเหรียญอันหนึ่ง แต่ละผู้เล่นโยนเหรียญหนึ่งอันหนึ่งครั้ง เมื่อไรที่เหรียญอันนั้นปรากฏเป็นหัวหรือก้อยเหมือนกันแล้ว ผู้เล่นที่ I จะได้รับเงิน 1 บาท จากผู้เล่นที่ II ถ้าหากว่าเหรียญอันนั้นปรากฏเป็นหัวหรือก้อยต่างกัน ผู้เล่นที่ I จะต้องชำระเงิน 1 บาท ให้แก่ผู้เล่นที่ II ด้วยเหตุนี้แต่ละผู้เล่นมีสองอุบาย เพื่อที่จะแสดงว่าเป็นหัวหรือเป็นก้อย ผลลัพธ์สิ่งตอบแทนดังแสดงในตารางสิ่งตอบแทนต่อไปนี้

ตารางสิ่งตอบแทน

		ผู้เล่นที่ II H	ผู้เล่นที่ II T
	H	1	– 1
ผู้เล่นที่ I	T	– 1	1

โดยทั่ว ๆ ไป เกมจะมีคุณลักษณะเป็น

1. อุบายของผู้เล่นที่ I
2. อุบายของผู้เล่นที่ II
3. ตารางสิ่งตอบแทน

อุบายในการแข่งขันและจุดมูลค่าเท่ากัน

อุบายของผู้แข่งขันผู้หนึ่งผู้ใด คือ วิธีการที่เขาใช้ในการตัดสินใจเลือกอุบายใดอุบายหนึ่งจากอุบายทั้งหมดที่เขามีอยู่ออกมาทำการแข่งขัน วิธีการที่เขาใช้ในการตัดสินใจเลือกอุบายใดออกมาใช้ในการแข่งขันแต่ละครั้งนั้นไม่ขึ้นอยู่กับเขาที่จะทราบล่วงหน้าว่าคู่แข่งขันจะเลือกใช้อุบายไหนมาตอบโต้ ตราบใดที่ผลลัพธ์ของเกมจะปรากฏเมื่อผู้แข่งขันทุกคนต่างก็ต้องแสดงอุบายที่ตนเลือกออกมาพร้อม ๆ กัน สำหรับอุบายหนึ่งในจำนวนอุบายทั้งหมดที่มีอยู่ที่ผู้แข่งขันจะตัดสินใจเลือกอุบายนี้เท่านั้นเข้าแข่งขันทุกครั้ง เรียกอุบายนี้ว่า อุบายบริสุทธิ์ เพราะว่าผู้แข่งขันนำเอาอุบายนี้ออกมาใช้ทุกครั้งของการแข่งขันแล้ว ค่าคาดหวังที่เขาจะได้จากการแข่งขันหลาย ๆ ครั้งจะมีค่ามากกว่าที่เขานำเอาอุบายอื่น ๆ ออกมาใช้ ค่าที่แต่ละผู้แข่งขันใช้กับอุบายบริสุทธิ์ของเขาเรียกว่า จุดมูลค่าเท่ากัน (paddle point) และเป็นมูลค่าเกม จุดอานม้า คือ จุดที่ให้ค่ามากที่สุดของค่าน้อยที่สุดในแต่ละแถวมีค่าเท่ากับค่าที่น้อยที่สุดของตัวเลขที่มากที่สุดของแต่ละคอลัมน์

จากการตรวจสอบตารางที่ 1 จุดมูลค่าเท่ากันก็จำได้ง่าย เนื่องจากว่าเป็นมูลค่าต่ำที่สุดในแถวและเป็นมูลค่าสูงสุดในคอลัมน์ เนื่องจากว่า ผู้แข่งขัน x ต้องการจะมีผลประโยชน์ที่มีมูลค่าสูงสุดในคอลัมน์ใดคอลัมน์หนึ่ง ขณะที่ผู้แข่งขัน y ต้องการเสียผลประโยชน์ที่มีมูลค่าน้อยที่สุดในแถวใดแถวหนึ่ง เนื่องจากว่ามีอยู่หนึ่งมูลค่าของ 5 เท่านั้น ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขเหล่านี้ทั้งสองฝ่าย (ผลลัพธ์ของเกมที่ดีที่สุดเมื่อผู้แข่งขันใช้อุบายบริสุทธิ์)

หลักเกณฑ์แมกซิมินและมินนิแมกซ์

การแก้ปัญหาทฤษฎีของเกมโดยใช้หลักเกณฑ์แมกซิมินและมินนิแมกซ์เข้ามาช่วยนี้ จากตารางที่ 1 สมมติว่าผู้แข่งขัน x จะเลือกหลักเกณฑ์แมกซิมินเข้ามาช่วยในการตัดสินใจว่าเขาจะเลือกอุบายใดเข้าแข่งขัน หลักเกณฑ์แมกซิมินนั้นคือ การหาค่ามากที่สุดจากผลได้ที่น้อยที่สุดของแต่ละอุบาย ผู้แข่งขัน x จะเลือกผลได้ที่น้อยที่สุดของอุบายนั้นออกมา อุบายบริสุทธิ์ที่ผู้แข่งขัน x จะเลือกใช้คืออุบายที่ให้ค่าที่มากที่สุดของผลได้ที่น้อยที่สุดของทุก ๆ อุบาย สำหรับผู้แข่งขัน y จะยึดหลักเกณฑ์มินนิแมกซ์เข้ามาช่วยในการตัดสินใจว่าจะเลือกอุบายใดเข้าแข่งขัน หลักเกณฑ์มินนิแมกซ์ก็คือ การหาค่าที่น้อยที่สุดจากผลเสียที่มากที่สุดของแต่ละอุบายที่มีอยู่ ในหลักเกณฑ์นี้ผู้แข่งขัน y จะเลือกผลเสียที่มากที่สุดของแต่ละอุบายของตนออกมา อุบายบริสุทธิ์ที่ผู้แข่งขัน y จะเลือกก็คืออุบายที่ตนจะเสียผลประโยชน์น้อยที่สุดไม่ว่าคู่แข่งขัน x จะเลือกอุบายใดออกมาแข่งขัน

ข้างล่างเป็นหลาย ๆ ตัวอย่างของเกมจุดมูลค่าเท่ากัน (ถ้าเกมเหล่านี้หาค่าได้) มีวงกลมไว้อุบายและมูลค่าเกมก็ได้แสดงไว้ด้วย

$$\begin{array}{cc} & y \\ x & \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -4 & -8 \end{bmatrix} \end{array}$$

หาค่าจุดมูลค่าเท่ากันไม่ได้ เนื่องจากว่าไม่มีสิ่งตอบแทนซึ่งเป็นทั้งมูลค่าต่ำสุดในแถวกับมูลค่าสูงสุดในคอลัมน์

$$\begin{array}{cc} & y \\ x & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -4 \\ -5 & -6 \end{bmatrix} \end{array}$$

อุบาย x แถวที่ 1 y คอลัมน์ที่ 2 มูลค่าเกม +1 สิ่งตอบแทน +1 คือ มูลค่าต่ำสุดในแถวกับมูลค่าสูงสุดในคอลัมน์

$$\begin{array}{cc} & Y \\ x & \begin{bmatrix} 2 & 14 & 12 \\ -8 & 6 & -10 \\ 1 & -4 & 14 \end{bmatrix} \end{array}$$

อุบาย x แถวที่ 1 y คอลัมน์ที่ 1 มูลค่าเกม +2

สำหรับแมทริคซ์สิ่งตอบแทนที่ใหญ่กว่า วิธีที่รวดเร็วที่จะคำนวณ ถ้าคำนวณหาจุดมูลค่าเท่ากันได้คือมูลค่าต่ำสุดที่ทำวงกลมไว้ในแถวและมีสี่เหลี่ยมจัตุรัสล้อมรอบ ซึ่งเป็นมูลค่าสูงสุดในคอลัมน์ ที่ไหนที่มูลค่ามีทั้งวงกลมและสี่เหลี่ยมจัตุรัสล้อมรอบ หาค่าจุดมูลค่าเท่ากันได้นี้สามารถแสดงได้โดยตัวอย่างดังต่อไปนี้ จุดมูลค่าเท่ากันคือ 8

$$
\begin{array}{cc}
 & y \\
x & \begin{bmatrix} \boxed{18} & 6 & 2 & \boxed{16} & 0 \\ 12 & 10 & \boxed{8} & 12 & 14 \\ 4 & 8 & 6 & 10 & \boxed{16} \\ 10 & \boxed{12} & 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

หลักเกณฑ์การครอบงำ

ขั้นแรกของการแก้ปัญหาสำหรับอุบายและมูลค่าเกมต้องหาอุบายบริสุทธิ์ที่หาค่าจุดมูลค่าเท่ากันได้ ถ้าหากว่านี้ใช้ไม่ได้ ขั้นต่อไปต้องขจัดอุบายที่แน่นอน (คอลัมน์หรือแถว) ได้โดยหลักเกณฑ์การครอบงำผลของเกมสามารถแก้ได้โดยบางอุบายผสม

การครอบงำ สามารถแสดงด้วยบางอย่างในตัวอย่างแรก

$$
\begin{array}{cc}
 & y \\
x & \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

ผู้แข่งขัน x จะไม่เล่นแถวที่ 2 เนื่องจากว่านี้จะให้โอกาสของเขาแก่ y ชนะ แสดงว่าแถวที่ 1 หรือที่ 3 ครอบงำ (dominated) แถวที่ 2 เนื่องจากว่าแถวเหล่านี้จะให้ผลตอบแทนต่อ x เสมอ สิ่งตอบแทนดีกว่าอุบายที่ถูกครอบงำ ไม่เกี่ยวข้องกับพฤติการณ์ของ y กฎของการครอบงำสำหรับแถวคือ ทุก ๆ ค่าในแถวที่ครอบงำต้องมากกว่าหรือเท่ากับค่าที่สมนัยกันของแถวที่ถูกครอบงำ ผลของแมทริกซ์ คือ

$$
\begin{array}{cc}
 & y \\
x & \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

แมทริกซ์อื่น ๆ ที่สามารถลดลงได้โดยการครอบงำ คือ

$$
\begin{array}{cc}
 & Y \\
x & \begin{bmatrix} -4 & -6 & 2 & 4 \\ -6 & -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

ผู้แข่งขัน y มีความคล่องตัวกว่าเนื่องจากว่า เขามีความสามารถที่จะเล่นสี่คอลัมน์เทียบกับสองแถว สำหรับผู้แข่งขัน x เนื่องจากว่าคอลัมน์ที่ 3 กับคอลัมน์ที่ 4 เป็นโอกาสของ x เท่านั้นที่จะชนะ y จะไม่เล่นคอลัมน์ใดคอลัมน์หนึ่ง เนื่องจากว่า คอลัมน์เหล่านี้ถูกครอบงำด้วยคอลัมน์ที่ 1 กับที่ 2 กฎของการครอบงำสำหรับคอลัมน์คือ ทุก ๆ ค่าในคอลัมน์ที่ครอบงำต้องน้อยกว่าหรือเท่ากับค่าที่สมนัยกันของคอลัมน์ที่ถูกครอบงำ ผลของแมทริกซ์หรือแมทริกซ์ใหม่คือ

$$x \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$$

เป็นที่น่าสังเกตว่า ผลของแมทริกซ์อาจมีอะไรปรากฏเป็นจุดมูลค่าเท่ากัน ภายหลังการลดเกมด้วยการครอบงำนี้ ไม่จำเป็นจะต้องเป็นจุดมูลค่าเท่ากันที่แท้จริงเนื่องจากว่า อาจไม่เป็นมูลค่าที่ต่ำสุดในแถวกับมูลค่าสูงสุดในคอลัมน์ดังเหมือนในแมทริกซ์เดิม

การครอบงำสามารถแสดงได้จากตัวอย่างต่อไปนี้ของบริษัทหนึ่งที่ได้ต่อรองกับสหพันธ์ของบริษัทตลอดจนสัญญาค่าจ้าง คณะบริหารของบริษัท ได้รับมอบหน้าที่ให้ทำงานแทนงานของการสร้างอุบายสำหรับบริษัท เพื่อให้เป็นไปตามในระหว่างการเจรจาที่จะมาถึงจากการมองดูประสบการณ์ในอดีต คณะได้สร้างอุบายต่อไปนี้สำหรับบริษัท ก

C_1 = คาดว่าจะมีการต่อรองที่ยากที่สุดกับสหพันธ์

C_2 = ได้พิจารณาถึงความต้องการจริง ๆ ของสหพันธ์

C_3 = ได้พิจารณาถึงความต้องการจริง ๆ ของสหพันธ์

C_4 = ความต้องการอย่างกว้าง ๆ ของสหพันธ์

สหพันธ์ขึ้นอยู่กับประวัติในอดีตของสหพันธ์ เสนอแนะว่าจะต้องพิจารณาอุบายหนึ่งของอุบายต่อไปนี้

U_1 = สหพันธ์ต้องการค่าโสหุ้ยสูง

U_2 = สหพันธ์ต้องการค่าโสหุ้ยสูง

U_3 = สหพันธ์ต้องการค่าโสหุ้ยปานกลาง

U_4 = ความต้องการที่อำนวยต่อบริษัทไม่อำนวยต่อสหพันธ์

คำถามก็คือ อุบายอะไรที่คณะบริหารของบริษัท ก. ควรใช้ก็ขึ้นอยู่อุบายที่สหพันธ์ได้ใช้ (ไม่ได้หาง่าย) อย่างไรก็ตาม ด้วยความช่วยเหลือของคนกลางข้างนอก (สาเหตุจากโอกาสของการนั่งประชุมต่อรองที่ยากที่สุดกับสหพันธ์และความอาจเป็นไปได้ของการนัดหยุดงาน

ที่ยืดเยื้อ) ตารางค่าโสหุ้ยเพิ่มขึ้นของค่าจ้างอย่างมีเงื่อนไข สร้างขึ้นด้วยกลุ่มบริหาร (ตารางที่ 2) คนกลางได้แสดงว่าสหพันธ์ได้สร้างตารางเปรียบเทียบไว้แล้ว เนื่องจากว่า เขาได้จัดหาสิ่งเหล่านี้ไว้แล้วพร้อมด้วยเนื้อหาที่เหมือนกัน

ตารางค่าโสหุ้ยเพิ่มขึ้นของค่าจ้างอย่างมีเงื่อนไข แปลความได้ดังนี้ เมื่อไรการบริหารของบริษัท ก. ใช้อุบาย C_1 และสหพันธ์จะใช้อุบาย U_1 สัญญาจ้างครั้งสุดท้ายจะอ่านว่าบริษัทจะอนุญาตเพิ่มขึ้น 0.25 บาทต่อชั่วโมง entries อื่น ๆ ในตารางที่ 2 ก็มีความหมายอย่างเดียวกัน ตัวเลขเหล่านี้ที่กำหนดให้ผู้ต่อรองจะทำอย่างไร?

ขั้นแรกในปัญหาทฤษฎีของเกมก็คือ ต้องทดสอบจุดมูลค่าเท่ากัน ซึ่งไม่ได้ใช้ในกรณีเฉพาะนี้ ต่อไปใช้การครอบงำตรวจสอบแมทริกซ์แล้วยกคำถามขึ้น

ตารางที่ 2 ตารางค่าโสหุ้ยเพิ่มขึ้นของค่าจ้างอย่างมีเงื่อนไข (แมทริกซ์ 4×4)

		อุบายของบริษัท ก.			
		C_1	C_2	C_3	C_4
อุบายของสหพันธ์	U_1	+0.25 บาท	+0.14 บาท	+0.15 บาท	+0.32 บาท
	U_2	+0.40 บาท	+ 0.17 บาท	+0.13 บาท	+0.16 บาท
	U_3	+ 0.30 บาท	+0.05 บาท	t- 0.12 บาท	+0.15 บาท
	1.1,	− 0.01 บาท	+0.08 บาท	+0.11 บาท	+0.03 บาท

ทำไมสหพันธ์ไม่อยากที่จะเล่นแถว U_4 เนื่องจากว่านี้ให้โอกาสบริษัท บริษัทชนะหรือยอมให้เพิ่มขึ้นเล็กน้อย แน่ละ สหพันธ์จะไม่เล่นแถว U_4 เลย เนื่องจากว่าสหพันธ์สามารถทำได้ดีกว่ามาก โดยการเล่นแถว U_1 กับ U_2 ดังนั้นแถว U_4 จึงถูกครอบงำไปจึงยกเลิกเสียเพราะว่ามีหนึ่งอุบายหรือมากกว่าจะให้ผลตอบแทนต่อสหพันธ์ สิ่งตอบแทนดีกว่า อุบายที่ถูกครอบงำไม่เกี่ยวกับพฤติการณ์ของบริษัท เมื่อไรที่อ้างถึงการครอบงำ ในปัญหานี้สำหรับกฎของแถวทุก ๆ รายการในแถว U_1 กับ U_2 มากกว่าหรือเท่ากับรายการที่สมนัยกันในแถว U_4 จากทรรศนะของสหพันธ์นี้ลด แมทริกซ์ดั้งเดิม (4×4) เป็น 3×4 แมทริกซ์ ดังแสดงในตารางที่ 3

ตารางที่ 3 ตารางค่าโสหุ้ยเพิ่มขึ้นของค่าจ้างอย่างมีเงื่อนไข (แมทริกซ์ 3×4)

		อุบายของบริษัท ก.			
		C_1	C_2	C_3	C_4
	U_1	+0.25 บาท	+0.14 บาท	+0.15 บาท	+0.32 บาท
อุบายของสหพันธ์	U_2	+0.40 บาท	+0.17 บาท	+0.13 บาท	+0.16 บาท
	U_3	+0.30 บาท	+0.05 บาท	+0.12 บาท	+0.15 บาท

ตรวจต่อไปเข้าใจว่าคอลัมน์ C_3 ครอบงำคอลัมน์ C_4 เนื่องจากบริษัทพยายามที่จะทำให้ส่วนที่เสียของบริษัทเสียน้อยที่สุด ทุก ๆ รายการในคอลัมน์ C_3 เท่ากับหรือน้อยกว่ารายการที่สมนัยกันในคอลัมน์ C_4 ตามกฎของคอลัมน์ 3×3 แมทริกซ์ใหม่ปรากฏในตารางที่ 4

การตรวจตารางที่ 4 เข้าใจว่าแถว U_2 ครอบงำแถว U_3 ค่าจ้างเพิ่มขึ้นในแถว U_2 (0.40 บาท, 0.17 บาท และ 0.13 บาท) มากกว่าหรือเท่ากับรายการที่สมนัยกันในแถว U_3 (0.30 บาท, 0.05 บาท และ 0.12 บาท) 2×3 แมทริกซ์ใหม่ปรากฏในตารางที่ 5

ตารางที่ 4 ตารางค่าโสหุ้ยเพิ่มขึ้นของค่าจ้างอย่างมีเงื่อนไข (แมทริกซ์ 3×3)

		อุบายของบริษัท ก.		
		C_1	C_2	C_3
	U_1	+0.25 บาท	+0.14 บาท	+0.15 บาท
อุบายของสหพันธ์	U_2	+0.40 บาท	+0.17 บาท	+0.13 บาท
	U_3	+0.30 บาท	+0.05 บาท	+0.12 บาท

ตารางที่ 5 ตารางค่าโสหุ้ยเพิ่มขึ้นของค่าจ้างอย่างมีเงื่อนไข (แมทริกซ์ 2×3)

		อุบายของบริษัท ก.		
		C_1	C_2	C_3
อุบายของสหพันธ์	U_1	+0.25 บาท	+0.14 บาท	+0.15 บาท
	U_2	+0.40 บาท	+0.17 บาท	+0.13 บาท

โอกาสสุดท้ายสำหรับการใช้การครอบงำ คือคอลัมน์ C_1 ส่วนเพิ่มขึ้นที่ถูกเสนอ จากความเห็นของบริษัท ซึ่งแสดงในคอลัมน์ C_2 (0.14 บาท และ 0.17 บาท) เท่ากับหรือน้อยกว่าค่าที่สมนัยกันในคอลัมน์ C_1 (0.25 บาท และ 0.40 บาท) ผลของแมทริกซ์คือ 2×2 (ตารางที่ 6) ควรจะสังเกตว่ากระบวนการครอบงำสามารถใช้ขจัดมากกว่าหนึ่งแถวหรือหนึ่งคอลัมน์ในขั้นที่เหมือนกันในหัวข้อต่อไป อุบายและมูลค่าเกมจะคำนวณหาได้

ตารางที่ 6 ตารางค่าโสหุ้ยเพิ่มขึ้นของค่าจ้างอย่างมีเงื่อนไข (แมทริกซ์ 2×2)

		อุบายของบริษัท ก.	
		C_2	C_3
อุบายของสหพันธ์	U_1	+0.14 บาท	+0.15 บาท
	U_2	+0.17 บาท	+0.13 บาท

อุบายผสมและมูลค่าเกม เกม (2×2)

ในกรณีที่ไม่มีจุดมูลค่าเท่ากัน และใช้การครอบงำเพื่อลดเกมให้เป็นแมทริกซ์เล็ก ๆ การแข่งขันจะอาศัยอุบายผสม วิธีการต่าง ๆ ก็แสดงเพื่อที่จะทำให้การชนะได้ดีที่สุดสำหรับแต่ละผู้เล่น ผู้เล่น x กับผู้เล่น y ต้องกำหนดสัดส่วนอะไรของครั้งที่จะเล่นแต่ละแถว (ใช้กับ x เท่านั้น) และแต่ละคอลัมน์ (ใช้กับ y เท่านั้น)

มีสามวิธีการธรรมดาสำหรับคำนวณหาอุบายที่ดีที่สุดสำหรับแมทริกซ์ 2×2 คือ วิธีการทางเลขคณิต วิธีการทางพีชคณิต และพีชคณิตแมทริกซ์ ความน่าจะเป็นร่วม เกมย่อย และการหาคำตอบโดยวิธีกราฟ สามารถใช้คำนวณหามูลค่าเกม วิธีการพีชคณิตแมทริกซ์จะไม่รวมอยู่ด้วยขณะที่วิธีการอื่น ๆ สำหรับคำนวณหาอุบายที่ดีที่สุด และมูลค่าเกมจะทำสำหรับแมทริกซ์ 2×2

วิธีการทางเลขคณิตสำหรับคำนวณหาอุบายที่ดีที่สุด

วิธีการทางเลขคณิตจัดว่าเป็นวิธีการที่ง่าย สำหรับคำนวณหาอุบายที่ดีที่สุดสำหรับแต่ละผู้เล่นในเกม 2×2 ขั้นแรกคือต้องลบสิ่งตอบแทนที่น้อยกว่าในแต่ละแถวจากสิ่งตอบแทนที่มากกว่ากระบวนการเดียวกันนี้ใช้กับคอลัมน์ด้วย เราจะใช้ตัวอย่างก่อนของบริษัท ก. กับสหพันธ์ ผลลัพธ์คือ

$$\begin{array}{cc} & C \\ U & \begin{bmatrix} 0.14 \text{ บาท} & 0.15 \text{ บาท} \\ 0.17 \text{ บาท} & 0.13 \text{ บาท} \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} 0.15 \text{ บาท} - 0.14 \text{ บาท} = 0.01 \text{ บาท} \\ 0.17 \text{ บาท} - 0.13 \text{ บาท} = 0.04 \text{ บาท} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} 0.17 \text{ บาท} & 0.15 \text{ บาท} \\ -0.14 \text{ บาท} & -0.13 \text{ บาท} \\ \hline 0.03 \text{ บาท} & 0.02 \end{array}$$

ขั้นต่อไปคือต้องสลับแต่ละคู่ของคู่เหล่านี้ของมูลค่าที่ได้จากการลบ

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ U & \begin{bmatrix} 0.14 \text{ บาท} & 0.15 \text{ บาท} \\ 0.17 \text{ บาท} & 0.13 \text{ บาท} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} 0.04 \text{ บาท} \\ 0.01 \text{ บาท} \end{array} \\ & \begin{array}{cc} 0.02 \text{ บาท} & 0.03 \text{ บาท} \end{array} & \end{array}$$

เพื่อที่จะคำนวณหาอุบายสำหรับบริษัท บวก **0.02** บาท เข้ากับ **0.03** บาท และแล้ววางใต้แต่ละค่า ใช้กระบวนการเดียวกันกระทำกับสหพันธ์ซึ่งเป็นไปได้ดังนี้

$$\begin{array}{ccc} & \textbf{C} & \\ U & \begin{bmatrix} 0.14 \text{ บาท} & 0.15 \text{ บาท} \\ 0.17 \text{ บาท} & 0.13 \text{ บาท} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \dfrac{0.04 \text{ บาท}}{0.04 \text{ บาท} + 0.01 \text{ บาท}} \\ 1 \quad \dfrac{0.01 \text{ บาท}}{0.04 \text{ บาท} + 0.01 \text{ บาท}} \end{array} \\ & \begin{array}{cc} \dfrac{0.02}{.02+.03} & \dfrac{.03}{.02+.03} \end{array} & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \textbf{C} & \\ U & \begin{bmatrix} 0.14 \text{ บาท} & 0.15 \text{ บาท} \\ 0.17 \text{ บาท} & 0.13 \text{ บาท} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 4/5 \\ 1/5 \end{array} \\ & \begin{array}{cc} \dfrac{2}{3} & \dfrac{3}{5} \end{array} & \end{array}$$

ความถูกต้องของอุบายทางเลขคณิตเหล่านี้จะพิสูจน์ได้โดยการใช้วิธีการทางพีชคณิต เทคนิคทางเลขคณิตมีความยุ่งยากน้อยกว่าวิธีการทางพีชคณิต แต่ไม่สามารถใช้กับเกมที่ใหญ่กว่าวิธีการทางพีชคณิตสำหรับคำนวณหาอุบายที่ดีที่สุดและมูลค่าเกม

จุดเริ่มต้นสำหรับวิธีการทางพีชคณิตคือ ให้ Q เท่ากับจำนวนครั้งหรือโอกาส (น้อยกว่า 1) ที่ผู้เล่น x ใช้เล่นแถวที่หนึ่งและ (1 – Q) จำนวนครั้งหรือโอกาสเขาเล่นแถวที่สอง concept ชนิดเดียวกันนี้ใช้กับผู้เล่น Y โดยการใช้ F แทน Q การทำเสนอของการแจกแจงแบบสัดส่วนของครั้งหรือโอกาสสำหรับคอลัมน์และแถวคือ

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \begin{array}{cc} C_2 & C_3 \\ P & 1-P \end{array} \\
\begin{array}{c} U_1 \\ U_2 \end{array} & \begin{array}{c} Q \\ 1-Q \end{array} & \begin{bmatrix} 0.14 \text{ บาท} & 0.15 \text{ บาท} \\ 0.17 \text{ บาท} & 0.13 \text{ บาท} \end{bmatrix}
\end{array}
$$

ภายใต้วิธีการนี้ สหพันธ์ต้องการที่จะแบ่งการละเล่นระหว่างสองแถว เพื่อว่าการชนะที่คาดหวังจากการเล่นแถวที่หนึ่งจะเท่ากับการชนะจากการเล่นแถวที่สองอย่างแน่นอนถึงแม้บริษัทจะเล่นอะไรก็ตาม เพื่อที่บรรลุถึงอุบายที่ถูกต้องสำหรับสหพันธ์เมื่อการแล่นไม่แถวหนึ่งหรือแถวสอง ก็เป็นสิ่งจำเป็นที่จะทำการชนะที่คาดหวังเมื่อไรที่บริษัทเล่นคอลัมน์ที่ 2 ให้เท่ากับการชนะที่คาดหวังของสหพันธ์เมื่อไรที่บริษัทเล่นคอลัมน์ที่ 3 ดังเช่นให้ 0.14 บาท Q + 0.17 บาท (1 – Q) เท่ากับ 0.15 บาท Q + 0.13 บาท (1 – Q) และหาค่า Q

$$0.14 \text{ บาท } Q + 0.17 \text{ บาท } (1-Q) = 0.15 \text{ บาท } Q + (1-Q)\, 0.13 \text{ บาท}$$

$$0.14 \text{ บาท } Q + 0.17 \text{ บาท} - 0.17 \text{ บาท } Q = 0.15 \text{ บาท } Q + 0.13 \text{ บาท} - 0.13 \text{ บาท } Q$$

$$0.05 \text{ บาท } Q = 0.04 \text{ บาท}$$

$$Q = 4/5$$

การคำนวณข้างต้นแสดงว่าสหพันธ์จะเล่นแถวที่หนึ่ง 4/5 ของครั้งหรือโอกาสและแถวที่สอง 1/5 ของครั้งหรือโอกาส (1 – Q หรือ 1 – 4/5 = 1/5)

สหพันธ์ใช้การ approach วิธีการเดียวกันกับบริษัท บริษัทต้องการที่จะแบ่งครั้งหรือโอกาสของบริษัทระหว่างคอลัมน์ เพื่อว่าไม่มีสาระอะไรที่สหพันธ์จะเล่น บริษัทจะทำให้การชนะของบริษัทมากที่สุด หนทางของบริษัทเกี่ยวกับอุบายระหว่างคอลัมน์สามารถปรับให้เข้ากับรูปพีชคณิต ความคาดหวังของบริษัทจากการเล่นคอลัมน์ที่สอง P ของครั้งหรือโอกาสและคอลัมน์ที่สาม (1 – P) ของครั้งหรือโอกาสเท่ากัน ในวิธีการนี้ ส่วนเสียที่คาดหวังของบริษัท

เมื่อไรที่สหพันธ์เล่นแถวที่ 1 กับส่วนเสียที่คาดหวังของบริษัทเมื่อไรที่สหพันธ์เล่นแถวที่ 2 สมการสำหรับเงื่อนไขดังนี้ คือ

$$\begin{aligned} 0.14 \text{ บาท } P + 0.15 \text{ บาท } (1-P) &= 0.17 \text{ บาท } P + 0.13 \text{ บาท } (1-P) \\ 0.14 \text{ บาท } P + 0.15 \text{ บาท} - 0.15 \text{ บาท } P &= 0.17 \text{ บาท } P + 0.13 \text{ บาท} - 0.13 \text{ บาท } P \\ 5P &= 2 \\ P &= 2/5 \end{aligned}$$

คำตอบนี้แสดงว่าบริษัทจะเล่นคอลัมน์ที่ 2 $\frac{2}{5}$ ของครั้งหรือโอกาสและคอลัมน์ที่ 3 $\frac{3}{5}$ ของครั้งหรือโอกาส ($1-P$ หรือ $1-2/5 = 3/5$) อุบายซึ่งเราคำนวณได้สำหรับสหพันธ์กับบริษัท สมมติว่าทั้งสองข้างจะเล่นอุบายของเขาปราศจากการใช้แบบชุดหนึ่ง ในลักษณะนี้อุบายวางออกไปเหนือตัวแทน (ส่วนแบ่งที่เป็นไปได้ดีที่สุดของครั้งหรือโอกาส) ระหว่างแถวหรือคอลัมน์ อย่างไรก็ตาม ถ้าหากว่าคนหนึ่งของผู้เล่นในเกมตั้งต้นสังเกตแบบในการเล่นของคู่แข่งขันของเขา เขาจะวางอุบายของเขาเพื่อจะทำให้ได้เปรียบในการเปิดเผยนี้

ได้เห็นวิธีการ (เลขคณิตและพีชคณิต) สำหรับแก้อุบายผสมของเกม 2×2 ความสนใจของเรามุ่งเกี่ยวกับการแก้สำหรับมูลค่าเกม วิธีการแรกที่ได้เสนอคือวิธีการทางเลขคณิต

$$\begin{array}{cccccc} & & \multicolumn{2}{c}{\text{บริษัท}} & \\ & & C_2 & C_3 & \\ & & 2/5 & 3/5 & \\ \text{สหพันธ์} & \begin{array}{c} U_1 \\ U_2 \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} 0.14 \text{ บาท} & 0.15 \text{ บาท} \\ 0.17 \text{ บาท} & 0.13 \text{ บาท} \end{bmatrix}} & \begin{array}{c} 4/5 \\ 1/5 \end{array} \end{array}$$

เหตุผลในการคำนวณสมการสำหรับมูลค่าเกมคือ ขณะที่บริษัทเล่นคอลัมน์ที่ 2, 2/5 ของครั้งหรือโอกาส สหพันธ์ชนะหรือได้ 0.14 บาท เพิ่มขึ้น 4/5 ของครั้งหรือโอกาสและ 0.17 บาทเพิ่มขึ้น 1/5 ของครั้งหรือโอกาส ขณะที่บริษัทเล่นคอลัมน์ที่ 3, 3/5 ของครั้งหรือโอกาส สหพันธ์ชนะหรือได้ 0.15 บาทเพิ่มขึ้น 4/5 ของครั้งหรือโอกาสกับเพิ่มขึ้น 1/5 ของครั้งหรือโอกาสด้วย 0.13 บาท การชนะหรือส่วนได้ที่คาดหวังทั้งหมดของสหพันธ์รวมกันได้ดังนี้

$$\text{มูลค่าเกม} = \frac{2}{5}\left[0.14 \text{ บาท}\left(\frac{4}{5}\right) + 0.17 \text{ บาท}\left(\frac{1}{5}\right)\right] + \text{go.15} \text{ บาท}\left(\frac{4}{5}\right) + 0.13 \text{ บาท}\left(\frac{1}{5}\right)\Big]$$

$$= \frac{2}{5}\left(\frac{0.56 \text{ บาท}}{5} + \frac{0.17 \text{ บาท}}{5}\right) + \frac{3}{5}\left(\frac{0.60 \text{ บาท}}{5} + \frac{0.13 \text{ บาท}}{5}\right)$$

$$= \frac{2}{5}\left(\frac{0.73 \text{ บาท}}{5}\right) + \frac{3}{5}\left(\frac{0.73 \text{ บาท}}{5}\right)$$

$$= \frac{0.73 \text{ บาท}}{5} \text{ หรือ } 0.146 \text{ บาทเพิ่มขึ้น}$$

มูลค่าเกม 0.146 บาท หรือ 0.15 บาท เป็นส่วนที่เพิ่มขึ้นที่สหพันธ์สามารถคาดหวังได้ สหพันธ์ต้องเป็นผู้ชนะเนื่องจากว่ามูลค่าเกมเป็นบวก ถ้าหากว่ามูลค่าเกมเป็นลบแล้ว บริษัทก็ควรจะชนะ อย่างไรก็ตาม ในแมทริกซ์ดั้งเดิม มีเพียงหนึ่งค่าเท่านั้นเป็นลบที่ถูกเสนอกับ 15 ค่าที่เป็นบวก

การหาคำตอบสำหรับมูลค่าเกมสามารถ approached ได้จากความเห็นของบริษัท คำชี้แจงเหตุผลควรเป็นดังนี้ ขณะที่สหพันธ์เล่นแถวที่ 1, 4/5 ของครั้งหรือโอกาส บริษัทเสีย 0.14 บาท 2/5 ของครั้งหรือโอกาสกับ 0.15 บาท 3/5 ของครั้งหรือโอกาส ขณะที่สหพันธ์เล่นแถวที่ 2, 1/5 ของครั้งหรือโอกาส บริษัทเสีย 0.17 บาท 2/5 ของครั้งหรือโอกาสกับ 0.13 บาท 3/5 ของครั้งหรือโอกาส วางเป็นรูปสมการ มูลค่าเกมก็คำนวณได้ดังนี้

$$\text{มูลค่าเกม} = \frac{4}{5}\left[0.14 \text{ บาท}\left(\frac{2}{5}\right) + 0.15 \text{ บาท}\left(\frac{3}{5}\right)\right] + \frac{1}{5}\left[0.17 \text{ บาท}\left(\frac{2}{5}\right) + 0.13 \text{ บาท}\left(\frac{3}{5}\right)\right]$$

$$= \frac{4}{5}\left(\frac{0.28 \text{ บาท}}{5} + \frac{0.45 \text{ บาท}}{5}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{0.34 \text{ บาท}}{5} + \frac{0.39 \text{ บาท}}{5}\right)$$

$$= \frac{4}{5}\left(\frac{0.73 \text{ บาท}}{5}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{0.73 \text{ บาท}}{5}\right)$$

$$= \frac{0.73 \text{ บาท}}{5} \text{ หรือ } 0.146 \text{ บาทเพิ่มขึ้น}$$

มูลค่าเกมสำหรับบริษัทเหมือนกันกับของสหพันธ์ เครื่องหมายเป็นบวกเนื่องจากว่าส่วนที่เพิ่มขึ้นอำนวยให้สหพันธ์ มูลค่าเกมแสดงการชนะหรือได้เฉลี่ยของผู้เล่นตลอดการเล่นหลาย ๆ ครั้ง concept นี้ใช้ต่อปัญหาสหพันธ์กับบริษัทเนื่องจากว่าการวิเคราะห์ชนิดนี้สามารถใช้ได้ตลอดปี วิธีการแบบความน่าจะเป็นร่วมสำหรับคำนวณหามูลค่าเกม

วิธีการอื่น ๆ สำหรับคำนวณหามูลค่าเกมคือ การใช้ความน่าจะเป็นร่วมเกมแมทริกซ์ดั้งเดิม และอุบายที่ดีที่สุดสร้างขึ้นใหม่ข้างล่างนี้

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{บริษัท} \\
 & \begin{array}{cc} C_2 & C_3 \\ 2/5 & 3/5 \end{array} \\
\text{สหพันธ์} \begin{array}{c} U_1 \\ U_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.14 \text{ บาท} & 0.15 \text{ บาท} \\ 0.17 \text{ บาท} & 0.13 \text{ บาท} \end{bmatrix} \begin{array}{c} 4/5 \\ 1/5 \end{array}
\end{array}
$$

จากการตรวจของแมทริกซ์ ความน่าจะเป็นที่สหพันธ์จะเล่นแถวที่ 1 คือ 4/5 กับ 1/5 สำหรับเล่นแถวที่ 2 ในทำนองเดียวกันความน่าจะเป็นที่บริษัทจะเล่นคอลัมน์ที่ 2 คือ 2/5 กับ 3/5 สำหรับคอลัมน์ที่ 3 เนื่องจากว่าสหพันธ์กับบริษัทเล่นเกมโดยไม่ขึ้นแก่กันและกัน ความน่าจะเป็นสำหรับสหพันธ์ไม่ขึ้นกับความน่าจะเป็นสำหรับบริษัท

ตารางที่ 7 วิธีการแบบความน่าจะเป็นร่วมสำหรับคำนวณหามูลเกม

มูลค่าสิ่งตอบแทน (a)	**อุบาย**	**ความน่าจะเป็นของสิ่งตอบแทน** (b)	**มูลค่าเกม** (a)×(b)
0.14 บาท	แถวที่ 1 คอลัมน์ที่ 2	$4/5 \times 2/5 = 8/25$	$\frac{1.12 \text{ บาท}}{25}$
0.15 บาท	แถวที่ 1 คอลัมน์ที่ 3	$4/5 \times 3/5 = 12/25$	$\frac{1.80 \text{ บาท}}{25}$
0.17 บาท	แถวที่ 2 คอลัมน์ที่ 2	$1/5 \times 2/5 = 2/25$	$\frac{0.34 \text{ บาท}}{25}$
0.13 บาท	แถวที่ 2 คอลัมน์ที่ 3	$1/5 \times 3/5 = 3/25$	$\frac{0.39 \text{ บาท}}{25}$
		1.0	$\frac{3.65 \text{ บาท}}{25}$
			0.146 บาท

คำถามว่าเรามีความน่าจะเป็นแบบ marginal แบบร่วม หรือแบบมีเงื่อนไขถูกแยกออก โดยหลักความจริงที่แต่ละฝ่ายเล่นอุบายที่แน่นอนพร้อม ๆ กัน ความน่าจะเป็นที่แถวที่ 1 กับคอลัมน์ที่ 2 ในตัวอย่างจะเล่นในเวลาเดียวกันคือ ความน่าจะเป็นร่วมภายใต้เงื่อนไขของ

ความอิสระกันหรือ 4/5 เท่าของ 2/5 เท่ากับ 8/25 ความน่าจะเป็นที่ 0.14 บาท จะเป็นสิ่งตอบแทนภายหลังฝ่ายหนึ่งเล่นเกมคือ 8/25 การคำนวณสำหรับมูลค่าเกมของ 0.146 บาท เพิ่มขึ้นต่อสหพันธ์คำนวณหาได้ในตารางที่ 7

วิธีการของเกมย่อยสำหรับคำนวณหามูลค่าเกม

การปฏิบัติในหัวข้อนี้สำหรับหามูลค่าเกมเกี่ยวกับการหาคำตอบสำหรับเกม 2×2 เท่านั้น มีหลาย ๆ เกมที่ใหญ่สามารถลดลงได้โดยวิธีการครอบงำให้เป็นเกม 2×2 อย่างไรก็ตามนี้ไม่ได้คลุมทุกกรณีเนื่องจากว่า การลดเช่นนั้นไม่สามารถทำได้เสมอไป

ตารางที่ 8 แมทริกซ์สิ่งตอบแทน (2×3) ของสองสายการบิน

		สายการบิน T		
		ไม่ได้ทำอะไรเลย	**โฆษณาและอัตราพิเศษ**	**โฆษณาลักษณะพิเศษ (อย่างเช่น ภาพยนตร์และอาหารดี)**
สายการบิน A	โฆษณาและอัตราพิเศษ	300	-25	-50
	โฆษณาลักษณะพิเศษ (อย่างเช่น ภาพยนตร์และอาหารดี)	150	155	175

สำหรับตัวอย่าง สองสายการบินบริการเส้นทางเดียวกัน ทั้งสองบริษัทพยายามขยายตลาดหุ้นให้ใหญ่เท่าที่เป็นไปได้ หนึ่งของสายการบิน A ปรากฏว่ามีความก้าวหน้ากว่าเนื่องจากว่าภาวะทางการเงินมั่นคงและแผนกการตลาดของบริษัทมีความรอบรู้กว่าเกี่ยวกับภาวะการตลาดท้องถิ่น แมทริกซ์สิ่งตอบแทนในตารางที่ 8 แสดงได้ผู้โดยสารและเสียผู้โดยสารรายเดือนขึ้นอยู่กับภาวะการตลาดที่แน่นอน การอ่านแมทริกซ์วิธีการนี้ ค่าบวกอำนวยให้สาย

การบิน A ขณะที่ค่าลบอำนวยให้สายการบิน T

เกม 2×3 ในตารางที่ 8 สามารถแยกออกได้เป็นสามเกม 2×2 เกมย่อยที่ 1

$$
\begin{array}{cc} & T \\ A & \begin{bmatrix} 300 & -25 \\ 150 & 155 \end{bmatrix} \end{array} \text{ คอลมัมน์ที่ 1 กับ 2}
$$

เกมย่อยที่ 2

$$
\begin{array}{cc} & T \\ A & \begin{bmatrix} 300 & -50 \\ 150 & 175 \end{bmatrix} \end{array} \text{ คอลัมน์ที่ 1 กับ 3}
$$

เกมย่อยที่ 3

$$
\begin{array}{cc} & T \\ A & \begin{bmatrix} -25 & -50 \\ 155 & 175 \end{bmatrix} \end{array} \text{ คอลัมน์ที่ 2 กับ 3}
$$

สายการบิน T ซึ่งมีหนทางที่จะไม่เล่นหนึ่งคอลัมน์ พยายามที่จะคำนวณหาส่วนประกอบของสองอุบายคอลัมน์ นั่นคือ ดีที่สุดสำหรับสายการบินเอง เหมือนกับการแสดงครั้งก่อน ผู้เล่นที่มีคอลัมน์หรือแถวมากที่สุดย่อมมีความยืดหยุ่นมากกว่า โดยทั่ว ๆ ไปมีผลในอุบายที่ดีกว่า อย่างไรก็ตามในเกมนี้มีค่าบวกสี่ค่ากับค่าลบสองค่า เพื่อที่จะหาอุบายที่ดีที่สุดของสายการบิน T ทั้งหมดมีสามเกมย่อย 2×2 ที่ต้องหาอุบายและมูลค่าของสามเกมย่อยนั้น ควรจะสังเกตว่า เมื่อไรที่คอลัมน์หนึ่งไม่ได้เล่นให้ใช้ศูนย์แทนนี้จะปรากฏในแต่ละเกมย่อยดังจะเห็นได้ข้างล่าง วิธีการหนึ่งวิธีการใดที่ได้เสนอมาก่อนสำหรับ อุบายและมูลค่าเกมสามารถนำมาใช้ได้

เกมย่อยที่ 1

$$
\begin{array}{cc} & T \\ A & \begin{bmatrix} 300 & -25 \\ 150 & 155 \end{bmatrix} \end{array} \text{ คอลัมน์ที่สามไม่ได้เล่น}
$$

อุบาย

$$
A = \frac{1}{66}, \frac{65}{66}
$$

$$T = \frac{36}{66}, \frac{30}{66}, 0$$

มูลค่าเกม : 152.27

เกมย่อยที่ 2

$$\begin{array}{cc} & T \\ A & \begin{bmatrix} 300 & -50 \\ 150 & 175 \end{bmatrix} \end{array}$$ คอลัมน์ที่สองไม่ได้เล่น

อุบาย

$$A = \frac{1}{15}, \frac{14}{15}$$

$$T = \frac{9}{15}, 0, \frac{6}{15}$$

มูลค่าเกม : 160

เกมย่อยที่ 3

$$\begin{array}{cc} & T \\ A & \begin{bmatrix} -25 & -50 \\ 155 & 175 \end{bmatrix} \end{array}$$ คอลัมน์ที่หนึ่งไม่ได้เล่น

อุบาย

$$A = 0, 1$$

$$T = 0, 1, 0$$

มูลค่าเกม : 155 จุดมูลค่าเท่ากัน

ขึ้นอยู่กับการคำนวณครั้งก่อน ๆ มูลค่าเกมบวกที่ต่ำที่สุดหรือเกมย่อยที่ 1 ได้รับเลือกเนื่องจากว่า T มีความยืดหยุ่นมากกว่า ขณะที่สายการบิน A ต้องเล่นแถวใดแถวหนึ่ง สายการบิน T ไม่ต้องเล่นทั้งสามคอลัมน์เล่นเพียงสองคอลัมน์เท่านั้น อุบายของสายการบิน T ต้องเล่นคอลัมน์แรก 36/66 ของครั้งกับคอลัมน์ที่สอง 30/66 ของครั้งสายการบิน T จะไม่ใช้คอลัมน์ที่สาม นี่สามารถพิสูจน์ว่า อุบายนี้เป็นอุบายที่ดีที่สุดโดยการดูที่แมทริกซ์ดั้งเดิม

สายการบิน T

		T_1	T_2	T_3
สายการบิน A	A_1	300	−25	−50
	A_2	150	155	175

คำตอบ (มูลค่าเกม 152.27 ในการอำนวยสายการบิน A) แสดงว่าเลือกอุบายผสมในลักษณะที่ A ชนะ (หรือแพ้) ในทำนองเดียวกัน ไม่เกี่ยวกับการเลือกคอลัมน์ของสายการบิน T ดังได้กล่าวในคำอธิบายก่อน ๆ ถึงการคำนวณหาอุบายผสมได้อย่างไร ความคาดหวังของสายการบิน A จากการเล่นอุบายผสม (ระหว่างแถวของ A) ก็เหมือนกัน ไม่ได้อ้างอิงอะไรที่สายการบิน T จะเล่นจุดนี้สามารถแสดงออกได้โดยทางพีชคณิตด้วยการให้มูลค่าเกมของเกมย่อยที่ 1 เท่ากับคอลัมน์ที่สายการบิน T เล่น นี้แสดงได้ดังนี้

		<u>การชนะที่คาดหวังของสายการบิน A</u>
สายการบิน T	เล่นคอลัมน์ที่ 1	$300\,A_1 + 150\,A_2 \geqslant 152.27$
สายการบิน T	เล่นคอลัมน์ที่ 2	$-25\,A_1 + 155\,A_2 \geqslant 152.27$
สายการบิน T	เล่นคอลัมน์ที่ 3	$-50\,A_1 + 175\,A_2 \geqslant 152.27$

สมการข้างต้นหมายความว่า สายการบิน A คาดหวังที่จะได้ลูกค้าหรือผู้โดยสาร 152.27 คน นี่ไม่ได้เกี่ยวข้องกับการเลือกสรร ของสายการบิน T เครื่องหมาย $\geqslant$ ความหมายว่า A อาจได้ผู้โดยสารมากกว่า 152.27 คน ถ้าสายการบิน T เลือกอุบายที่เลว ถ้าหากว่าอุบายที่เราคำนวณหาได้เป็นอุบายที่ดีที่สุด อุบายเหล่านี้ก็ควรจะสอดคล้องสามอสมการข้างต้นแทนค่าสำหรับ A_1 (1/66) กับ A_2 (65/66) ผลลัพธ์เป็นได้ดังนี้

คอลัมน์ที่ 1 :

$$300(1/66) + 150(65/66) \geqslant 152.27\,;\ 4.54 + 147.73 = 152.27$$

คอลัมน์ที่ 2 :

$$-25(1/66) + 155(65/66) \geqslant 152.27\,;\ -0.38 + 152.65 = 152.27$$

คอลัมน์ที่ 3 :

$$-50(1/66) + 175(65/66) \geqslant 152.27\,;\ -0.76 + 172.35 > 152.27$$

$$171.59 > 152.27$$

ทั้งสามอสมการสอดคล้องกับค่าที่ได้ใส่เข้าไปสำหรับอุบายของสายการบิน A อย่างไรก็ตาม เมื่อไรที่สายการบิน T เล่นคอลัมน์ที่ 3 สายการบิน A จะได้ผู้โดยสารมากกว่า 152.27 คน เนื่องจากว่านี้เป็นอุบายที่เลวสำหรับ T นี้เป็นเหตุผลที่ทำไมสายการบิน T จะไม่เล่นคอลัมน์ที่ 3 ซึ่งให้สายการบิน A ได้เปรียบเพิ่มขึ้นในเกมที่อำนวยให้กับสายการบิน A

เป็นที่พอใจกับความต้องการสำหรับอุบายของสายการบิน A เราต้องมองดูอุบายของสายการบิน T เพื่อที่จะคำนวณหาว่าเป็นอุบายที่ดีที่สุดหรือไม่ สายการบิน T ได้เลือกอุบายของเขาแล้ว เพื่อเขาควรจะทำให้เขาเสียน้อยที่สุด นี้สามารถแสดงออกได้โดยพีชคณิตโดยให้มูลค่าเกมของเกมย่อยที่ 1 เท่ากับแถวที่สายการบิน A เล่น

<u>การหาได้ที่คาดหวังของสายการบิน T</u>

สายการบิน A	เล่นแถวที่ 1	$300\ T_1 - 25\ T_2 - 50\ T_3 \leqslant 152.27$
สายการบิน A	เล่นแถวที่ 2	$150\ T_1 + 155\ T_2 + 175\ T_3 \leqslant 152.27$

อสมการข้างต้นหมายความว่า สายการบิน T คาดหวังที่จะเสียลูกค้าหรือผู้โดยสาร 152.27 คน ที่ไม่ได้เกี่ยวข้องกับการเลือกสรร ของสายการบิน A เครื่องหมาย $\leqslant$ แสดงว่า T อาจเสียน้อยกว่าถ้า A เลือกอุบายที่เลวอีกนัยหนึ่ง ถ้าหากว่าอุบายที่เราได้คำนวณหาเป็นอุบายที่ดีที่สุด อุบายเหล่านี้ก็ควรจะสอดคล้องกับสองอสมการสุดท้าย แทนค่าสำหรับ T_1 (36/66) T_2 (30/66) และ T_3 (0) ผลลัพธ์เป็น

$$300\,(36/66) - 25\,(30/66) - 50\,(0) \leqslant 152.27;\ 163.64 - 11.37 - 0 = 152.27$$

$$150\,(36/66) + 155\,(30/66) + 175\,(0) \leqslant 152.27;\ 81.82 + 70.45 + 0 = 152.27$$

อสมการทั้งสองสอดคล้องกับอุบายซึ่งคำนวณหาในเกมย่อยที่ 1 มีผลในอุบายที่ดีที่สุดของสายการบิน T การเลือกเกมย่อยที่มีมูลค่าต่ำที่สุด เป็นการพิสูจน์การตัดสินใจของเราว่า เกมย่อยที่ 1 เป็นเกมที่ดีที่สุดโดยสอดคล้องกับห้าอสมการ โดยปราศจากการพิสูจน์นี้เราไม่เคยมีความแน่ใจว่าสายการบิน T ได้เลือกอย่างถูกต้องในการปฏิเสธ ที่จะเล่นคอลัมน์ที่ 3

วิธีการแบบกราฟสำหรับคำนวณหามูลค่าเกม

อีกวิธีการหนึ่งสำหรับคำนวณหามูลค่าเกมคือ วิธีการแบบกราฟ ข้อดีของวิธีการนี้คือว่า มีความรวดเร็วและสามารถเลือกว่าเกมย่อยอันไหนเป็นเกมที่ดีที่สุดสำหรับผู้เล่น ที่ต้องทำการเลือก

ในตัวอย่างข้างล่าง วิธีการแบบกราฟจะใช้แก้สำหรับมูลค่าเกม

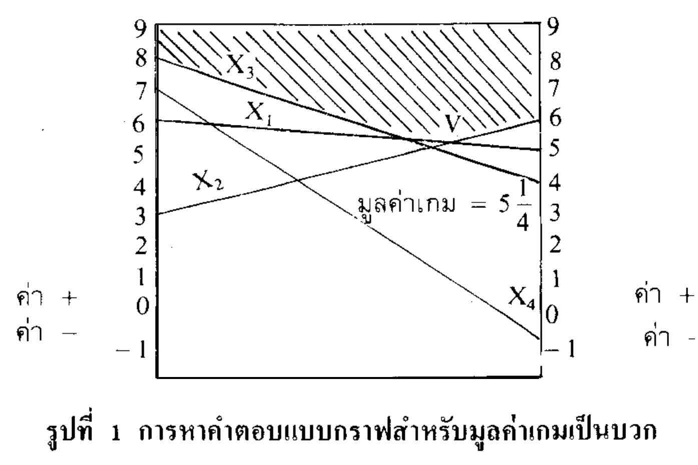
$$\begin{array}{c c} & Y \\ X & \begin{bmatrix} 19 & 6 & 7 & 5 \\ 7 & 3 & 14 & 6 \\ 12 & 8 & 18 & 4 \\ 8 & 7 & 13 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

ขั้นแรกต้องพยายามหาที่ตั้งจุดมูลค่าเท่ากัน ถ้าหาไม่ได้ในปัญหานี้ต่อไปใช้เทคนิคของการครอบงำ ซึ่งแสดงว่าคอลัมน์ 2 ครอบงำ คอลัมน์ที่ 1 กับที่ 3 ของแมทริกซ์ คือ

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} Y_2 & Y_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 6 \\ 8 & 4 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

ตรวจสอบต่อไปเห็นว่าแถวที่ 3 ครอบงำ แถวที่ 4 อย่างไรก็ตาม การครอบงำนี้จะถูกละทิ้งไปชั่วขณะหนึ่ง

ถ้าหากว่าผู้เล่น X เลือกที่จะเล่นแถวที่หนึ่ง (X_1) การชนะของเขาจะเป็น 6 จุด หรือ 5 จุดอย่างใดอย่างหนึ่ง ขึ้นอยู่กับคอลัมน์ของการเลือกของ Y นี้แสดงในรูปที่ 1 ในทำนองเดียวกัน ถ้า X เล่นแถวที่ 2 (X_2) การชนะของเขาจะเป็น 3 จุด หรือ 6 จุด ขึ้นอยู่กับคอลัมน์ของการเลือกของ Y ลากเส้นตรงสำหรับ X_1 กับ X_2 แถวที่เหลือก็สร้างในลักษณะที่คล้ายกัน



รูปที่ 1 การหาคำตอบแบบกราฟสำหรับมูลค่าเกมเป็นบวก

การตรวจสอบในรูปที่ 1 เข้าใจว่าแถว X_4 ถูกครอบงำด้วยแถว X_3 และสามารถละทิ้งเสียในการพิจารณาของเราเกี่ยวกับวิธีการแบบกราฟ การสังเกตอื่น ๆ เกี่ยวกับกราฟของเกมคือ ปรากฏว่าแถว X_3 เสนอให้ X มีโอกาสดีที่สุดที่จะชนะ (8 จุด) อย่างไรก็ตาม สิ่งหนึ่งที่ต้องจำว่า Y สามารถเปลี่ยนไปคอลัมน์ที่ 4 นี้ควรจะลดสิ่งตอบแทนไปเป็น 4 ทันที มูลค่าต่ำที่สุดของสามแถว X_1, X_2 และ X_3

สมมติผู้เล่นทั้งสองมีเหตุผลและใช้สติปัญญาเข้าถึงเหตุผลควรจะเป็นดังนี้

1. ถ้าหากว่า X เล่นแถวที่ 3 (X_3) หวังที่จะชนะ 8 จุด Y ควรจะเปลี่ยนไปคอลัมน์ที่ 4 ทันทีเพื่อลดการชนะของ X เป็น 4 จุด

2. ขณะเดียวกัน X ได้เห็นนี้เกิดขึ้น เขาควรจะเปลี่ยนไปแถวที่ 2 (X_2) และชนะ 6 จุด นานเท่าที่ Y จะเล่นคอลัมน์ที่ 4 ต่อไป

3. Y เข้าใจถึงสถานการณ์ ควรจะเปลี่ยนไปคอลัมน์ที่ 2 ที่ซึ่ง X สามารถเอาชนะได้ 3 จุดเท่านั้น

4. ขณะเดียวกัน X ได้เห็นนี้เกิดขึ้น เขาควรจะเปลี่ยนเป็นแถวที่ 1 (X_1) และชนะ 6 จุด

5. ผู้เล่น Y ควรจะเห็นนี้และเปลี่ยนไปคอลัมน์ที่ 4 ที่ซึ่งการชนะของ X ควรจะลดจาก 6 จุดเป็น 5 จุด

6. ทำต่อ ๆ ไปในลักษณะเดียวกัน

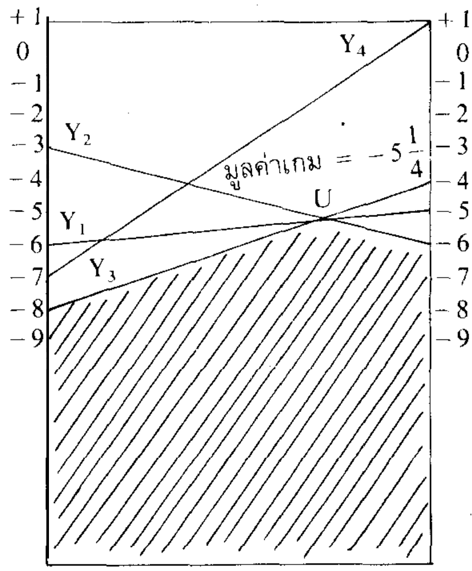
สัดส่วนของครั้งที่แต่ละผู้เล่นใช้เกี่ยวกับอุบายของเขาเอง (แถวหรือคอลัมน์) สามารถคำนวณได้จากหนึ่งวิธีของหลาย ๆ วิธีการที่ได้กล่าวมาก่อน มูลค่าเกม (จุด V) สามารถอ่านได้จากกราฟในรูปที่ 1 เนื่องจากว่าเป็นสิ่งตอบแทนเฉลี่ยล้อมรอบตามเกมที่หมุนไป

ในรูปที่ 1 จุดตัดต่ำที่สุดในพื้นที่แลเงาเป็นการตัดกันของแถวที่ดีที่สุด ความสำคัญของการตัดกันคือว่าเป็นระดับต่ำที่สุดที่ซึ่ง Y สำหรับขัดขวางการชนะของ X ในทำนองเดียวกันก็เป็นระดับที่ซึ่ง X สามารถขัดขวาง Y ที่จะทำให้เขาเสียน้อยที่สุด มูลค่าเกมเพียงแสดงว่าผู้เล่นคนหนึ่งสามารถไปได้ไกลเท่าไรก่อนที่อุบายเพื่อป้องกันตัวของคู่ต่อสู้ของเขาจำกัดเขา

มูลค่าเกม $5\frac{1}{4}$ อำนวยให้ X อย่างไรก็ตาม ก็เป็นไปได้ที่จะมีมูลค่าเกมที่อำนวยให้ Y การเขียนกราฟแมทริกซ์สิ่งตอบแทนก่อนเมื่อ matrix ได้ถูกสับเปลี่ยนที่กัน (transposed) เครื่องหมายจะเป็น

$$\begin{array}{c} \\ X_1 \\ X_2 \end{array}\begin{array}{cccc} Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 \\ \left|\begin{array}{cccc} -6 & -3 & -8 & -7 \\ -5 & -6 & -4 & 1 \end{array}\right| \end{array}$$

ความแตกต่างพื้นฐานระหว่างแมทริกซ์สิ่งตอบแทนเมื่อหามูลค่าเกม ในรูปที่ 1 จุดตัดต่ำสุด (V) ในพื้นที่แลเงาคือมูลค่าเกม ขณะที่ในรูปที่ 2 จุดตัดสูงสุด (U) ในพื้นที่แลเงา คือมูลค่าเกม วิธีการที่ได้ใช้ในการเขียนกราฟเกี่ยวกับ concept ของจุดสูงสุด ซึ่งได้สร้างในวิธีการแบบกราฟของโปรแกรมเชิงเส้นตรงเมื่อไรที่ประยุกต์กับทฤษฎีของเกม จุดตัดสูงสุดหรือต่ำสุดแทนอุบายซึ่งเป็นข้อบังคับของผู้เล่นเกม



รูปที่ 2 การหาคำตอบแบบกราฟสำหรับมูลค่าเกมเป็นลบ

อุบายผสมและมูลค่าเกม (เกม 3×3 และใหญ่กว่า)

หัวข้อก่อนได้กล่าวถึงวิธีการต่าง ๆ สำหรับคำนวณหาอุบายผสมและมูลค่าเกมภายหลังการพิจารณา จุดมูลค่าเท่ากัน และการครอบงำ ถ้าหากว่าไม่มีจุดมูลค่าเท่ากัน, การครอบงำจะไม่มีผลหรือมีผลบางส่วนและเกมก็ยังเป็น 3×3 หรือใหญ่กว่า วิธีการที่ดีที่สุดสำหรับแก้ปัญหาเกมคือ วิธีการแบบโปรแกรมเชิงเส้นตรง โปรแกรมคอมพิวเตอร์มีประโยชน์ที่จะแก้ปัญหาเกม 3×3 หรือใหญ่กว่า

การโปรแกรมเชิงเส้นตรง

แสดงการใช้โปรแกรมเชิงเส้นตรง กรณีของการใช้สองสถานีบริการขนาดใหญ่

สองสถานบริการเหล่านี้เป็นคู่แข่งขันที่น่ากลัวและใหญ่ที่สุดในส่วนหนึ่งของนคร สถานบริการสแตนดาร์ดกับสถานบริการเท็กซ์ซัส ต่างพยายามที่จะเพิ่มตลาดหุ้นของเขาที่ค่าใช้จ่ายอื่น ๆ สถานบริการสแตนดาร์ดกำลังพิจารณาความน่าจะเป็นไปได้ของราคาที่ลด โดยการแถมเครื่องดื่ม ถ้าใครซื้อน้ำมัน \$ 4.00 หรือการแถมแก้วน้ำหนึ่งใบถ้าใครซื้อน้ำมันแต่ละครั้ง 10 แกลลอน เจ้าของสถานบริการเท็กซ์ซัสไม่สามารถละเลยตลาดหุ้นที่เพิ่มขึ้นของสถานีสแตนดาร์ดเป็นหลักความจริง สถานบริการเท็กซ์ซัสไม่สามารถละเลยตลาดหุ้นที่เพิ่มขึ้นของสถานีสแตน-ดาร์ด เป็นหลักความจริง สถานบริการเท็กซ์ซัสควรจะต้องเผชิญหน้ากับโปรแกรมของตนเองที่ได้ออกแบบที่จะเพิ่มหุ้นของตลาด เนื่องจากว่าราคากระแสรายวันกับคุณภาพของผลิตภัณฑ์ที่แข่งขันเหมือนกัน เป็นการยากที่จะกำหนดอะไรที่จะต้องทำ สถานบริการสแตนดาร์ดได้กำหนดแมทริกซ์สิ่งตอบแทนดังนี้ (ตารางที่ 9) จากแง่คิดของการเพิ่มหรือการลดตลาดหุ้น

ตารางที่ 9 แมทริกซ์สิ่งตอบแทน (3×3) ของสถานีบริการ

		สถานบริการเท็กซ์ซัส		
		ลดราคา	**แถมเครื่องดื่ม เมื่อซื้อ \$ 4.00**	**แถมแก้วน้ำเมื่อ ซื้อ 10 แกลลอนหรือ มากกว่า**
สถานบริการสแตนดาร์ด	ลดราคา	4%	1%	−3%
	แถมเครื่องดื่ม เมื่อซื้อ \$ 4.00	3	1	6
	แถมแก้วน้ำเมื่อ ซื้อ 10 แกลลอน หรือมากกว่า	−3	4	−2

จากหัวข้อก่อน (วิธีการของเกมย่อยสำหรับคำนวณหามูลค่าเกม) เราหาอสมการซึ่งแสดงความคาดหวังของสถานบริการเท็กซ์ซัสเป็นไปได้ดังนี้

$$4Y_1 + Y_2 - 3Y_3 \leqslant V \quad (V = \text{มูลค่าเกม})$$

$$3Y_1 + Y_2 + 6Y_3 \leqslant V$$

$$-3Y_1 + 4Y_2 - 2Y_3 \leqslant V$$

$$Y_1 + Y_2 + Y_2 = 1$$ (ครั้งหรือโอกาสที่ใช้เล่นทั้งสามคอลัมน์ผลการบวกเป็นหนึ่ง)

$$\frac{4Y_1}{V} + \frac{Y_2}{V} - \frac{3Y_3}{V} \leqslant 1$$ (หารแต่ละข้างด้วย V)

$$\frac{3Y_1}{V} + \frac{Y_2}{V} + \frac{6Y_3}{V} \leqslant 1$$

$$\frac{3Y_1}{V} + \frac{2Y_2}{V \qquad V} \leqslant 1$$

เพื่อที่จะขจัด V จึงจำเป็นจะต้องนิยามตัวแปรใหม่ ($\bar{Y}_i$)

$$\bar{Y}_i = \frac{Y_i}{V}$$

เราแก้ปัญหาเกมในเทอมของ $\bar{Y}_i$ เพื่อว่าเมื่อไรเราทำ เราสามารถคูณ $\bar{Y}_i$ ด้วย V เพื่อที่จะคำนวณหา Y_i ตัวเดิม ($Y_i = \bar{Y}_i \times V$) อสมการใหม่คือ

$$4\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 - 3\bar{Y}_3 \leqslant 1$$

$$3\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + 6\bar{Y}_3 \leqslant 1$$

$$-3\bar{Y}_1 + 4\bar{Y}_2 - 2\bar{Y}_3 \leqslant 1$$

สมการ ($Y_1 + Y_2 + Y_3 = 1$) ต้องมีความสัมพันธ์ในเทอมของ $\bar{Y}_i$ ด้วย ดังนี้

$$\frac{Y_1}{V} + \frac{Y_2}{V} + \frac{Y_3}{V} = \frac{1}{V}$$

$$\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3 = \frac{1}{V}$$

สี่ข้อบังคับของเรา (สมการข้อบังคับ) ข้างต้นคือ

$$\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_4 = \frac{1}{V}$$

$$4\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 - 3\bar{Y}_3 \leqslant 1$$

$$3\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + 6\bar{Y}_3 \leqslant 1$$

$$-3\bar{Y}_1 + 4\bar{Y}_2 - 2\bar{Y}_3 \leqslant 1$$

เราสามารถกล่าวสมการข้างต้นในเทอมของปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรงโดยการ

แก้อุบายที่ดีที่สุดของ Y_i และโดยการบวก slack variable เข้ากับแต่ละอสมการ จะต้องจำไว้ว่า วัตถุประสงค์ของ Y ต้องทำค่าของมูลค่าเกม (V) ให้มีค่าน้อยที่สุด ซึ่งก็เหมือนกับการทำ $\frac{1}{V}$ ให้มีค่ามากที่สุด

จงทำ $\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3 \;=\; \frac{1}{V}$ ให้มีค่ามากที่สุดโดยขึ้นอยู่กับ

$$4\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 - 3\bar{Y}_3 + \bar{Y}_4 + 0\bar{Y}_5 + 0\bar{Y}_6 = 1$$
$$3\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + 6\bar{Y}_3 + 0\bar{Y}_4 + \bar{Y}_5 + 0\bar{Y}_6 = 1$$
$$-3\bar{Y}_1 + 4\bar{Y}_2 - 2\bar{Y}_3 + 0\bar{Y}_4 + 0\bar{Y}_5 + \bar{Y}_6 = 1$$

ในเมื่อ $\bar{Y}_4$, $\bar{Y}_5$ และ $\bar{Y}_6$ เป็น slack variables

เพราะว่าทำแบบ simplex algorithm ความจำเป็นของตารางที่จะแก้อุบายสุดท้ายของ Y (ไม่ได้แสดงในที่นี้) อย่างไรก็ตาม อุบาย $\bar{Y}$ ที่ดีที่สุดของตารางสุดท้ายให้

$$Y_1 = \frac{27}{161}, \quad Y_2 = \frac{62}{161}, \quad \bar{Y}_3 = \frac{3}{161}$$

จำเป็นที่จะเปลี่ยน $\bar{Y}_1$, $\bar{Y}_2$ และ $\bar{Y}_3$ เป็นอุบายคอลัมน์ Y จริง ๆ นี้สามารถทำได้โดยการคูณด้วย V อย่างไรก็ตาม อะไรที่จะทำให้มีค่าน้อยที่สุดคือ $\frac{1}{V}$ ถ้าหากว่า $\frac{1}{V}$ เท่ากับ $\frac{4}{7}$ (ค่าในคอลัมน์เชิงปริมาณในตารางสุดท้ายหรือ $\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3$) แล้ว V เท่ากับ $\frac{7}{4}$ แทนค่า $\frac{7}{4}$ สำหรับ V อุบายของคอลัมน์สำหรับ Y เป็นได้ดังนี้

$Y_1 = \bar{Y}_1 \times V$	$Y_2 = \bar{Y}_2 \times V$	$Y_3 = \bar{Y}_3 \times V$
$Y = \frac{27}{161} \times \frac{7}{4}$	$Y_2 = \frac{26}{161} \times \frac{7}{4}$	$Y_3 = \frac{3}{161} \times \frac{7}{4}$
$y_1 = \frac{27}{92}$	$y_2 = \frac{62}{92}$	$Y_3 = \frac{3}{92}$

กระบวนการที่ใช้ข้างต้นสำหรับการคำนวณอุบายของ Y (และมูลค่าเกม) สามารถใช้กับ X อสมการต่อไปนี้แทนความคาดหวังของ X

$$4X_1 + 3X_2 - 3X_3 \geqslant V \quad \text{(มูลค่าเกม)}$$
$$X_1 + X_2 + 4X_3 \geqslant V$$
$$-3X_1 + 6X_2 - 2X_3 \geqslant V$$

$$X_1 + X_2 + X_3 = 1 \text{ (อุบายรวมกันเป็น 1)}$$

$$\frac{4x_1}{V} + \frac{3X_2}{V} - \frac{3x3}{V} \geqslant 1 \text{ (หารแต่ละข้างด้วย v)}$$

$$\frac{X_1}{V} + \frac{X_2}{V} + \frac{4X_3}{V} \geqslant 1$$

$$-\frac{3X_1}{V} + \frac{6X_2}{V} \frac{2X_3}{V} \geqslant 1$$

$$\frac{X_1}{V} + \frac{X_2}{V} + \frac{X_3}{V} = \frac{1}{V}$$

นิยามตัวแปรใหม่ $\bar{X}_i$ ซึ่งเท่ากับ X_i/V หรือ $X_i = \bar{X}_i \times V$ เราสามารถเปลี่ยนอสมการและมูลค่าเกมข้างต้นเสียใหม่ดังนี้

จงทำ $\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \bar{X}_3 = \frac{1}{V}$ ให้มีค่าน้อยที่สุดโดยขึ้นอยู่กับ

$$4\bar{X}_1 + 3\bar{X}_2 - 3\bar{X}_3 \geqslant 1$$

$$\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + 4\bar{X}_3 \geqslant 1$$

$$-3\bar{X}_1 + 6\bar{X}_2 - 2\bar{X}_3 \geqslant 1$$

สมการเหล่านี้สามารถเขียนเสียใหม่ด้วยการบวก slack variables กับ artificial variables ผู้เล่น X ต้องการที่จะทำให้ V มีค่ามากที่สุดหรือทำให้ 1/V มีค่าน้อยที่สุด สมการสำหรับตารางแรกของปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรง คือ

จงทำ $\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \bar{X}_3 = \frac{1}{V}$ ให้มีค่าน้อยที่สุดโดยขึ้นอยู่กับ

$$4\bar{X}_1 + 3\bar{X}_2 - 3\bar{X}_3 - \bar{X}_4 + 0\bar{X}_5 + 0\bar{X}_6 + \bar{X}_7 + 0\bar{X}_8 + 0\bar{X}_9 = 1$$

$$\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + 4\bar{X}_3 + 0\bar{X}_4 - \bar{X}_5 + 0\bar{X}_6 + 0\bar{X}_7 + \bar{X}_8 + 0\bar{X}_9 = 1$$

$$-3\bar{X}_1 + 6\bar{X}_2 - 2\bar{X}_3 + 0\bar{X}_4 + 0\bar{X}_5 - \bar{X}_6 + 0\bar{X}_7 + 0\bar{X}_8 + \bar{X}_9 = 1$$

ในเมื่อ $\bar{X}_4$, $\bar{X}_5$ และ $\bar{X}_6$ เป็น slack variables และ $\bar{X}_7$, $\bar{X}_8$ และ $\bar{X}_9$ เป็น artificial varibles

Simplex algorithm ให้อุบายดังนี้

$$\bar{X}_1 = \frac{1}{7},\ \bar{X}_2 = \frac{2}{7},\ \bar{X}_3 = \frac{1}{7}$$

แต่ $X_i = \bar{X}_i \times V$ ผลในอุบายของแถวสำหรับ X ดังนี้

$$X_1 = \frac{1}{7} \times \frac{7}{4};\ X_1 = \frac{1}{4}$$

$$X_2 = \frac{2}{7} \times \frac{7}{4};\ X_2 = \frac{1}{2}$$

$$X_3 = \frac{1}{7} \times \frac{7}{4};\ X_3 = \frac{1}{4}$$

เขตจำกัดพื้นฐานของทฤษฎีเกม

เขตจำกัดพื้นฐานของทฤษฎีเกมไม่ได้เป็นความสามารถของผู้เล่นที่จะบรรจุค่าที่ถูกต้องแน่นอนสำหรับแมทริกซ์สิ่งตอบแทนมากกว่าการขาดวิธีการที่เพียงพอที่จะหาอุบายและมูลค่าเกม รูปที่ไม่ถูกต้องในแมทริกซ์มีผลในการนำผลที่ได้ออกมาผิด แต่ก็ไม่ยากที่จะสร้างผลลัพธ์หนึ่งนั้นให้ดีกว่าอีกผลลัพธ์หนึ่ง ส่วนจะมากกว่าเท่าไรเป็นอีกวิธีการหนึ่ง ถึงแม้ว่าจุดนี้เป็นจริงโดยทั่ว ๆ ไปบริษัทสามารถจัดตำแหน่งจากดีที่สุดไปยังเลวที่สุดในเทอมของลูกค้าที่ร้องเรียนบริษัท

แนวความคิดเกี่ยวกับสิ่งตอบแทนที่ได้จัดตำแหน่งไว้ สามารถแสดงได้ดังตัวอย่าง มีสองบริษัท แต่ละบริษัทมีสามผลิตภัณฑ์ที่ได้จากสายการผลิตที่ซับซ้อน อยู่ในระหว่างการแข่งขันซึ่งกันและกัน แผนกการตลาดของบริษัทแรก (R) ได้สังเกตตลอดช่วงระยะเวลาหนึ่งว่า ความพยายามส่งเสริมของบริษัทจากแต่ละผลิตภัณฑ์จากเลวไปจนถึงชนิดพิเศษ ขึ้นอยู่กับการเปิดเผยเฉพาะผลิตภัณฑ์ในร้านแผนการวิจัยตลาดได้กำหนดผลการส่งเสริมจากการเปิดเผยของบริษัทสำหรับผลิตภัณฑ์ A, B และ C ซึ่งอยู่ในระหว่างการแข่งขันกับผลิตภัณฑ์ D, E และ F ของผู้แข่งขันของบริษัทดังนี้

		บริษัท S เปิดเผย ผลิตภัณฑ์		
		D	E	F
บริษัท R เปิดเผย	ผลิตภัณฑ์ A	ปานกลาง	ไม่มีความเห็น	เลว
	ผลิตภัณฑ์ B	พอใช้	ดีมาก	พอใช้
	ผลิตภัณฑ์ C	เลว	ดี	พิเศษ

จัดตำแหน่งได้ดังนี้ พิเศษ, ดีมาก, ดี, ปานกลาง, พอใช้, เลว และไม่มีความเห็น

และใช้แทนค่าด้วยตัวเลข 6, 5, 4, 3, 2, 1 และ 0 ตามลำดับ ผลของแมทริกซ์สิ่งตอบแทน คือ

		บริษัท S เปิดเผย ผลิตภัณฑ์		
		D	E	F
บริษัท R เปิดเผย	ผลิตภัณฑ์ A	3	0	1
	ผลิตภัณฑ์ B	2	5	2
	ผลิตภัณฑ์ C	1	4	6

แมทริกซ์สิ่งตอบแทนข้างต้นยอมให้บริษัทเกี่ยวข้องกับการเปิดเผยของบริษัทโดยทางคณิตศาสตร์ต่อคู่แข่งขัน

สรุป

ทฤษฎีเกมตามที่ได้เสนอในบทนี้ สมมติสิ่งรอบ ๆ ตัวเราที่เคลื่อนไหวที่ผู้แข่งขันมีความสามารถและสติปัญญาเท่ากัน จุดเริ่มต้นสำหรับแก้ปัญหาเกมคือ การหาจุดมูลค่าเท่ากัน (อุบายบริสุทธิ์) ถ้าหากว่าวิธีการนี้ไม่ได้ใช้ ก็เสนอแนะให้ใช้การครอบงำเพื่อลดเกมให้มีขนาดเท่าที่ควบคุมได้ง่าย ภายหลังให้การพิจารณากับการครอบงำวิธีการต่าง ๆ ก็มีประโยชน์สำหรับคำนวณหาอุบายของคอลัมน์และแถว เพื่อหามูลค่าเกม วิธีการแบบโปรแกรมเชิงเส้นตรง จะใช้แก้ปัญหาเกมขนาดใด ๆ ก็ได้ อย่างไรก็ตาม วิธีการนี้จะต้องเรียกความสนใจที่ว่าง่ายกว่ามากที่จะใช้วิธีการอื่น ๆ เกี่ยวกับเกมที่น้อยกว่าขนาด 3×3

ทฤษฎีเกมยังไม่บรรลุถึงความสามารถจะเป็นได้ของทฤษฎีที่เขียนนี้ การใช้คอมพิวเตอร์ให้เป็นประโยชน์ที่จะสุ่มเทียม การดำเนินงานของบริษัทก็อยู่ในสถานะเพียงเริ่มต้นเมื่อไรสองพื้นฐานเหล่านี้ ทฤษฎีเกมกับการสุ่มเทียมของการวิจัยดำเนินงานถูกนำมารวมกันที่จะแก้ปัญหาระยะหนึ่งของบริษัท ทฤษฎีเกมจะเป็นเครื่องมือสำคัญสำหรับการตัดสินใจเกี่ยวกับการบริหารเชิงปริมาณ

เงื่อนไขในการเล่นเกมของการแข่งขันมีดังนี้

ก. คู่แข่งขันมีจำนวนนับได้

ข. ถ้าหากว่าผู้แข่งขันทั้งหมดมีจำนวน n คน ผู้แข่งขันแต่ละคนต่างก็มีอุบายอยู่เป็นจำนวนที่สามารถนับได้เพื่อนำไปใช้ในการแข่งขัน จำนวนอุบายของผู้แข่งขันแต่ละคนไม่จำเป็นจะต้องเท่ากัน

ค. เมื่อผู้แข่งขันแต่ละคนเลือกเอาอุบายหนึ่งของหลาย ๆ อุบายเข้าไปแข่งขันกัน แสดงให้เห็นว่า การแข่งขันเริ่มขึ้นแล้ว สำหรับผลของเกมนั้นจะรู้ได้เมื่อผู้แข่งขันทุกคนต่างก็แสดงอุบายที่ตนเลือกเข้ามาแข่งขันพร้อม ๆ กัน เพราะฉะนั้นผู้แข่งขันแต่ละคนจะไม่สามารถรู้ได้ล่วงหน้าว่าคู่แข่งขันใช้อุบายไหน

ง. ผลลัพธ์ของเกมเมื่อสิ้นสุดจะประกอบด้วยอุบายชุดหนึ่งของผู้แข่งขันแต่ละคนเลือกเข้ามาแข่งขันคนละอุบาย เมื่ออุบายชุดนี้ปรากฏออกมาแล้ว ก็จะบอกผลของเกมว่าผู้แข่งขันใดเป็นฝ่ายได้ฝ่ายเสียและไม่ได้เสีย

คำถาม

1. ทฤษฎีเกมคืออะไร?
2. เกมสำหรับสองคนต่างไปจากเกมสำหรับคนหรือมากกว่าอย่างไร?
3. อุปสรรคส่วนใหญ่ของทฤษฎีเกมคืออะไร? เขาสามารถฟันฝ่าอุปสรรคได้อย่างไร?

ปัญหา

1. จงคำนวณหาอุบายที่ดีที่สุดสำหรับ X กับ Y และมูลค่าเกมสำหรับ

ก.

$$\begin{array}{cc} & Y \\ X & \begin{bmatrix} 11 & -3 & -4 \\ 8 & 7 & -8 \\ -5 & 5 & -6 \end{bmatrix} \end{array}$$

ข.

$$\begin{array}{cc} & Y \\ X & \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 8 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

2. จงคำนวณหาอุบายที่ดีที่สุดสำหรับ X กับ Y และมูลค่าเกม แสดงอุบายที่ดีที่สุดสอดคล้องกับอสมการของเกม

$$
\begin{array}{cc}
 & Y \\
X & \begin{bmatrix} -8 & 8 & 9 \\ -3 & -4 & -5 \\ -3 & -4 & -6 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

3. จงคำนวณหาอุบายที่ดีที่สุดสำหรับ Y และมูลค่าเกม

$$
\begin{array}{cc}
 & Y \\
X & \begin{bmatrix} 6 & 1 & 6 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 5 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

4. บริษัท A ได้พัฒนาฟังก์ชันทำนายการขายสำหรับแต่ละผลิตภัณฑ์ในเทอมของการตัดสินใจของบริษัทเอง และผลิตภัณฑ์เหล่านั้นเป็นผลิตภัณฑ์ที่เหมือนกันของบริษัท B ถ้าหากว่าบริษัท A ใช้อุบาย a_1 และบริษัท B ใช้อุบาย b_1 จะมีผลกำไร \$ 50,000 ในรายได้ของการขายเพียงเสี้ยวหรือเทอมหนึ่งสำหรับบริษัท A เนื่องจากว่ามี 12 ตัวประกอบของอุบายที่มีประโยชน์ต่อ A กับ B ผลเพิ่มขึ้นหรือลดลงในรายได้ของการขายเพียงเสี้ยวหรือเทอมหนึ่งสามารถเสนอในแมทริกซ์สิ่งตอบแทน

บริษัท B

		b_1	b_2	b_3	b_4
บริษัท A	a_1	\$ 50,000	(\$ 20,000)	\$ 120,000	(\$ 50,000)
	a_2	\$ 60,000	\$ 20,000	\$ 70,000	\$ 70,000
	a_3	(\$ 20,000)	\$ 0	(\$ 40,000)	\$ 75,000

บริษัท A ควรจะดำเนินตามอุบายอะไร?

5. มีสองบริษัท A กับ B กำลังแข่งขันการขายผลิตภัณฑ์ ผู้บริหารตลาดของบริษัท A ได้ยกคำถามขึ้น "ถ้าเราเปลี่ยนการโฆษณาข้างหลังผลิตภัณฑ์แล้วอะไรจะเกิดขึ้น" กลุ่มวิจัยการตลาดของบริษัท A ได้สร้างข้อมูลเพื่อเปลี่ยนแนวทางของการโฆษณาดังนี้

(ก) ไม่มีการโฆษณา, โฆษณาปานกลาง, โฆษณามาก บริษัททั้งสองจะมีผลในส่วนแบ่งของตลาดตามจำนวนของลูกค้าเท่ากัน

(ข) บริษัท A ไม่มีการโฆษณา บริษัท B โฆษณาปานกลางและโฆษณามาก ส่วนแบ่งของตลาดตามจำนวนลูกค้าจะเป็น 40 เปอร์เซ็นต์ และ 28 เปอร์เซ็นต์ตามลำดับ

(ค) บริษัท A โฆษณาปานกลาง บริษัท B ไม่มีการโฆษณาและโฆษณามาก ส่วนแบ่งของตลาดตามจำนวนลูกค้าเป็น 70 เปอร์เซ็นต์ และ 45 เปอร์เซ็นต์ตามลำดับ

(ง) บริษัท A โฆษณามาก บริษัท B ไม่มีการโฆษณาและโฆษณาปานกลาง ส่วนแบ่งของตลาดตามจำนวนลูกค้าเป็น 75 เปอร์เซ็นต์ และ $47\frac{1}{2}$ เปอร์เซ็นต์ตามลำดับ

บริษัท A ควรจะดำเนินตามนโยบายการโฆษณาเท่าไรเมื่อกำหนดการพิจารณากับตัวประกอบเหล่านี้ ราคาขาย $ 4.00 ต่อหน่วย; ต้นทุนผันแปรของผลิตภัณฑ์ $ 2.50 ต่อหน่วย จำนวนรายปี 20,000 หน่วย สำหรับบริษัท A ค่าโสหุ้ยของการโฆษณาปานกลางรายปี $ 5,000 และค่าโสหุ้ยของการโฆษณามากรายปี $ 15,000? ผลกำไรเท่าไรก่อนที่ต้นทุนคงที่อื่น ๆ ที่จะหยิบมาใช้กับบริษัท A?

6. บริษัท RBM กับบริษัท IBM แข่งขันในการขายบัตรเจาะ บริษัท RBM มีผลิตภัณฑ์ที่คุณภาพสูงกว่า แม้ว่าราคาเหมือนกัน มีสองตัวประกอบวิกฤต ลดราคากับเพิ่มคุณภาพที่จะนำมาใช้กับทั้งสองบริษัท ถ้าหากว่าบริษัททั้งสองลดราคา บริษัท RBM จะนำออกไป 10 เปอร์เซ็นต์ของธุรกิจจากบริษัท IBM ถ้าบริษัท RBM ลดราคาจะต้องเผชิญกับการเพิ่มคุณภาพของบริษัท IBM ดังนั้น บริษัท RBM จะเสียธุรกิจ 15 เปอร์เซ็นต์ กับบริษัท IBM ถ้าหากว่าบริษัท RBM เลือกที่จะเพิ่มคุณภาพแม้ว่าบริษัท IBM ลดราคา ตลาดมีความรู้สึกต่อราคามากกว่าการเพิ่มคุณภาพของผลิตภัณฑ์ ดังนั้น บริษัท RBM จะเสียธุรกิจไป 15 เปอร์เซ็นต์กับบริษัท IBM ในที่สุดถ้าบริษัท IBM พยายามที่จะเผชิญกับการเพิ่มคุณภาพของบริษัท RBM คุณภาพที่เหนือกว่าขณะนี้ของบัตรเจาะของบริษัท RBM จะมีผลให้บริษัท RBM ได้ธุรกิจ 20 เปอร์เซ็นต์ จากบริษัท IBM จงคำนวณหาอุบายสำหรับบริษัททั้งสองกับมูลค่าเกม

7. บริษัท Steelcraft มีความเกี่ยวข้องในการเจรจากับสหพันธ์เกี่ยวกับเรื่องสัญญาขึ้นค่าจ้าง ด้วยความช่วยเหลือของคนกลางข้างนอก ตารางข้างล่างได้สร้างขึ้นโดยกลุ่มบริหาร เครื่องหมายบวก หมายถึงค่าจ้างเพิ่มขึ้นขณะที่เครื่องหมายลบแสดงว่าค่าจ้างลดลง คนกลางแจ้งคณะบริหารว่าเขาได้ติดต่อกับสหพันธ์และว่าเขาได้สร้างตารางซึ่งเปรียบได้กับตารางที่ได้พัฒนาโดยการบริหารทั้งบริษัท และสหพันธ์ต้องตัดสินใจอุบายทั้งหมดก่อนเริ่มต้นการเจรจา กลุ่มบริหารเข้าใจความสัมพันธ์ของอุบายบริษัทต่ออุบายสหพันธ์ในตารางต่อไปนี้ แต่ขาดความรู้เฉพาะของทฤษฎีเกมที่จะเลือกอุบายที่ดีที่สุดสำหรับบริษัท ท่านได้รับการขอร้องให้

มาเพื่อช่วยการบริหารในปัญหานี้ มูลค่าเกมและอุบายอะไรที่จะใช้กับกลุ่มตรงกันข้าม

ค่าโสหุ้ยแบบมีเงื่อนไขต่อบริษัท

		อุบายสหพันธ์			
		U_1	U_2	U_3	U_4
อุบายบริษัท	C_1	+ \$ 0.25	+ \$ 0.27	+ \$ 0.35	− \$ 0.02
	C_2	+ \$ 0.20	+ \$ 0.16	+ \$ 0.08	+ \$ 0.08
	C_3	+ \$ 0.14	+ \$ 0.12	+ \$ 0.15	+ \$0.13
	C_4	+ \$0.30	+ \$0.14	+ \$0.19	+ \$0

8. ถึงแม้ว่ามีหลาย ๆ ผู้ผลิตสินค้าสำเร็จรูปของเครื่องทำความสะอาดแบบสุญญากาศ มีสองบริษัทควบคุมหนึ่งส่วนของตลาด ถ้าผู้ผลิตสินค้าสำเร็จรูปทั้งสองทำการเปลี่ยนแปลงแบบจำลองขึ้นขณะเดียวกันสำหรับส่วนของตลาดในปีเดียวกัน ตลาดหุ้นของสองบริษัทยังคงที่ ถ้าหากว่าบริษัท Roover ทำการเปลี่ยนแปลงแบบจำลองมาก และคู่แข่งขันบริษัท Eura Corporation ไม่ทำ บริษัท Roover จะสามารถได้ตลาดหุ้นมากกว่า ถ้าหากว่าบริษัท Eura Corporation ทำการเปลี่ยนแปลงแบบจำลองมากและบริษัท Roover ไม่ทำ บริษัท Eura จะได้เปรียบมากกว่า แมทริกซ์สิ่งตอบแทนในรูปของตลาดหุ้นที่เพิ่มขึ้น ภายใต้เงื่อนไขเป็นไปได้ต่าง ๆ ดังนี้

		บริษัท Eura		
		ไม่มีการเปลี่ยนแปลง	**เปลี่ยนแปลงเล็กน้อย**	**เปลี่ยนแปลงมาก**
บริษัท Roover	ไม่มีการเปลี่ยนแปลง	0	-4%	10%
	เปลี่ยนแปลงเล็กน้อย	+3%	0	-5%
	เปลี่ยนแปลงมาก	+8%	1%	0

(ก) จงคำนวณหามูลค่าเกม

(ข) การเปลี่ยนแปลงอันไหนที่บริษัท Roover ควรจะดำเนินตาม ถ้าหากว่าเนื้อหานี้

เป็นประโยชน์ต่อเนื้อหาเองเท่านั้น?

(ค) ข้อมูลอื่น ๆ อะไรต้องได้รับการพิจารณาในการบรรลุถึงการตัดสินในครั้งสุดท้ายสำหรับบริษัท Roover Corporation?

9. บริษัท X กับ Y กำลังแข่งขันกันในสองจังหวัด A และ B ถ้าหากว่าบริษัททั้งสองสามารถสำรวจกำลังการขายได้จำนวนของแต่ละจังหวัดสมาชิกของแมทริกซ์แสดงความแตกต่างในการขายได้เท่าที่เป็นไปได้ของ X กับ Y มีหน่วยเป็นแสนบาท

$$\begin{array}{ccc} & & \text{บริษัท Y} \\ & & \begin{array}{cc} A & \quad B \end{array} \\ \text{บริษัท X} & \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -8 & -4 \end{bmatrix} \end{array}$$

อุบายของแต่ละบริษัทควรจะนำออกมาใช้เพื่อแข่งขันที่ดีที่สุดเป็นเท่าไร และมูลค่าเกมเป็นเท่าไร

10. นักศึกษาสองคน นาย ก และ นาย ข เล่นเกมต่อไปนี้โดยที่นาย ก ซ่อนเงินหนึ่งบาทหรือห้าบาทอย่างใดอย่างหนึ่งในมือของเขา ถ้าหากว่านาย ข ทายถูกต้องเขาจะได้เงินเท่าที่เขาทายถูก อยากทราบว่านาย ข ควรจะชำระเงินสำหรับเกมเป็นเท่าไรเพื่อที่จะให้เกมยุติธรรม (5/6)

11. พิจารณาเกม Two fingered game โดยที่แต่ละผู้เล่นเกมแสดงออกหนึ่งนิ้วหรือสองนิ้วพร้อม ๆ กัน ถ้าหากว่าผลรวมของจำนวนนิ้วเป็นเลขคี่ นาย ก จะได้รับเงินเท่ากับผลรวมนั้นและถ้าหากว่าผลรวมเป็นเลขคู่ นาย ข จะได้เงินเท่ากับผลรวมนั้น สร้างเกมแมทริกซ์ และหามูลค่าเกม และอุบายของแต่ละผู้เล่น

12. สมมติว่า นาย ก และ นาย ข แสดงออก 2 หรือ 3 นิ้ว พร้อม ๆ กัน ให้เกมเล่นเหมือนข้อ 11 จงหามูลค่าเกมและอุบายสำหรับผู้เล่น(V=1/20;(11/20,9/20), $\begin{bmatrix}\frac{11}{20} \\ \frac{9}{20}\end{bmatrix}$

13. สองบริษัทกำลังตัดสินใจจะสร้างคลังเก็บสินค้าในสองจังหวัดทางทิศตะวันออกของกรุงเทพฯหรือไม่ว่าคะแนนความเชื่อมั่นบริษัท ก 8 จุดในจังหวัดที่ 1 ถ้าบริษัท ข สร้างในจังหวัดที่ 2 คะแนนความเชื่อมั่นบริษัท ก -6 จุดในจังหวัดที่ 2 ถ้าบริษัท ข สร้างในจังหวัดที่ 1 ถ้าหากว่าบริษัททั้งสองสร้างในจังหวัดเดียวกันคะแนนความเชื่อมั่นทั้งสองบริษัทเป็น 0 จงหาอุบายที่ดีที่สุดและมูลค่าเกม

14. สองผู้เล่นนาย ก และ นาย ข เล่นเกมในที่ซึ่งแต่ละผู้เล่นแสดงออกหนึ่งนิ้วหรือสองนิ้วพร้อม ๆ กัน โดยที่ข้อตกลงว่านาย ข ชำระเงินกับนาย ก เท่ากับผลรวมของจำนวนทั้งหมดของนิ้วที่ได้แสดงออก เขียนเกมแมทริกซ์และหามูลค่าเกม

15. จากข้อ 14 สมมตินาย ข ชำระเงินกับนาย ก เท่ากับผลต่าง($N_ก-N_ข$)ในจำนวนของนิ้วที่ได้แสดงออกโดยนาย ก และนาย ข ถ้าหากว่าผลต่างนี้เป็นบวก ถ้าหากว่าผลต่างเป็นลบ นาย ก จะต้องชำระเงินกับนาย ข ของจำนวนนี้เกมนี้กำหนดไว้อย่างจำกัดหรือ (Strictly determined)ถ้าหากว่ากำหนดไว้อย่างจำกัด (Strictly determined จงหามูลค่าเกม (V=0)

16. สองบริษัทกำลังประกันธุรกิจของบริษัท XYZ บริษัท A กำลังทำวิจัยโดยการให้เสนอราคาออกเป็นสามประเภทคือ กำไรดี กำไรน้อย เท่าทุน บริษัท B เสนอราคาสองประเภทคือ กำไรดีและกำไรน้อย ถ้าหากว่าบริษัท B ให้ราคาที่กำไรดี ให้คะแนนความเชื่อถือบริษัท A ด้วย -4, 3 และ 6 จุด สำหรับให้ราคากำไรดี กำไรน้อย และเท่าทุนตามลำดับ กำหนดว่าบริษัท B ให้ราคาที่กำไรน้อย ให้คะแนนบริษัท A ด้วย -6, -4,และ 2 จุด ไม่คำนึงถึงผลกำไรจงหาอุบายที่แต่ละบริษัทควรจะใช้เพื่อหาราคาที่คะแนนแสดงเลขดัชนี สำหรับทางธุรกิจของบริษัท XYZ

17. เมืองยมพบาลมีสภานเติมกาซอยู่สองสถานที่ สองสถานที่ได้ต่อสู้ในการแข่งขันตัดราคากันเพื่อพยายามที่จะป้องกันส่วนแบ่งที่มากกว่าของธุรกิจในแมทริกซ์ต่อไปนี้ของเลขดัชนีหมายเลขบวกแสดงว่าสถานที่ X ได้เปรียบ(กำไร) และหมายเลขลบแสดงว่าสถานที่ Y ได้เปรียบ (กำไร) ในการแข่งขันสำหรับธุรกิจสามราคาต่างๆกันตามความพยายามแข่งขันตัดราคากัน ปกติ ต่ำ และ ต่ำกว่าต้นทุน แต่ละสภาพที่ควรจะใช้
อุบายอะไร และมูลค่าเกมมีค่าเท่าไร

		สถานที่ Y		
		ปกติ	ต่ำ	ต่ำกว่าทุน
สถานที่ X	ปกติ	-4	2	-8
	ต่ำ	6	4	-1
	ต่ำกว่าต้นทุน	11	6	-6

18. สองบริษัทกำลังแข่งขันกันโดยการโฆษณาผลิตภัณฑ์เฉพาะแผนกการวิจัยตลาดของบริษัท B ทำผลงานออกมาของแมทริกซ์สิ่งตอบแทนดังนี้ ซึ่งสมมติว่าแต่ละบริษัทใส่การโฆษณาทั้งหมดในหนึ่งแหล่ง ดังเลขต่าง ๆ ในตารางแสดงจำนวนเงินเพิ่มขึ้นมีหน่วยเป็นล้านบาทสำหรับ B จงหาอุบายที่ดีที่สุดสำหรับสองบริษัท

		บริษัท A		
		วิทยุ	โทรทัศน์	สิ่งพิมพ์
บริษัท B	วิทยุ	1	-1.4	0.6
	โทรทัศน์	1.5	-0.6	1.8
	สิ่งตีพิมพ์	-0.4	-2.8	0

19. เกมเป่ายิ้งฉุบสำหรับผู้เล่นสองคนโดยการพูดพร้อม ๆ กัน "ก้อนหิน ตะไกร หรือกระดาษ" ตามกฎของเกม "ก้อนหิน"ชนะ"ตระไกร""ตระไกร"ชนะ"กระดาษ" และ "กระดาษ"ชนะ"ก้อนหิน" ถ้าหากว่าสองผู้เล่นพูดออกชื่อชนิดเดียวกัน เกมจะเสมอกัน สร้างแมทริกซ์เกมและหามูลค่าเกม ถ้าหากว่าแต่ละผู้เล่นชนะจะได้หนึ่งแต้ม

20. ผู้ลงทุนคนหนึ่งพยายามเพื่อจะลงทุนจำนวนเงินมากพอใช้ในพันธบัตร หุ้นการบินไทย หรือหุ้นการไฟฟ้า นายหน้าการลงทุนของเขาจัดหาให้จำนวนที่กะเพิ่มขึ้นเป็นเปอร์เซนต์หรือผลตอบแทนระหว่างสองปีข้างหน้าในแต่ละประเภทรายได้สามสภาวะทางการเมือง

	ฤดูกาลทางการเมือง		
	เหตุการณ์ปัจจุบัน	สงครามเพิ่มขึ้น	สงบ
พันธบัตร	13%	13%	13%
หุ้นการบินไทย	15%	10%	18%
หุ้นการไฟฟ้า	12%	6%	24%

จงหาอุบายที่ดีที่สุดสำหรับเลือกตัวประกอบของพันธบัตร หุ้นการบินไทย หุ้นการไฟฟ้า สมมติฤดูการเมืองฝ่ายตรงข้ามไม่สงบ