บทที่ 5
การโปรแกรมเชิงเส้นตรง
Linear programming

คำนำ

โปรแกรมเชิงเส้นตรง เป็นวิธีการแก้ปัญหาชนิดในที่ซึ่งมีสองตัวเลือก หรือมากกว่าแข่งขันกันสำหรับปัจจัยที่จำกัดวัตถุประสงค์ของการกำหนดบรรจุปัจจัยที่จะให้ค่ามากที่สุด หรือน้อยที่สุดของฟังก์ชันวัตถุประสงค์เชิงเส้นตรง (กำไรหรือทุนผู้ซื้อ) กำหนดการ บรรจุอย่างนี้ อะไรเป็นวิธีการที่แตกต่างสำหรับควบคุมปัญหาเช่นนั้น อะไรเป็นกลจักรที่แท้จริงของวิธีการเหล่านี้ เราจะตอบคำถามเหล่านี้โดยการพิจารณาปัญหา โปรแกรมเชิงเส้นตรงแบบธรรมดา และแก้โดย (1) วิธีกราฟ (2) วิธีการพีชคณิต (systematic trial-and error) (3) วิธีเวคเตอร์ และ (4) วิธีซิมเพลกส์ วัตถุประสงค์ของการรวมเกี่ยวกับปัญหาที่เหมือนกันต้องสามารถทำให้ผู้อ่านเข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างวิธีการหาคำตอบขั้นต่าง ๆ ที่ได้เกี่ยวข้องในวิธีต่าง ๆ เพื่อแก้ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรง

แนวทางที่ได้กล่าวข้างต้นต่อโปรแกรมเชิงเส้นตรงวิธีซิมเพลกส์ เป็นวิธีที่ใช้กันมากที่สุดและดีที่สุด ก่อนที่จะกล่าวถึงวิธีซิมเพลกส์ จะขอกล่าววิธีกราฟแบบแผนนี้ถูกนำมาใช้เพื่อเหตุผลสองประการ หนึ่งปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรง ที่เกี่ยวกับสามคู่แข่งขัน หรือน้อยกว่าที่แข่งขันกันเพราะง่ายในการหาคำตอบโดยวิธีเหล่านี้

ปัญหา

ห้างหุ้นส่วนผลิตสินค้าสำเร็จรูปหนึ่ง มีกระบวนการทำกระดาษชำระออกเป็น 3 แผนก คือ แผนกตัด แผนกพับ และแผนกบรรจุ วัตถุประสงค์ของการคำนวณหาขนาดต่าง ๆ ของกระดาษชำระสามขนาดที่ได้ผลิตประจำวัน เรียกว่าผลิตภัณฑ์ A, B และ C ห้างหุ้นส่วนสามารถขายได้ในตลาดด้วยราคาคงที่การบริหารก็ค่อนข้างล้าสมัย และไม่มีความประสงค์ที่จะขยายวิธีการผลิตให้สะดวกขึ้น ถึงแม้ว่าเขาจะใช้ความสามารถอย่างเต็มที่

กระดาษชำระรับมาจากโรงงานอีกแห่งหนึ่งเป็นม้วนใหญ่ ๆ ม้วนกระดาษชำระ

เหล่านี้จะต้องตัด พับและบรรจุตามลำดับเพื่อให้ได้มากเป็นสามขนาด ข้อมูลสำหรับแต่ละขนาดของกระดาษชำระดังสรุปได้ในตารางที่ 1 ปัญหาต้องคำนวณผลกำไรรวมให้มากที่สุดของผลิตภัณฑ์เพื่อเสนอผลที่ได้ออกมาเป็นรายเดือน

ตารางที่ 1 กระบวนเวลาตามขนาดและแผนก

แผนก	ขนาด			ช่วงเวลาที่กำหนดให้มากที่สุด
	A	B	C	
ตัด	10.7	5.0	2.0	2,705
พับ	5.4	10.0	4.0	2,210
บรรจุ	0.7	1.0	2.0	445
กำไรต่อหน่วย	10 บาท	15 บาท	20 บาท	

ข้อมูลในตารางที่ 1 แทนรายละเอียดทางเทคนิคของผลิตภัณฑ์สามชนิด การผลิต 1 หน่วยของขนาด A ต้องการ 10.7 หน่วยของเวลาที่ใช้ในกระบวนการ (นาที) ของแผนกตัด 5.4 นาที ในแผนกพับ และ 0.7 นาทีในแผนกบรรจุ เมื่อขายผลิตภัณฑ์ A ให้ผลกำไร 10 บาทต่อหน่วยกำลังการผลิตที่ใช้ทั้งหมดในแผนกตัดคือ 2,705 นาที ในทำนองเดียวกันข้อมูลที่ผลิตภัณฑ์ B และ C สังเกตว่าผลิตภัณฑ์ทั้งหมดเหล่านี้ต้องผ่านกระบวนการทั้งสามแผนก

จากการตรวจสอบอย่างรวดเร็วของข้อมูลในตารางที่ 1 รู้ว่าผลิตภัณฑ์ A มีประสิทธิภาพมากกว่าผลิตภัณฑ์ B ในแผนกพับ ขณะเดียวกันผลิตภัณฑ์ B มีประสิทธิภาพในแผนกตัด การสังเกตโดยวิธีเดียวกันก็สามารถรู้เกี่ยวกับผลิตภัณฑ์ C องศาต่าง ๆ กันของประสิทธิภาพของผลิตภัณฑ์แข่งขันเพื่อใช้ปัจจัยที่เป็นประโยชน์ต่าง ๆ กันเป็นเรื่องธรรมดาในปัญหา โปรแกรมเชิงเส้นตรง

วิธีกราฟ (กรณีสองมิติ)

ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรง ซึ่งสองหรือสามคู่แข่งขัน อย่างใดอย่างหนึ่งที่กำลังแข่งขันสำหรับปัจจัยที่สามารถแก้ได้โดยวิธีกราฟเสนอเหตุผลเห็นได้ชัดมาก ขณะที่เราสามารถและมองเห็นเนื้อที่สองมิติหรือสามมิติ ความสามารถของเราที่จะเขียนกราฟและมองเห็นเนื้อที่ที่ประกอบไปด้วยมากกว่าสามมติก็จะถูกจำกัดวัตถุประสงค์ของการแสดง ให้เรา

สมมติว่าห้างหุ้นส่วนผลิตสินค้าสำเร็จรูปของเรามีการตัดสินใจโดยไม่มีเกณฑ์เพื่อที่จะผลิตผลิตภัณฑ์ A และ B เท่านั้น ข้อมูลที่ตรงกับปัญหานี้ดังกำหนดในตารางที่ 2 วัตถุประสงค์ของเราต้องหาว่าผลิตภัณฑ์ผสม A และ B ซึ่งจะให้กำไรมากที่สุด

ตารางที่ 2 กระบวนเวลาตามขนาดและแผนก

แผนก	ขนาด A	ขนาด B	ช่วงเวลาที่กำหนดให้มากที่สุด
ตัด	10.7	5.0	2,705
พับ	5.4	10.0	2,210
บรรจุ	0.7	1.0	445
	10 บาท	15 บาท	

วิธีกราฟต้องแปลงรูปของข้อมูลให้เป็นอสมการก่อนเราแสดงวิธีกราฟ วิธีนี้ต้องการที่จะให้ผู้อ่านคุ้นเคยกับอสมการเหล่านี้ และการแปลความหมายทางกายภาพของอสมการเหล่านี้สำหรับแต่ละ "ปัจจัย" ในตารางที่ 1 อสมการที่แยกออกจากกันสามารถเขียนได้ ถ้าเราได้ตัวแปร X และ Y เป็นหน่วยของผลิตภัณฑ์ A และ B ที่ต้องการผลิตตามลำดับ อสมการสำหรับแผนกตัดคือ

$$10.7X + 5.0Y \leqslant 2{,}705$$

อสมการนี้เป็นวิธีพีชคณิตธรรมดาของการแสดงออกของข้อมูลที่ได้กำหนดไว้ในตารางที่ 2 เกี่ยวกับแผนกตัดเป็นการแสดงออกทางพีชคณิตหนึ่งในสามของข้อบังคับโครงสร้าง (structural constraints) ในปัญหาของเรา การแปลงรูปของอสมการนี้คือ แต่ละหน่วยของผลิตภัณฑ์ A ต้องการ 10.7 หน่วยเวลาในการตัด และแต่ละหน่วยของผลิตภัณฑ์ B ต้องการ 5 หน่วย เวลาในการตัดจำนวนเวลาที่มากที่สุดของ A (นั่นคือค่าเฉพาะบางอย่างของ X) และจำนวนเวลาที่มากที่สุดของ B (นั่นคือค่าเฉพาะบางอย่างของ Y) ที่จะผลิตควรจะเป็นดังเช่นอุปสงค์ทั้งหมดเกี่ยวกับกำลังการผลิตของแผนกตัดจะต้องไม่เกิน 2,705 หน่วย ดังนั้นส่วนประกอบเฉพาะใด ๆ ของค่า X และ Y ที่หลีกเลี่ยงไม่ได้นี้ และข้อบังคับที่กำหนดให้อื่น ๆ ก็เป็นคำไขที่เป็นไปได้

ให้เราสมมติว่าเราประสงค์ที่ผลิตเพียง 2 หน่วยของผลิตภัณฑ์ A และ 2 หน่วยของผลิตภัณฑ์ B รายการนี้ (X = 2, Y = 2) สามารถให้ความรู้แก่เราสองอย่าง เกี่ยวกับแต่ละ

ปัจจัย (1) กำลังการผลิตทั้งหมดที่ได้ใช้ในรายการนี้ และ (2) ไม่ว่าข้อกำหนดในการผลิตถูกละเมิดแล้วหรือไม่ ในกรณีนี้ความสามารถในการตัดทั้งหมด $10.7(2) \times 5(2) = 31.4$ หน่วย ยังคงเหลือความสามารถในการตัดเท่ากับ $2{,}705 - 31.4 = 2{,}673.6$ หน่วย ข้อกำหนดเกี่ยวกับความสามารถของแผนกตัดจะถูกละเมิดไม่ได้ สำหรับแต่ละรายการ การตรวจสอบในลักษณะเดียวกันต้องทำด้วยปัจจัยทั้งหมด

ขณะที่มีการตรวจสอบ X = 2 และ Y = 10 ก็เป็นคำไขที่เป็นไปได้สำหรับปัญหานี้ นอกจากนี้ผลลัพธ์ของรายงานหลังนี้ มีระดับผลกำไรสูงกว่ารายการแรก (X = 2, Y = 2) อย่างไรก็ตาม อาจมีรายการอื่น ๆ ซึ่งจะได้ผลกำไรมากกว่ารายการที่สอง (X = 2, Y = 10) ถ้าเป็นเช่นนั้นเราต้องค้นหาให้ได้ นี้แนะให้ทราบว่าการค้นหาเพื่อให้ได้รายการที่ดีกว่าต้องทำต่อ ๆ ไปจนกว่าจะได้คำไขที่ดีที่สุด คำไขที่ดีที่สุดในกรณีนี้จะเป็นรายการเฉพาะ ซึ่งจะให้ระดับผลกำไรสูงที่สุดโดยปราศจากละเมิดข้อกำหนดโครงสร้างใด ๆ

การแปลงรูปปัญหาข้อมูลเป็นอสมการ

ให้ตัวแปร X และ Y เป็นหน่วยของผลิตภัณฑ์ A และ B ที่ต้องผลิตขึ้นตามลำดับ ดังนั้นรายละเอียดทางเทคนิคของตารางที่ 2 สามารถแปลงรูปเป็นอสมการดังต่อไปนี้

สำหรับความสามารถในการตัด

$$10.7X + 5.0Y \leqslant 2{,}705 \qquad \text{..... (1)}$$

สำหรับความสามารถในการพับ

$$5.4X + 10.0Y \leqslant 2{,}210 \qquad \text{..... (2)}$$

สำหรับความสามารถในการบรรจุ

$$0.7X + 1.0Y \leqslant 445 \qquad \text{..... (3)}$$

วัตถุประสงค์ในปัญหานี้ต้องการกำหนดอย่างน้อยหนึ่งคู่ของค่าสำหรับ X และ Y (ซึ่งเป็นไปตามข้อบังคับโครงสร้างทั้งหมดที่กำหนดขึ้นโดยอสมการข้างต้น) จะเป็นผลให้ระดับที่เป็นไปได้มีค่ามากที่สุดของฟังก์ชั่น $10X + 15Y$

ตัวอย่างที่ 1

ห้างหุ้นส่วนผลิตสินค้าสำเร็จรูปหนึ่งไม่ได้ผลิตผลิตภัณฑ์ที่ไม่มีกำไรต่อเนื่องกัน นี้เป็นการพิจารณาส่วนเกินของกำลังการผลิต คณะบริหารกำลังพิจารณาต่อกำลังการผลิตที่เป็นส่วนเกินนี้ของหนึ่งผลิตภัณฑ์หรือมากกว่าของสามผลิตภัณฑ์ เรียกว่าผลิตภัณฑ์ 1, 2 และ 3 กำลังการผลิตที่ใช้ประโยชน์เกี่ยวกับเครื่องจักรซึ่งอาจจำกัดผลที่ได้ออกมา สรุปได้ดังนี้

ชนิดเครื่องจักร	เวลาที่ใช้ในเครื่องจักรเป็นชั่วโมง
เครื่องบด	200
เครื่องกลึง	100
เครื่องขัด	50

จำนวนชั่วโมงที่เครื่องจักรต้องใช้สำหรับแต่ละหน่วยของผลิตภัณฑ์ตามลำดับตัวกำหนดข้างล่างนี้

ชั่วโมงการผลิตในเครื่องจักรต่อหน่วย

ชนิดของเครื่องจักร	ผลิตภัณฑ์ 1	ผลิตภัณฑ์ 2	ผลิตภัณฑ์ 3
เครื่องบด	8	2	3
เครื่องกลึง	4	3	
เครื่องขัด	2		1

แผนกขายได้แสดงถึงความสามารถในการขายสำหรับผลิตภัณฑ์ 1, 2 เกินกว่าอัตราการผลิตมากที่สุด และความสามารถในการขายสำหรับผลิตภัณฑ์ 3 คือ 20 หน่วย

กำไรต่อหน่วยควรเป็น 20 ดอลล่าร์, 6 ดอลล่าร์ และ 8 ดอลล่าร์ ตามลำดับ เกี่ยวกับผลิตภัณฑ์ 1, 2 และ 3

ปัญหาต้องสร้างสูตรหรือสมการแบบจำลองโปรแกรมเชิงเส้นตรง เพื่อคำนวณหาแต่ละผลิตภัณฑ์ที่ห้างหุ้นส่วนควรจะผลิตมากเท่าใด เพื่อที่จะได้กำไรมากที่สุด

การสร้างสูตร

ให้ X_i ($i = 1, 2, 3$) เป็นจำนวนของหน่วยผลิตภัณฑ์ i ที่ได้ผลิต เนื่องจากว่าได้เลือกผลกำไรเป็นเสมือนเครื่องวัดผล วัตถุประสงค์ก็ต้องการทำให้

$$Z = 20X_1 + 6X_2 + 8X_3$$

มีค่ามากที่สุดโดยให้เป็นไปตามเงื่อนไขข้างล่าง

"ปัจจัยที่กำหนดให้" ในสภาพการณ์นี้เป็นกำลังการผลิตที่ใช้เป็นประโยชน์ของกลุ่มเครื่องจักรทั้งสามและความสามารถในการขายสำหรับผลิตภัณฑ์ 3 เพราะฉะนั้นข้อกำหนดทางคณิตศาสตร์หนึ่งจะต้องถูกสร้างขึ้นเพื่อใช้พรรณนาแต่ละเงื่อนไขของปัจจัยเหล่านี้ เงื่อนไขแรกถือว่าไม่เกิน 200 ชั่วโมง ที่เครื่องบดสามารถผลิตผลิตภัณฑ์ทั้งสาม จำนวนชั่วโมงที่เครื่องบดผลิตจริง ๆ คือ $8X_1 + 2X_2 + 3X_3$ เพราะฉะนั้น สมการ อสมการ ของเงื่อนไขแรกคือ

$$8X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leqslant 200$$

ในทำนองเดียวกันเงื่อนไขของอีกสองกำลังผลิตอื่น คือ

$$4X_1 + 3X_2 \leqslant 100$$

$$2X_1 + X_3 \leqslant 50$$

อสมการของเงื่อนไขเกี่ยวกับความสามารถในการขายคือ

$$X_3 \leqslant 20$$

เงื่อนไขข้อสุดท้ายเกี่ยวกับคำตอบเป็นลบไม่ได้

เพราะฉะนั้นสรุปผลแบบจำลองโปรแกรมเชิงเส้นตรงสำหรับปัญหานี้คือ ทำ

$$Z = 20X_1 + 6X_2 + 8X_3$$

ให้มีค่ามากที่สุด โดยให้เป็นไปตามเงื่อนไข

$$\begin{aligned} 8X_1 + 2X_2 + 3X_3 &\leqslant 200 \\ 4X_1 + 3X_2 &\leqslant 100 \\ 2X_1 + X_3 &\leqslant 50 \\ X_3 &\leqslant 20 \end{aligned}$$

และ $X_1 \geqslant 0,\ X_2 \geqslant 0,\ X_3 \geqslant 0$

ตัวอย่างที่ 2

ปัญหาหนึ่งที่สำคัญของโปรแกรมเชิงเส้นตรงคือปัญหาอาหาร วัตถุประสงค์ก็คือต้องตรวจสอบปริมาณของอาหารเพื่อให้แน่ว่าควรจะกินอาหารที่บำรุงร่างกายตามข้อกำหนดที่ต้องใช้ทุนน้อยที่สุด สมมติว่าการพิจารณาจะจำกัด นม เนื้อ และไข่ เพื่อให้วิตามิน A, C และ D สมมติว่าจำนวนมิลลิกรัมของแต่ละชนิดของวิตามินเหล่านี้บรรจุอยู่ภายในหนึ่งหน่วยของอาหารแต่ละชนิดดังกำหนดให้

วิตามิน	นมเป็นแกลลอน	เนื้อเป็นปอนด์	ไข่เป็นโหล	ความต้องการประจำวันน้อยที่สุด
A	1	1	10	1 มิลลิกรัม
C	100	10	10	50 มิลลิกรัม
D	10	100	10	10 มิลลิกรัม
ราคา	$1.00	$1.10	$0.50	

อะไรคือสมการโปรแกรมเชิงเส้นตรงสำหรับปัญหานี้

การสร้างสูตรหรือสมการของตัวอย่างที่ 2

ให้ X_m, X_b และ X_e เป็นจำนวนแกลลอนของนม ปอนด์ของเนื้อ และโหลของไข่ตามลำดับในอาหารประจำวัน วัตถุประสงค์ก็คือ ต้องการใช้ทุนน้อยที่สุด และเงื่อนไขของปัจจัยอยู่ในรูปของขอบเขตล่างมากกว่าขอบเขตบน เพราะฉะนั้นแบบจำลองโปรแกรมเชิงเส้นตรงสำหรับปัญหานี้คือ ทำให้

$$Z = 1.0X_m + 1.1X_b + 0.5X_e$$

มีค่าน้อยที่สุด โดยเป็นไปตามเงื่อนไข

$$X_m + X_b + 10X_e \geqslant 1$$

$$100X_m + 10X_b + 10X_e \geqslant 50$$

$$10X_m + 100X_b + 10X_e \geqslant 10$$

และ $X_m \geqslant 0,\ X_b \geqslant 0,\ X_e \geqslant 0$

ตัวอย่างที่ 3

พิจารณาปัญหาผสมของผลิตภัณฑ์ภายในเรื่องของสภาพการทำน้ำมันให้บริสุทธิ์อย่างธรรมดา สมมติว่าการทำให้บริสุทธิ์ประสงค์ที่จะผสมน้ำมันปิโตรเลียมสี่ชนิด ประกอบเป็นสามเกรดของแก๊สโซลีน A, B และ C ปัญหาต้องการหาส่วนผสมของสารประกอบสี่ชนิดที่จะทำให้ผลกำไรมากที่สุด

ผลและราคาของส่วนประกอบทั้งสี่กำหนดได้ดังนี้

สารประกอบ	ปริมาณที่มากที่สุดที่ใช้ บาร์เรลต่อวัน	ราคาต่อ บาร์เรล
1	3,000	\$3
2	2,000	\$6
3	4,000	\$4
4	1,000	\$5

เพื่อรักษาคุณภาพที่ต้องการสำหรับแต่ละเกรดของแก๊สโซลีน จึงจำเป็นจำเพาะเจาะจงเปอร์เซ็นต์ที่มากที่สุดหรือน้อยที่สุดให้แน่ลงไปของสารประกอบในแต่ละชนิด นี้ได้กำหนดพร้อมกับราคาขายสำหรับแต่ละเกรดดังนี้

เกรด	รายละเอียด	ราคาขายต่อบาร์เรล
A	ไม่เกินกว่า 30% ของ 1	$5.50
	ไม่น้อยกว่า 40% ของ 2	
	ไม่มากกว่า 50% ของ 3	
B	ไม่มากกว่า 50% ของ 1	$4.50
	ไม่น้อยกว่า 10% ของ 2	
C	ไม่มากกว่า 70% ของ 1	$3.50

สมมติว่าการหมุนเวียนของเงินสดอื่น ๆ ทั้งหมดคงที่เพื่อว่าให้ผลกำไรที่ค่ามากที่สุด ก็คือรายได้ที่ขายได้ทั้งหมดลบด้วยต้นทุนทั้งหมดของสารประกอบ

ปรับแบบจำลองโปรแกรมเชิงเส้นตรง เพื่อคำนวณหาจำนวนเงินและสารประกอบของแต่ละเกรดของแก๊สโซลีน

การสร้างสูตรหรือสมการของตัวอย่างที่ 3

ก่อนที่จะเขียนแบบจำลองโปรแกรมเชิงเส้นตรง ควรกำหนดการพิจารณาอย่างละเอียดต่อคำจำกัดความที่เหมาะสมของตัวแปรที่ตัดสินใจเลือก (decision variables) แม้ว่าจะเห็นได้ชัด บางครั้งกลับกลายเป็นจุดยุ่งยากของปัญหาทั้งหมด ภายหลังพิสูจน์ว่าข้อความอะไรต้องการจริง ๆ และเป็นแบบที่สะดวกที่สุดสำหรับดำเนินข้อความนี้โดยความช่วยเหลือของตัวแปรที่ตัดสินใจเลือก (decision variables) และเป็นการง่ายที่จะเขียนฟังก์ชั่นเป้าหมาย (objective function) และเงื่อนไขเกี่ยวกับค่าของตัวแปรที่ตัดสินใจเลือก (decision variables) เหล่านี้

ในปัญหาเฉพาะนี้ การตัดสินใจได้ถูกนิยามขึ้น แต่วิธีการที่เหมาะสมของการดำเนินข้อความนี้อาจต้องการไตร่ตรองเล็กน้อย เนื่องจากมีความต้องการจำนวนแก๊สโซลีนต่าง ๆ กัน จึงเป็นเรื่องธรรมดาที่จะนิยามจำนวนหนึ่งของตัวแปรที่ตัดสินใจเลือก (decision variables) การปฏิบัติตามสายนี้เป็นการทดลองดูก่อนโดยนิยาม $Y_i (i = A, B, C)$ เป็นจำนวนของบาร์เรลของแก๊สโซลีนเกรด i ที่ได้ผลิตต่อวัน สารประกอบของแต่ละเกรดพิสูจน์โดยสัดส่วนของแต่ละสารประกอบในแก๊สโซลีน เพราะฉะนั้น ปฏิบัติอันแรกอาจต้องนิยามจำนวนหนึ่งของตัวแปรที่ตัดสินใจเลือก (decision variables) Z_{ij} $(i = A, B, C \; ; \; j = 1, 2, 3, 4)$ เป็นสัดส่วนของสารประกอบ j ในแก๊สโซลีนเกรด i อย่างไรก็ตาม ทั้งทุนและสิ่งที่นำมาใช้ประโยชน์ของสารประกอบเป็นปริมาณและข้อความนี้จะถูกบันทึกในฟังก์ชั่นเป้าหมาย (objective function) และข้อบังคับ (constraints) ตามลำดับ ปริมาณทั้งหมดของสารประกอบที่ 1 ใช้ $Z_{A1}Y_A + Z_{B1}Y_B + Z_{C1}Y_C$ แต่นี้

ไม่ได้เป็นฟังก์ชั่นเชิงเส้นตรงเนื่องจากเป็นผลคูณของตัวแปร เพราะฉะนั้น แบบจำลองโปรแกรมเชิงเส้นตรงจึงไม่สามารถสร้างด้วยตัวแปรที่ตัดสินใจเลือกเหล่านี้ เราสามารถสร้างเส้นตรงได้อย่างไร เพียงแต่แทนแต่ละผลคูณของตัวแปรที่ตัดสินใจเลือกเดิม โดยตัวแปรเดียวหรือนิยาม $X_{ij} = Z_{ij}Y_i$ (สำหรับ $i = A, B, C$; $j = 1, 2, 3, 4$) และแล้วให้ X_{ij} เป็นตัวแปรที่ตัดสินใจเลือก ดังนั้น X_{ij} คือจำนวนทั้งหมดของบาร์เรลของสารประกอบ j ของแก๊สโซลีนเกรด i ต่อวัน จำนวนทั้งหมดของแก๊สโซลีนเกรด i ที่ได้ผลิตต่อวันคือ $X_{i1} + X_{i2} + X_{i3} + X_{i4}$ สัดส่วนของสารประกอบ j ในแก๊สโซลีนเกรด i คือ $X_{ij}/(X_{i1} + X_{i2} + X_{i3} + X_{i4})$ เพราะฉะนั้นการเลือกตัวแปรที่ตัดสินใจเลือกแสดงข้อความที่จำเป็นทั้งหมด การสร้างแบบจำลองโปรแกรมเชิงเส้นตรงได้ดังนี้

ผลกำไรทั้งหมด Z กำหนดได้โดย

$$\begin{aligned} Z &= 5.5(X_{A1} + X_{A2} + X_{A3} + X_{A4}) + 4.5(X_{B1} + X_{B2} + X_{B3} + X_{B4}) \\ &\quad + 3.5(X_{C1} + X_{C2} + X_{C3} + X_{C4}) - 3(X_{A1} + X_{B1} + X_{C1}) - 6(X_{A2} + X_{B2} + X_{C2}) \\ &\quad - 4(X_{A3} + X_{B3} + X_{C3}) - 5(X_{A4} + X_{B4} + X_{C4}) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} Z &= 2.5X_{A1} - 0.5X_{A2} + 1.5X_{A3} + 0.5X_{A4} + 1.5X_{B1} - 1.5X_{B2} + 0.5X_{B3} - 0.5X_{B4} \\ &\quad + 0.5X_{C1} - 2.5X_{C2} - 0.5X_{C3} - 1.5X_{C4} \end{aligned}$$

ดังนั้น แบบจำลองที่ทำให้ Z มีค่ามากที่สุด โดยเป็นไปตามเงื่อนไขของข้อกำหนดของสารประกอบว่า $X_{ij} \geqslant 0$ สำหรับ $i = A, B, C$ และ $j = 1, 2, 3, 4$ และเงื่อนไขก็คือ

$$X_{A1} + X_{B1} + X_{C1} \leqslant 3{,}000$$

$$X_{A2} + X_{B2} + X_{C2} \leqslant 2{,}000$$

$$X_{A3} + X_{B3} + X_{C3} \leqslant 4{,}000$$

$$X_{A4} + X_{B4} + X_{C4} \leqslant 1{,}000$$

เงื่อนไขของสารประกอบสำหรับแก๊สโซลีนเกรด A คือ

$$X_{A1} \leqslant 0.3(X_{A1} + X_{A2} + X_{A3} + X_{A4})$$

$$X_{A2} \geqslant 0.4(X_{A1} + X_{A2} + X_{A3} + X_{A4})$$

$$X_{A3} \leqslant 0.5(X_{A1} + X_{A2} + X_{A3} + X_{A4})$$

อย่างไรก็ตาม เงื่อนไขเหล่านี้ไม่เป็นแบบที่เพราะสำหรับแบบจำลองโปรแกรมเชิงเส้นตรง จึงเขียนเสียใหม่ได้

$$0.7_{A1} - 0.3X_{A2} - 0.3X_{A3} - 0.3X_{A4} \leqslant 0$$

$$-0.4X_{A1} + 0.6X_{A2} - 0.4X_{A3} - 0.4X_{A4} \geqslant 0$$

$$-0.5X_{A1} - 0.5X_{A2} + 0.5X_{A3} - 0.5X_{A4} \leqslant 0$$

ในทำนองเดียวกันแบบสุดท้ายของเงื่อนไขของสารประกอบสำหรับแก๊สโซลีน เกรด B และ C ได้

$$0.5X_{B1} - 0.5X_{B2} - 0.5X_{B3} - 0.5X_{B4} \leqslant 0$$

$$0.1X_{B1} + 0.9X_{B2} - 0.1X_{B3} - 0.1X_{B4} \geqslant 0$$

$$0.3X_{C1} - 0.7X_{C2} - 0.7X_{C3} - 0.7X_{C4} \leqslant 0$$

ตัวอย่างที่ 4.

องค์การชาวนาหนึ่งได้ทดลองทำฟาร์มสามชนิดเพื่อเปรียบเทียบผลผลิตที่ได้ออกมาของแต่ละฟาร์มจะถูกจำกัดทั้งเนื้อที่เป็นเอเคอร์กับจำนวนของน้ำที่ใช้สำหรับชลประทาน ข้อมูลมีดังนี้

ฟาร์ม	จำนวนเอเคอร์ที่ใช้	น้ำที่ใช้เลี้ยง
1	400	1500
2	600	2000
3	300	900

องค์การจะพิจารณาพืชผลทั้งสามสำหรับเพาะปลูกซึ่งต่างกันในผลกำไรที่คาดหวังต่อเอเคอร์ของฟาร์มทั้งสามและในการใช้น้ำของฟาร์มทั้งสาม นอกจากนั้น จำนวนเอเคอร์ทั้งหมดที่ใช้สามารถให้แต่ละชนิดของพืชผลจะถูกจำกัดด้วยจำนวนของเครื่องมือเก็บเกี่ยวที่ใช้

พืชผล	จำนวนเอเคอร์ ที่ใช้มากที่สุด	น้ำที่ใช้เลี้ยง ต่อเอเคอร์	ผลกำไรที่คาดหวัง ต่อเอเคอร์
A	700	5	$ 400
B	800	4	$ 300
C	300	3	$ 100

เพื่อที่จะรักษาภาระของงานที่เหมือนกันระหว่างฟาร์มซึ่งเป็นนโยบายขององค์การที่จะทำให้เปอร์เซ็นต์ของเอเคอร์ที่ใช้เพาะปลูกเหมือนกันของแต่ละฟาร์ม อย่างไรก็ตาม

ส่วนประกอบหนึ่งส่วนประกอบใดของพืชผลอาจจะเกิดขึ้นที่ใดที่หนึ่งของฟาร์มก็ได้ องค์การประสงค์ที่จะรู้ว่าแต่ละพืชผลควรจะปลูกมากเท่าใดที่ฟาร์มเพื่อที่จะทำให้ผลกำไรที่คาดหวังมากที่สุด การสร้างสูตรนี้ให้เหมือนกับปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรง

การสร้างสูตรของตัวอย่างที่ 4

ตัวแปรที่ตัดสินเลือก X_{ij} $(i = 1, 2, 3 ; j = A, B, C)$ คงจะเป็นจำนวนของเอเคอร์ของฟาร์มที่ i พืชผลที่ j เพราะฉะนั้นจุดมุ่งหมายที่จะทำให้

$$Z = 400(X_{1A} + X_{2A} + X_{3A}) + 300(X_{1B} + X_{2B} + X_{3B}) + 100(X_{1C} + X_{2C} + X_{3C})$$

มีค่ามากที่สุด โดยให้เป็นไปตามเงื่อนไข $X_{ij} \geqslant 0$ (สำหรับ $i = 1, 2, 3$ และ $j = A, B, C$) และข้อกำหนดได้ทำให้เป็นรูปขึ้นดังนี้

ข้อกำหนดเกี่ยวกับจำนวนเอเคอร์ที่ใช้ของแต่ละฟาร์มคือ

$$X_{1A} + X_{1B} + X_{1C} \leqslant 400$$

$$X_{2A} + X_{2B} + X_{2C} \leqslant 600$$

$$X_{3A} + X_{3B} + X_{3C} \leqslant 300$$

ข้อกำหนดเกี่ยวกับการใช้น้ำคือ

$$5X_{1A} + 4X_{1B} + 3X_{1C} \leqslant 1500$$

$$5X_{2A} + 4X_{2B} + 3X_{2C} \leqslant 2000$$

$$5X_{3A} + 4X_{3B} + 3X_{3C} \leqslant 900$$

ข้อกำหนดพืชผลเกี่ยวกับการใช้จำนวนเอเคอร์คือ

$$X_{1A} + X_{2A} + X_{3A} \leqslant 700$$

$$X_{1B} + X_{2B} + X_{3B} \leqslant 800$$

$$X_{1C} + X_{2C} + X_{3C} \leqslant 300$$

เพราะว่านโยบายของ workload ที่เหมือนกัน สมการ

$$\frac{X_{1A} + X_{1B} + X_{1C}}{400} = \frac{X_{2A} + X_{2B} + X_{2C}}{600}$$

$$\frac{X_{2A} + X_{2B} + X_{2C}}{600} = \frac{X_{3A} + X_{3B} + X_{3C}}{300}$$

$$\frac{X_{1A} + X_{1B} + X_{1C}}{400} = \frac{X_{3A} + X_{3B} + X_{3C}}{300}$$

ต้องสอดคล้องกัน เนื่องจากสองสมการแรกปรากฏอยู่ในสมการสาม สมการที่สามสามารถถูกละทิ้งได้จากแบบจำลอง นอกจากนี้ สมการเหล่านี้ก็ยังไม่เป็นแบบที่ทำให้สะดวกสำหรับโปรแกรมเชิงเส้นตรง เนื่องจากว่าตัวแปรทั้งหมดไม่ได้อยู่ด้านซ้ายมือ ดังนั้นแบบสุดท้ายของเงื่อนไขภาระของงานที่เหมือนกัน คือ

$$3(X_{1A}+X_{1B}+X_{1C}) - 2(X_{2A}+X_{2B}+X_{2C}) = 0$$
$$X_{2A}+X_{2B}+X_{2C} - 2(X_{3A}+X_{3B}+X_{3C}) = 0$$

เขตจำกัดโปรแกรมเชิงเส้นตรง

มองดูผิวเผินของสภาพต่าง ๆ ที่จะประยุกต์โปรแกรมเชิงเส้นตรงก็ควรจะตรวจสอบเงื่อนไขที่สำคัญของโปรแกรมเชิงเส้นตรงที่จำกัดประโยชน์ของโปรแกรมเชิงเส้นตรง

ความเป็นสัดส่วน

เงื่อนไขแรกของโปรแกรมเชิงเส้นตรง คือว่า ฟังก์ชันเป้าหมาย และทุก ๆ ฟังก์ชันข้อบังคับต้องเป็นเชิงเส้น ความต้องการตามลำดับนี้ ซึ่งเป็นการวัดความมีผลและการใช้ปัจจัยต้องเป็นสัดส่วนกับระดับของแต่ละกิจกรรมที่ได้ดำเนินโดยเฉพาะ บางปัญหารายการซึ่งไม่เป็นเชิงเส้น เพราะว่าขาดความเป็นสัดส่วนเกิดขึ้นบ่อย ๆ แต่คำไขสามารถคำนวณได้ในไม่ช้าสำหรับกรณีพิเศษจริง ๆ เท่านั้น การสร้างสูตรปัญหาโปรแกรมไม่เชิงเส้นตรงให้เป็นโปรแกรมเชิงเส้นตรงอาจเกิดขึ้นบ่อย ๆ เพื่อให้ใช้กับวิธีซิมเพลกส์ได้ แต่นี่เป็นการยกเว้นในการสร้างสูตรนอกเหนือไปจากกฎ จะไม่ขอกล่าวในที่นี้

แม้อาจปรากฏว่าปัญหาหนึ่งเป็นเชิงเส้นอย่างสมบูรณ์ ปรากฏการณ์บางทีอย่างอาจเป็นการหลอกลวง และไม่จริงเสมอไป ที่ทั้งการวัดความมีผล และการใช้ช่องว่างของแต่ละปัจจัยจะคงที่ ตลอดช่วงทั้งหมดของระดับแต่ละกิจกรรม ดังตัวอย่าง ผลกำไรหรือจำนวนชั่วโมงที่คนทำงานต่อหน่วยของการผลิตบางครั้งจะเปลี่ยนถ้าการเปลี่ยนระดับการผลิตเป็นการสมมติบ่อย ๆ ว่า เป็นเส้นตรงโดยการประมาณแต่หนึ่งควรจะทำการตัดสินใจนี้อย่างรู้ดี

แบบอื่น ๆ ที่ไม่เป็นเส้นตรงเป็นที่รู้กันเหมือนกับปัญหาราคาคงที่ จะยกปัญหานี้ขึ้นเมื่อไรก็ตามที่มีการตั้งราคาขึ้น ซึ่งมีความสัมพันธ์กับกิจกรรมหนึ่ง เช่น ให้ X เป็นระดับของกิจกรรมนั้น และให้ Δ เป็นการวัดที่เพิ่มขึ้นของความมีผล หรือการใช้ปัจจัยที่เพิ่มขึ้นซึ่งมีความสัมพันธ์กับ X ดังนั้น

$$\Delta = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } X = 0 \\ K+CX & \text{ถ้า } X > 0 \end{cases}$$

ในเมื่อ K คือ "ราคาที่คงที่" ที่มีความสัมพันธ์กับระดับที่เป็นบวกใด ๆ ของกิจกรรม เนื่องจาก Δ ไม่เป็นฟังก์ชันเส้นตรงของ X ตลอดช่วงทั้งหมด (เพราะการกระโดดของ X ที่ $X = 0$) จึงไม่สามารถรวมเข้าไว้ในแบบจำลองโปรแกรมเชิงเส้นตรง

การเพิ่มเติม

สมมติว่าการจัดและการใช้แต่ละปัจจัยเป็นสัดส่วนโดยตรงกับระดับของแต่ละกิจกรรมที่ดำเนินโดยเฉพาะรายนี้ยังไม่เพียงพอเพื่อที่จะประกันว่าเป็นเส้นตรงแบบพิเศษที่ไม่เป็นเส้นตรงจะเกิดขึ้น ถ้ามีผลกระทบกระทั่งซึ่งกันและกันร่วมกัน ระหว่างกิจกรรมที่เกี่ยวกับการวัดความมีผลทั้งหมดหรือส่วนที่ใช้ทั้งหมดของบางปัจจัย เพราะฉะนั้นจึงต้องเพิ่มเติมกิจกรรมที่เกี่ยวกับการวัดความมีผลและการใช้แต่ละปัจจัย จะกล่าวได้อีกแบบหนึ่งได้ การวัดทั้งหมดของความมีผลและแต่ละปัจจัยที่ใช้ทั้งหมดเป็นผลมาจากการดำเนินงานร่วมกันของกิจกรรมต้องเท่ากับผลบวกของปริมาณเหล่านี้ที่เป็นผลมาจากแต่ละกิจกรรมที่กำลังดำเนินเฉพาะราย

ดังตัวอย่าง สมมติบริษัทหนึ่งกำลังพิจารณาการผลิตผลิตภัณฑ์สองชนิดซึ่งควรจะต้องแข่งขันกันสำหรับตลาดเดียวกัน สมมติว่าผลกำไรควรจะเป็น C_1X_1 ถ้าผลิตผลิตภัณฑ์ที่หนึ่งด้วยอัตรา X_1 แต่ยังไม่ได้ผลิตผลิตภัณฑ์ที่สองเลย และ C_2X_2 ควรจะเป็นผลกำไรจากการผลิตผลิตภัณฑ์ที่สองด้วยอัตรา X_2 ถ้า $X_1 = 0$ ผลกำไรเกี่ยวกับผลิตผลิตภัณฑ์สองชนิดเหล่านี้รวมกัน ผลกำไรทั้งหมดควรจะเป็น $C_1X_1+C_2X_2$ เมื่อทั้ง $X_1 > 0$ และ $X_2 > 0$ นี้ ไม่ควรเป็นจริงดังตัวอย่าง ราคาต้องลดลงในเมื่อขายทั้ง X_1 และ X_2 แทนที่จะขายเพียงชนิดเดียว

ตัวอย่างของสองกิจกรรมไม่ได้รวมกันเกี่ยวกับการใช้ปัจจัย ควรจะเป็นที่ที่จะผลิตผลพลอยได้ด้วยเศษวัสดุจากผลิตภัณฑ์ก่อน วัสดุนี้ยังจะต้องถูกผลิตถ้าหากว่าได้ผลิตหนึ่งของผลิตภัณฑ์สอง อย่างไรก็ตาม ความต้องการวัสดุทั้งหมดถ้าได้ผลิตทั้งสองชนิดน้อยกว่าผลบวกของความต้องการทั้งสอง ถ้าหากว่าได้ผลิตแต่ละชนิดโดยเฉพาะ

สามารถแบ่งแยกออกได้

กรณีที่ตัวแปรที่ตัดสินใจเลือกควรจะมีนัยสำคัญ (physical significance) เพียงแต่ถ้าตัวแปรที่ตัดสินใจเลือกมีค่าเป็นจำนวนเต็ม อย่างไรก็ตาม ก็ไม่มีการประกันว่ากระบวนการ

หาคำตอบจะให้คำตอบที่เป็นจำนวนเต็ม เพราะฉะนั้น ข้อจำกัดอื่น ๆ ของโปรแกรมเชิงเส้นตรงในการคำนวณหาหนึ่งคำตอบที่ดีที่สุดนั้น ก็คือว่าระดับปลีกย่อยของตัวแปรเชิงเส้นตรงต้องสามารถยอมได้

แต่กระนั้น กระบวนการหาคำตอบก็ยังใช้กันบ่อย ๆ เมื่อต้องการคำตอบที่เป็นจำนวนเต็มถ้าหากว่าคำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรง บังเอิญรวมเลขจำนวนเต็มเท่านั้น นี้เป็นคำตอบที่ต้องการของปัญหาที่น่าสนใจ อีกในหนึ่งกระบวนการธรรมดาต้องปัดเศษให้เป็นเลขจำนวนเต็ม กระบวนการนี้มีสองหลุมพราง หนึ่งคำตอบที่เป็นเลขจำนวนเต็มนี้ไม่ต้องการเป็นไปได้ (feasible) นี้อาจเกิดขึ้นถ้าเทอม aij บางเทอมเป็นลบ สอง แม้ว่าเป็นไปได้ (feasible) คำตอบนี้ไม่ต้องการอยู่ใกล้ผลที่ดีที่สุด การบรรลุคำตอบที่เป็นเลขจำนวนเต็มที่ดีที่สุดอาจต้องการวางแนวใหม่ของตัวแปรที่ตัดสินใจเลือกมากกว่าการที่จะให้สำเร็จลงได้อย่างเหมาะสม ในปัจจุบันได้สร้างความก้าวหน้าบางอย่างในการพัฒนากระบวนการหาคำตอบเพื่อหาคำตอบที่เป็นเลขจำนวนเต็มที่ดีที่สุด อย่างไรก็ตาม กระบวนการเหล่านี้ยังไม่มีประสิทธิภาพมาก และประโยชน์ก็จำกัด

การกำหนด

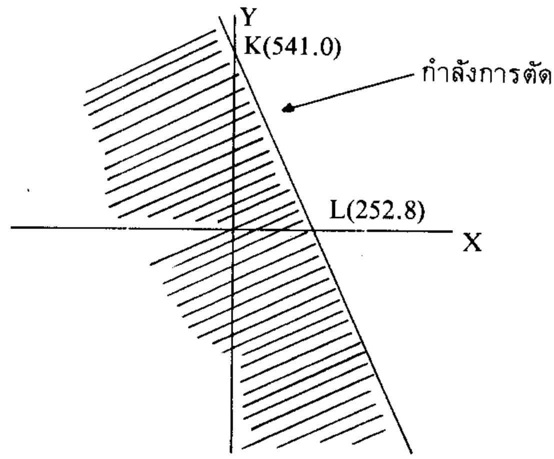
สัมประสิทธิ์ทั้งหมดในแบบจำลองโปรแกรมเชิงเส้นตรง (a_{ij}, b_i และ c_j) สมมติให้มีค่าคงที่ โดยหลักความจริงแล้ว จะไม่รู้ว่าเป็นค่าคงที่ แบบจำลองโปรแกรมเชิงเส้นตรงโดยทั่ว ๆ ไปถูกสร้างขึ้นเพื่อเลือกวิธีการบางอย่างในอนาคตของพฤติการณ์ (action) เพราะฉะนั้นการใช้สัมประสิทธิ์ก็ควรจะถือเอาการทำนายของเงื่อนไขอนาคตเป็นหลักข้อความที่ใช้เป็นประโยชน์ อาจไม่เพียงพอที่จะทำให้การกำหนดได้ถูกต้องของค่าที่เหมาะสมสำหรับสัมประสิทธิ์นอกจากนั้น สัมประสิทธิ์เหล่านี้อาจเป็นตัวแปรสุ่มจริง ๆ ก็ได้ แต่ละตัวมีการแจกแจงน่าจะเป็นที่สำคัญสำหรับค่าที่จะรับเอาเมื่อไรที่การตัดสินใจถูกทำให้มั่นคงขึ้น

ข้อจำกัดของนัยสำคัญ

ในการสรุปการพิจารณาข้อจำกัดของโปรแกรมเชิงเส้นตรง จุดหลายจุดควรจะถูกเน้นปัญหาที่ใช้ในทางปฏิบัติ ซึ่งสอดคล้องอย่างสมบูรณ์กับเงื่อนไขทั้งหมดของโปรแกรมเชิงเส้นตรงหายากมากจริง ๆ อย่างไรก็ตาม แบบจำลองโปรแกรมเชิงเส้นตรงก็เป็นตัวแทนที่ใช้เป็นประโยชน์ได้ถูกต้องที่สุดของปัญหา ซึ่งจะให้การแนะนำที่มีเหตุผลสำหรับพฤติการณ์ก่อนที่กำหนดทำให้เป็นผล แต่กระนั้น ผู้ใช้ก็ควรจะรู้เงื่อนไขและการประมาณที่เกี่ยวข้องได้เป็น

อย่างดี และควรจะพอใจตัวเองว่าเขาได้ให้เหตุผลของเงื่อนไขและการประมาณก่อนการดำเนินด้วยโปรแกรมเชิงเส้นตรงที่ใช้วิธีการเขียนกราฟของอสมการ

กลุ่มของอสมการที่กำหนดให้ข้างต้นสามารถเขียนกราฟได้ง่าย อสมการ (1) เขียนกราฟได้ในรูปที่ 1



รูปที่ 1

หาจุดตัด X และ Y สำหรับอสมการ (1) เราดำเนินได้เป็น

ให้ $X = 0$; ดังนั้น

$$Y = \frac{2,705}{5} = 541 \quad \text{จุด K}$$

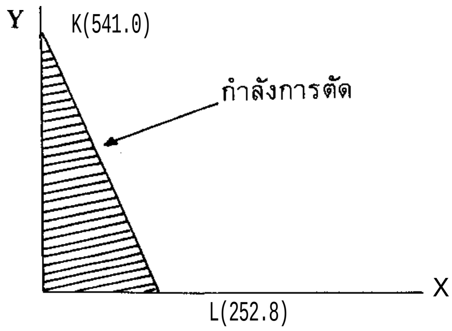
ให้ $Y = 0$; ดังนั้น

$$X = \frac{2,705}{10.7} = 252.8 \quad \text{จุด L}$$

โยงจุด K และ L ก็จะได้เส้นซึ่งมีสมการเป็น

$$10.7X + 5.0Y = 2,705$$

อย่างไรก็ตาม เนื่องจากว่าเราไม่ประสงค์ที่จะพลอตสมการข้างต้น แต่เป็นอสมการ $10.7X + 5.0Y \leqslant 2,705$ บริเวณที่สนใจคือ พื้นที่ส่วนที่แรเงาในรูปที่ 1 แน่ละ พื้นที่แรเงาจะรวมค่าที่เป็นลบของ X และ Y ด้วย ซึ่งหมายถึงการผลิตที่เป็นลบและไม่เป็นของคู่กัน เพื่อไม่ให้รวมสิ่งที่อาจเกิดขึ้นได้ของการผลิตที่เป็นลบ ดังได้อ้างไว้ในบทก่อน (a set of nonnegativity constraints) ในตัวอย่างของเรา ข้อบังคับที่มีค่าเป็นลบไม่ได้ คือ $X \geqslant 0$, $Y \geqslant 0$; นี้หมายความว่าการผลิตผลิตภัณฑ์ A และ B จะต้องเป็นศูนย์หน่วยหรือมากกว่า



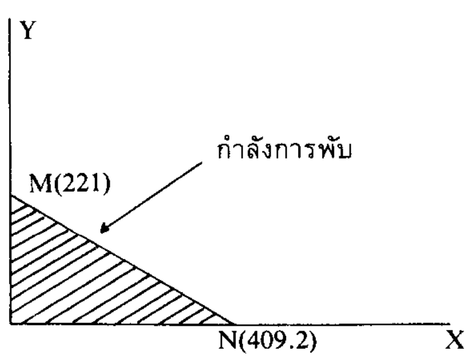
รูปที่ 2

อีกนัยหนึ่ง ข้อบังคับที่มีค่าเป็นลบไม่ได้จะกำหนดพื้นที่ของคำไขที่เป็นไปได้อยู่ในควอดเรนท์ที่หนึ่งของระนาบ XY ดังแสดงในรูปที่ 2

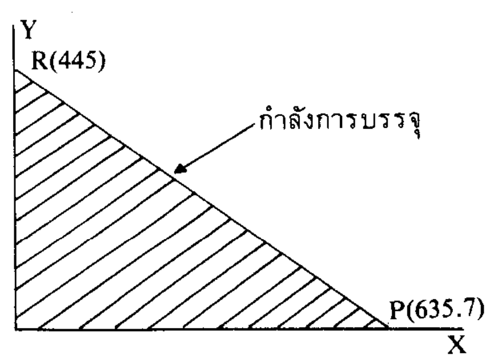
ในทำนองเดียวกัน รูปที่ 3 และ 4 แทนพื้นที่ของคำตอบที่ไม่ลบสำหรับความสามารถในการพับและบรรจุตามลำดับ

ถ้าหากเรารวมรูปที่ 2 ถึง 4 เราจะได้รูปที่ 5 เนื้อที่แรเงาซึ่งใช้แทนขอบเขตของคำตอบที่เป็นไปได้ อีกนัยหนึ่งมีจำนวนคำตอบอนันต์สำหรับปัญหานี้ ถ้าเราสมมติให้แบ่งแยกหน่วยการผลิตวัตถุประสงค์ของเราต้องเลือกอย่างน้อยที่สุดหนึ่งจุด (X, Y) จากพื้นที่แรเงาของรูปที่ 5 ซึ่งทำให้ฟังก์ชันผลกำไรมีค่ามากที่สุด

เราสามารถดำเนินการจุดนี้ให้สำเร็จลงได้อย่างไร ฟังก์ชันผลกำไรจะเป็นเครื่องนำทางที่จุดนี้ ด้วยเหตุใดเหตุหนึ่ง ถ้าเราสามารถเขียนกราฟฟังก์ชันผลกำไรบนรูปที่ 5 หาทิศทางของค่าที่เพิ่มขึ้นมากที่สุด ตั้งต้นและรักษาการเคลื่อนที่ของฟังก์ชันผลกำไรในทิศทางนี้ ในที่สุดก็จะสัมผัสจุดบางจุดที่ไกลที่สุดบนเขตแดนของพื้นที่แรเงา ดังนั้น จุดนี้จะให้คำตอบที่ดีที่สุดและเป็นไปได้จุดเดียวเท่านั้น วิธีกราฟที่เราจะแสดงให้สิ่งเหล่านี้สำเร็จลงได้ในแบบระบบ



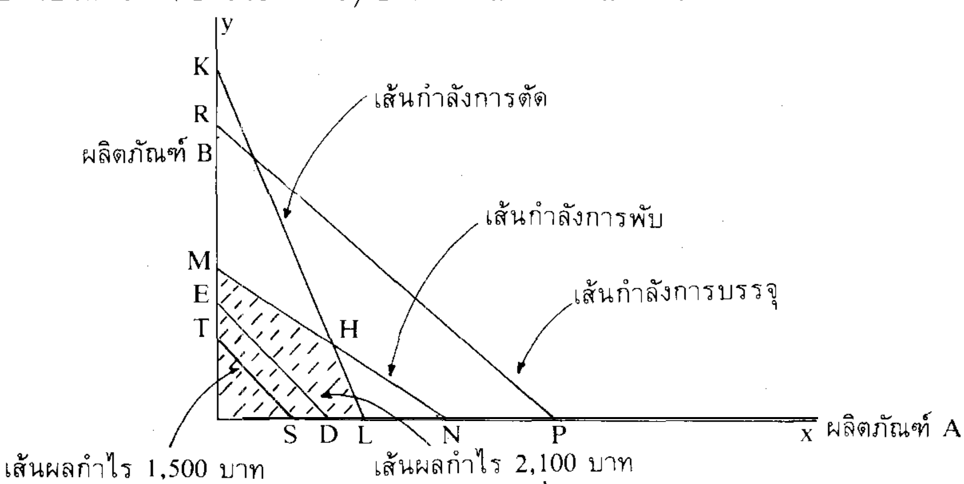
รูปที่ 3



รูปที่ 4

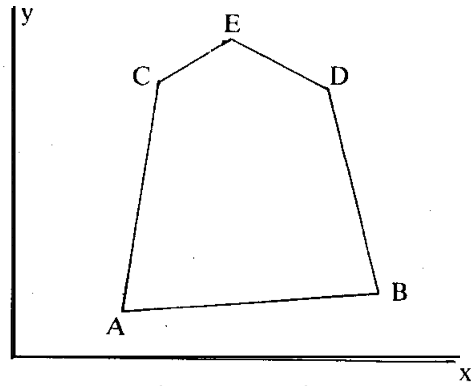
เส้นผลกำไร

การเขียนกราฟฟังก์ชันผลกำไรปรากฏครั้งแรกอาจยากสำหรับฟังก์ชันผลกำไร $10X + 15Y$ ไม่อยู่ในรูปของสมการ ดังนั้นจึงไม่สามารถเขียนกราฟได้ แต่เราสามารถเอาชนะความยากนี้ได้โดยการตั้งคำถามธรรมดา ว่ามีความต้องการจำนวนผลิตภัณฑ์ X อย่างเดียวมากเท่าใด (หรือผลิตภัณฑ์ Y อย่างเดียว) เพื่อผลิตให้ได้ผลกำไรสมมติให้เป็น 1,500 บาท เนื่องจากผลกำไรต่อหน่วยของผลิตภัณฑ์ X คือ 10 บาท คำตอบก็คือ 150 หน่วยของ X ในทำนองเดียวกัน เนื่องจากผลกำไรต่อหน่วยของ Y คือ 15 บาท เราได้ 100 หน่วยของ Y เพื่อที่จะผลิตให้ได้ผลกำไร 1,500 บาท ดังนั้นเซทหนึ่งของจุดผลกำไรเท่ากันทั้งสองในรูปที่ 5 คือ $X = 150, Y = 0$ และ $X = 0, Y = 100$ ถ้าเราโยงจุดทั้งสองนี้ (S และ T) เราได้เส้นผลกำไรเท่ากับ 1,500 บาท (ดูรูปที่ 5) จุดทั้งหมดบนเส้นนี้แทนคำตอบที่เป็นไปได้ (เนื่องจากว่าจุดเหล่านี้อยู่ภายในพื้นที่แรเงา) แต่ละจุดให้ผลกำไร 1,500 บาท ดังนั้นเส้นผลกำไรเป็น locus ของจุดทั้งหมด (ตัวประกอบที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ X และ Y) ซึ่งให้ได้ผลกำไรเหมือนกัน

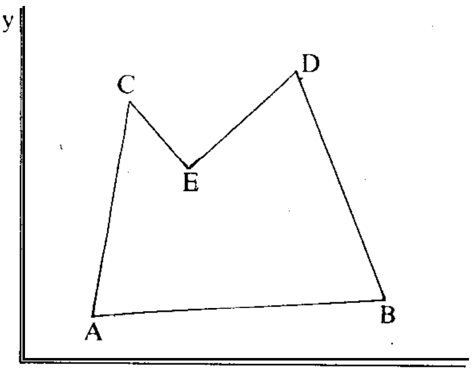


รูปที่ 5

โดยวิธีเดียวกัน เราสามารถลากเส้นผลกำไรอื่น ๆ ที่ให้ระดับต่าง ๆ ของผลกำไร ดังตัวอย่าง เส้น DE ในรูปที่ 5 แทนเส้นผลกำไร 2,100 บาท การเปรียบเทียบเส้น DE กับ ST แสดงว่าเส้นผลกำไร 2,100 บาท (DE) ขนานกับเส้นผลกำไร 1,500 บาท (ST) และอยู่ไกลออกไปกว่าจากจุดกำเนิด นี้เป็นที่คาดหวังไว้ว่า ผลกำไรมีค่ามากขึ้นขณะที่เราเคลื่อนเส้นผลกำไรนั้นเพื่อให้ผลกำไรสูงขึ้นตราบเท่าที่อยู่ภายในพื้นที่ของการหาคำตอบที่เป็นไปได้ เราจะต้องหยุดเมื่อเราเคลื่อนเส้นผลกำไรไปโดนจุดที่มุมใดมุมหนึ่งของหลายเหลี่ยมนูน (convex polygon) ของรูปที่ 5 หรือด้านหนึ่งของเส้นเขตแดนของหลายเหลี่ยมนูน (convex polygon) ในกรณีใดหรือกรณีหนึ่งเราก็หาค่าไขที่ดีที่สุดได้



รูปที่ 6 หลายเหลี่ยมนูน



รูปที่ 7 หลายเหลี่ยมเว้า

รูปหลายเหลี่ยมนูน ประกอบด้วยกลุ่มของจุดที่มีคุณสมบัติที่โยงส่วนของเส้นสองจุดหนึ่งจุดใดในกลุ่มจะต้องอยู่ใน convex set ทั้งหมด มีทฤษฏีคณิตศาสตร์ว่า "จุดซึ่งเป็นคำตอบในเวลาของระบบของอสมการของรูปชนิด $\leqslant$ ของกลุ่มหลายเหลี่ยมนูน" ดังรูป 6 ในรูปที่ 7 ถ้าโยงจุด C และ D จุดทุก ๆ จุดบนเส้น CD จะไม่อยู่ในกลุ่ม ดังนั้นรูปที่ 7 จึงไม่เป็น convex set

แม้ว่าเป็นการแสดงเพียงสองมิติ concept ของ convex set โดยทั่ว ๆ ไปไม่สามารถขยายออกไปถึง n มิติ เนื่องจากว่าปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรงประกอบด้วยข้อบังคับที่มีโครงสร้างของชนิด $\leqslant$ (หรือข้อบังคับซึ่งสามารถเปลี่ยนรูปเป็นชนิด $\leqslant$) คำตอบของปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรงก่อรูปเป็น convex set

ในกรณีที่ความชันของเส้นเขตแดนเส้นใดเส้นหนึ่งเหมือนกับความชันของเส้นผลกำไร เราสามารถสรุปได้ว่าปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรงมีคำตอบที่ดีที่สุดหลาย ๆ คำตอบ นี้หมายความว่าเส้นผลกำไรจะขนานกันกับหรือทับกับเส้นหนึ่งของเส้นเขตแดนของ convex polygon

การคำนวณหาผลกำไรที่ดีที่สุด

ในปัญหาต้องการให้มีผลกำไรให้มากที่สุดเกี่ยวกับสองคู่แข่งขันเท่านั้น ที่เข้าแข่งขัน การคำนวณคำตอบที่ดีที่สุดใช้เส้นผลกำไรที่อยู่ไกลที่สุดจากจุดกำเนิด แต่ยังอยู่ภายในพื้นที่ที่แก้คำตอบที่เป็นไปได้ มีอยู่สองกรณีที่จะยกขึ้นมากล่าว หนึ่ง เส้นผลกำไรนี้อาจทับเส้นหนึ่งของเส้นเขตแดนของหลายเหลี่ยมนูน ถ้าเป็นกรณีนี้ จุดทั้งหมดบนเส้นเขตแดนซึ่งถูกทับด้วยเส้นผลกำไร คือคำตอบที่เป็นไปได้ดีที่สุด สองเส้นผลกำไรไม่อาจทับเส้นหนึ่งของเส้นเขตแดนของหลายเหลี่ยมนูน ถ้าเป็นกรณีนี้จุดหนึ่งของจุดที่มุมของหลายเหลี่ยมนูนจะให้คำตอบที่ดีที่สุดและมีคำตอบเดียวเท่านั้น

ในกรณีของเรา เราสังเกตเห็นว่าเส้นผลกำไรอยู่ไกลที่สุดจากจุดกำเนิด และยัง

อยู่ภายในพื้นที่ที่หาคำตอบที่เป็นไปได้ ผ่านจุด H เพราะฉะนั้น จุด H ก็ให้คำตอบที่ดีที่สุดจากจำนวนคำตอบอนันต์ที่แทนได้ด้วยพื้นที่แรเงาของรูป 5

โคออร์ดิเนตของจุด H สามารถคำนวณหาได้โดยตรงจากกราฟ หรือโดยคำตอบที่เกิดขึ้นในเวลาเดียวกันของสองเส้นตัดกันที่จุด H สมการของเส้นเหล่านี้ (แทนความสามารถในการตัดและพับ) เราก็ทราบกันแล้ว การคำนวณหาโคออร์ดิเนตของจุด H ดังแสดงได้ดังต่อไปนี้

สำหรับแผนกตัด

$$10.7x + 5.0y = 2{,}705$$

หรือ

$$y = 541 - 2.14x$$

สำหรับแผนกพับ

$$5.4x + 10.0y = 2{,}210$$

หรือ

$$y = 221 - 0.54(x) \qquad (5)$$

สมการ (4) และ (5) เท่ากันเราได้

$$541 - 2.14x = 221 - 0.54x$$

หรือ

$$x = 200 \, (1)$$

แทนค่า (6) ใน (4)

$$y = 541 - 2.14(200)$$

$$= 541 - 428 = 113$$

เพราะฉะนั้น คำตอบที่ดีที่สุดคือต้องผลิต 200 หน่วยของ x (ผลิตภัณฑ์ A) และ 113 หน่วยของ y (ผลิตภัณฑ์ B) ผลกำไรสำหรับรายการนี้คือ

$$10(200) + 15(113) = 3{,}695 \bullet \text{ บาท}$$

แทนค่า x = 200 และ y = 113 ในอสมการ (1) ถึง (3) เราพบว่ารายการนี้ใช้กำลังการผลิตอย่างเต็มที่ในแผนกตัดและแผนกพับ แต่เหลือไว้ 192 หน่วยกำลังการผลิตของแผนกบรรจุไม่ได้ใช้นี้สามารถสังเกตได้โดยการตรวจสอบรูปที่ 5 ซึ่งเส้นความสามารถในการบรรจุอยู่เหนือไกลออกไปจากพื้นที่แรเงา

4. กระบวนการย่อสำหรับวิธีกราฟ (ปัญหาสองมิติ)

ขั้นที่ 1 แปลงรูปรายละเอียดทางเทคนิคที่กำหนดให้ของปัญหาเป็นอสมการ และทำข้อความให้ถูกต้องของฟังก์ชันเป้าหมาย

ขั้นที่ 2 เขียนเส้นกราฟแต่ละอสมการในเงื่อนไขที่กำหนดให้เพื่อหาขอบเขตของคำตอบที่เป็นไปได้ พร้อมกับข้อบังคับที่คำตอบเป็นลบไม่ได้ นี้จะให้หลายเหลี่ยมนูนที่มีคำตอบที่เป็นไปได้ทั้งหมด

ขั้นที่ 3 โดยการเลือกตัวเลขกำไรง่าย ๆ ลากจากเส้นผลกำไรเพื่อว่าเส้นนี้จะตกภายในพื้นที่แรเงา

ขั้นที่ 4 เคลื่อนเส้นผลกำไรนี้ให้ขนานกับเส้นตัวเอง และห่างออกไปจากจุดกำเนิดจนกระทั่งคำนวณหาคำตอบที่ดีที่สุด

5. วิธีกราฟ (กรณีสามมิติ)

ข้อมูลของตารางที่ 1 เรามีสามตัวเลือก จึงจำเป็นจะต้องมีปัญหาสามมิติ

ข้อมูลสามารถแสดงออกเป็นอสมการได้

สำหรับแผนกตัด

$$10.7x + 5.0y + 2.0z \leqslant 2{,}705 \qquad \text{..........(7)}$$

สำหรับแผนกพับ

$$5.4x + 10.0y + 4.0z \leqslant 2{,}210 \qquad \text{..........(8)}$$

สำหรับแผนกบรรจุ

$$0.7x + 1.0y + 2.0z \leqslant 445 \qquad \text{..........(9)}$$

ฟังก์ชันเป้าหมาย เพื่อที่จะทำให้

$10x + 15y + 20z$

มีค่ามากที่สุด

(ในกรณีสองมิติมีเงื่อนไขแต่ละสัมประสิทธิ์ของสองสัมประสิทธิ์ในฟังก์ชันเป้าหมายเป็นบวก ให้เราพิจารณากรณีอื่น ๆ สองกรณี (1) สัมประสิทธิ์ทั้งสองในฟังก์ชันเป้าหมายเป็นลบ (ดังเช่น maximize $-10x - 15y$) และ (2) สัมประสิทธิ์ตัวหนึ่งในฟังก์ชันเป้าหมายเป็นลบขณะเดียวกัน ตัวอื่นเป็นบวก (ดังเช่น maximize $-10x + 15y$) ถ้าหากว่าเป็นปัญหาให้ผลประโยชน์สูงสุด สัมประสิทธิ์ทั้งสองในฟังก์ชันเป้าหมายเป็นลบ (ในกรณีที่ 1) จะเห็นได้ว่าระดับของแต่ละกิจกรรมควรจะลดเป็นศูนย์หรือว่าไม่ได้ผลิตทั้ง x และ y ถ้าหากว่าสัมประสิทธิ์ตัวหนึ่งในฟังก์ชันเป้าหมายเป็นบวกขณะเดียวกันตัวอื่นเป็นลบ (ในกรณีที่ 2) ก็เช่นเดียวกัน ผลิตภัณฑ์

ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นลบ (ผลิตภัณฑ์ x) ก็ไม่ควรผลิตเลย ขณะเดียวกันผลิตภัณฑ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นบวก (ผลิตภัณฑ์ y) ก็ควรจะผลิตให้มากเท่าที่จะเป็นไปได้ภายในข้อบังคับที่กำหนดให้

เนื่องจากเรามีสามตัวแปรที่ไม่ทราบ (x, y, z) ในปัญหานี้ จึงเขียนกราฟในสามมิติ เรากำหนดให้ข้อบังคับที่คำตอบเป็นลบไม่ได้

$$x \geqslant 0 \quad y \geqslant 0 \quad z \geqslant 0$$

เราดำเนินการเพื่อเขียนกราฟแต่ละอสมการ ในกรณีที่กำหนดให้ของอสมการ นั่นคือเราพิจารณาอสมการเหล่านั้นให้เหมือนสมการ เนื่องจากสมการเหล่านี้ (มีสามตัวแปรที่ไม่ทราบค่าเป็นเชิงเส้น) แต่ละสมการให้หนึ่ง "ระนาบ" เมื่อพลอตในสามมิติ กระบวนการพลอตก็เหมือนในกรณีของปัญหาสองมิติ ดังตัวอย่าง เราพลอตระนาบแทนกำลังการผลิตของแผนกตัด (พิจารณาสมการ (7))

ถ้า	$y, z = 0$	ดังนั้น	$x = 252.8$
	$x, z = 0$		$y = 541$
	$x, y = 0$		$z = 1,352.5$

นี้เราจะได้ระนาบ ABC ในรูปที่ 8

สำหรับแผนกพับ (พิจารณาสมการ (8))

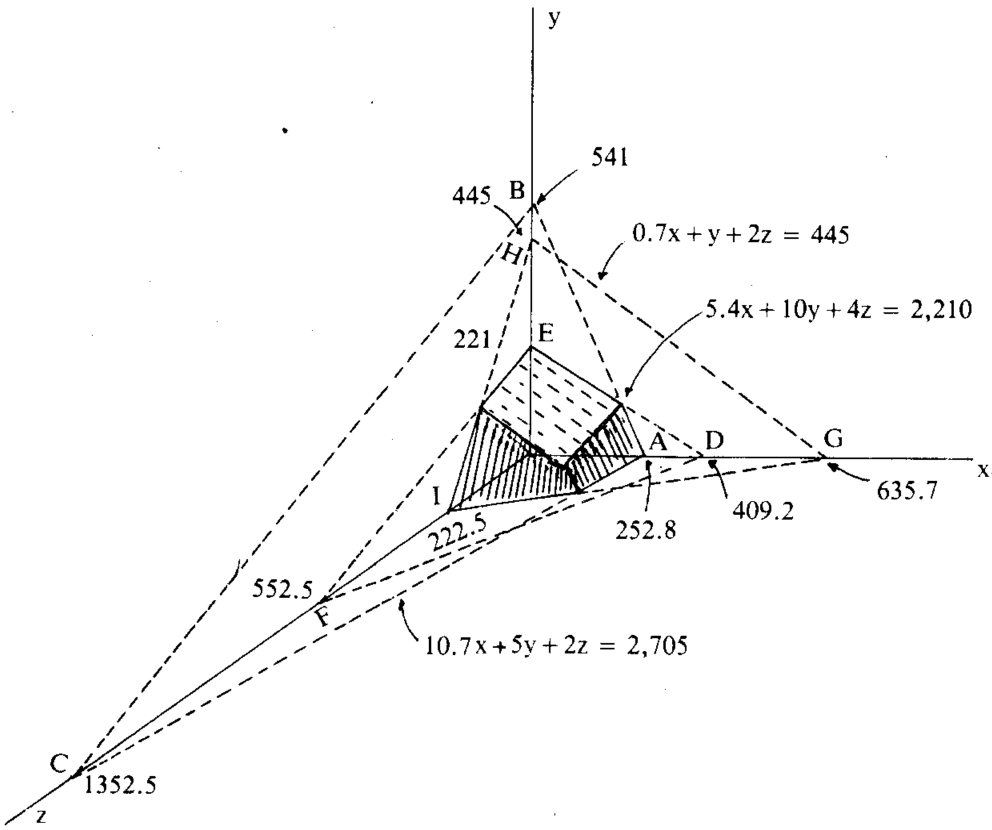
ถ้า	$y, z = 0$	$x = 409.2$
	$x, z = 0$	$y = 221$
	$x, y = 0$	$z = 552.5$

นี้เราได้ระนาบ DEF ในรูปที่ 8

สำหรับแผนกบรรจุ (พิจารณาสมการ (9))

ถ้า	$y, z = 0$	$x = 635.7$
	$x, z = 0$	$y = 445$
	$x, y = 0$	$z = 222.5$

นี้เราได้ระนาบ GHI ในรูปที่ 8



รูปที่ 8

ระนาบทั้งสาม (ABC, DEF, GHI) และแกนทั้งสาม x, z, y พร้อมด้วย $x \geqslant 0, y \geqslant 0$ และ $z \geqslant 0$ รูปสามมิติตันมีคำตอบที่เป็นไปได้ทั้งหมดในปัญหานี้ คำถามต่อไปคือคำตอบ เฉพาะอันไหนเป็นคำตอบที่ดีที่สุด เพื่อพิสูจน์คำตอบที่ดีที่สุดนี้ เราสร้างระนาบผลกำไรเพื่อคำนวณหาระนาบผลกำไรไปแทนผลกำไร 900 บาท เราสร้างระนาบซึ่งมีมุมอยู่ที่ $x = 90, y = 60$ และ $z = 45$ แล้วเราก็เคลื่อนระนาบนี้ออกไปจากจุดกำเนิด หรือว่า เราสร้างระนาบที่ให้ผลกำไรสูงขนานกับระนาบนี้แต่ยังอยู่ภายในเขตแดนของคำตอบที่เป็นไปได้ ผู้อ่านสามารถเห็นได้ว่าขณะที่เราเคลื่อนออกไปจากจุดกำเนิด บางระนาบเฉพาะจะแตะผิวพื้นข้างนอกหรือมุมที่ไกลที่สุดของรูปทรงหลายเหลี่ยมที่มีคำตอบที่เป็นไปได้ จุดที่บรรจบนั้นในสามมิติคือคำตอบที่ดีที่สุด เราจะคำนวณในหัวข้อต่อไป โคออร์ดิเนตของจุดนี้ในกรณีของเรา

$$x = 200 \quad y = 65 \quad z = 120$$

เพราะฉะนั้น นี้เป็นคำตอบที่ดีที่สุดซึ่งจะให้ผลกำไร 5,375 บาท

แทนค่า $x = 200$ $y = 65$ และ $z = 120$ ในอสมการ (7) ถึง (9) แสดงให้เห็นว่ารายการนี้ใช้กำลังการผลิตได้อย่างเต็มที่ของแผนกทั้งหมด

สรุป

ขอบเขตของการคำนวณหาคำตอบในปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรงโดยวิธีกราฟหาได้ในกรณีที่มีสามตัวเลือก หรือน้อยกว่าสำหรับปัจจัยที่กำหนดให้ อย่างไรก็ตาม คำตอบของปัญหาสองหรือสามมิติ โดยวิธีกราฟให้ความเข้าใจแก่เราและสามารถมองเห็นความจริงว่าปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรงโดยทั่ว ๆ ไปมีจำนวนคำตอบอนันต์ จากคำตอบเหล่านี้ เลือกคำตอบเฉพาะซึ่งให้ผลดีที่สุดต่อฟังก์ชันเป้าหมาย ส่วนวิธีอื่น ๆ อย่างเช่นวิธีการทดลอง วิธีเวคเตอร์ และวิธีซิมเพลกส์ ไม่ได้กำหนดต่อปัญหาว่าจะต้องมีสามมิติหรือน้อยกว่า เราจะอธิบายวิธีการทดลองในบทต่อไป

วิธีการแบบซิมเพลกส์

คำนำ

วิธีการต่าง ๆ ในการแก้ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรง วิธีการแบบซิมเพลกส์เป็นวิธีที่ธรรมดาและมีอานุภาพที่สุด โดยแท้จริงแล้ว วิธีกราฟ วิธีการทดลอง และวิธีเวคเตอร์ เป็นการเสนอเพื่อให้นักศึกษามีความสำนึกถึงปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรง และเพื่อคุ้นเคยกับศัพท์ทางเทคนิคบางอย่างเพื่อความจำเป็นในการเข้าใจเหตุผลและจักรกลของวิธีการแบบซิมเพลกส์ นอกจากนี้ การปฏิบัติจริง ๆ ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรงของนัยสำคัญใด ๆ โดยทั่ว ๆ ไปแก้ได้ด้วยการประยุกต์ของวิธีการแบบซิมเพลกส์

วิธีการแบบซิมเพลกส์ขึ้นอยู่กับคุณสมบัติที่การแก้คำตอบที่ดีที่สุดที่มีต่อปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรงเป็นมูลฐาน สามารถคำนวณหาได้หนึ่งของหลาย ๆ คำตอบที่เป็นไปได้ ดังนั้น วิธีการแบบซิมเพลกส์ขั้นแรกคือ ต้องคำนวณหาคำตอบที่เป็นไปได้พื้นฐานนี้เราได้คำตอบหนึ่งของปัญหาแล้ว ทดสอบคำตอบนี้เพื่อหาคำตอบที่ให้ผลประโยชน์มากที่สุด โดยการตรวจสอบผลกำไรสุทธิในฟังก์ชันเป้าหมายเชิงเส้นตรง

วิธีการแบบซิมเพลกส์เป็นวิธีการที่ง่ายมากและโครงสร้างก็เป็นธรรมชาติ ขั้นต่าง ๆ ของวิธีการแบบซิมเพลกส์ซ้ำกันจนกระทั่งคำนวณหาคำตอบที่ดีที่สุดได้ (ถ้าเป็นจริง) นอกจากนี้วิธีการยังแสดงว่าปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรงที่กำหนดให้ไม่มีคำตอบหรือไม่มีค่าสูงสุดที่แน่นอนเป็นจริง

ปัญหา (กรณี Maximization)

เพื่อที่จะกำหนดแนวความคิดและสะดวกในการเปรียบเทียบกับวิธีการอื่น ๆ ของการแก้ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรง เราจะแก้ปัญหาของตารางที่ 1 โดยวิธีการแบบซิมเพลกส์

ขั้นแรกของเราคือต้องแปลงข้อมูลทางเทคนิคให้เป็นอสมการ

$$
\begin{aligned}
10.7x + 5y + 2z &\leqslant 2,705 \\
5.4x + 10y + 4z &\leqslant 2,210 \\
0.7x + 1y + 2z &\leqslant 445
\end{aligned}
$$

โดยการเพิ่ม slack variable s_1, s_2 และ s_3 อสมการเหล่านี้สามารถเปลี่ยนเป็นสมการ การกำหนด slack variables ให้กำลังการผลิตของแผนกตัด แผนกพับและแผนกบรรจุไม่ได้ใช้ให้เป็นประโยชน์ในการผลิตผลิตภัณฑ์ x, y, z ตามลำดับ ใช้เพื่อผลิตผลิตภัณฑ์จินตนาการ (imaginary products s_1, s_2, s_3 แต่ละชนิดให้ผลกำไรต่อหน่วยเป็นศูนย์

ดังนั้น ปัญหาของเราสามารถกล่าวได้ดังต่อไปนี้

Maximize

$$10x + 15y + 20z + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$$

ขึ้นอยู่กับ

$$
\begin{aligned}
10.7x + 5y + 2z + 1s_1 &= 2,705 \\
5.4x + 10y + 4z + 1s_2 &= 2,210 \\
0.7x + 1y + 2z + 1s_3 &= 445
\end{aligned}
$$

และ $x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0\ s_1 \geqslant 0,\ s_2 \geqslant 0,\ s_3 \geqslant 0$

วิธีการแบบซิมเพลกส์มีประสิทธิภาพในการเรียบเรียงกว่าวิธีโปรแกรมเวคเตอร์ ในวิธีการแบบซิมเพลกส์มีความเกี่ยวข้องกับ slack variables เท่านั้น โปรแกรมนี้สรุปได้ในตารางที่ 1

การตีความหมายของข้อมูลในตารางที่ 1 ต้องเข้าใจให้ดีเพื่อความเข้าใจวิธีการแบบซิมเพลกส์ เพราะฉะนั้น เราจะกล่าวข้อความภายในของตารางที่ 1 ตารางซิมเพลกส์อื่น ๆ ก็จะมีความหมายเหมือนกัน

ตารางที่ 1

โปรแกรม	กำไรต่อหน่วย	ปริมาณ	10 บาท x	15 บาท y	20 บาท z	0 บาท s_1	0 บาท s_2	0 บาท s_3
s_1	0	2,705	10.7	5	2	1	0	0
s_2	0	2,210	5.4	10	4	0	1	0
s_3	0	445	0.7	1	2	0	0	1

1. ในคอลัมน์ "โปรแกรม" เป็นชื่อตัวแปรเฉพาะในคำตอบ (ผลิตภัณฑ์ที่กำลังจะผลิต) ดังนั้นในโปรแกรมที่หนึ่งของเรา เรากำลังผลิต s_1, s_2 และ s_3 เท่านั้น

2. ในคอลัมน์ "กำไรต่อหน่วย" เป็นสัมประสิทธิ์ (ในฟังก์ชันเป้าหมาย) ของตัวแปรรวมอยู่ในโปรแกรมเฉพาะ ดังนั้นสัมประสิทธิ์ของ s_1, s_2 และ s_3 ก็รวมอยู่ในโปรแกรมเริ่มแรกในคอลัมน์ "กำไรต่อหน่วย" สามารถตรวจสอบได้จากโปรแกรมเป้าหมาย สัมประสิทธิ์ของ s_1, s_2 และ s_3 มีค่าเป็นศูนย์

3. ในคอลัมน์ "ปริมาณ" เป็นจำนวนของตัวแปรรวมอยู่ในคำตอบ (ปริมาณของผลิตภัณฑ์ที่กำลังจะผลิตในโปรแกรม) เนื่องจากโปรแกรมเริ่มแรกของเราประกอบด้วยผลิตภัณฑ์ที่จะผลิต 2,705 หน่วยของ s_1 และ 2,210 หน่วยของ s_2 และ 445 หน่วยของ s_3 ค่าเหล่านี้อยู่ในคอลัมน์ "ปริมาณ"

4. ผลกำไรทั้งสิ้นที่มีผลจากโปรแกรมที่กำหนดให้สามารถคำนวณได้โดยการคูณค่าที่สมนัยกันในคอลัมน์ "กำไรต่อหน่วย" กับคอลัมน์ "ปริมาณ" และบวกผลคูณเข้าด้วยกัน ดังนั้นในโปรแกรมที่หนึ่งของเรา ผลกำไรทั้งหมดมีค่าเป็นศูนย์ ((0) 2,705 + (0) 22,210 + (0) 445)

5. ตัวเลขใน main body (ค่าในคอลัมน์ x, y และ z) สามารถแปลความหมายได้หมายความว่าอัตราส่วนของการแทนค่าที่ขึ้นเฉพาะของกระบวนการหาคำตอบ (solution process) ในตารางที่หนึ่ง (ถ้าหากว่าได้สร้างตามแบบข้างต้น) อัตราส่วนเหล่านี้ของการแทนค่าสมนัยกับรายละเอียดทางเทคนิคที่กำหนดให้ ดังตัวอย่างเลข 10.7 ให้อัตราส่วนของการแทนค่าระหว่าง x กับ s_1 หมายความว่าถ้าเราประสงค์ที่จะผลิต 1 หน่วยของ x แล้ว 10.7 หน่วยของ s_1 ต้องสละไป เลข 5.4 และ 0.7 ก็มีความหมายเหมือนกัน โดยวิธีการชนิดเดียวกัน ต้องการจะผลิต y 1 หน่วย เราต้องสละ s_1 5 หน่วย s_2 10 หน่วย และ s_3 1 หน่วย

6. ตัวเลขที่คล้ายกันใน main body ค่าใน identity (คอลัมน์ s_1, s_2 และ s_3) สามารถแปลความหมายได้เหมือนอัตราส่วนของการแลกเปลี่ยน ดังนั้น จำนวนในคอลัมน์ s_1 ใช้แทนอัตราส่วนของการแลกเปลี่ยนระหว่าง s_1 กับตัวแปร s_1, s_2 และ s_3 ตามลำดับในการหาคำตอบ

7. ตัวเลขที่อยู่ข้างบนของคอลัมน์ main body กับ identity ใช้แทนค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรในฟังก์ชันเป้าหมาย

คอลัมน์เป้าหมายที่แสดงถึงสัมประสิทธิ์ของเป้าหมายที่สมนัยกับตัวแปรในโปรแกรม

รายชื่อแถวเป้าหมาย (บนแต่ละตัวแปร) ตามลำดับสัมประสิทธิ์ของเป้าหมาย

รายชื่อแถวตัวแปรทั้งหมดในโปรแกรม

ตัวแปรในกระบวนการ	สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเป้าหมาย	จำนวนขนาดของตัวแปร	10 x	15 y	20 z	0 s_1	0 s_2	0 s_3
s_1	0	2,705	10.7	5	2	1	0	0
s_2	0	2,210	5.4	10	4	0	1	0
s_3	0	445	0.7	1	2	0	0	1

คอลัมน์นี้แสดงถึงตัวแปรในโปรแกรมตัวอื่น ๆ เป็นศูนย์

คอลัมน์นี้แสดงถึงจำนวนขนาดหรือปริมาณของตัวแปรในโปรแกรม

main body ประกอบด้วยสัมประสิทธิ์โครงสร้างหรืออัตราการแทนค่า

Identity แต่ละคำตอบในวิธีการแบบซิมเพลกส์ ต้องแสดงถึง identity matrix

แถวประเมินสุทธิ ⟶ 10 15 20 0 0 0

จำนวนเลขในแถวประเมินสุทธิ ภายใต้แต่ละคอลัมน์ของ main body และ identity ใช้แทนต้นทุนที่เหมาะโอกาสที่มีหนึ่งหน่วยของลำดับคอลัมน์ตัวแปรในกระบวนการหรือจะกล่าวได้อีกแบบหนึ่งว่าจำนวนเลขที่ใช้แทนการปรับปรุงความสามารถให้ดีขึ้น ในฟังก์ชันเป้าหมายซึ่งจะมีผลโดยการนำเข้าไปในโปรแกรมหนึ่งหน่วยของตัวแปรตามลำดับคอลัมน์ (respective column variables)

รูปที่ 1 วิธีการให้ชื่อของตารางซิมเพลกส์

การทดสอบผลเลิศของโปรแกรมปัจจุบัน

ผลกำไรทั้งหมดที่มีผลมาจากโปรแกรมเริ่มแรกของเรามีค่าเท่ากับศูนย์ ซึ่งไม่ได้เป็นโปรแกรมที่ดีที่สุด เราสามารถปรับปรุงให้ดีขึ้นได้ ในกรณีหนึ่งกรณีใด ถ้าสามารถกระทำการปรับปรุงโปรแกรมปัจจุบันให้ดีขึ้นขณะที่ยังคำนวณหาคำตอบที่ดีที่สุดไม่ได้ โดยการนำเข้าไปในแถวประเมินสุทธิหรือแถวล่างสุด (ดูรูปที่ 1) ของตารางที่กำหนดให้

อธิบาย สมมติว่าเราต้องการจะเปลี่ยนโปรแกรมในตาราง 1 โดยการนำเข้าไป (ผลิตภัณฑ์) 1 หน่วยของ x นี้ควรสละ 10.7 หน่วยของ s_1 5.4 หน่วยของ s_2 และ 0.7 หน่วยของ s_3 (ได้กล่าวมาก่อนแล้ว) ผลของการแลกเปลี่ยนนี้เกี่ยวกับฟังก์ชันผลกำไรควรจะเป็น

$$+10 - 10.7(0) - 5.4(0) - 0.7(0) \quad = \quad +10$$

หมายความว่า การนำเอา 1 หน่วยของ x ที่ขั้นนี้ของคำตอบจะเพิ่มมูลค่าของฟังก์ชันกำไร 10 บาท ดังนั้น ต้นทุนที่เหมาะโอกาสซึ่งไม่มีหน่วยของ x นี้ในคำตอบของเราคือ 10 บาท การนำเลขนี้เข้าไปในแถวประเมินสุทธิภายใต้คอลัมน์นี้ x ในทำนองเดียวกัน ต้นทุนที่เหมาะโอกาสซึ่งมีผลิตภัณฑ์ y และ z ในกระบวนการของเราที่ขั้นนี้คือ 15 บาท และ 20 บาท ต่อหน่วยตามลำดับ

นี้เป็นนัยสำคัญของเลขในแถวประเมินสุทธิ โครงสร้างของการคำนวณของแถวประเมินสุทธิของตารางที่กำหนดให้ข้างล่าง

จะได้เลขจำนวนหนึ่งในแถวประเมินสุทธิภายใต้คอลัมน์ใดคอลัมน์หนึ่ง คูณตัวที่นำเข้าไป (entries) ในคอลัมน์นั้นด้วยจำนวนที่สมนัยกันในคอลัมน์เป้าหมายแล้วบวกผลคูณเข้าด้วยกัน ลบผลนี้ออกจากจำนวนที่อยู่ในแถวเป้าหมายข้างบนสุดของคอลัมน์นี้

จำนวนในแถวประเมินสุทธิ (ตามที่ได้กล่าวข้างต้น) แทนการปรับปรุงตามความสามารถให้ดีขึ้นในฟังก์ชันเป้าหมาย ซึ่งจะมีผลมาจากการนำเข้าไปในโปรแกรม 1 หน่วยของแต่ละตัวแปรของลำดับคอลัมน์ตัวแปร ดังนั้นโดยคำจำกัดความ จำนวนเหล่านี้ใช้แทนต้นทุนที่เหมาะโอกาส ต้นทุนที่มีความสัมพันธ์กับพฤติการณ์ที่ไม่เป็นไปตามวิธีที่ดีที่สุดของ ซึ่งไม่มี 1 หน่วยของแต่ละตัวแปรของลำดับคอลัมน์ตัวแปรในการแก้คำตอบ เนื่องจากเรามีความเกี่ยวข้องกับแบบจำลองโปรแกรมเชิงเส้นตรงซึ่งสมมติว่ามีความแน่นอน เวลานี้ต้นทุนที่เหมาะโอกาสที่มีค่าเป็นบวกใด ๆ ในแถวประเมินสุทธิของตารางที่กำหนดให้แสดงว่า คำตอบที่ดีที่สุดไม่เป็นจริง ดังนั้นจำนวนที่เป็นบวกใด ๆ ในแถวประเมินสุทธิเป็นตัวแสดงต้นทุนที่เหมาะโอกาส เวลานี้หมายความว่าเราสามารถออกแบบโปรแกรมที่ดีกว่าได้นี้เป็นเกณฑ์ที่จะ

ใช้ในหนังสือนี้สำหรับคำนวณหาคำตอบที่ดีที่สุด ชนิดที่ให้ค่าสูงสุดของปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรง

ตารางที่ 1

โปรแกรม	กำไรต่อหน่วย	ปริมาณ	10 x	15 y	20 z	0 s_1	0 s_2	0 s_3			
s_1	**0**	**2,705**	10.7	5	2	1	0	0	$\frac{2,705}{2}$	=	**1352.5**
s_2	0	2,210	5.4	10	4	0	1	0	$\frac{2,210}{4}$	=	552.5
s_3	0	445	0.7	1	2	0	0	1	$\frac{445}{2}$	=	222.5
แถวประเมินสุทธิ			10	15	20	0	0	0			

Key number

Key row

(ตัวแปรที่จะออก)

Key column

(ตัวแปรที่จะเข้ามา)

คำนวณแถวประเมินสุทธิสำหรับตารางที่ 1 และจำนวนประเมินสุทธิ สำหรับตัวแปรก็จะใส่ลงที่ฐานของตารางที่ 1 การตรวจสอบจำนวนประเมินสุทธิแสดงการเป็นจริงของต้นทุนที่เหมาะโอกาสที่มีค่าเป็นบวกในโปรแกรมเริ่มแรกโปรแกรมที่หนึ่งของเราไม่ได้เป็นโปรแกรมที่ดีที่สุด

การแก้ไขของโปรแกรมปัจจุบัน

การคำนวณหา Key Column

เลขสามจำนวนบวก (10, 15, 20) ในแถวประเมินสุทธิของตารางที่ 1 แสดงขนาดตามลำดับของต้นทุนที่เหมาะโอกาส ซึ่งไม่รวม 1 หน่วยของตัวแปร (ผลิตภัณฑ์) x, y และ z ในโปรแกรมนี้เนื่องจากว่าต้นทุนที่เหมาะโอกาสที่มีค่าสูงสุดอยู่ในคอลัมน์ z ตัวแปร (ผลิตภัณฑ์) z ควรจะนำเข้าไปในโปรแกรมก่อน จึงเรียกคอลัมน์ z ว่า key column

คอลัมน์ซึ่งตกเป็นของต้นทุนที่เหมาะโอกาสที่มีค่าเป็นบวกมากที่สุด ฟอร์ม key column

เหตุผลสำหรับการเรียกคอลัมน์นี้ว่า key column เห็นได้ง่าย ความจริงก็คือตัวแปร (ผลิตภัณฑ์) ของคอลัมน์นี้ซึ่งถูกนำเข้าไปในการหาคำตอบ ดังนั้นเป็นการจัด "key" ในการ

การคำนวณหา Key Row **และ** Key Number

ภายหลังที่เราได้ตัดสินใจนำตัวแปร (ผลิตภัณฑ์) z เข้าเพื่อแทนที่อย่างน้อยหนึ่งของตัวแปรหลาย ๆ ตัว (ผลิตภัณฑ์) ในโปรแกรมปัจจุบัน (s_1, s_2 หรือ s_3) คำถามก็กลับกลายเป็นว่า จะมีกี่หน่วยของ z สามารถนำเข้าไปโดยปราศจากเกินกำลังการผลิตที่เป็นจริงของอันใดอันหนึ่งของปัจจัยในเทอมของโปรแกรมเชิงเส้นตรง นี้หมายความว่าเราต้องคำนวณจำนวนที่สามารถจะอนุญาตได้มากที่สุดของหน่วย z ที่สามารถจะถูกนำเข้าไปในโปรแกรม โดยปราศจากการละเมิด ข้อบังคับที่คำตอบไม่มีค่าเป็นลบ ถ้าเราสังเกตตาราง I เราจะเห็นว่าการนำ 1 หน่วยของ z เราต้องสละ 2 หน่วยของ s_1 4 หน่วยของ s_2 และ 2 หน่วยของ s_3 เท่าที่เรากำลังผลิตอยู่เดี๋ยวนี้ 2,705 หน่วยของ s_1 เท่านั้น ไม่เกินกว่า 1,352.5 หน่วย (2,705/2 = 1,352.5) ของ z ที่สามารถถูกนำเข้าไปโดยปราศจากการละเมิดข้อกำหนดกำลังการผลิตของแผนกตัดในทำนองเดียวกัน การหาคำตอบในขั้นนี้ การผลิตของ z ก็ถูกจำกัดให้เพียง 552.5 หน่วย (2,210/4 = 552.5) และ 222.5 หน่วย (445/2 = 222.5) ด้วยกำลังการผลิตที่สามารถใช้ได้ของแผนกพับและแผนกบรรจุตามลำดับ เพราะฉะนั้น กรณีขีดจำกัดก็เริ่มจากแถว s_3 ในตาราง I ดังนั้นนี้เป็น key row ของเราและ 222.5 หน่วย คือปริมาณที่มากที่สุดของผลิตภัณฑ์ z ที่สามารถผลิตได้ที่ขั้นนี้ของกระบวนการโดยปราศจากการละเมิดข้อบังคับที่คำตอบไม่มีค่าเป็นลบ โครงสร้างของการคำนวณหา key row ดังกำหนดให้ข้างล่างนี้

หารตัวที่นำเข้า (entries) ภายใต้คอลัมน์ "ปริมาณ" ด้วยตัวที่นำเข้ามีค่าเป็นบวก (nonnegative entries) ที่สมนัยกันของ key column และเปรียบเทียบอัตราส่วนเหล่านี้ แถวที่มีอัตราส่วนน้อยที่สุดอยู่คือ key row เหตุผลสำหรับเรียกแถวนี้ว่า key row ก็ปรากฏชัดอยู่แล้ว แถวนี้เป็นตัวจำกัดขนาดของตัวแปรที่จะนำเข้ามา (ผลิตภัณฑ์) ดังนั้นจึงเป็นการจัด "key" ในการกำหนดโปรแกรมที่ได้แก้ไขแล้ว

การคำนวณเพื่อหา key row ในตารางที่ I คือ

สำหรับแผนกตัด (แถว s_1)

$$\frac{2,705}{2} = 1352.5 \text{ หน่วย}$$

สำหรับแผนกพับ (แถว s_2)

$$\frac{2,210}{4} = 552.5 \text{ หน่วย}$$

สำหรับแผนกบรรจุ (แถว s_3)

$$\frac{445}{2} = 222.5 \quad \text{หน่วย}$$

การแทนที่การคำนวณเช่นนั้นทางด้านขวาสุดของตารางที่กำหนด เพื่อความมุ่งหมายของการคำนวณหา เราจะต้องอ้างถึงผลลัพธ์ของการคำนวณเหล่านี้เสมือนเป็นอัตราส่วนที่ใช้แทนที่ปริมาณที่จำกัดของตัวแปรที่เข้ามา (ผลิตภัณฑ์) คำนวณหาได้แล้ว (ที่ทำเครื่องหมายถูกกำกับอยู่) ในตารางที่ I การกำหนดปริมาณที่จำกัดด้วยอัตราส่วนที่ใช้แทนที่ที่มีค่าต่ำที่สุด

การกำหนด key row และ key column ครั้งหนึ่งการคำนวณ key number เป็นเรื่องธรรมดา จำนวนซึ่งวางอยู่ที่ key row กับ key column ตัดกันของตารางที่กำหนดให้คือ key number ดังนั้นในตารางที่ I key number คือ 2 เหตุผลสำหรับเรียกจำนวนนี้ key number วางอยู่ในหลักของความจริงซึ่งเราพบเห็นต่อไป นั่นเป็นแต่เพียงส่วนหนึ่งของ key row ซึ่งจำนวนนี้จะให้แถวที่สมนัยกันแก่เราในตารางต่อไป (สำหรับโปรแกรมที่ได้แก้ไขแล้ว)

หมายเหตุ ตัวที่เข้าไปแทนที่มีค่าเป็นลบใน key column เมื่อไรที่ถูกตีความให้เป็นอัตราส่วนของการแลกเปลี่ยน หมายความว่าการนำเอาตัวแปร key column เข้าไปทำให้ขนาดเพิ่มขึ้นมากกว่าลดลงของตัวแปรแถวในที่ซึ่งตัวที่เข้าไปแทนที่มีค่าเป็นลบ การหาค่าได้ ขนาดปัจจุบันของตัวแปรแถวนี้ควรจัดให้ไม่มีขีดจำกัดต่อการนำเข้าของตัวแปร key column ดังนั้น การคำนวณหา key row จึงต้องเป็นอัตราส่วนที่มีค่าเป็นบวกเท่านั้นในการแทนที่

การได้มาของตารางที่ II

การพิสูจน์ของ key column และ key row แสดงให้เราเห็นว่าตัวแปร z (ผลิตภัณฑ์) จะแทนที่ตัวแปร s_3 (ผลิตภัณฑ์) และไม่เกินกว่า 222.5 หน่วยของ z ที่สามารถผลิตได้ภายใต้ข้อกำหนดกำลังการผลิตปัจจุบัน งานของเราต่อไปคือ กำหนดส่วนประกอบที่แน่นอนของส่วนที่เหลือของโปรแกรมที่ได้แก้ไขแล้ว เราต้องหาส่วนลดใน s_1 และ s_2 ที่เป็นสาเหตุของหลักความจริงที่ว่า 222.5 หน่วยของ z จะต้องรวมอยู่ในโปรแกรมที่ได้แก้ไขแล้ว

เนื่องจากว่าใช้ 2 หน่วยของกำลังการผลิตแผนกบรรจุเพื่อผลิตหน่วยของ z ปรากฏว่าทั้งหมด 445 หน่วย (222.5×2) ของกำลังการผลิตที่ใช้บรรจุจนหมด อย่างไรก็ตาม ที่ได้จดไว้ก่อนการผลิต 1 หน่วยของ z จะใช้ 2 หน่วยของกำลังการผลิตแผนกตัดและ 4 หน่วยของกำลังการผลิต แผนกพับ ดังนั้นกำลังการผลิตที่เหลือของแผนกตัดคือ $2{,}705 - (222.5 \times 2) = 2{,}260$

และกำลังการผลิตที่เหลือของแผนกพับคือ $2,210-(222.5\times 4) = 1,320$ หน่วย

วิธีการอื่น ๆ ก็กล่าวได้เช่นเดียวกันคือว่า โปรแกรมที่สองของเราจำเป็นต้องผลิต $z = 225.5$ หน่วย $s_1 = 2,260$ หน่วย $s_2 = 1,320$ หน่วย $s_3 = 0$, $x = 0$ และ $y = 0$ ผลิตภัณฑ์ทั้งสาม (s_1, s_2 และ z) รวมอยู่ในโปรแกรมที่สองมีอยู่ในคอลัมน์ "โปรแกรม" ตารางที่ II

ตารางที่ II มีโปรแกรมที่สองของเราได้มาจากตารางที่ I ซึ่งเสนอโปรแกรมเริ่มแรกของเราเท่าที่จำนวนของตัวแปรในคำตอบจากโปรแกรมหนึ่งถึงตัวคงที่ที่เหลือตัวต่อไป ตารางซิมเพลกส์แต่ละตารางได้ฟอร์มในกระบวนการของการแก้ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรงที่มีจำนวนคงที่ของแถวต่อไป ตารางที่กำหนดให้ (ระหว่างขั้นของการแก้คำตอบ) มีสองชนิดของแถว (1) key row และ (2) nonkey rows ดังนั้น การคำนวณหาตารางใหม่จากตารางเก่าทั้งหมดที่เราต้องทำคือตั้งกฎของการแปลงรูปสำหรับแถวทั้งสองชนิดเหล่านี้ กฎของการแปลงรูปเหล่านี้ (ดังข้างล่าง) ฟอร์มโครงสร้างพื้นฐานของวิธีการแบบซิมเพลกส์ การประยุกต์กฎเหล่านี้ต่อเซททั้งหมดของตัวที่นำเข้าไปของแต่ละแถวเริ่มต้นด้วยคอลัมน์ "ปริมาณ" ไปทางขวา

การแปลงรูปของ Key Row

กฎสำหรับการแปลง key row คือ หารจำนวนทั้งหมดใน key row ด้วย key number จำนวนผลลัพธ์ก็จะฟอร์มแถวที่สมนัยกัน (จะถูกแทนที่ในตำแหน่งเดียวกัน) ในตารางต่อไป

ดังนั้น แถวที่สามในตารางที่ II (แถว z) คำนวณหามาได้จากแถวที่สามในตารางที่ I (แถว s_3) โดยการหารจำนวนทั้งหมดในแถว s_3 ด้วย 2 (key number) อย่างธรรมดาแถว z ใหม่ (ตารางที่ II) คือ

222.5	0.35	0.5	1	0	0	0.5

การแปลงรูปของ Nonkey Rows

กฎสำหรับการแปลง nonkey rows คือการลบออกจากจำนวนแถวเก่า (ในแต่ละคอลัมน์) ผลิตภัณฑ์ของ key-row number ที่สมนัยกันและอัตราคงที่ที่ได้ฟอร์มขึ้นสมนัยกัน โดยการหารจำนวนแถวเก่าใน key column ด้วย key number ผลลัพธ์จะให้จำนวนแถวใหม่ที่สมนัยกัน

จากกฎข้างต้นสามารถแทนที่ในสมการต่อไปนี้

จำนวนแถวใหม่ = จำนวนแถวเก่า−(จำนวนที่สมนัยกันใน key row × อัตราคงที่ที่สมนัยกัน)

ในทำนองเดียวกัน แถว s_2 ใหม่คำนวณหาได้ดังนี้ (อัตราคงที่ที่สมนัยกัน $= 4/2 = 2$)

จำนวนแถวเก่า − (จำนวนที่สมนัยกันใน key row × อัตราคงที่ที่สมนัยกัน) = จำนวนแถวใหม่

2,210	--	(445	$\times 2)$	=	1,320
5.4	--	(0.7	$\times 2)$	=	4
10	--	(1	$\times 2)$	=	8
4	--	(2	$\times 2)$	=	0
0	--	(0	$\times 2)$	=	0
1	--	(0	$\times 2)$	=	1
0	--	(1	$\times 2)$	=	-2

ในเมื่อ

$$\text{อัตราคงที่} = \frac{\text{ตัวเลขแถวเก่าใน key column}}{\text{key number}}$$

ดังนั้นแถว s_1 ใหม่สำหรับตาราง II คำนวณหาได้ดังต่อไปนี้ (อัตราคงที่ที่สมนัยกัน = 2/2 = 1)

จำนวนแถวเก่า – (จำนวนที่สมนัยกันใน key row × อัตราคงที่ที่สมนัยกัน) = จำนวนแถวใหม่

2,705	–	(445	$\times 1)$	=	2,260
10.7	–	(0.7	$\times 1)$	=	10
5	–	(1	$\times 1)$	=	4
2	–	(2	$\times 1)$	=	0
1	–	(0	$\times 1)$	=	1
0	–	(0	$\times 1)$	=	0
0	–	(1	$\times 1)$	=	-1

ผลลัพธ์เหล่านี้ใส่เข้าในตารางที่ II

ตารางที่ II

โปรแกรม	กำไรต่อหน่วย	ปริมาณ	10 X	15 Y	20 Z	0 S_1	0 S_2	0 S_3		
S_1	0	2,260	10	4	0	1	0	–1	$\frac{2260}{4}$	= 565
S_2	0	1,320	4	8	0	0	1	–2	$\frac{1320}{8}$	= 165
Z	20	222.5	0.35	0.5	1	0	0	0.5	$\frac{222.5}{0.5}$	= 445
แถวประเมินสุทธิ			3.00	5.00	0	0	0	–10		

ผลิตภัณฑ์ที่จะนำออกไป ผลิตภัณฑ์ที่นำเข้ามา

ตามที่ได้แสดงในตารางที่ II โปรแกรมที่สองของเราสำหรับการผลิตของ s_1 = 2,260, s_2 = 1,320 และ z = 222.5 หน่วย ตัวแปร s_3, x และ y ไม่ได้อยู่ในกระบวนการโปรแกรม และค่าที่สมมติขึ้นเป็นศูนย์ ผลกำไรทั้งหมดมีผลมาจากโปรแกรมนี้คือ 4,450 บาท

$$2{,}260(0) + 1{,}320(0) + 222.5(20)$$

การออกแบบโปรแกรมอื่น ๆ (การแก้ไขของโปรแกรมที่สอง)

แถวประเมินสิทธิของตารางที่ II เรายังมีสองต้นทุนที่เหมาะโอกาสที่มีค่าเป็นบวกต่างหากที่สัมพันธ์กับแต่ละตัวแปร (ผลิตภัณฑ์) x กับ y ที่ไม่มี 1 หน่วยในโปรแกรม ดังนั้นโปรแกรม 2 บรรจุอยู่ในตารางที่ II ไม่ได้เป็นโปรแกรมที่ดีที่สุด นี้จำเป็นต้องออกแบบโปรแกรมใหม่ และคำนวณหาตาราง III ใหม่ กระบวนการคำนวณหาตารางที่ III ก็เหมือนกันกับการคำนวณหาตารางที่ II วิธีการทั้งหมดของการแก้ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรงที่ได้กล่าวในหนังสือนี้ ความก้าวหน้าของวิธีการแบบซิมเพลกส์วางอยู่ในโครงสร้างธรรมชาติง่าย ๆ ของกระบวนการหาคำตอบ โดยซึ่งจำนวนอนันต์ของการกระทำซ้ำ ๆ กันทำให้เราบรรลุคำตอบที่ดีที่สุด ความสำคัญของวิธีการแบบซิมเพลกส์คือสำหรับการศึกษาวัตถุประสงค์ เราพอใจค่านี้มากเพราะว่ากระบวนการชนิดนี้สามารถโปรแกรมเข้าไปในคอมพิวเตอร์ได้ ดังนั้นปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรงที่มีมิติใหญ่มากก็สามารถแก้ได้ในระยะเวลาอันสั้น

หมายเหตุ คำนวณได้จาก

x	y	z	s_1	s_2	s_3
10	15	20	0	0	0
10x0	-4×0	-0×0	-1×0	-0×0	$-(-1)\times0$
-4×0	-4×0	-0x0	-0×0	-1×0	$-(-2)\times0$
-0.35 x 20	-0.5 x20	-1x20	-0×20	-0x20	-0.5x20
+3.00	+5.00	0	0	0	−10

จัดเรียงสมการเสียใหม่เพื่อว่าเทอมคงที่จะได้อยู่ทางด้านซ้ายมือ

การได้มาของตารางที่ III

จำนวนบวกสองจำนวนในแถวประเมินสุทธิของตารางที่ II แสดงถึงความเป็นจริงของต้นทุนที่เหมาะโอกาสซึ่งต้องขจัดออกไป เนื่องจากว่าการนำแต่ละหน่วยของ y เข้าไปในโปรแกรม (ที่ขั้นนี้) เพิ่มผลกำไรสูงสุด (หรือลดต้นทุนที่เหมาะโอกาสต่อหน่วยมากที่สุด) การเลือกผลิตภัณฑ์ที่จะเข้ามา ดังนั้น คอลัมน์ y คือ key column เช่นเดียวกับครั้งก่อน เราต้องกำหนดขีดจำกัดเกี่ยวกับปริมาณของ y ซึ่งสามารถนำเข้าไปในโปรแกรม และระดับนั้นจึงคำนวณหา key row ปริมาณขีดจำกัดของตัวแปร s_1, s_2 และ z แสดงทางด้านขวามือของตารางที่ II แสดงว่าแถว s_2 คือ key row และ 8 คือ key number

กฎของการแปลงรูปที่ได้เสนอมาก่อน แถวที่สองของตารางที่ III (แถว y) คำนวณหาได้มาจากแถวที่สองของตารางที่ II (แถว s_2) โดยการหารจำนวนทั้งหมดในแถว s_2 ด้วย 8 (key number) แถว y ของตารางที่ III ก็กลายเป็น

$$165 \quad 0.5 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0.125 \quad -0.25$$

nonkey rows ของตารางที่ II แปลงได้ดังนี้

จำนวนแถวเก่า – จำนวนที่สมนัยกันใน key row × อัตราคงที่ที่สมนัยกัน = จำนวนแถวใหม่

การคำนวณสำหรับแถว s_1 (อัตราคงที่ = 4/8)

$$\begin{aligned}
2,260-(1,320\times 0.5) &= 1,600\\
10-(4\times 0.5) &= 8\\
4-(8\times 0.5) &= 0\\
0-(0\times 0.5) &= 0\\
1-(0\times 0.5) &= 1\\
0-(1\times 0.5) &= -0.5\\
-1-(-2\times 0.5) &= 0
\end{aligned}$$

การคำนวณสำหรับแถว z (อัตราคงที่ = 0.5/8)

$$\begin{aligned}
222.5-(1,320\times 0.0625) &= 140\\
0.35-(4\times 0.0625) &= 0.1\\
0.5-(8\times 0.0625) &= 0\\
1-(0\times 0.0625) &= 1\\
0-(0\times 0.0625) &= 0\\
0-(1\times 0.0625) &= -0.062
\end{aligned}$$

$0.5-(-2\times 0.0625) = 0.625$

ค่าที่คำนวณได้เหล่านี้บรรจุเข้าไปในตารางที่ III ดังแสดงในตาราง III โปรแกรมที่สามของเราจำเป็นต้องผลิต $s_1 = 1{,}600$, $y = 165$ และ $z = 140$ ตัวแปร s_2, s_3 และ x ไม่ได้อยู่ในโปรแกรม และค่าที่สมมติเป็นศูนย์ ผลกำไรทั้งหมดมีผลมาจากโปรแกรมนี้คือ 5,275 บาท

$$[1{,}600(0)+165(15)+140(20)]$$

ตารางที่ III

โปรแกรม	กำไรต่อหน่วย	ปริมาณ	10 x	15 y	20 z	0 s_1	0 s_2	0 s_3	
s_1	**0**	**1,600**	8	0	0	1	-0.5	0	200
y	15	165	0.5	**1**	**0**	**0**	**0.125**	−0.25	330
z	20	140	0.1	0	1	0	− 0.062	0.625	**1,400**
แถวประเมินสุทธิ			+0.5	□	□	□	-0.625	-8.75	

ผลิตภัณฑ์ที่จะนำออกไป ผลิตภัณฑ์ทีจะนำเข้ามา

การออกแบบโปรแกรมอื่น ๆ (การแก้ไขโปรแกรมที่สาม)

แถวประเมินสุทธิของตารางที่ III ยังคงมีจำนวนที่มีค่าเป็นบวก การแสดงความเป็นจริงของต้นทุนที่เหมาะโอกาสที่มีค่าเป็นบวก เพื่อที่จะขจัดต้นทุนที่เหมาะโอกาสบวกนี้ ตัวแปร (ผลิตภัณฑ์) x ควรจะถูกนำเข้าไปในโปรแกรมคอลัมน์ x ก็คือ key column

การคำนวณสำหรับปริมาณขีดจำกัดของ x ซึ่งสามารถผลิตโดยคำนึงถึงโปรแกรมขณะนี้ ดังได้แสดงทางด้านขวาสุดของตารางที่ III ค่าที่คำนวณได้เหล่านี้เข้าใจว่าแถว s_1 คือ key row ส่วนที่ key column และ key row ตัดกันคือ key number ของเรา (8) เราอยู่ในฐานะที่จะต้องกำหนดโปรแกรมที่ได้แก้ไขแล้ว

การได้มาของโปรแกรมที่ได้แก้ไขแล้ว (ตารางที่ IV) จะสำเร็จลงได้โดยกฎการแปลงรูปทั้งสองที่ได้เสนอมาแล้ว key row ของตารางที่ III (แถว s_1) แปลงเป็นแถว x ของตารางที่ IV ในเมื่อ nonkey row (แถว y กับ z) ถูกแปลงเป็นแถวที่สมนัยกันของตารางที่ IV นักศึกษาตรวจสอบการแปลงรูปเหล่านี้ (ซึ่งแสดงให้เห็นในตารางที่ IV) ดังได้แสดงไว้แล้ว โปรแกรมที่สี่ของเราจำเป็นต้องผลิต $x = 200$, $y = 65$ และ $z = 120$ หน่วย ตัวแปร s_1, s_2 และ s_3

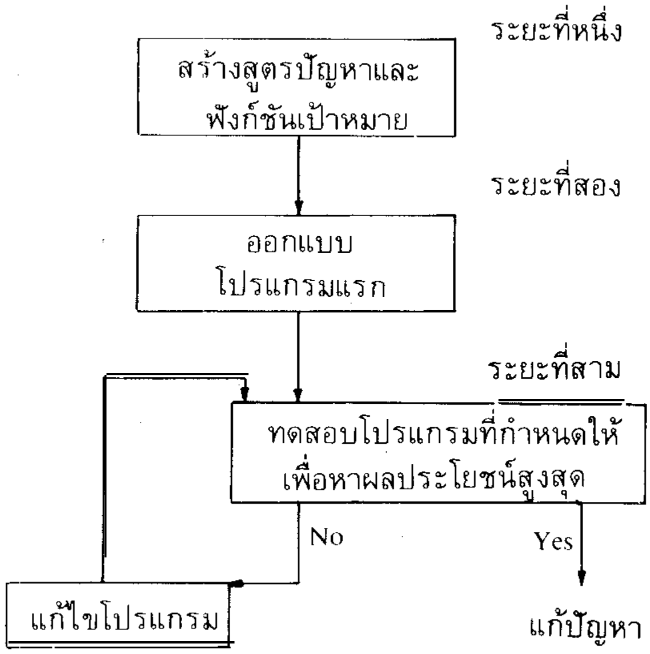
ตารางที่ IV

โปรแกรม	กำไรต่อหน่วย	ปริมาณ	10 x	15 y	20 z	0 s_1	0 s_2	0 s_3
x	10	200	1	0	0	0.125	-0.062	0
y	15	65	0	1	0	-0.062	0.156	-0.25
z	20	120	0	0	1	-0.012	-0.056	0.625
แถวประเมินสุทธิ			0	0	0	-0.062	-0.593	-8.75

ไม่ได้อยู่ในกระบวนการ (program) และค่าที่สมมติขึ้นเป็นศูนย์ โปรแกรมที่สี่จะใช้กำลังการผลิตได้อย่างเต็มที่ของแผนกตัด แผนกพับ และแผนกบรรจุ ผลกำไรทั้งหมดที่มีผลมาจากโปรแกรมนี้คือ 5375 บาท $|200(10)+65(15)+120(20)|$ คำถามต่อไปคือ นี่เป็นโปรแกรมที่ให้ผลประโยชน์สูงสุดของเราหรือยัง

โปรแกรมที่ให้ผลประโยชน์สูงสุด

ค่าทั้งหมดในแถวประเมินสุทธิของตารางที่ IV เป็นศูนย์หรือมีค่าลบอย่างใดอย่างหนึ่ง หลักความจริงนี้แสดงว่าได้คำนวณหาโปรแกรมที่ให้ผลประโยชน์สูงสุดไว้เรียบร้อยแล้ว



รูปที่ II แบบแปลน simplex algorithm

การตีความทางเศรษฐศาสตร์ของตัวที่นำเข้าในแถวประเมินสุทธิของโปรแกรมที่ให้ผลประโยชน์สูงสุดเป็นที่น่าสนใจยิ่ง เนื่องจากว่าประเมินสุทธิของ s_1 ที่ขั้นนี้คือ -0.062 การนำเข้า 1 หน่วยของ s_1 (ให้ 1 หน่วยของกำลังผลิตแผนกตัดสละไป) จะลดฟังก์ชันเป้าหมาย 0.062 บาท ด้วยเหตุผลเดียวกัน ถ้าเรามีเพิ่มขึ้นอีกหนึ่งหน่วยของ s_1 ฟังก์ชันเป้าหมายก็เพิ่มขึ้น 0.062 บาท หมายความว่า 0.062 บาทให้ accounting price หรือ shadow price 1 หน่วยของกำลังการผลิตที่ใช้ตัดแก่เราก็คล้ายกับแนวความคิดของนักเศรษฐศาสตร์เกี่ยวกับราคาของหน่วยกำลังการผลิตเพิ่มขึ้นของแผนกตัด ในทำนองเดียวกัน shadow prices หรือ accounting prices *ของ* s_2 *กับ* s_3 *คือ 0.593 บาท* และ 8.75 บาทตามลำดับ ค่าของปัจจัยที่สามารถใช้เป็นประโยชน์ทั้งหมด (การใช้ shadow prices เหล่านี้) สามารถคำนวณหาได้โดยการคูณกำลังการผลิตที่เป็นจริงของปัจจัยต่าง ๆ ด้วย shadow prices ของกำลังการผลิตตามลำดับ และบวกผลคูณในกรณีของเรา ค่านี้เท่ากับ 5,372 บาท $[2,705(0.062) + 2,210(0.593) + 445(9.75)]$ การเปรียบเทียบค่าที่ได้นี้ของปัจจัยที่สามารถจะใช้ได้ด้วย ค่าของฟังก์ชันเป้าหมายในโปรแกรมที่ให้ผลประโยชน์มากที่สุด (ตารางที่ IV) เราพบว่าขนาดของค่าต่างไปเพียง 3 บาทเท่านั้น ที่จริงแล้วค่าสองค่าควรจะเท่ากันอย่างแน่นอน ความไม่ตรงกันสาเหตุมาจากความคลาดเคลื่อนทั่ว ๆ ไป หลักความที่ว่าค่าของฟังก์ชันเป้าหมายในโปรแกรมที่ให้ผลประโยชน์มากที่สุดเท่ากับค่าที่ได้มาของปัจจัยที่สามารถจะใช้ได้เรียกว่าทฤษฎีพื้นฐานของโปรแกรมเชิงเส้นตรง ทฤษฎีนี้เป็นเนื้อหาในแนวความคิดของ dual สิ่งที่ได้กล่าวมาเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างปัญหาแรกเริ่มเดิมทีในโปรแกรมเชิงเส้นตรงกับปัญหาของ dual ต่อไป

คำตอบของปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรงโดยวิธีการแบบซิมเพลกส์ดังที่ได้เห็นข้างต้นอาศัยกระบวนการธรรมดาที่ประกอบด้วยสามระยะที่จำเป็น ระยะที่หนึ่งคือเข้าสูตรของปัญหาและฟังก์ชั่นเป้าหมาย ระยะที่สองเกี่ยวกับการออกแบบของรายการแรก ซึ่งรวม slack variables เท่านั้น ระยะที่สามประยุกต์การทดสอบของผลประโยชน์มากที่สุด เพื่อกำหนดว่าโปรแกรมที่กำหนดสามารถปรับปรุงให้ดีขึ้นหรือไม่ โครงสร้างของระยะที่สามก็ซ้ำเหมือนเดิมจนกระทั่งคำนวณหาคำตอบที่ดีที่สุด (ถ้าเป็นจริง) ได้ประกอบด้วยสองส่วน (1) การทดสอบผลประโยชน์มากที่สุดของโปรแกรมปัจจุบัน และ (2) การแก้ไขโปรแกรมปัจจุบัน (ถ้าจำเป็น) ตามกฎที่นิยามขึ้นของการแปลงรูปสำหรับ key row และ nonkey rows ของตารางซิมเพลกส์ที่มีโปรแกรมปัจจุบัน แผนภาพของกระบวนการที่ซ้ำ ๆ กันนี้ ดังกำหนดในรูปที่ II

สรุปกระบวนการสำหรับวิธีการแบบซิมเพลกส์ (กรณี Maximization)

ขั้นที่ 1 การสร้างสูตรปัญหา

ก. แปลงรายละเอียดทางเทคนิคของปัญหาเป็นอสมการ และสร้างข้อความของฟังก์ชันเป้าหมาย

ข. เปลี่ยนอสมการเป็นสมการโดยการเพิ่ม slack variables ที่มีค่าเป็นบวก สมการเหล่านี้ควรจะสมมาตรหรือสมดุลเพื่อว่าแต่ละ slack variable ที่ปรากฏในแต่ละสมการมีสัมประสิทธิ์ที่เหมาะสม

ค. ดัดแปลงฟังก์ชันเป้าหมายเพื่อที่จะให้ slack variables รวมเข้าอยู่ด้วย

ขั้นที่ 2 ออกแบบโปรแกรมแรก

ออกแบบโปรแกรมที่หนึ่งเพื่อให้ slack variables รวมอยู่ในกระบวนการเท่านั้น บรรจุโปรแกรมนี้ลงในตารางซิมเพลกส์ในแถวเป้าหมายเหนือแต่ละคอลัมน์ตัวแปรบรรจุสัมประสิทธิ์ที่สมนัยกันของตัวแปรนั้นจากขั้นที่ 1 ค

ขั้นที่ 3 ทดสอบและแก้ไขโปรแกรม

ก. **คำนวณแถว** ประเมินสุทธิเพื่อที่จะให้ได้เลขจำนวนหนึ่งในแถวประเมินสุทธิภายใต้คอลัมน์หนึ่ง คูณตัวที่ใส่เข้าไป (entries) ในคอลัมน์นั้นด้วยจำนวนที่สมนัยกันในคอลัมน์เป้าหมายและบวกผลคูณ เอาผลบวกนี้ลบออกจากจำนวนที่อยู่ในแถวเป้าหมายที่ข้างบนของคอลัมน์ ใส่ผลเข้าไปในแถวประเมินสุทธิภายใต้คอลัมน์

ข. **ทดสอบ** ตรวจสอบตัวที่ใส่เข้าไป (entries) ในแถวประเมินสุทธิ สำหรับตาราง simplex ที่กำหนดให้ ถ้าหากว่าตัวที่ใส่เข้าไป (entries) เป็นศูนย์หรือลบ ก็เท่ากับว่าคำนวณหาคำตอบที่ผลประโยชน์สูงสุดได้แล้ว ถ้าหากว่าตัวที่ใส่เข้าไปเป็นบวกในแถวประเมินสุทธิแสดงว่าสามารถคำนวณหาโปรแกรมที่ดีกว่าได้

ค. **แก้ไขโปรแกรม**

1. หา key column ตัวเลขใต้คอลัมน์ที่มีค่าบวกมากที่สุดในแถวประเมินสุทธิคือ key column

2. หา key row และ key number หารตัวที่ใส่เข้าไป (entries) ในคอลัมน์ปริมาณด้วยตัวที่ใส่เข้าไปบวกที่สมนัยกัน (corresponding nonnegative entries) ของ key column เพื่อฟอร์มอัตราที่ใช้แทนที่ (replacement ratios) และเปรียบเทียบอัตราเหล่านี้ แถวในที่ซึ่งตกเป็นอัตราที่ใช้แทนที่ที่มีค่าน้อยที่สุดคือ key row จำนวนซึ่งวางอยู่ที่ key row กับ key column ตัดกัน

คือ key number

3. แปลง key row หารจำนวนทั้งหมดใน key row (เริ่มด้วยคอลัมน์ปริมาณไปทางขวา) ด้วย key number จำนวนผลที่ได้ฟอร์มแถวที่สมนัยกันของตารางต่อไป

4. แปลง nonkey rows เอาแถว key number ลบออกจากจำนวนแถวเก่าของ nonkey row ที่กำหนดให้ (ในแต่ละคอลัมน์) ผลคูณของ key row number ที่สมนัยกันกับอัตราคงที่ที่สมนัยกัน ที่ฟอร์มขึ้นได้ด้วยการหารจำนวนแถวเก่าใน key column ผลลัพธ์จะให้จำนวนแถวใหม่ที่สมนัยกัน ทำการแปลงรูปนี้สำหรับ nonkey rows ทั้งหมด

5. ใส่ผลลัพธ์ของ (3) และ (4) ในตารางที่ใช้แทน program ที่ได้แก้ไข

ขั้นที่ 4 คำนวณหาโปรแกรมที่ให้ผลประโยชน์มากที่สุด

ซ้ำขั้นที่ 3 และ 4 จนกระทั่งคำนวณหาโปรแกรมที่ให้ผลประโยชน์มากที่สุดได้

ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรงเกี่ยวกับฟังก์ชันเป้าหมายที่ผลประโยชน์น้อยที่สุด มีข้อบังคับโครงสร้างของชนิด "มากกว่าหรือเท่ากับ" ซึ่งสามารถแก้ไขได้ด้วยวิธีการแบบซิมเพลกส์ กระบวนการซิมเพลกส์สำหรับแก้ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรงในที่ซึ่งจุดประสงค์ก็คือจะต้องทำให้ฟังก์ชันที่กำหนดให้นั้นมีค่าน้อยที่สุดมากกว่าที่จะทำให้มีค่ามากที่สุด แม้ว่าพื้นฐานจะคล้ายกันดังข้างต้น วิธีการแบบซิมเพลกส์ของปัญหาให้ผลประโยชน์น้อยที่สุด จะแสดงในหัวข้อต่อไป

หมายเหตุ

ระหว่างขั้นกระบวนการใด ๆ ตัวที่ใส่เข้าไป (entries) ใน key column ของตารางซิมเพลกส์เฉพาะสามารถให้เราสามสภาพการณ์ หนึ่งของตัวที่ใส่เข้าไปที่มีค่าเป็นบวก อาจฟอร์มอัตราส่วนที่ใช้แทนที่ที่มีค่าน้อยที่สุด และการคำนวณหา key row ได้อย่างจำกัด

ในกรณีนี้ ประยุกต์ simplex algorithm (หัวข้อนี้) ในวิธีตรงสอง ตัวที่ใส่เข้าไปที่มีค่าเป็นบวกอาจเป็นมาตราที่ใช้แทนที่ที่มีค่าน้อยที่สุดเป็นศูนย์ หรือมีความเสมอกันระหว่างสองหรือมากกว่าอัตราส่วนที่ใช้แทนที่ที่มีค่าน้อยที่สุด ในกรณีเช่นนั้น ปัญหาก็กลายเป็น degenerate

อย่างไรก็ตาม วิธีการแบบซิมเพลกส์อาจถูกทำต่อไปตามกฎที่จะกล่าวในบทต่อไป สาม อาจเกิดขึ้นได้ว่าตัวที่ใส่เข้าไปทั้งหมด (entries) ใน key column ไม่เป็นศูนย์หรือลบอย่างใดอย่างหนึ่ง ในกรณีนี้ตัวแปรที่จะเข้ามาสามารถถูกนำเข้าไปในโปรแกรมโดยปราศจากการจำกัดใด ๆ และไม่มีตัวแปรหลักเวลานี้ที่สามารถจะถูกขจัดออกจากกระบวนการ อีก

ความหมายหนึ่ง ค่าของตัวแปรหลักยังคงมีขนาดเหมือนเดิมหรือเพิ่มขึ้นปราศจากขีดจำกัดใด ๆ (เนื่องจากว่าอัตราทั้งหมดของการแทนที่เป็นศูนย์หรือลบอย่างใดอย่างหนึ่ง) ดังนั้นในกรณีสุดท้ายเรามีสภาพการณ์หนึ่งในที่ซึ่งมีตัวแปร $m+1$ ตัวเสมอในกระบวนการ และ ฟังก์ชันเป้าหมายก็ไม่มีค่าสูงสุดที่จำกัด (finite maximum) เสมอ

วิธีการแบบซิมเพลกส์ (II)

1. ปัญหา

แสดงกรณีให้ต้นทุนที่น้อยที่สุดกับปัญหาที่คล้ายกับปัญหาอาหาร (famous diet problem) ให้เรามาสร้างสูตรปัญหาที่สมมติขึ้นในที่ซึ่งบุคคลหนึ่งต้องการจำนวนวิตามินสองชนิดในแต่ละวันดังนี้

ตารางที่ V

วิตามิน	อาหาร		ความต้องการประจำวัน
	F_1	F_2	
V	2	4	40
W	3	2	50
ต้นทุนต่อหน่วยของอาหาร, เซนต์	3	2.5	–

วิตามิน V และ W หาได้ในอาหารต่างกันสองชนิด F_1 และ F_2 จำนวนของวิตามินในแต่ละชนิดของอาหารสองชนิด ราคาต่อหน่วยของอาหารแต่ละชนิด และความต้องการวิตามินประจำวันดังกำหนดในตาราง V ข้อมูลแสดงว่า 1 หน่วยของ F_1 (ให้เสียว่า 1 ปอนด์) มีวิตามิน V 2 หน่วย และวิตามิน W 3 หน่วย ในทำนองเดียวกัน 1 หน่วยของ F_2 มีวิตามิน V 4 หน่วย และวิตามิน W 2 หน่วย ความต้องการประจำวันสำหรับ V อย่างน้อย 40 หน่วย และสำหรับวิตามิน W อย่างน้อย 50 หน่วย สิ่งเหล่านี้เป็นรายละเอียดทางเทคนิคของปัญหา วัตถุประสงค์ของเราคือ ต้องการคำนวณปริมาณที่ดีที่สุดของอาหาร F_1 กับ F_2 ที่จะซื้อเพื่อให้ต้นทุนน้อยที่สุด สมมติว่า a ใช้แทนปริมาณของอาหาร F_1 และ b ใช้แทนปริมาณของอาหาร F_2 เพื่อจะซื้อ เราอาจกำหนดปัญหาในรูปพีชคณิตได้ดังนี้

จงทำ (ต้นทุน)

$3a + 2.5b$ ให้มีค่าน้อยที่สุดโดยขึ้นอยู่กับ

$2a + 4b \geqslant 40$

$3a + 2b \geqslant 50$

และ $a \geqslant 0,\ b \geqslant 0$

การแก้ปัญหาให้ต้นทุนน้อยที่สุด

โครงสร้างข้อบังคับในที่นี้เป็นชนิด “มากกว่าหรือเท่ากับ” ดังนั้นการกลับอสมการให้เป็นสมการต้องการลบมากกว่าบวกของ ‘‘slack variables’’ ให้ตัวแปร p กับ q ใช้แทนปริมาณของวิตามิน V ในส่วนที่เกินของ 40 หน่วย และปริมาณของวิตามิน W ในส่วนที่เกินของ 50 หน่วย การนำเข้าของ slack variables เหล่านี้จะเปลี่ยนอสมการข้างต้นเป็นสมการต่อไปนี้

$$2a + 4b - p = 40 \qquad \text{..........(1)}$$

$$3a + 2b - q = 50 \qquad \text{..........(2)}$$

การแสดงของ slack variables ทางกายภาพเปรียบเหมือนกันกับสิ่งหนึ่งที่กำหนด slack variables ในปัญหาให้ต้นทุนน้อยที่สุด ตัวแปร p และ q สมมติให้เป็นเหมือนผลิตภัณฑ์อิสระที่มีคุณสมบัติ 1 หน่วยของ p บรรจุ 1 หน่วยของวิตามิน V และ 1 หน่วยของ q บรรจุ 1 หน่วยของวิตามิน W โดยที่เราไม่ต้องซื้อผลิตภัณฑ์อิสระ ถ้าตัวแปรเหล่านี้มีอยู่ในรายการจริงตัวแปร p และ q ก็ปรากฏเมื่อเราซื้ออาหาร F_1 กับ F_2 เพื่อให้วัตถุประสงค์สอดคล้องตามต้องการวิตามิน V และ W ตามลำดับ ดังนั้น ถ้ารายการเฉพาะของการซื้ออาหาร F_1 กับ F_2 เพื่อต้องการ p กับ q โดยให้สอดคล้องกับสมการ (1) กับ (2) ข้างต้น เพราะฉะนั้น ขนาดของ p กับ q จะแทนปริมาณของวิตามิน V ในส่วนเกินของ 40 หน่วยกับปริมาณของวิตามิน W ในส่วนเกินของ 50 หน่วยตามลำดับ

จากการแสดงข้างต้น จะเห็นว่าตัวแปร p กับ q ถูกจำกัดไม่ให้เป็นค่าลบ และแต่ละค่ามีสัมประสิทธิ์ต้นทุน (Cost coefficient) เป็นศูนย์ ข้อความที่สมบูรณ์ของปัญหาคือ

จงทำ (ต้นทุน)

$3a + 2.5b + 0p + 0q$ ให้มีค่าน้อยที่สุดโดยขึ้นอยู่กับ

$$2a + 4b - p = 40 \qquad \text{..........(3)}$$

$$3a + 2b - q = 50 \qquad \text{..........(4)}$$

และ $a \geqslant 0, b \geqslant 0, p \geqslant 0, q \geqslant 0$

Artificial Slack Variables

ให้เราตรวจสอบสมการ (3) ถ้าเราได้ตัวแปรโครงสร้าง a กับ b เท่ากับศูนย์ เหมือนเราได้ออกแบบโปรแกรมแรกขณะแก้ปัญหาให้ต้นทุนน้อยที่สุด โดยวิธีการแบบซิมเพลกส์ เราได้ค่าหนึ่งของ -40 สำหรับ slack variable p ค่าลบตัวหนึ่งตัวใดไม่สามารถยอมรับได้ เนื่องจากว่าเป็นการหลีกเลี่ยงข้อบังคับที่ให้ค่าเป็นลบ สำหรับ p และไม่ได้ทำให้มีเหตุผลในรูปของการแสดงทางกายภาพของ slack variables เราพบความยากลำบากที่คล้ายคลึงกันในสมการ (4) เราทราบว่า คำตอบแรกพอจะเป็นแนวทางในวิธีการแบบซิมเพลกส์ (เหมือนกับที่เราได้เห็นในหัวข้อบทก่อน) ได้มาโดยการให้ตัวแปรโครงสร้างทั้งหมดเท่ากับศูนย์

เพราะฉะนั้น ข้อเสนอที่ขั้นนี้เพื่อดัดแปลงข้อความของปัญหาเราในวิธีเช่นนั้น ซึ่งเราสามารถทำให้ a กับ b เท่ากับศูนย์ในสมการข้างต้นและยังมี slack variables ที่มีค่าบวกสอดคล้องกับสมการเหล่านี้ได้รับผลสำเร็จลงได้โดยการนำเข้าไปในอสมการเดิม ในการบวกเข้ากับ regular slack variablesเรียกว่า "artificial" slack variables, artificial slack variables จะถูกใช้แทนได้โดยอักษร A พร้อมด้วย subscript ดังนั้น เราสามารถดัดแปลงสมการ (3) และ (4) ด้วยการบวก artificial slack variables A_1 กับ A_2 ตามลำดับ

$$2a + 4b - p + A_1 = 40$$

$$3a + 2b - q + A_2 = 50$$

ในปัญหานี้ artificial slack variables A_1 และ A_2 สามารถให้เป็นเสมือนอาหารจินตนาการ "(imaginary foods)" แต่ละหน่วยบรรจุ 1 หน่วยของวิตามิน ดังตัวอย่าง เราสมมติในที่นี้ว่า 1 หน่วยของ A_1 บรรจุ 1 หน่วยของวิตามิน V ด้วยเหตุที่ 1 หน่วยของ A_2 บรรจุ 1 หน่วยของ วิตามิน W ในความหมายนี้ A_1 ก็เหมือนกับ p และ A_2 ก็คล้ายกับ q ทั้ง A_1 และ A_2 ถูกกำหนด ไม่ให้มีค่าเป็นลบ อย่างไรก็ตาม ความสมนัยระหว่าง slack กับ artificial slack variables ไม่ได้ยึดมั่นในเรื่องของสัมประสิทธิ์ต้นทุน (cost coefficients) ด้วยเหตุที่ slack variables มีค่าเป็นศูนย์ ขณะสัมประสิทธิ์ต้นทุนของ slack variables แต่ละ artificial slack variable จะถูกกำหนดให้สัมประสิทธิ์ต้นทุนมากไม่มีการจำกัด (โดยทั่ว ๆ ไปแสดงได้โดย M)

ดังนั้น การบวก slack และ artificial slack variables จะเปลี่ยนปัญหาเดิมเป็นดังนี้

จงทำ (ต้นทุน)

$3a + 2.5b + 0p + 0q + MA_1 + MA_2$ ให้มีค่าน้อยที่สุดโดยขึ้นอยู่กับ

$$2a + 4b - p + A_1 = 40 \qquad \text{..........(5)}$$

$3a + 2b - q + A_2 = \quad 5\ 0$ ....(6)

และ a, b, p, q, A_1 และ $A_2 \geqslant 0$

ถ้าในสมการ (5) และ (6) เราให้ตัวแปร a, b, p และ q สมมติให้ค่าเป็นศูนย์ artificial slack variables A_1 และ A_2 จะมีค่าเป็นบวก เพราะฉะนั้น เราสามารถเห็นว่าผลการสรุปของ artificial slack variables จะอนุญาตเราเพื่อออกแบบโปรแกรมแรก ในที่ซึ่งไม่มีการซื้ออาหาร F_1 กับ F_2 แต่ยังไม่ได้ละเมิดข้อบังคับที่ให้ค่าเป็นลบไม่ได้

ตัวแปรเหล่านี้สามารถทำให้เราทำได้สะดวกและเริ่มต้นที่ถูกต้องในการได้คำตอบที่ดีที่สุด (optimal solution) โดยวิธีการแบบซิมเพลกส์ ต่อไปเกี่ยวพันกับแต่ละ artificial slack variable สัมประสิทธิ์ต้นทุน M ที่มากที่สุด เราสามารถแน่ใจว่าตัวแปรเหล่านี้จะไม่เคยเข้าไปในกระบวนการที่ให้ผลประโยชน์สูงสุด แม้ว่า 1 หน่วยของหนึ่ง artificial slack variable ในโปรแกรมใด ๆ ควรจะมีผลในต้นทุนที่ต้องห้าม

การแก้คำไข ต่อปัญหาที่ได้ดัดแปลงของเรา (ดัดแปลงโดยการรวมเข้ากับ A_1, A_2 ฯลฯ) จะให้คำตอบที่มีต่อปัญหาเดิมแก่เรา

การเข้าสมการสำหรับตารางซิมเพลกส์แรก

หวนกลับไปยังกระบวนการแบบซิมเพลกส์ของปัญหาให้ผลประโยชน์สูงสุดของเราที่โปรแกรมแรกซึ่งเกี่ยวข้องกับ imaginary products s_1, s_2 ฯลฯ เท่านั้น สำหรับปัญหาสองมิตินี้จะสมนัยกับการเริ่มต้นการหาคำตอบที่จุดกำเนิดในวิธีการแบบกราฟ

เราสังเกตเห็นได้ทันทีว่าการนำเข้าของ A_1 และ A_2 นำเราไปสู่จุดที่ basis vectors $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ กับ $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ และสมการสามารถถูกบรรจุเข้าไปในตาราง simplex ที่หนึ่งโดยตรง ดูสมการ (7) กับ (8) ในรูปที่สมดุลย์ ปัญหาของเราสามารถกำหนดได้ดังนี้

จงทำ (ต้นทุน)

$3a + 2.5b + 0p + 0q + MA_1 + MA_2$ ให้มีค่าน้อยที่สุดโดยขึ้นอยู่กับ

$2a + 4b - 1p + 0q + 1A_1 + 0A_2 \quad = \quad 40$ ....(7)

$3a + 2.5b + 0p - 1q + 0A_1 + 1A_2 \quad = \quad 50$ ....(8)

และ a, b, p, q, A_1 และ $A_2 \geqslant 0$

เราจำข้างต้นได้เหมือนกับปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรงธรรมดาซึ่งจะแก้ไขได้โดยวิธีการแบบซิมเพลกส์

หมายเหตุ ถ้าหากว่า ในปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรงใด ๆ เกี่ยวกับ artificial slack variables การประยุกต์ของวิธีการแบบซิมเพลกส์ไม่มีผลที่จะขจัด artificial slack variables ทั้งหมดจาก solution basis ปัญหาเดิมไม่มีคำตอบ

การออกแบบโปรแกรมแรก

ตามที่ได้กล่าวข้างต้นโปรแกรมแรกของเราได้มาโดยการให้แต่ละตัวแปรของหลาย ๆ ตัวแปร a, b, p และ q สมมติให้ค่าเป็นศูนย์นี้หมายความว่า (จากสมการ (7) และ (8)) โปรแกรมแรกจำเป็นต้องซื้อ 40 หน่วยของ A_1 กับ 50 หน่วยของ A_2 โปรแกรมนี้ ดังกำหนดในตารางที่ VI

ตารางที่ VI

โปรแกรม	ต้นทุนต่อหน่วย	ปริมาณ	3 a	2.5 b	0 p	0 q	M A_1	M A_2	
A_1	M	40	2	4	−1	0	1	0	$\frac{40}{4} = 10$ ✓
A_2	M	50	3	2	0	−1	0	1	$\frac{50}{2} = 25$

แถวประเมินสุทธิ $3-5M \quad \frac{5}{2}-6M \quad M \quad M \quad 0 \quad 0$

ตัวแปรที่จะต้องออกไป

ตัวแปรที่จะต้องเข้ามา

โปรแกรมนี้ ตามสารบรรณของตารางที่ VI แสดงเกี่ยวกับต้นทุนของ 90M ดอลลาร์ รูปที่หกเราสามารถออกแบบโปรแกรมที่ดีกว่า

การแก้ไขรายการแรก

วิธีการแบบซิมเพลกส์ สำหรับการแก้ปัญหาให้ผลประโยชน์สูงสุด การแก้ไขของโปรแกรมปัจจุบันในกรณีของปัญหาให้ผลประโยชน์สูงสุดต้องการ (1) การคำนวณของแถวประเมินสุทธิ (Net-evaluation row) (2) หา key column (3) หา key row กับ key number และ (4) แปลงรูปของ key row กับ nonkey rows ลงในตารางใหม่ที่บรรจุโปรแกรมที่ได้แก้ไขโครงร่าง

ของขั้นเหล่านี้ก็เหมือนกันกับในปัญหาให้ผลประโยชน์สูงสุด อย่างไรก็ตาม ในกรณีให้ต้นทุนน้อยที่สุด ตัวที่นำเข้าไปมีค่าเป็นลบ และมากที่สุดในแถวประเมินสุทธิ (ตรงข้ามกับตัวที่นำเข้าไปมีค่าเป็นบวกและมากที่สุดในกรณีให้ผลประโยชน์สูงสุด) ซึ่งหา key column ในกรณีให้ต้นทุนน้อยที่สุด ถ้าหากว่าตัวที่นำเข้าประเมินสุทธิ (net-evaluation entry) ภายใต้ column variable เฉพาะที่เป็นลบแสดงให้เห็นหลักความจริงว่าการรวมตัวแปรนี้ใน new basis (โดยการแทนที่ของหนึ่งของตัวแปรหลักนี้) จะลดค่าของฟังก์ชันเป้าหมาย

เพื่อที่จะคำนวณแถวประเมินสุทธิ เรากำหนดผลสุทธิเกี่ยวกับต้นทุนของการรวมเข้าไว้ (การซื้อที่ขั้นนี้ของโปรแกรม 1 หน่วย ของแต่ละของ a, b, p, q, A_1 และ A_2 ดังตัวอย่างขณะที่อัตราของการแทนที่ของตาราง VI แสดงการซื้อ 1 หน่วยของ b (หรือการผลิต 1 หน่วยของ b) หมายความว่าการซื้อของ A_1 จะต้องลดลง 4 หน่วยและพร้อมกันนี้การซื้อของ A_2 จะต้องลดลง 2 หน่วย ผลการนำเข้าสุทธิ 1 หน่วยของ b จะต้องลดต้นทุนทั้งหมด $2.5 - 6M$ เซ็นต์ $(+1(2.5) - 4M - 2M)$ หรืออีกนัยหนึ่งการแทนที่ A_1 หรือ A_2 ด้วย b ที่ขั้นนี้จะลดต้นทุนทั้งหมดในเนื้อหาเดียวกันสามารถได้มาสำหรับตัวแปรอื่น ๆ ไม่รวมอยู่ด้วยในโปรแกรมที่ขั้นนี้ แถวประเมินสุทธิของตารางที่ VI บรรจุเนื้อหานี้

เครื่องหมายลบของตัวที่จะนำเข้าไปในแถวประเมินสุทธิใช้แทนต้นทุนที่เหมาะโอกาสของการไม่มี 1 หน่วยของแต่ละตัวแปรของหลาย ๆ ตัวแปรในโปรแกรมดังตัวอย่าง ต้นทุนที่เหมาะโอกาสของการไม่มี 1 หน่วยของ b ในกระบวนการ คือ $-(2.5 - 6M) = 6M - 2.5$ เซ็นต์ ต้นทุนที่เหมาะโอกาสที่เป็นบวก ซึ่งต้องถูกขจัดออกไป เนื่องจากว่าต้นทุนที่เหมาะโอกาสที่เป็นบวกสมนัยกับตัวที่จะถูกนำเข้าเป็นลบ (negative entry) ในแถวประเมินสุทธิในกรณีของปัญหากรณีให้ต้นทุนที่น้อยที่สุด เราสามารถกำหนดกฎการตัดสินใจต่อไปนี้สำหรับการทดสอบผลเดิมของโปรแกรม ซึ่งกำหนดให้ในปัญหากรณีให้ต้นทุนน้อยที่สุด ตราบเท่าที่คำนวณหาค่าได้แม้ว่าจำนวนที่เป็นลบเดียว ๆ ในแถวประเมินสุทธิของปัญหา กรณีให้ต้นทุนน้อยที่สุดยังไม่ได้เป็นกระบวนการที่ให้ผลเลิศ

ตัวที่จะถูกนำเข้าไปในแถวประเมินสุทธิของตารางที่ VI แสดงตัวแปร a และ b เป็นตัวแปรที่การนำเข้าของตัวแปรต่อโปรแกรมเท่านั้น จะลดต้นทุนทั้งหมด เราสังเกตว่าการนำเข้าของ 1 หน่วยของ a กับ 1 หน่วยของ b เข้าไปในโปรแกรมขั้นนี้จะลด ฟังก์ชันเป้าหมายด้วย $3 - 5M$ กับ $2.5 - 1M$ เซ็นต์ตามลำดับ เนื่องจากว่าการนำเข้าไปของ 1 หน่วยของ b ลดต้นทุนมากกว่า 1 หน่วยของ a เราควรนำ b เข้าไปในโปรแกรมก่อน เพราะฉะนั้น คอลัมน์ที่มีอักษร b คือ key column

ต่อไปเราต้องกำหนดหน่วยของ b ว่ามากเท่าใดที่สามารถซื้อได้ปราศจากการทำ A_1 หรือ A_2 เป็นลบ

จากแถว A_1 จำนวนสูงสุดของ b ซึ่งสามารถนำเข้าไปในการหาคำตอบ คือ 40/4 = 10 หน่วย

จากแถว A_2 จำนวนสูงสุดของ b ซึ่งสามารถนำเข้าไปในการหาคำตอบ คือ 50/2 = 25 หน่วย

เพราะฉะนั้น เราเห็นว่าแถว A_1 ให้ข้อจำกัดนี้เป็น key row ของเรา และ key number คือ 4

ส่วนที่เหลือของกระบวนการสำหรับการแก้ไขโปรแกรมปัจจุบัน ก็เหมือนกับวิธีการแบบซิมเพลกส์ สำหรับปัญหากรณีให้ผลประโยชน์สูงสุด key row (แถว A_1 ในกรณีนี้) ถูกแปลงรูปด้วยการหารตัวที่จะถูกนำเข้าของแถวทั้งหมดด้วย key number, nonkey row (แถว A_2 ในกรณีนี้) จะถูกแปลงรูปไปตามกฎการแปลงรูปที่ได้ใช้ในหัวข้อก่อน เพราะฉะนั้น โปรแกรมใหม่ก็ถูกออกแบบ ตารางที่ VII เป็นของโปรแกรมนี้ นักศึกษาควรคำนวณหาเนื้อหาของตารางที่ VII และโปรแกรมลำดับย่อยในหัวข้อนี้

ตารางที่ VII

Program	ต้นทุนต่อหน่วย	ปริมาณ	3 a	2.5 b	0 p	0 q	M A_1	M A_2	
b	2.5	10	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{10}{\frac{1}{2}} = 20$
A_2	M	**30**	2	0	$\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$+2$	$\frac{30}{2} = 15$ ✓
	แถวประเมินสุทธิ		$\frac{7}{2}-2M$	0	$\frac{5}{8}-\frac{1}{2}M$	M	$-\frac{5}{8}+\frac{3}{2}M$	0	

ตัวแปรที่จะต้องออกไป ตัวแปรที่จะต้องเข้ามา

โปรแกรม 3 (การแก้ไขของโปรแกรมที่สอง)

แถวประเมินสุทธิตารางที่ VII มีสอง negative entries, negative entries เหล่านี้ในที่นี้หมายความว่ายังหาโปรแกรมที่ให้ผลเลิศไม่ได้ ดังนั้นจึงมีการปรับปรุงโปรแกรมที่สองของเราให้ดีขึ้น

เนื่องจากตัวที่นำเข้าของการประเมินสุทธิภายใต้คอลัมน์ a มีค่าลบและมากกว่าซึ่งภายใต้คอลัมน์ p ตัวแปร a ควรจะถูกนำเข้าไปในการหาคำตอบต่อไปนี้ จะสำเร็จลุล่วงในลักษณะเช่นเดียวกันกับครั้งก่อนโปรแกรมที่ได้แก้ไขของเราถูกกำหนดในตารางที่ VIII

ตารางที่ VIII

โปรแกรม	ต้นทุนต่อหน่วย	ปริมาณ	3 a	2.5 b	0 p	0 q	M A_1	M A_2
b	2.5	$\frac{5}{2}$	0	1	$-\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$
a	3	15	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
แถวประเมินสุทธิ			0	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{7}{8}$	$M-\frac{3}{16}$	$M-\frac{7}{8}$

หมายเหตุ นักศึกษาคงจำได้ถึงกฎการแปลงรูปสำหรับ nonkey row คือ

$$\text{ตัวเลขแถวเก่า} - \begin{bmatrix}\text{ตัวเลขที่สมนัยกัน} \\ \text{ใน key row}\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}\text{อัตราคงที่ที่} \\ \text{สมนัยกัน}\end{bmatrix} = \text{ตัวเลขแถวใหม่}$$

ในเมื่อ

$$\text{อัตราคงที่} = \frac{\text{ตัวเลขแถวเก่าใน key column}}{\text{key number}}$$

โปรแกรมที่ให้ผลเลิศ

เนื่องจากว่า entries ทั้งหมดในแถวประเมินสุทธิของตารางที่ VIII เป็นบวก กระบวนการที่ให้ผลเลิศต่อปัญหาของเราก็หาได้แล้ว กระบวนการที่ให้ผลเลิศนี้กำหนดค่าของ 15 ต่อตัวแปร a และ $\frac{5}{2}$ ต่อตัวแปร b โปรแกรมที่ให้ผลเลิศนี้จำเป็นต้องซื้อ 15 หน่วยของอาหาร F_1 และ $\frac{5}{2}$ หน่วยของอาหาร F_2 เป็นประจำวัน ด้วยต้นทุนซึ่งตามมา 51.25 เซ็นต์ ตามที่ได้ทดสอบอย่างคร่าว ๆ จะแสดงว่าโปรแกรมนี้เป็นความต้องการประจำวันของวิตามิน V กับ W

สรุปกระบวนการสำหรับวิธีการแบบซิมเพลกส์ (กรณีให้ต้นทุนน้อยที่สุด)

ข้อที่ 1 สร้างสูตรปัญหา

ก. แปลงรายละเอียดทางเทคนิคของปัญหาให้เป็นอสมการ และทำข้อความให้ถูกต้องของฟังก์ชันเป้าหมาย

ข. เปลี่ยนอสมการให้เป็นสมการโดยการลบของ nonnegative slack variables แล้วดัดแปลงสมการเหล่านี้โดยการบวก nonnegative artificial slack variables สมการเหล่านี้ควรจะสมมาตรหรือสมดุลย์เพื่อว่าแต่ละ slack กับ artificial slack variable ปรากฏในแต่ละสมการด้วยสัมประสิทธิ์ที่พอเหมาะ

ค. ดัดแปลงฟังก์ชันเป้าหมายเพื่อรวมเข้าด้วย slack กับ artificial slack variables

ขั้นที่ 2 การออกแบบโปรแกรมแรก

การออกแบบโปรแกรมแรกเพื่อรวม artificial slack variables ในกระบวนการแทนโปรแกรมนี้ในตารางซิมเพลกส์ในแถวเป้าหมายข้างบนแต่ละคอลัมน์ตัวแปรแทนที่สัมประสิทธิ์ที่สมนัยกันของตัวแปรนั้นจากขั้นที่ 1 ค โดยเฉพาะการแทนศูนย์ข้างบนแต่ละคอลัมน์ที่บรรจุ slack variable และจำนวน M ที่มีค่ามากไม่จำกัด ข้างบนแต่ละคอลัมน์ที่บรรจุ artificial slack variable

ขั้นที่ 3 ทดสอบและแก้ไขโปรแกรม

ก. คำนวณแถวประเมินสุทธิ เพื่อที่จะเอาจำนวนในแถวประเมินสุทธิภายใต้คอลัมน์คูณ entries ในคอลัมน์นั้นด้วยตัวเลขที่สมนัยกันในคอลัมน์เป้าหมาย และบวกผลคูณที่ได้ แล้วลบผลบวกนี้จากจำนวนที่มีอยู่ในแถวเป้าหมายข้างบนคอลัมน์ นำผลที่ได้เข้าไปในแถวประเมินสุทธิภายใต้คอลัมน์

ข. ทดสอบ ตรวจสอบ entries ในแถวประเมินสุทธิสำหรับตาราง simplex ที่กำหนดให้ถ้า entries ทั้งหมดเป็นศูนย์หรือบวกก็หาคำตอบที่ให้ผลเลิศได้แล้ว นอกจากนี้ entry ที่มีค่าเป็นลบใด ๆ เวลานี้ในแถวประเมินสุทธิแสดงว่า โปรแกรมที่ดีกว่ายังสามารถหาได้

ค. แก้ไขโปรแกรม

(1) หา key column คอลัมน์ภายใต้ซึ่งเป็นตัวแปรที่มีค่าน้อยที่สุดในแถวประเมินสุทธิ คือ key column

(2) หา key row กับ key number หาร entries ในคอลัมน์ "ปริมาณ" ด้วย entries entries ที่ไม่เป็นลบที่สมนัยกันใน key column เพื่อฟอร์มอัตราส่วนที่ใช้แทนที่ และเปรียบเทียบอัตราเหล่านี้ แถวที่ซึ่งอัตราส่วนน้อยที่สุดที่ใช้แทนที่มีอยู่คือ key row จำนวนเลขซึ่งวางอยู่ที่ส่วนตัดกันของ key row กับ key column คือ key number

(3) กวรแปลง key row หารจำนวนทั้งหมดใน key row (เริ่มด้วยและไปทางขวาของคอลัมน์ "ปริมาณ") ด้วย key number จำนวนที่ได้ฟอร์มแถวที่สมนัยกันของตารางต่อไป

(4) การแปลง nonkey rows ลบออกจากตัวเลขแถวเก่าของ nonkey row ที่กำหนดให้ (ในแต่ละคอลัมน์) ผลคูณของ key row number ที่สมนัยกันกับอัตราคงที่ที่สมนัยกันที่ได้ฟอร์ม โดยการหารตัวเลขแถวเก่าใน key column ด้วย key number ผลจะให้จำนวนแถวใหม่ที่สมนัยกัน ทำการแปลงรูปนี้สำหรับ nonkey rows ทั้งหมด

(5) นำผลที่ได้ของ (3) กับ (4) ข้างต้นเข้าไปในตารางที่ใช้แทนโปรแกรมที่ได้แก้ไข

ขั้นที่ 4 การหาโปรแกรมที่ให้ผลเลิศ

กระทำซ้ำขั้นที่ 3 และ 4 จนกระทั่งได้โปรแกรมที่ให้ผลเลิศ เรากระทำซ้ำ ๆ ดังคำแนะนำการเปรียบเทียบปัญหา กรณีให้ผลประโยชน์สูงสุดกับปัญหากรณีให้ต้นทุนน้อยที่สุดที่ได้แก้โดยวิธีการแบบซิมเพลกส์

กระบวนการสำหรับการคำนวณแถวประเมินสุทธิก็เหมือนกันทั้งสองกรณี อย่างไรก็ตามด้วยเหตุที่การเลือกค่าบวกที่มากที่สุดเพื่อหาผลิตภัณฑ์ที่จะต้องนำเข้ามาในปัญหากรณีให้ผลประโยชน์สูงสุด การเลือกค่าลบมากที่สุดในปัญหากรณีให้ต้นทุนน้อยที่สุด ส่วนที่เหลือของโครงร่างอย่างเช่น การแปลงรูปของ key row กับ nonkey rows ก็เหมือนกันทุกอย่าง กฎการตัดสินใจที่จะหากระบวนการที่ให้ผลเลิศ จะไม่มีค่าบวกใด ๆ ในแถวประเมินสุทธิในปัญหากรณีให้ผลประโยชน์สูงสุด และไม่มีค่าลบใด ๆ ในปัญหากรณีให้ต้นทุนน้อยที่สุด minimization

กระบวนการสำหรับการดัดแปลงข้อบังคับโครงสร้างที่กำหนดให้

รายละเอียดทางเทคนิคดั้งเดิมของปัญหา โปรแกรมเชิงเส้นตรงที่กำหนดให้สามารถแสดงออกได้สามชนิดต่าง ๆ กันของข้อบังคับโครงสร้างหนึ่งมีข้อบังคับเหล่านั้น ซึ่ง (ในแบบดั้งเดิมของข้อบังคับ) สามารถแทนได้ด้วยอสมการของชนิด "น้อยกว่าหรือเท่ากับ" สองมีข้อบังคับ ซึ่งในแบบเดิมของข้อบังคับสามารถแทนได้ด้วยอสมการของชนิด "มากกว่าหรือเท่ากับ" สองชนิดเหล่านี้ของข้อบังคับประกอบด้วยอสมการในแบบดั้งเดิมของสองชนิดถูกดัดแปลงโดยการเปลี่ยนอสมการเป็นสมการ นี้เป็นการทำเพื่อเรียบเรียงข้อมูลให้เหมาะสมเพื่อการสร้างตารางซิมเพลกส์ที่หนึ่ง อย่างไรก็ตาม เราได้กล่าวเท่าที่กรณีที่ซึ่งข้อบังคับ (แม้ว่าในแบบดั้งเดิมของข้อบังคับต้องแสดงออกด้วยสมการที่แน่นอน ข้อบังคับเหล่านี้ซึ่งฟอร์มลำดับขั้นที่สามจะต้องถูกดัดแปลงเพื่อวัตถุประสงค์ในการสร้างตารางซิมเพลกส์แรกเราจะบรรลุนี้ได้อย่างไร กรณีที่ 3 ของผลการสรุปต่อไปนี้จะจัดหาคำตอบให้การแสดงในผลการสรุปต่อไปนี้เป็นกลจักรสำหรับการเปลี่ยนอสมการและสมการต่าง ๆ (การแสดงข้อบังคับในแบบเดิมของข้อบังคับ) เป็นสมการที่สมดุลย์เพื่อวัตถุประสงค์ของการสร้างตารางซิมเพลกส์แรก

กรณีที่ 1 อสมการของชนิด "น้อยกว่าหรือเท่ากับ" ($\leqslant$)

แต่ละอสมการของชนิด "น้อยกว่าหรือเท่ากับ" จะถูกเปลี่ยนเป็นสมการโดยการบวกของ nonnegative slack variable ซึ่งมีสัมประสิทธิ์ผลกำไรเป็นศูนย์

ตัวอย่าง จงทำ $10x + 15y$ ให้มีค่ามากที่สุดโดยขึ้นอยู่กับ

$$4x + 6y \leqslant 60$$

$$3x + 4y \leqslant 80$$

และ $$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0$$

สมการที่สมนัยกันสำหรับตารางซิมเพลกส์แรกคือ

$$4x + 6y + 1s_1 + 0s_2 = 60$$

$$3x + 4y + 0s_1 + 1s_2 = 80$$

และฟังก์ชันเป้าหมายที่ได้ดัดแปลงแล้วคือ

จงทำ

$10x + 15y + 0s_1 + 0s_2$ ให้มีค่ามากที่สุด

กรณีที่ 2 อสมการของชนิด “มากกว่าหรือเท่ากับ” ($\geqslant$)

แต่ละอสมการของชนิด “มากกว่าหรือเท่ากับ” จะถูกเปลี่ยนเป็นสมการด้วยเริ่มแรก ลบ nonnegative slack variable ที่มีสัมประสิทธิ์ต้นทุน (เป้าหมาย) เป็นศูนย์และแล้วบวก nonnegative artificial slack variable ที่มีสัมประสิทธิ์ต้นทุนเป็น M (จำนวนมากไม่จำกัด)

ตัวอย่าง จงทำ $300a + 180b$ ให้มีค่าน้อยที่สุดโดยขึ้นอยู่กับ

$$8a + 5b \geqslant 80$$

$$4a + 2b \geqslant 70$$

และ $$a \geqslant 0, \quad b \geqslant 0$$

สมการที่สมนัยกันสำหรับตารางซิมเพลกส์แรกคือ

$$8a + 5b - 1p + 0q + 1A_1 + 0A_2 = 80$$

$$4a + 2b + 0p - 1q + 0A_1 + 1A_2 = 70$$

และฟังก์ชันเป้าหมายที่ได้ดัดแปลงแล้วคือ

จงทำ

$300a + 180b + 0p + 0q + MA_1 + MA_2$ ให้มีค่าน้อยที่สุด

กรณีที่ 3 กรณีผสม (Mixed Case)

(ในการบวกเข้ากับอสมการปัญหาที่กำหนดให้มีสมการในข้อความเริ่มแรกของปัญหา)

ในกรณีนี้อสมการใช้เหมือนกับรายละเอียดข้างต้น แต่ละสมการถูกดัดแปลงด้วยการบวก nonnegative artificial slack variable

ตัวอย่าง จงทำ $7a + 15b$ ให้มีค่าน้อยที่สุดโดยขึ้นอยู่กับ

$$2a + 4b \geqslant 20$$

$$5a + 8b = 30$$

สมการที่สมนัยกันสำหรับตารางซิมเพลกส์แรกคือ

$$2a + 4b - 1p + 1A_1 + 0A_2 = 20$$

$$5a + 8b + 0p + 0A_1 + 1A_2 = 30$$

และฟังก์ชันเป้าหมายที่ได้ดัดแปลงแล้วคือ

จงทำ $7a + 15b + 0p + MA_1 + MA_2$ ให้มีค่าน้อยที่สุด

แบบฝึกหัด

1. ก. การโปรแกรมเชิงเส้นตรงคืออะไร ?

   ข. ข้อบังคับที่จำเป็นของการโปรแกรมเชิงเส้นตรงคืออะไรบ้าง ?

2. ข้อดีข้อเสียของการโปรแกรมเชิงเส้นตรงคืออะไรบ้าง ?

3. ภายหลังการสร้างบ้านของเขาเสร็จเรียบร้อย นายเขียวพบว่ามีเศษไม้สักและเศษไม้แดงเหลือ 100 ตารางฟุต และ 80 ตารางฟุตตามลำดับ ที่นายเขียวสามารถใช้สร้างโต๊ะและตู้หนังสือ จะต้องใช้ไม้สัก 16 ตารางฟุตกับไม้แดง 8 ตารางฟุตในการทำโต๊ะ 1 ตัว และจะต้องใช้ไม้สัก 12 ตารางฟุต กับไม้แดง 16 ตารางฟุตในการทำตู้หนังสือ 1 ตู้ นายเขียวทราบว่าผลกำไรในการขายโต๊ะแต่ละตัวและตู้หนังสือแต่ละตู้โดยที่ยังไม่ได้ทาสีเท่ากับ 250 บาท และ 200 บาทตามลำดับ นายเขียวอาจได้กำไรมากที่สุดเท่าใดในการใช้ไม้ที่เหลือ

4. โรงกลั่นของบริษัท ปตท. ได้ผลิตน้ำมันสามชนิด พิเศษ ธรรมดา และโซล่า ในการผลิตแต่ละชนิดของน้ำมัน หนึ่งแกลลอนของชนิดพิเศษ ต้องการ 20 เปอร์เซ็นต์ของน้ำมันโดยตรง (straight gassoline) 50 เปอร์เซ็นต์ออกเทน (octane) และ 30 เปอร์เซ็นต์สิ่งเพิ่มเติม ชนิดธรรมดาหนึ่งแกลลอนต้องการ 50 เปอร์เซ็นต์น้ำมันโดยตรง 30 เปอร์เซ็นต์ออกเทน และ 20 เปอร์เซ็นต์สิ่งเพิ่มเติม ชนิดโซล่าหนึ่งแกลลอนต้องการ 70 เปอร์เซ็นต์น้ำมันโดยตรง 20เปอร์เซ็นต์ ออกเทน และ 10เปอร์เซ็นต์สิ่งเพิ่มเติม เป็นที่ทราบกันว่า บริษัท ปตท. ได้รับผลกำไร 70, 50 และ 40 สตางค์เกี่ยวกับน้ำมันชนิดพิเศษ ธรรมดา และโซล่า ตามลำดับ

   ถ้าหากว่าความต้องการของน้ำมันโดยตรง ออกเทนและสิ่งเพิ่มเติมถูกจำกัดถึง 6,000,000, 2,000,000 และ 1,000,000 แกลลอนตามลำดับ บริษัทควรจะผลิตแต่ละชนิดมากเท่าใดในระยะเวลาที่กำหนดให้ เพื่อที่จะให้ผลกำไรมากที่สุดและทำประโยชน์ดีที่สุดของปัจจัย ?

5. บริษัท สถิติ ได้เริ่มผลิตใบมีดโกนสองชนิด ชนิดธรรมดาใช้โกนได้สองสามครั้ง และชนิดสเตนเลส (stainless) ใช้ได้นานกว่าชนิดธรรมดา ต้องการ 8 หน่วยคาร์บอนสทีล (carbon steel) และ 2 หน่วยอัลลอยสทีล (alloy steel) ต่อใบมีดโกน 100 ใบ ขณะที่ชนิดสเตนเลสต้องการ 4 หน่วย คาร์บอนสทีล และ 6 หน่วยของอัลลอยสทีล ต่อใบมีดโกน 100 ใบ ตามผลของการนัดหยุดงาน บริษัทยังเหลือคาร์บอนสทีล แลอัลลอยสทีลเก็บรักษาไว้

24,000 หน่วย และ 10,000 หน่วยตามลำดับ เพื่อใช้ในการผลิตใบมีดโกนสองชนิดนี้ บริษัทสถิติอาจใช้สองทรัพยากรให้ดีที่สุดได้อย่างไร เพื่อที่จะทำให้ผลกำไรมากที่สุด ? สมมติว่าผลกำไร 10 บาท สามารถได้มาจากใบมีดโกนชนิดธรรมดา 100 ใบ และ 15 บาทเกี่ยวกับใบมีดโกนสเตนเลส 100 ใบ

6. จงทำ $4x+6y+z$ ให้มีค่าน้อยที่สุดโดยขึ้นอยู่กับ

$$x+2y \geqslant 10$$

$$y+4z \geqslant 20$$

$$x+z \geqslant 40$$

และ $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$

7. บริษัทเคมีแห่งประเทศไทย ต้องการผลิตสารผสมพิเศษ 10,000 กิโลกรัมให้แก่ลูกค้า ส่วนผสมประกอบด้วย x_1, x_2 และ x_3 x_1 มีมูลค่า 8 บาทต่อกิโลกรัม x_2 มีมูลค่า 10 บาทต่อกิโลกรัม และ x_3 มีมูลค่า 11 บาทต่อกิโลกรัม สาร x_1 สามารถนำมาใช้ไม่เกิน 3,000 กิโลกรัม และสาร x_2 ต้องใช้อย่างน้อย 1,500 กิโลกรัม สำหรับสาร x_3 ต้องการอย่างน้อย 2,000 กิโลกรัมด้วย

ก. จงคำนวณหาจำนวนสารผสมแต่ละชนิดที่จะต้องใช้เพื่อที่จะทำให้ต้นทุนทั้งหมดน้อยที่สุดสำหรับ 10,000 กิโลกรัม

ข. คำนวณต้นทุนทั้งหมดที่ต่ำที่สุดที่อาจเป็นไปได้

ค. มีจำนวนสารผสมสำรอง (slack kilograms) ในปัญหา ?

```
   10 CLEAR
   20 REM *** LINEAR PROGRAMMING PAGE 81 ***
   30 'Solves the following linear programming problem by the simplex method: Mi
nimize the objective function:C1X1+C2X2+...+CmXm
   40 'This is equivalent to maximizing the objective functions:-cC1X1-C2X2-...-
CmXm Subject to the mixed linear costants:
   50 'A11X1+A12X2+...+A1mXm<=(or>=)b1,...,aN1X1+AN2X2+...+ANmXm<=(or>=)bN ,wher
e the variables X1,X2,...,Xm are non-negative and the coefficients b1,b2,...,bm
are non-negative
   60 'NOTE1 Linear equations such as AX1+...+AXm=b can be used as constraints b
y entering the following equivalent pair of constraints AX1+...+AXm<=b  AX1+...+
AXm>=bnon-negative
   70 'NOTE2 When minimizing the objective function, the result will have the op
posite sign one would except;hence,the results should be multiplied by -1,NOTE3
#OF VARIABLES<=5,#OF CONSTRAINTS<=8
   80 DEFDBL A-Z:DEFSNG I,J,M,N,R,S,T
   90 DIM A(10,14),X(13)
  100 PRINT "NO. OF VARIABLES,NO. OF CONSTRAINTS?":INPUT M,N
  110 PRINT "ENTER MATRIX A"
  120 FOR I=2 TO N+1
  130 INPUT A(I,1),A(I,2),A(I,3),A(I,4),A(I,5),A(I,6),A(I,7),A(I,8),A(I,9)
  140 A(I,N+M+1)=A(I,M+2):A(I,M+2)=0
  150 IF I=2 THEN 170
  160 A(I,M+I-1)=A(I,M+1):A(I,M+1)=0
  170 NEXT I
  180 PRINT "ENTER OBJECTIVE FUNCTION"
  190 INPUT A(1,1),A(1,2),A(1,3),A(1,4),A(1,5),A(1,6):PRINT:R=1
  200 FOR I=1 TO M:X(I)=1:NEXT I
  210 FOR I=2 TO N+1
  220 IF A(I,M+I-1)<>-1 THEN 260
  230 X(M+I-1)=1
  240 FOR J=1 TO N+M:A(N+2,J)=A(N+2,J)-A(I,J):NEXT J
  250 R=N+2
  260 NEXT I
  270 S=1:T=1
  280 FOR I=2 TO N+M
  290 IF A(R,I)<A(R,S) THEN 310
  300 S=I
  310 IF A(R,I)>=A(R,T) THEN 330
  320 T=I
  330 NEXT I
  340 IF A(R,T)<0 THEN 380
  350 IF R=1 THEN 600
  360 IF A(R,S)>1E-4 THEN 580
  370 R=1:GOTO 270
  380 S=1
  390 FOR I=2 TO N+1
  400 IF A(I,T)<=0 THEN 450
```

โปรแกรมเชิงเส้นตรงโดยคอมพิวเตอร์ (ต่อ)

```
410 Y=A(I,N+M+1)/A(I,T)
420 IF S=1 THEN 440
430 IF Y>=A(S,N+M+1)/A(S,T) THEN 450
440 S=I
450 NEXT I
460 IF S=1 THEN 590
470 F-OK I=1 TO N+M
480 IF X ( I ) =1 THEN 500
490 IF A(S,I)=1 THEN 510
500 NEXT I
510 X(I)=1:X(T)=0:Y=A(S,T)
520 FOR I=1 TO N+M+1:A(S,I)=A(S,I)/Y:NEXT I
530 FOR I=1 TO N+2
540 IF I=S THEN 570
550       Y=A(I,T)
560 FOR J=1 T O  N+M+1:A(I,J)=A(I,J)-Y*A(S,J):NEXT J
570 NEXT I :  GOTO 270
580 PRINT "INFEASIBLE": STOF
590 PRINT "UNBOUNDED" : STOF
600 FOR J=1 TO M
610 IF X(J)=0 THEN 630
620 X (J) =0: GOTO 670
630 FOR I=2 TO N+1
640 IF A(I,J)=1 THEN 660
650 NEXT [
660 X(J)=A(I,N+M+1)
670 NEXT J
680 Y=A(1,N+M+1):PRINT
690 PRINT "OBJ. FUNC.=";Y:PRINT
700 FOR I=1 TO M:PRINT "X(";I;")=";X(I):NEXT I
710 END
```

```
OBJ. FUNC.= 16.92307692307692

X( 1 )= 2.461538461538462
X( 2 )= 0
X( 3 )= 2.307692307692308
```