บทที่ 4

Optimization
(การกระทำที่ได้ผลดีที่สุด)

แบบจำลองคณิตศาสตร์ธุรกิจมีความสำคัญมาก ใช้เป็นข้อสรุปที่ทำให้เข้าใจเมื่อแปลกลับไปเป็นโลกแห่งความจริง แบบจำลองคณิตศาสตร์จำนวนมากมีความยืดหยุ่นเพียงพอที่จะอนุญาตให้เลือกเพื่อที่จะทดสอบ, วิเคราะห์ แบบจำลองที่ใช้บรรยายส่วนหนึ่งของโลกธุรกิจได้ถูกต้องแน่นอนไม่ได้เพิ่มความเข้าใจอย่างหนึ่งของปัญหาเท่านั้น แต่ยังอนุญาตให้ทำการตัดสินใจที่เชื่อถือได้มากกว่าพื้นฐานเบื้องต้นคือ ต้องหาการตัดสินใจที่ดีที่สุดระหว่างหลาย ๆ การตัดสินใจที่ให้เลือกของปัญหา

ถ้าหากว่าเลือกเกณฑ์ของวิธีของการกระทำ ซึ่งจะให้ผลกำไรสุทธิสูงที่สุดนี้ เป็นค่าจริงที่จะมีแบบจำลองที่สามารถบอกเราว่าอะไรคือผลกำไรที่จะเป็นการกระทำอย่างใดอย่างหนึ่ง เราอาจดำเนินอยู่ เหตุผลอันสมควรชนิดเดียวกันนี้ได้รับการประยุกต์ต่อสภาพการณ์เหล่านั้นที่ต้องการราคาขายที่ดีที่สุด หรือต้องการต้นทุนที่ต่ำที่สุดภายใต้ข้อกำหนดที่แน่นอนแต่อะไรที่เป็นไปได้ของการสร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์ ซึ่งสามารถเลือกได้โดยตรงที่ดีที่สุดปราศจากการค้นคว้าแต่ละหรือทุก ๆ วิธีของการกระทำที่ให้เลือก แบบจำลองเช่นนั้นสามารถสร้างและทำได้หลาย ๆ รูปโดยมีวิธีการเดียวกันสำหรับหาตัวเลขจำนวนหนึ่งที่ดีที่สุด แบบจำลองที่มีคุณสมบัตินี้ได้รับการจัดลำดับภายใต้การกระทำที่ได้ผลดีที่สุด

ในบทนี้ เราจะมาแก้ปัญหาธุรกิจต่าง ๆ ที่สามารถทำให้ได้ผลดีที่สุดได้โดยการใช้การหาอนุพันธ์, ปฏิยานุพันธ์, อนุพันธ์เชิงส่วน และ Lagrange multiplier

อนุพันธ์ที่หนึ่งและอนุพันธ์ที่สอง

ความชันของเส้นโค้งที่จุดหนึ่ง คำนวณหาได้โดยการหาค่าอนุพันธ์ที่จุด เราสนใจในการหาจุดที่ความชันเป็นศูนย์หรือจุดที่เส้นสัมผัสกับเส้นโค้งอยู่ในแนวระดับ การวิเคราะห์ความชันเป็นศูนย์เท่านั้น ไม่ได้ช่วยในการพลอตเส้นโค้ง แต่ยังช่วยในการกำหนดค่าสูงสุด

และต่ำสุดของฟังก์ชันมาด้วย นั่นคือ กำไรมากที่สุด ต้นทุนต่ำที่สุดหรือสิ่งที่คล้ายกัน

กระบวนการสำหรับหาจุดของความชันเป็นศูนย์คือ ต้องปรับอนุพันธ์ที่หนึ่งให้เท่ากับศูนย์แล้วแก้สมการ จุดของความชันเป็นศูนย์สามารถคำนวณหาได้โดยการทดสอบอนุพันธ์ที่หนึ่ง ถ้าหากว่าถึงจุดสูงสุด ความชันไปทางซ้ายเป็นบวก ขณะเดียวกันความชันไปทางขวาเป็นลบ ให้ผลดังนี้ ความชันเปลี่ยนจากบวกไปลบเหมือนเราวัดค่าสูงสุด ในทางตรงข้ามความชันเปลี่ยนจากลบไปบวกเหมือนเราวัดค่าต่ำสุด อย่างไรก็ตาม ความชันไม่เปลี่ยนเครื่องหมายเหมือนเราผ่านตลอดจุด inflection (จุดที่เปลี่ยนเส้นโค้งจากเว้าลงไปข้างล่างเป็นเว้าขึ้นไปข้างบนหรือในทางตรงกันข้าม) ในการประยุกต์การทดสอบอนุพันธ์แรก ถือว่าความชันเป็นบวก ถ้าเส้นโค้งโค้งขึ้นขณะเราไปทางขวาและลบถ้าเส้นโค้งต่ำลงไปทางขวา

ในการทดสอบอนุพันธ์ที่สอง จุดหนึ่งของความชันเป็นศูนย์ เป็นค่าสูงสุดถ้าอนุพันธ์ที่สองที่จุดนั้นเป็นลบ จุดที่เป็นค่าต่ำสุดถ้าอนุพันธุ์ที่สองที่จุดเป็นบวก ถ้าหากว่าอนุพันธ์ที่สองเป็นศูนย์สำหรับจุดของความชันเป็นศูนย์ การทดสอบล้มเหลว สิ่งจำเป็นเพื่อที่จะประยุกต์การทดสอบอนุพันธ์แรก ถ้าหากว่าอนุพันธ์แรกเป็นศูนย์ เราใช้การทดสอบอนุพันธ์แรกโดยการหาค่าของอนุพันธ์แรกไปทางซ้ายและขวาของจุดเล็กน้อย อนุพันธ์ที่สองและต่อ ๆ ไปหาได้โดยการกระทำซ้ำ ๆ กันของกระบวนที่ได้ใช้ในการหาอนุพันธ์ก่อน ๆ สัญลักษณ์ของฟังก์ชั่นสำหรับอนุพันธ์สูงขึ้นคือ

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{d^2}{dx^2}, \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2}{dx^2}\right) = \frac{d^3}{dx^3}, \ldots \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\right) = \frac{d^n}{dx^n}$$

สูตรการหาอนุพันธ์

นักคณิตศาสตร์ได้พัฒนาสูตรการหาอนุพันธ์ หรือกฎซึ่งเราสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันการหาอนุพันธ์ที่กำหนดให้ สูตรที่ใช้อย่างธรรมดาเมื่อ c เป็นตัวคงที่ และ u และ v เป็นฟังก์ชันของ x ตามข้างล่างนี้

สูตรสำหรับการหาอนุพันธ์

1. $\frac{d}{dx}(C) = 0$
2. $\frac{d}{dx}(Cx) = C\frac{d}{dx}(x)$
3. $\frac{d}{dx}(x) = 1$
4. $\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$
5. $\frac{d}{dx}(u-v) = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$
6. $\frac{d}{dx}(uv) = \frac{udv}{dx} + \frac{vdu}{dx}$

7. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{V^2}$ 8. $\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$

9. $\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$ 10. $\frac{d}{dx}(e^u) = e^u\frac{du}{dx}$

กฎเหล่านี้สามารถประยุกต์กับปัญหาต่อไปนี้ พิจารณาฟังก์ชันการขายทั้งหมดที่ $S = -1000p^2 + 10,000p$ และฟังก์ชันต้นทุนทั้งหมดที่ $C = -2000p + 25,000$ (ในเมื่อ p เป็นราคาของผลิตภัณฑ์ใหม่) ปัญหาที่ต้องการหาราคาที่ดีที่สุด (optimal price) สำหรับผลิตภัณฑ์ใหม่ เราสามารถคำนวณได้โดยการใช้สมการพื้นฐาน p (ผลกำไร) เท่ากับ S (ขายทั้งหมด) ลบ C (ทุนทั้งหมด) สมการสำหรับ S และ C สามารถแทนลงไปในสมการผลกำไรเพื่อคำนวณหาราคาที่ดีที่สุด ดังแสดงได้ดังนี้

$$P = S - C$$

$$P = -1000p^2 + 10,000p - (-2000p + 25,000)$$

$$P = -1000p^2 + 10,000p + 2000p - 25,000$$

$$P = -1000p^2 + 12,000p - 25,000$$

$$\frac{dP}{dp} = -2000p + 12,000 = 0 \qquad \text{(อนุพันธ์แรก)}$$

$$2000p = 12,000$$

$$p = \$6$$

จากการตรวจสอบของสมการข้างต้น $P = -1000p^2 + 12,000p - 25,000$ เข้าใจว่าตัวแปร p ในเทอมแรกเป็นกำลังสอง ใช้การหาอนุพันธ์ ทำให้เราขจัดกำลังสองในเทอมแรกนี้

กลับไปยังสูตรสำหรับการหาอนุพันธ์ การเข้าถึงกับปัญหานี้ต้องใช้กฎสำหรับผลบวกและผลต่างของสองฟังก์ชันใช้สูตร 4 หรือ 5 ความจำเป็นของแต่ละสูตรถือว่า อนุพันธ์ของการกระจายเช่นนั้น $(-1000p^2 + 12,000p - 25,000)$ จะต้องทำเทอมต่อเทอม เทอมแรก $-1000p^2$ สามารถหาอนุพันธ์โดยการใช้สูตร 9 กฎกล่าวไว้ว่า อนุพันธ์ของกำลังเท่ากับกำลังเดิม (2) เท่าตัวคงที่ (−1000) กับกำลังใหม่เป็นค่าของกำลังเดิม (2) ลบหนึ่ง ($p^{2-1} = p$) เทอมแรกภายหลังการหาอนุพันธ์ คือ $-2000p$ เทอมที่สอง 12,000p สามารถหาอนุพันธ์โดยการใช้สูตร 2 (และสูตร 3) เนื่องจากว่า C เป็นค่าคงที่ของ 12,000 และ p เป็นข้อคล้ายคลึงกันกับ x ในสูตร ค่าผลลัพธ์ภายหลังการหาอนุพันธ์ คือ $12,000(12,000 \times 1)$ เทอมสุดท้าย

(−25,000) ต้องการใช้สูตร 1 ในเมื่อค่าคงที่ C ภายหลังการหาอนุพันธ์มีค่าเท่ากับศูนย์ ในที่สุดสมการทั้งหมดปรับให้เท่ากับศูนย์เพื่อที่จะแก้ราคาขายที่สูงที่สุดหรือจุดสูงสุด เมื่อกราฟในเทอมของผลกำไร

การประยุกต์การทดสอบอนุพันธ์ที่สองเพื่อที่จะหาว่าเราได้แก้จริง ๆ สำหรับจุดสูงสุด ค่าของอนุพันธ์ที่สองควรจะเป็นลบอนุพันธ์ที่สองสำหรับปัญหานี้เป็นดังนี้

$$\frac{d^2P}{dp^2} = -2000(1)+0$$

ใช้สูตร 2 (และสูตร 3) ค่าของเทอมแรกคือ −2000 ขณะที่ค่าคงที่ +12,000 ยุติลงภายหลังการหาอนุพันธ์ ตลอดการใช้สูตร 1 เครื่องหมายเป็นลบ นี้แสดงจุดสูงสุดเกี่ยวกับเส้นโค้ง ผลกำไร (แกน y) และราคา (แกน x) ได้บรรลุแล้วและราคาขายที่คำนวณหาได้จะให้ผลกำไรมากที่สุดสำหรับบริษัท

ตัวอย่างนี้ได้ยกคำถามหลาย ๆ คำถามขึ้น ดังตัวอย่างฟังก์ชันการขายทั้งหมดคำนวณหาได้อย่างไร ฟังก์ชันต้นทุนทั้งหมดคำนวณหาได้อย่างไร การใช้วิธีการแบบกราฟควรแสดงอะไร อะไรคือผลกำไรที่ดีที่สุดที่หวังไว้ และอะไรคือปริมาณที่สามารถคาดหวังที่จะต้องขายราคา $ 6 ปัญหานี้ได้เสนอเพื่อแสดงว่าการคำนวณหาอนุพันธ์ สามารถใช้แก้ปัญหาที่ใช้พีชคณิตธรรมดาไม่สามารถแก้ได้ ตัวอย่างในหัวข้อต่อไปจะตอบคำถามเหล่านี้

ราคาที่ดีที่สุดและปัญหาผลกำไร

บางปัญหาสำหรับบริษัทอาจปรากฏความยากลำบากมากที่จะแก้ตั้งแต่เริ่มแรก อย่างไรก็ตามแบบจำลองคณิตศาสตร์ก็ไม่ยุ่งยากที่จะสร้างเพื่อแก้ปัญหา นี้สามารถแสดงได้โดยตัวอย่าง บริษัท ก. ได้พิจารณาการตลาดเกี่ยวกับเครื่องจักรสำหรับโรงงานเล็ก ๆ แผนกวิจัยการตลาดได้พยากรณ์อุปสงค์และความสัมพันธ์ของราคาดังนี้

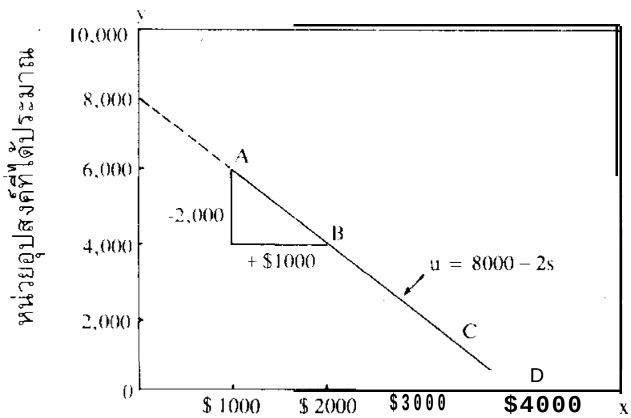
พยากรณ์	เสนอราคาขาย (s)	ประมาณอุปสงค์ปีแรก (u)
A	$ 1,000	6,000
B	2,000	4,000
C	3,000	2,000
D	4,000	0

แผนกต้นทุนของบริษัทร่วมกับแผนกควบคุมการผลิตได้กำหนดต้นทุนคงที่รายปี

สำหรับปีแรกเป็น $ 100,000 จำนวนนี้ รวมทั้งค่าเสื่อมราคาเกี่ยวกับข้อเสนอที่ได้มาภายหลังของเครื่องจักรใหม่และอุปกรณ์ กลุ่มเดียวกันนี้ได้คำนวณหาต้นทุนผันแปร $ 1000 ต่อหน่วย

บนพื้นฐานข้อมูลก่อน ๆ ปัญหาสามารถแก้ได้โดยการสร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์ การพยากรณ์ตลาดสามารถใช้หาความสัมพันธ์อุปสงค์ของตลาดสำหรับผลิตภัณฑ์ใหม่ การขายที่ได้พยากรณ์ไว้บรรยายความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่างราคาขาย (s) กับหน่วยการขายที่ได้คาดหวัง (u) ในรูปที่ 1 เป็นความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่างอุปสงค์กับราคา

ความสัมพันธ์ระหว่างอุปสงค์กับราคาขายสามารถปรับเข้าเป็นรูปสมการหนึ่งได้ ขั้นแรกในการสร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์ สามารถกล่าวได้ว่าอุปสงค์เป็นฟังกชันของราคาหรืออุปสงค์เป็นตัวแปรที่ไม่อิสระและราคาเป็นตัวแปรอิสระ หรืออุปสงค์จะแปรขณะที่ราคาแปร เนื่องจากว่าตัวแปรทั้งสองมีความสัมพันธ์เชิงเส้น สมการสำหรับเส้นตรง $(y = a + bx)$ สามารถใช้ได้ในเมื่อ y เป็นตัวแปรที่ไม่อิสระและ x เป็นตัวแปรอิสระ ความสัมพันธ์ระหว่าง y กับ x จะถูกกำหนดโดย a และ b ในสูตร พารามิเตอร์ a แทนจุดตัด (ค่าของ y เมื่อ x เท่ากับศูนย์) ของเส้นขณะที่พารามิเตอร์ b แทนความชันของเส้น



รูปที่ 1 ความสัมพันธ์อุปสงค์ที่ได้พยากรณ์-ราคาขาย

รูปที่ 1 บริษัทสามารถคาดหวังที่จะขาย 8000 หน่วยที่ราคาขายเป็นศูนย์ ถึงแม้ว่าความสัมพันธ์อุปสงค์นี้หาค่าได้โดยทางคณิตศาสตร์เท่านั้น การลากเส้นต่อของเส้นความชันทึบ จะให้เราตั้งค่าสำหรับพารามิเตอร์ a ในสูตรหรือ 8000 หน่วย เพื่อที่จะคำนวณค่าสำหรับพารามิเตอร์ b ก็เป็นสิ่งจำเป็นที่จะต้องคำนวณความชันของเส้น b นี้สามารถคำนวณได้โดยการใช้การพยากรณ์สองครั้งใด ๆ พยากรณ์ A และ B การเปลี่ยนแปลงสุทธิในราคาขายบวก

ด้วย $ 1000 (จาก $ 1000 เป็น $ 2000) ขณะการเปลี่ยนแปลงสุทธิในอุปสงค์เป็น – 2000 หน่วย (จาก 6000 หน่วยเป็น 4000 หน่วย) หรือความชันเป็น – 2 นี้อยู่ในรอยเดียวกับหลักพื้นฐานของเศรษฐศาสตร์ที่มีความสัมพันธ์ตรงกันข้ามระหว่างอุปสงค์กับราคา แทนค่า u และ s สำหรับ y และ x ตามลำดับ และ 8000 และ – 2 สำหรับ a และ b ตามลำดับในสมการ สูตรของผลลัพธ์สำหรับอุปสงค์และราคาคือ

$$u = 8,000 - 2s \qquad \text{..........(1)}$$

ขั้นต่อไปสำหรับแบบจำลองคณิตศาสตร์คือต้องการคำนวณสมการสำหรับต้นทุนผลิตภัณฑ์ใหม่ ความสัมพันธ์ระหว่างต้นทุนคงที่กับต้นทุนผันแปร แผนกควบคุมการผลิตของบริษัทประมาณว่าการทำเครื่องมือและเครื่องจักร $ 50,000 ต่อปี คิดค่าในรูปของค่าเสื่อมของเครื่องจักรและอุปกรณ์ ส่วนต้นทุนอื่น ๆ จำนวน $ 50,000 คิดในรูปของค่าโสหุ้ย

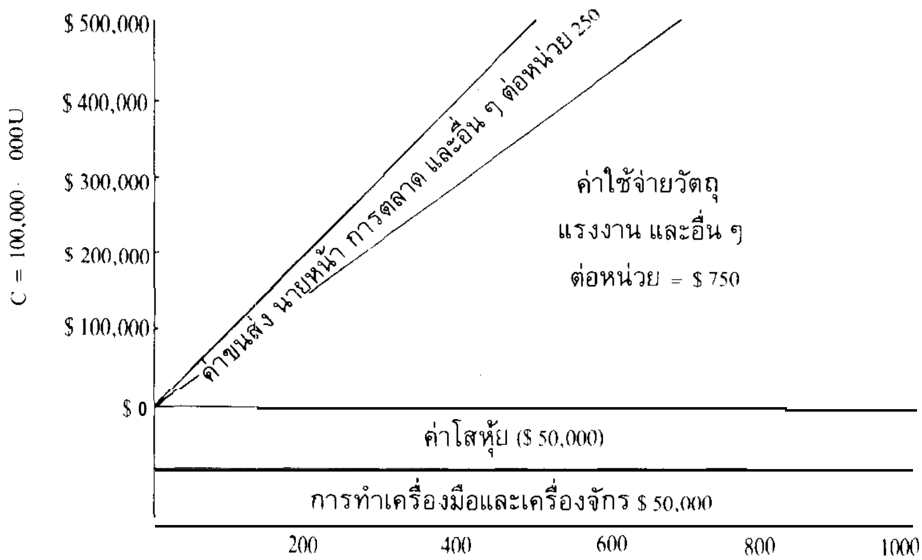
(การเพิ่มในต้นทุนคงที่กับบริษัทผลิตภัณฑ์ใหม่คือ $ 100,000 ดังแสดงในรูปที่ 2 แผนกต้นทุนการผลิตประมาณว่าแต่ละเครื่องจักรราคาจะเป็น $ 750 ต่อหน่วยในรูปของต้นทุนการผลิตขณะที่การตลาดค่านายหน้า ค่าขนส่งและต้นทุนผันแปรอื่น ๆ จะเป็น $ 250 ต่อหน่วย รวมต้นทุนผันแปร $ 1000 ต่อหน่วยดังแสดงในรูปที่ 2 ต้นทุนที่ประมาณขึ้นเหล่านี้ร่วมกันเพื่อสร้างเป็นสมการต้นทุนการผลิตใหม่

ต้นทุน (C) ทั้งหมดสำหรับผลิตภัณฑ์ใหม่สามารถแสดงได้ดังนี้

$$C = \$\,100,000 + \$\,1,000\,u \qquad \text{...............(2)}$$

นี้หมายความว่า ถ้าขายไม่ได้เลยทั้งหมด บริษัททำหนี้สิน $ 100,000 เกี่ยวกับต้นทุนคงที่บริษัทใช้จ่าย $ 1000 ต่อหน่วยสำหรับต้นทุนผันแปร การใช้สมการสำหรับเส้นตรง ($y = a + bx$) พารามิเตอร์ a เท่ากับ $ 100,000 ขณะที่พารามิเตอร์ b เท่ากับ $ 10000 ต่อหน่วย

จากสมการ 1 กับ 2 เราสามารถสร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์สำหรับนโยบายที่เกี่ยวกับราคาที่ดีที่สุดเพื่อที่จะทำให้ผลกำไรทั้งหมดของบริษัทมากที่สุด



รูปที่ 2 ความสัมพันธ์ระหว่างผลิตภัณฑ์กับต้นทุนใหม่

ผลกำไรสามารถคำนวณได้จากการแสดงต่อไปนี้

$$P = S - C \qquad \text{...............(3)}$$

ในเมื่อ

P = ผลกำไรทั้งหมด

S = ขายได้ทั้งหมด

C = ต้นทุนทั้งหมด

จากสมการที่ 2 เป็นสมการต้นทุนทั้งหมด (C) แต่เรายังต้องการแสดงสำหรับขายได้ทั้งหมด (S) ของบริษัทนี้สามารถสร้างได้อย่างเรียบร้อย

$$S = u.\,s \qquad \text{...............(4)}$$

ในเมื่อ

u = อุปสงค์ทั้งหมด

s = ราคาขายต่อหน่วย

สมการ (4) ขายได้ทั้งหมดเท่ากับจำนวนผลิตภัณฑ์ที่ขายได้ คูณด้วยราคาต่อหน่วย รวมสมการ (4) กับ (1) สมการขายได้ทั้งหมด (S) เป็นได้ดังนี้

$$S = u.s$$

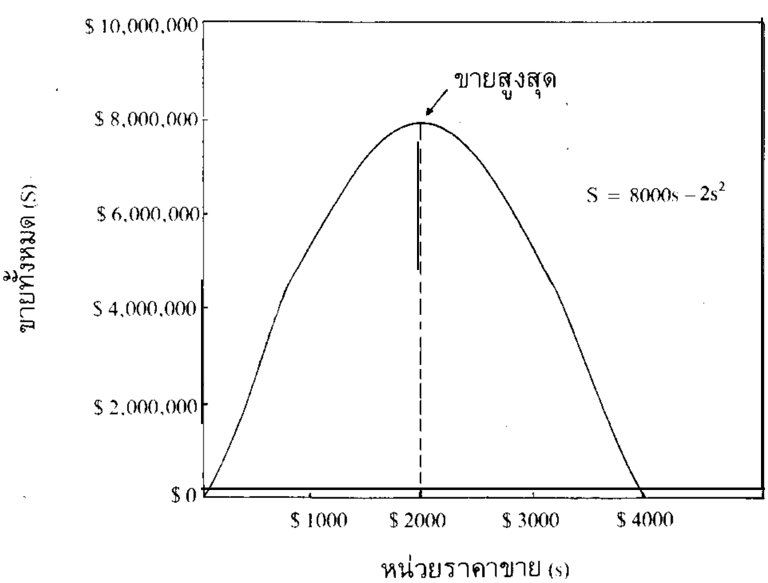
$$u = 8000 - 2s$$

$$S = (8000-2s)s$$

$$S = 8000s - 2s^2 \qquad \text{...............(5)}$$

สมการ (5) ใช้แทนความสัมพันธ์ quadratic มากกว่าเชิงเส้นและได้พลอตในรูปที่ 4 เส้นโค้งนี้เป็นพาราโบล่าและสมมาตรที่ $ 2000 ต่อหน่วย ราคาขายนี้หมายความว่า จำนวนขายทั้งหมดจะเพิ่มขึ้นจนกระทั่งถึงจุดสูงสุดและจะเริ่มลาดลงไปภายหลัง จากนั้นการขายคิดเป็นดอลลาร์ทั้งหมดจะอยู่ที่สูงสุดของการขายคือ $ 2000 ต่อหน่วย ซึ่งคำนวณได้ดังนี้

ราคาขาย (s) ×	จำนวนที่ขาย (u) =	ขายได้ทั้งหมด (S)
$ 0	8,000	$ 0
500	7,000	3,500,000
1,000	6,000	6,000,000
1,500	5,000	7,500,000
2,000	4,000	8,000,000
2,500	3,000	7,500,000
3,000	2,000	6,000,000
3,500	1,000	3,500,000
4,000	0	0



รูปที่ 3 ขายทั้งหมด (S) **และราคาขาย** (s)

ผลกำไรทั้งหมด (P) ได้นิยามในสมการ (3) แสดงในรูปที่ 4 เส้นโค้งขายทั้งหมดและต้นทุนทั้งหมดสมนัยกับสองเส้นโค้งในรูปที่ (4) และ (3) ตามลำดับ สองมาตราที่สมนัยกัน (จำนวนราคาขาย) แสดงบนแกน x ขณะจำนวนดอลล่า (ขายทั้งหมดกับต้นทุนทั้งหมด) แสดงบนแกน y มาตราแกนตั้งธรรมดานี้กับสองเท่าของมาตราแกนนอนให้เราพลอตสมการ (2) กับสมการ (5) บนกราฟเดียวกัน ผลกำไรของบริษัทคือส่วนของพื้นที่แลเงา มีการแยกระดับราคาที่จุด A และ B ราคาขายของส่วนน้อยกว่า \$ 1000 หรือมากกว่า \$ 4000 จะให้ส่วนที่ขาดทุน จุดผลกำไรดีที่สุดสำหรับบริษัทถือว่าจุดที่ซึ่งเส้นโค้งขายทั้งหมดเป็นระยะทางที่มากที่สุดเหนือเส้นต้นทุนทั้งหมด โดยกราฟจุดของผลกำไรสูงสุดอยู่ที่ราคาขาย \$ 2500

ขณะที่รูปที่ (4) ให้วิธีการที่แก้ โดยกราฟ การใช้ทางคณิตศาสตร์ต่อปัญหาก็ปฏิบัติง่ายกว่า เราสามารถใช้วิธีการสูงสุดของผลกำไรหรือรายได้เผื่อเหลือเผื่อขาดเท่ากับต้นทุนเผื่อเหลือเผื่อขาด เริ่มแรกใช้วิธีการทำให้ราคาที่ดีที่สุด (กำไรสูงสุด) สมการ (1) ถึง (5) ซึ่งใช้แทนแบบจำลองราคาที่สมบูรณ์แสดงได้

$$u = 8000 - 2s \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$C = 100{,}000 + 1000\,u \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$P = S - C \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$S = u \cdot s \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

$$S = 8000s - 2s^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

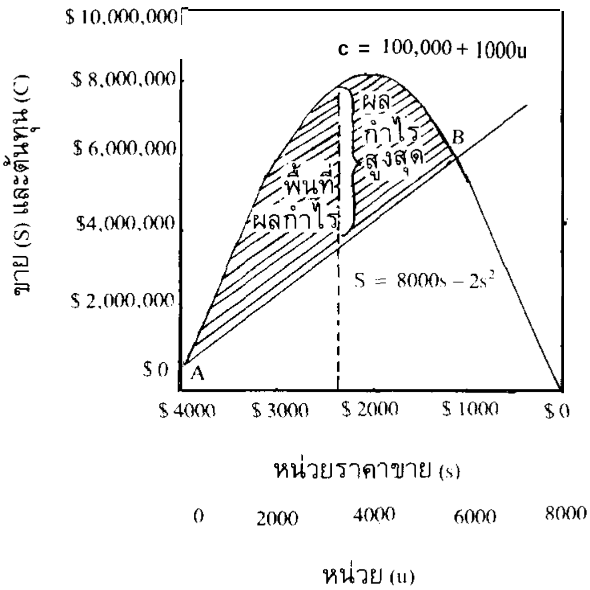
เราสร้างสมการ (5) จากสมการ (1) และ (4) สมการ (1) กับ (2) สามารถรวมกันเข้าเป็นสมการใหม่สำหรับเส้นต้นทุนทั้งหมด

$$C = 100{,}000 + 1000\,(8000 - 2s)$$

$$C = 100{,}000 + 8{,}000{,}000 - 2000s$$

$$C = 8{,}100{,}000 - 2000s \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

ความสัมพันธ์สมการ (6) ต่อรูปที่ 4 ตรรกวิทยาของสมการนี้ควรเป็นพยานหลักฐาน ถ้าราคาขายของบริษัทเป็นศูนย์ อุปสงค์ทั้งหมดจะเป็น 8000 หน่วย (จากสมการ (1), $8000 - 2\,(0) = 8000$)



รูปที่ 4 ขายทั้งหมด, ต้นทุนทั้งหมด, และผลกำไรทั้งหมด

บริษัทจะต้องเสีย \$ 8,100,000 ในการผลิตและนำไปขาย 8000 หน่วย (จากสมการ 2 $100,000 + 1000\,(8000) = 8,100,000$) หนึ่งดอลล่าเพิ่มขึ้นในราคาขายหมายความว่า อุปสงค์ลดลงสอง หน่วยในสมการ (1) อุปสงค์ลดลงสองหน่วยจะนำไปสู่การลดลงในต้นทุนผันแปรทั้งหมดของ บริษัท (จากสมการ 2 $\$\,1000(-2) = -\$\,2000$) ดังนั้น สมการ (6) กล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่าง ต้นทุนทั้งหมดกับจำนวนขาย

สมการที่จำเป็นทั้งหมดได้เขียนในรูปแบบจำลองคณิตศาสตร์ของผลกำไรสูงสุด ราคาดีที่สุดขั้นสุดท้ายต้องแทนค่าสมการที่เหมาะสมในสมการผลกำไร สมการผลกำไรเขียน ได้ดังนี้

$$P = S - C \qquad \text{..............(3)}$$

$$P = (8000s - 2s^2) - (8,100,000 - 2000s)$$

$$P = 8000s - 2s^2 - 8,100,000 + 2000s$$

$$P = -2s^2 + 10,000s - 8,100,000$$

$$\frac{dP}{ds} = -4s + 10,000 = 0$$

$$4s = 10,000$$

$$s = \$\,2500$$

ในวิธีการนี้ใช้แนวความคิดพื้นฐานของการหาอนุพันธ์ นั่นคือเราเกี่ยวข้องกับอัตราของการเปลี่ยนแปลงในผลกำไร (P) ของบริษัทที่สมนัยกับหนึ่งจำนวนที่เปลี่ยนแปลงในราคาขาย (s) ของบริษัท อย่างไรก็ตาม โดยการทำอัตราของการเปลี่ยนแปลงเท่ากับศูนย์ เราจะแก้ผลกำไรสูงสุดเทียบกับนโยบายราคาที่ดีที่สุดสำหรับบริษัท

ถ้าคำตอบไม่ได้เหมือนกราฟในรูปที่ 4 เราสามารถเชื่อได้อย่างไรว่าเราได้แก้กำไรสำหรับราคาขายที่ต่ำที่สุด คำถามนี้สามารถแก้ใหม่ได้โดยการใช้การทดสอบอนุพันธ์ที่สองดังนี้

$$\frac{d^2P}{ds^2} = -4+0$$

เนื่องจากว่าเทอมที่สองกลายเป็นศูนย์สำหรับอนุพันธ์ที่สองเทอมที่เหลือคือเทอมที่หนึ่งเท่านั้น เมื่อเทอมแรกนี้ถูก หาอนุพันธ์ครั้งที่สอง กลับกลายเป็น -4 ค่าลบเมื่อได้มาจากผลของอนุพันธ์ ครั้งแรกปรับเท่ากับศูนย์ แสดงว่าความชันได้บรรลุถึงจุดสูงสุดและกำลังลาดลง ดังนั้นแนวทางนี้สอดคล้องกับรูปที่ 4 นอกจากนั้น ถ้าเครื่องหมายเป็นบวกสำหรับเลขจำนวนเต็ม ก็แสดงว่าเราได้กระทำความคลาดเคลื่อนในการคำนวณของเราหรือเราได้แก้กำไรสำหรับราคาขายต่ำสุดแล้ว คำตอบเป็นบวกในการทดสอบอนุพันธ์ที่สองแสดงว่าความชันได้บรรลุถึงจุดต่ำสุดและกำลังลาดสูงขึ้น

วิธีการที่สองในการแก้ปัญหานี้ ใช้ marginal analysis แทนการเพิ่มขึ้น สุทธิต่อรายได้ทั้งหมดของบริษัทกับต้นทุนที่เป็นผลมาจากการขายหรือการผลิตของหนึ่งหน่วยเพิ่มขึ้นของจำนวนสินค้าที่ผลิตได้ การกำหนดให้ฟังก์ชันขายทั้งหมดและฟังก์ชันต้นทุนทั้งหมด การสมนัยระหว่างสมการรายได้เผื่อเหลือเผื่อขาดกับสมการต้นทุนเผื่อเหลือเผื่อขาด สามารถคำนวณได้สำหรับบริษัท ใช้การหาอนุพันธ์รายได้เผื่อเหลือเผื่อขาด (Δ S) ของบริษัท เท่ากับอนุพันธ์ที่หนึ่งของความสัมพันธ์ของขายทั้งหมด ซึ่งเป็นดังนี้

$$S = 8000s - 2s^2$$

$$\frac{dS}{ds} = 8000 - 4s$$

$$\Delta S = 8000 - 4s \qquad \text{...............} (7)$$

ในทำนองเดียวกันต้นทุนเผื่อเหลือเผื่อขาด (Δ C) ของบริษัท เท่ากับอนุพันธ์ที่หนึ่งของความสัมพันธ์ของต้นทุนทั้งหมด

$$C = 8{,}100{,}000 - 2000s$$

$$\frac{dC}{ds} = -2000$$

$$\Delta C = -2000 \qquad \text{...............(8)}$$

ผลกำไรของบริษัทจะอยู่ที่ค่าสูงสุดเมื่อรายได้เผื่อเหลือเผื่อขาด (Δ S) เท่ากับต้นทุนเผื่อเหลือเผื่อขาด (Δ C) ผลลัพธ์นี้คำนวณได้ในสมการต่อไปนี้

$$\Delta S = \Delta C$$

$$8000 - 4s = -2000$$

$$4s = 10{,}000$$

$$s = \$\,2500$$

ผลลัพธ์นี้เหมือนราคาขายที่ได้คำนวณภายใต้วิธีการที่หนึ่ง

การคำนวณราคาขายที่ดีที่สุดโดยทางคณิตศาสตร์ ผลกำไรสูงสุดทั้งหมดสามารถคำนวณได้สำหรับบริษัท โดยการแทนค่า s ($ 2500) ในสมการ (3) ที่ได้ดัดแปลงแล้วดังนี้

$$P = (8000 - 2s)s - (8{,}100{,}000 - 2000s)$$

$$P = [8000 - 2\,(2500)]\,2500 - [8{,}100{,}000 - 2000\,(2500)]$$

$$P = (3000)\,2500 - (8{,}100{,}000 - 5{,}000{,}000)$$

$$P = 7{,}500{,}000 - 3{,}100{,}000$$

$$P = \$\,4{,}400{,}000$$

ผลกำไร (ก่อนหักภาษีรายได้) ขึ้นอยู่กับการประมาณต้นทุนกับการขายคือ $ 4,400,000 ของปีแรก

ในการเพิ่มผลกำไร การบริหารควรต้องรู้จำนวนหน่วยที่ควรขายที่ราคา $ 2500 ต่อหน่วยนี้สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$u = 8000 - 2s$$

$$u = 8000 - 2\,(2500) \qquad \text{...............(1)}$$

$$u = 3000 \text{ หน่วย}$$

แม้ว่าปัญหานี้สามารถแก้ได้ด้วยกราฟสำหรับราคาขายที่ดีที่สุด ผลกำไรที่สูงที่สุด และอุปสงค์ที่คาดหวังวิธีการทางคณิตศาสตร์ก็ปฏิบัติได้ง่ายกว่าและแน่นอนกว่า เนื่องจากว่า กราฟในบางครั้งยากที่จะอ่านได้อย่างแน่นอน ถ้าบริษัทเลือกราคาขายที่น้อยกว่า ราคาขายที่ดีที่สุด ผลกำไรทั้งหมดจะลดลง ในทางกลับกัน ถ้าบริษัทเลือกราคาที่มากกว่าราคาขายที่ดีที่สุด

การเพิ่มในราคาจะให้ผลกำไรทั้งหมดลดลง ดังนั้น จึงมีอยู่จุดเดียวเท่านั้นที่ซึ่งราคาขายจะให้ผลกำไรทั้งหมดมากที่สุด จุดนี้คือ \$ 2500 สำหรับบริษัท ก.

ตัวอย่าง สมมติว่า X เส้นผ่าศูนย์กลางส่วนในของหัวฉีด (หน่วยมิลลิเมตร) เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงปกติมีมัชฌิมเลขคณิตและความแปรปรวนเป็น μ กับ 1 ตามลำดับ ถ้าหากว่าหารายละเอียดที่แน่นอนของ X ไม่ได้ผู้ผลิตจะขาดทุน สมมติว่า ผลกำไร T (ต่อหัวฉีด) เป็นฟังก์ชันของ X ดังนี้

$$
\begin{aligned}
T &= C_1 \text{ (บาท)} \quad \text{ถ้า } 10 \leqslant X \leqslant 12 \\
&= -C_2 \qquad \text{ถ้า } X < 10 \\
&= -C_3 \qquad \text{ถ้า } X > 12
\end{aligned}
$$

ดังนั้น ผลกำไรที่คาดหวัง (ต่อหัวฉีด) อาจเขียนได้เป็น

$$
\begin{aligned}
E(T) &= C_1|\phi(12-\mu) - \phi(10-\mu)| \\
&\quad - C_2|\phi(10-\mu)| - C_3|1-\phi(12-\mu)| \\
&= (C_1+C_3)\,\phi(12-\mu) - (C_1+C_2)\,\phi(10-\mu) - C_3
\end{aligned}
$$

สมมติว่า กระบวนการผลิตสามารถปรับค่าต่าง ๆ ของ μ ให้บรรลุไปได้ μ จะมีค่าเท่าไรที่จะทำให้ผลกำไรคาดหวังมากที่สุด ก่อนอื่นเราต้องคำนวณ $dE(T)/(d\mu)$ และทำให้เท่ากับศูนย์ ให้ฟังก์ชันความหนาแน่นของการแจกแจง N(0, 1) เป็น f เราได้

$$\frac{dE(T)}{d\mu} = (C_1+C_3)\,|-f(12-\mu)| - (C_1+C_2)\,|-f(10-\mu)|$$

ดังนั้น

$$-(C_1+C_3)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}(12-\mu)^2\right) + (C_1+C_2)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}(10-\mu)^2\right) = 0$$

หรือ

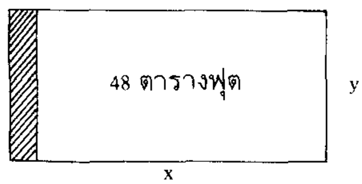
$$e^{22-2\mu} = \frac{C_1+C_3}{C_1+C_2}$$

ดังนั้น $$\mu = 11 - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{C_1+C_3}{C_1+C_2}\right)$$

ข้อสังเกต

(1) ถ้า $C_2 = C_3$ นั่นคือเส้นผ่าศูนย์กลาง X ใหญ่เกินไปหรือเล็กเกินไป จะมีผลเสียเท่ากัน ดังนั้น ค่า μ ซึ่งจะให้ผลกำไรที่คาดหวัง E(T) มากที่สุดคือ $\mu = 11$ ถ้า $C_2 > C_3$ ค่าของ $\mu > 11$ ขณะที่ $C_2 < C_3$ ค่าของ $\mu < 11$ ขณะ $\mu \to +\infty$, $E(T) \to -C_3$ ถ้า $\mu \to -\infty$, $E(T) \to -C_2$

(2) พิจารณาค่าต่อไปนี้ : $C_1 = 10$ บาท, $C_2 = 3$ บาท และ $C_3 = 2$ บาท ดังนั้น ค่าของ μ ซึ่งทำให้ E(T) มากที่สุด เท่ากับ $\mu = 11 - \frac{1}{2}\ln\left[\frac{12}{13}\right] = 11.04$ มม. ดังนั้น E(T) ได้บรรลุถึงค่าสูงสุดเท่ากับ 6.04 บาทต่อหัวฉีด



ตัวอย่าง ปัญหาการสร้างรั้ว

รูปแสดงถึงพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าแปลงหนึ่ง ซึ่งด้านหนึ่งล้อมรอบด้วยกำแพงและต้องการสร้างรั้วอีกสามด้าน ปัญหาของเราคือต้องการคำนวณความยาวของรั้วให้สั้นที่สุด ซึ่งล้อมรอบพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้า 48 ตารางฟุต

ข้อเสนอแนะว่าความยาวรั้วที่ต้องการจะต้องมีมิติสัมพันธ์กันกับสี่เหลี่ยมผืนผ้า ดังตัวอย่างพื้นที่ 48 ตารางฟุต ถ้าหากว่า x เป็น 12 ฟุต y จะต้องเป็น 4 ฟุต หรือถ้า x เป็น 4 ฟุต y เป็น 12 ฟุต ต้องการรั้ว 28 ฟุต $(2x + y)$ ในกรณีแรกและ 20 ฟุตในกรณีที่สอง

ถ้าเราให้ F เป็นความยาวของรั้วที่ต้องการ เราได้

$$F = 2x + y$$

x กับ y ไม่มีความอิสระกัน เพราะผลคูณต้องเป็น 48 ตารางฟุต ดังนั้น

$$xy = 48$$

$$y = \frac{48}{x}$$

เพราะฉะนั้น $$F = 2x + \frac{48}{x}$$

ปัญหาคือต้องการคำนวณหาค่าของ x สำหรับซึ่ง F มีค่าน้อยที่สุด เราหาอนุพันธ์ของ F เทียบกับ x แล้วให้เท่ากับศูนย์ ดังนั้น

$$F = 2x + 48x^{-1}$$

$$\frac{dF}{dx} = 2 - 48x^{-2} = 0$$

$$2 - 48x^{-2} = 0$$

$$x = \sqrt{24}$$

เงื่อนไขของปัญหาคือว่าเราไม่ใช้ค่าลบของราก 24 จุดที่ความชันเป็นศูนย์ คือ ค่าบวกของราก 24 อนุพันธ์ที่สองคือ $+96x^{-3}$ ซึ่งมีค่าเป็นบวกที่ $x = \sqrt{24}$ ดังนั้นจุดที่ความชันเป็นศูนย์เป็นค่าน้อยที่สุด เราคำนวณหาค่า y ที่สมนัยได้

$$y = \frac{48}{x} = \frac{48}{\sqrt{24}} = 2\sqrt{24}$$

ความยาวของรั้วที่สั้นที่สุด คือ

$$F = 2x + y = 2\sqrt{24} + 2\sqrt{24} = 4\sqrt{24}$$

$$F = 4(4.899)$$

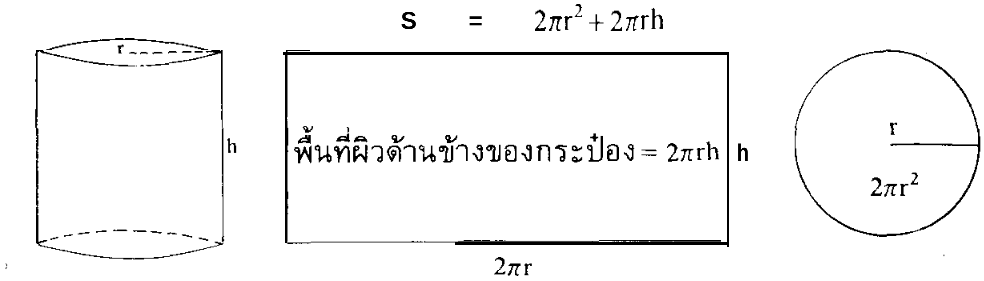
$= 19.6$ ฟุต โดยประมาณ

มิติของภาชนะ

กระป๋องทรงกระบอกมีความสูง h และรัศมีของฐาน r บรรจุของเหลวได้ 30 ลูกบาศก์นิ้ว จงคำนวณหา h และ r ซึ่งจะทำให้พื้นที่ผิวของกระป๋องมีค่าน้อยที่สุด

กระป๋องที่มีลักษณะทรงสูงหรือทรงเตี้ยสามารถบรรจุปริมาตรที่กำหนดให้ แต่ความต้องการของแผ่นโลหะ (พื้นที่ผิว) มากกว่ากระป๋องที่มีมิติปานกลาง จากรูปพื้นที่ผิวของกระป๋อง S เป็น

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$



ตัวแปรทั้งสาม s, r และ h ปรากฏในสมการ อย่างไรก็ตาม h และ r ไม่มีความอิสระกัน เพราะว่าปริมาตรของกระป๋องเป็น

$$V = \pi r^2 h$$

ต้องเป็น 30 ลูกบาศก์นิ้ว ดังนั้น

$$\pi r^2 h = 30$$

$$h = \frac{30}{\pi r^2}$$

แทนค่านี้ลงในสมการของ S เราได้

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{30}{\pi r^2}\right)$$

$$= 2\pi r^2 + 60r^{-1}$$

เราดำเนินในลักษณะเดียวกันเพื่อคำนวณหาค่า S ที่น้อยที่สุด

$$\frac{ds}{dr} = 4\pi r - 60r^{-2} = 0$$

$$4\pi r - 60r^{-2} = 0$$

$$r^3 = \frac{15}{\pi}, \quad r = \sqrt[3]{\frac{15}{\pi}} = 1.684 \text{ นิ้ว}$$

$$h = \frac{30}{\pi r^2} = \frac{30}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{15}{\pi}}\right)^2} = 3.368 \text{ นิ้ว}$$

การหาปฏิยานุพันธ์

เราได้พิจารณาการหาอนุพันธ์มาแล้ว กระบวนการของการวัดการเปลี่ยนแปลงเล็ก ๆ ของค่า ซึ่งตรงกันข้ามกับกระบวนการของการรวมช่วงระหว่างภายใต้เส้นโค้งเรียกว่า การหาปฏิยานุพันธ์ วิธีการของความสัมพันธ์ของการหาปฏิยานุพันธ์กับการหาอนุพันธ์ ต้องหาค่าอินทิเกริน โดยการใช้ของตัวปฏิยานุพันธ์ นั่นคือ โดยกระบวนการซึ่งกลับกัน กระบวนการของการคำนวณหาอนุพันธ์ในหัวข้อนี้จะสรุปพื้นฐานคณิตศาสตร์ย่อ ๆ สำหรับการหาปฏิยา-นุพันธ์ก่อนเสนอปัญหาการหาปฏิยานุพันธ์ทางธุรกิจ

อินทิเกรินที่มีขีดไม่จำกัด

ในการกลับกระบวนการของการหาอนุพันธ์ เราได้ดำเนินกระบวนการของการหาปฏิยานุพันธ์ที่ไม่จำกัด ฟังก์ชันคำนวณหาได้ด้วยตัวปฏิยานุพันธ์ เรียกว่า อินทิเกรินที่ไม่จำกัด อินทิเกรินที่ไม่จำกัด ของ f นิยามได้

$$y = \int f(x)dx = F(x) + C \qquad \text{..........} (9)$$

สมการ (9) อ่าน "อินทิเกริน ($\int$) ของ $f(x)dx$ คือ $F(x) + C$" y ใช้แทนอินทิเกรินที่ไม่จำกัดของ $f(x)$ ขณะที่ $F(x)$ คือตัวปฏิยานุพันธ์ของ y ในเมื่อ C เท่ากับศูนย์ เนื่องจากไม่ทราบว่า C เท่ากับ 0 (อนุพันธ์ของค่าคงที่ใด ๆ เท่ากับศูนย์) ค่าคงที่ต้องปรากฏในทุก ๆ การหาปฏิยานุพันธ์ที่ไม่จำกัด

เราสามารถแปลสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ของอินทิเกรินที่ไม่จำกัดเป็นสองวิธี ด้วยกัน เราสามารถให้สัญลักษณ์ $\int$ ...dx, หมายถึงอินทิเกรินของ...เทียบกับ x" สัญลักษณ์นี้ สามารถแปลได้เหมือนการกลับของ d/dx ..., ซึ่งหมายความว่า "อนุพันธ์ของ...เทียบกับ x" วิธีที่สองต้องพิจารณาสมการ (9) เขียนได้ดังนี้

$$dy = f(x)dx \qquad \text{..........(10)}$$

ในกรณีนี้, f(x) เป็นอนุพันธ์ของ y สำหรับทุก ๆ ค่าของ x ในช่วงปิด (a, b) ในเมื่อ dy เรียกว่าอนุพันธ์ของ y กับ dx อนุพันธ์ของ x เมื่อเครื่องหมายอินทิเกรินถูกนำเข้าในสมการ (10) (อินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการ) สมการใหม่คือ

$$\int dy = \int f(x)dx$$

ประยุกต์สมการ (9) ได้

$$y = \int dy = F(x) + C \qquad \text{..........(11)}$$

ในสมการนี้ เราอินทิเกรตอนุพันธ์ของฟังก์ชัน y ได้ ตัวปฏิยานุพันธ์ F(x) บวกค่าคงที่ C การตีความทางคณิตศาสตร์ทั้งสองของสมการ (9) เครื่องหมายแสดงได้โดยเครื่องหมายอินทิเกริน หมายถึงการกลับเครื่องหมายที่แสดงได้โดยสัญลักษณ์ d สำหรับการหาอนุพันธ์

สูตรการหาปฏิยานุพันธ์

การแสดงความสัมพันธ์ระหว่างกระบวนการของการหาอนุพันธ์กับของการหาปฏิยานุพันธ์ที่ไม่จำกัด เราจะทบทวนสูตรปฏิยานุพันธ์ หรือกฎซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของระบบคณิตศาสตร์ของ Calculus ก่อนที่จะให้สูตร เราต้องจำไว้ว่า การแสดงอย่างเช่น

$$\int_a^b x^2$$

ซึ่งแสดงอินทิเกรินของ x^2 ตลอดช่วงจาก a ถึง b ควรจะเขียนได้เป็น

$$\int_a^b x^2dx$$

ในเมื่อสัญลักษณ์ dx เรียกว่าการหาอนุพันธ์ของ x ค่าของอินทิเกรินขึ้นอยู่กับขีดจำกัด (a, b) และไม่ได้เกี่ยวกับอักษรเฉพาะของอินทิแกรนด์ และควรเจาะจงว่าเมื่อเขียนสูตรสำหรับอินทิเกรินที่ไม่จำกัด (ปราศจากขีดจำกด) ค่าคงที่ C เรียกว่าค่าคงที่ของการหาปฏิยานุพันธ์ต้องห้อยท้าย

สูตรสำหรับการหาปฏิยานุพันธ์

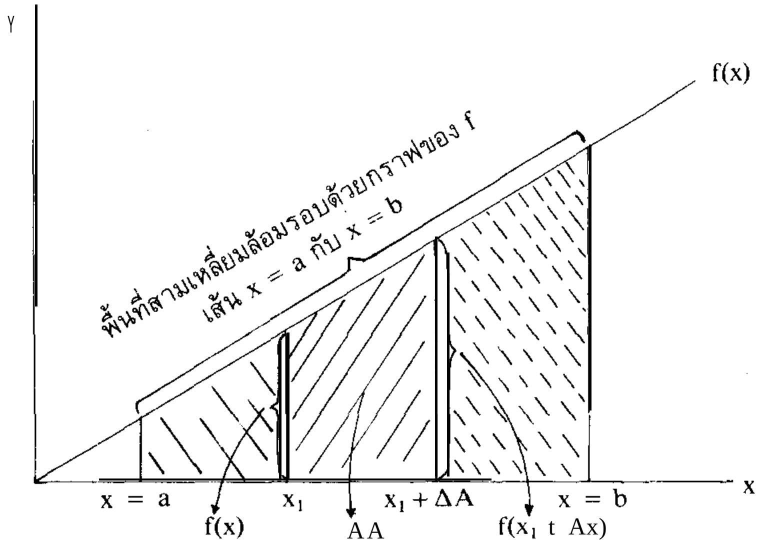
1. $\int (0)dx = C$
2. $\int Cudu = C\int udu$
3. $\int (1)dx = x + C$
4. $\int (u+v)dx = \int udx + \int vdx$
5. $\int (u-v)dx = \int udx \quad \int vdx$
6. $\int u^{n}du = \frac{u^{n+1}}{n+1}$ (ในเมื่อ $n \neq -1$)
7. $\int \frac{1}{u}du = \ln u + C$ (ในเมื่อ $n = -1$)
8. $\int e^{u}du = e^{u} + C$

อินทิเกรินที่จำกัด

การหาปฏิยานุพันธ์บางครั้งเรียกว่า กระบวนการของการบวกเทียบกับอินทิเกรินที่จำกัด มีการเพิ่มเติมต่อความหมายก่อนของเทอม "อินทิเกรต" หมายถึง "แสดงหรือให้ผลบวกของ" พื้นที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง, ปริมาตรที่ตันและสิ่งที่คล้ายกัน ดังนั้นกระบวนการของการบวกจะนำไปสู่คำจำกัดความของอินทิเกรินที่จำกัด

การหาปฏิยานุพันธ์ที่จำกัด สามารถคำนวณพื้นที่ได้ พิจารณารูปที่ (5) ซึ่งเราต้องคำนวณพื้นที่ล้อมรอบด้วยกราฟของ f เส้น $x = a$ กับ $x = b$

เราให้ $f(x)$ เป็นค่าของฟังก์ชันที่ต่อเนื่อง f (ไม่เป็นลบ) ในช่วง (a, b) พื้นที่ A จะเป็นฟังก์ชันของตัวแปร x ที่อิสระ เราให้ ΔA เป็นส่วนเพิ่มขึ้นในพื้นที่ A ขณะที่ x เพิ่มขึ้นจาก x_1 ถึง $(x_1 + \Delta x)$



รูปที่ 5 พื้นที่โดยการหาปฏิยานุพันธ์

ขณะที่ Δx เข้าใกล้ศูนย์ $\Delta A/\Delta x$ อยู่ในลักษณะอัตราทันทีด้วย ซึ่ง A เปรียบเทียบกับตัวแปร x อนุพันธ์ของฟังก์ชันกลายเป็น

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta x} = \frac{dA}{dx} = f(x_1) \qquad \text{..........} (12)$$

เนื่องจาก x_1 สามารถเป็นค่าใด ๆ ของ x ในช่วง (a, b) เราสามารถแทนค่า x_1 ด้วย x ก็จะกลายเป็น

$$\frac{dA}{dx} = f(x) \text{ หรือ } dA = f(x)dx \qquad \text{..........} (13)$$

ความหมายของสมการ (13) ก็คืออัตราพื้นที่ A กำลังเปลี่ยนจะเท่ากับค่าโคออร์ดิเนต $y = f(x)$ ที่ค่า x ใด ๆ ในช่วง (a, b) เสนอ การหาปฏิยานุพันธ์สมการนี้ สำหรับ A ให้ผลดังนี้

$$A = \int dA = \int f(x)dx \qquad \text{..........} (14)$$

ในที่สุด การให้ F(x) เป็นฟังก์ชันหนึ่งอย่างเช่น $\frac{dF(x)}{dx}$, $F'(x) = f(x)$ สมการใหม่สำหรับ A (ด้านขวามือก็เหมือนสมการ (9)) คือ

$$A = \int f(x)dx = F(x) + C \qquad \text{..........} (15)$$

รูปที่ (5) พื้นที่ A เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x_1 ที่อิสระ นั่นคือ เมื่อ x_1 ลดลงเข้าใกล้ x = a พื้นที่ A ลดลง และเมื่อ $x_1 = a$ พื้นที่ A เป็นศูนย์ นี้เป็นพื้นฐานสำหรับการแทนค่าใน

สมการ (15) สมการใหม่ (เมื่อ A = O และ x = a) คือ

$$O = F(a) + C$$

$$C = -F(a)$$

แทนค่าเทอมข้างต้น $|-F(a)|$ สำหรับ C ลงในสมการ (15) พื้นที่ A เท่ากับ

$$A = F(x) + |-F(a)| \quad \text{..........} (16)$$

$$A = F(x) - F(a)$$

เพื่อที่จะคำนวณพื้นที่ล้อมรอบด้วย x = a และ x = b, เราแทนค่า b สำหรับ x ในสมการ (16) ก็จะได้

$$A = F(b) - F(a) \quad \text{..........} (17)$$

การกล่าวสมการ (17) ในรูปของเครื่องหมายอินทิเกริน (อ้างถึงสมการ (15)) สมการอินทิเกรตสำหรับพื้นที่ A คือ

$$A = \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (18)$$

เมื่ออ่านสมการ (18) อักษร a ที่ก้นของเครื่องหมายอินทิเกริน คือขีดจำกัดล่างของการหาปฏิยานุพันธ์ และอักษร b เป็นขีดจำกัดบนของการหาปฏิยานุพันธ์ หรือค่าของ x ที่ซึ่งพื้นที่บรรจบนี้เป็นอินทิเกรินที่จำกัด สามารถกล่าวในรูปดังต่อไปนี้

$$A = \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad \text{..........} (19)$$

สูตรสำหรับการหาปฏิยานุพันธ์ของสมการ (19) สามารถเข้าใจได้ดีที่สุดโดยการประยุกต์กับปัญหาธุรกิจโดยเฉพาะ

ห้างหุ้นส่วนหนึ่งกำลังตรวจดูบันทึกรายการขายประจำวันกับการขายในอดีตสำหรับผลิตภัณฑ์เฉพาะด้วยความเอาใจใส่เพื่อที่จะทำนายการขายทั้งหมดสำหรับปีต่อไป อัตราขายสำหรับผลิตภัณฑ์ปีนี้คือ 160,000 ปีที่แล้ว 130,000 และปีก่อนปีที่แล้ว 110,000 ตามลำดับ รองประธานทำหน้าที่เกี่ยวกับการตลาด เชื่อว่าการขายจะเพิ่มขึ้นต่อเนื่องกันในอัตราที่เหมือนกันสำหรับสองสามปีต่อไป

การตรวจสอบข้อมูลที่ขายสำหรับสามปีแสดงว่า การขาย (S) เจริญขึ้นเป็นรูปไม่เชิงเส้น เป็นที่ตกลงว่าอัตรารายปีของการขายควรจะถูกพยากรณ์ด้วยพาลาโบล่า นั่นคือ $dS/dt = A + Bt + Ct^2$ ในเมื่อ t เป็นเวลา (ปี) และ A, B และ C เป็นค่าคงที่ การคำนวณค่าคงที่ที่ไม่ทราบ เมื่อ $t = 0$, $dS/dt = 110{,}000$, เมื่อ $t = 1$, $dS/dt = 130{,}000$ และเมื่อ $t = 2$, dS/dt = 160,000 การแทนค่าข้างต้นในสมการดั้งเดิมได้

A = 110,000, A + B + C = 130,000, และ A + 2B + 4C = 160,000 จากสมการคำนวณหาค่า A = 110,000 ; B = 15,000 และ c = 5,000 ดังนั้นสมการที่ให้อัตราของการขายที่เวลา t คือ

$$\frac{dS}{dt} = 110{,}000 + 15{,}000t + 5{,}000t^2 \qquad \text{.........(20)}$$

การใช้สมการ (20) อัตราการขายที่คาดหวังหรือความชันที่จุดในเมื่อ t เท่ากับ 3 คือ

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= 110{,}000 + 15{,}000(3) + 5{,}000(3)^2 \\ &= 110{,}000 + 45{,}000 + 45{,}000 \\ &= 200{,}000 \text{ หน่วยต่อปี}\end{aligned}$$

วัตถุประสงค์ของเราคือต้องการทำนายขายทั้งหมดสำหรับปีหน้า (เมื่อ t = 3) นี้สามารถคำนวณได้โดยการใช้สมการ (2) ดังนี้

$$\int dS = \int (110{,}000 + 15{,}000t + 5{,}000t^2)dt \qquad \text{(ปฏิยานุพันธ์ทั้งสองข้าง)}$$

$$S = \int (110{,}000 + 15{,}000t + 5{,}000t^2)dt \qquad \text{(การหาปฏิยานุพันธ์ dS ได้ S)}$$

$$S_3 = \int_2^3 (110{,}000 + 15{,}000t + 5{,}000t^2)dt \qquad \text{(ขีดจำกัดของการหาปฏิยานุพันธ์ เมื่อ t = 3)}$$

จากสูตรที่ 4 ของการหาปฏิยานุพันธ์ สมการข้างต้นเขียนได้เป็น

$$S_3 = \int_2^3 (110{,}000)dt + \int_2^3 (15{,}000t)dt + \int_2^3 (5{,}000t^2)dt$$

ใช้สูตรที่ 2 และ 3 สำหรับเทอมแรกและสูตร 6 สำหรับเทอมที่สองและที่สาม, สมการคือ

$$S_3 = 110{,}000t + \frac{15{,}000t^2}{2} + \frac{5{,}000t^3}{3}\Big|_2^3$$

กระบวนการสุดท้ายในปัญหานี้ต้องใช้สมการ (19) เพื่อจะคำนวณค่าเมื่อ t = 2 และเมื่อ t = 3 ทำการได้ดังนี้

$$S_3 = \left[(110{,}000)(3) + \frac{15{,}000}{2}(3)^2 + \frac{5{,}000}{3}(3)^3\right]$$

$$\left[110{,}000(2) + \frac{15{,}000}{2}(2)^2 + \frac{5{,}000}{3}(2)^3\right]$$

$= 179.170$ หน่วย

อนุพันธ์เชิงส่วน

การหาอนุพันธ์เชิงส่วนให้คำตอบหนึ่งสำหรับปัญหาที่ใช้ปฏิบัติต่อผลของการเปลี่ยนแปลงของสองตัวแปร วิธีการพื้นฐานของการหาอนุพันธ์เชิงส่วนต้องกระทำแม้ตัวแปรหลาย ๆ ตัวในปัญหากำลังแปรตัวหนึ่งต่อครั้งหนึ่ง เมื่อใช้สูตรสำหรับการหาอนุพันธ์ แม้ว่าเสนอหลาย ๆ ตัวแปรในปัญหา สูตรสำหรับการหาอนุพันธ์สามารถใช้สำหรับหนึ่งตัวแปรต่อครั้งหนึ่ง ขณะเดียวกัน การพิจารณาตัวแปรอื่น ๆ เหมือนตัวคงที่

พิจารณาสูตร $Q = ax + by + c$ ในเมื่อ x กับ y เป็นตัวแปรอิสระขณะที่ a, b และ c เป็นตัวคงที่ เราต้องการตรวจสอบปริมาณ Q แปรได้อย่างไร ถ้าขณะที่ถูกพิจารณาเป็นค่าคงที่ อนุพันธ์ของ Q เทียบกับตัวแปร x ควรเป็น

$$\frac{dQ}{dx} = a + 0 + 0 = a$$

ครั้งนี้ให้ x เป็นค่าคงที่ อนุพันธ์ของ Q เทียบกับ y เป็น

$$\frac{dQ}{dy} = 0 + b + 0 = b$$

เมื่อสองสมการเหล่านี้รวมเข้าเป็นหนึ่ง เพื่อแสดงว่า Q แปรอย่างไรด้วยทั้ง x และ y นักคณิตศาสตร์ใช้สัญลักษณ์ เพื่อทำให้เข้าใจอนุพันธ์เชิงส่วน ดังนั้นสองคำตอบสามารถเขียนได้เป็น

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = b$$

สมการแรกข้างต้นอ่านว่า "อนุพันธ์เชิงส่วนของ Q เทียบกับ X เท่ากับ 0" ถ้าสัญลักษณ์อนุพันธ์เชิงส่วนปรากฏ ก็จะมีตัวแปรมากกว่าหนึ่งในสมการ เมื่อไรใส่ส่วนทั้งหมดรวมกันเป็นหนึ่งเพื่อแสดงนี้ เรียกว่า การหาอนุพันธ์ทั้งหมด และสามารถเขียนได้เป็น

$$dQ = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right) dy \qquad \text{..........(21)}$$

ปัญหาการกระทำที่ได้ผลดีที่สุด

คณะวิจัยการดำเนินงานของบริษัทไทยทำ ได้รับการขอร้องเพื่อที่จะตรวจสอบว่าราคาเพิ่มขึ้นจาก \$1.00 เป็น \$1.10 จะเพิ่มผลกำไรนอกเหนือไปกว่าระดับปัจจุบันสำหรับ

ผลิตภัณฑ์ส่วนใหญ่, (ผลิตภัณฑ์ E) หรือไม่ ในสิ่งที่เพิ่มเติม คณะยังได้รับการขอร้องเพื่อที่จะหาต้นทุนสำหรับการโฆษณาและควบคุมคุณภาพที่จะทำให้ผลกำไรสูงสุดถ้าเพิ่มราคา

แผนกบัญชีต้นทุนของบริษัทสามารถแยกต้นทุนได้แน่นอนมากสำหรับผลิตภัณฑ์นี้ ต้นทุนคงที่รายปีทั้งหมด นอกจากต้นทุนของการควบคุมคุณภาพ (Q) กับการโฆษณา (A) \$15 ล้าน ขณะที่ต้นทุนผันแปรทั้งหมด นอกเหนือค่าขนส่ง (ชำระโดยลูกค้า) \$0.50 ต่อหน่วยล้าน (unit times millions) ของจำนวนที่ขาย (N) สมการต้นทุนทั้งหมด (C) สำหรับผลิตภัณฑ์ (E) ในรูปของล้านดอลล่าร์และจำนวนสามารถเขียนได้เป็น

$$C = 15 + 0.50N + Q + A \qquad \text{..........} (22)$$

คณะวิจัยการดำเนินงานมีความยุ่งยากเกี่ยวกับฟังก์ชันที่ใช้พยากรณ์จำนวนขายทั้งหมด (S) มากกว่าที่ได้ทำกับฟังก์ชันต้นทุน ภายหลังพิจารณาการทดลองกับความสัมพันธ์ของการขาย ควบคุมคุณภาพและรายจ่าย ค่าโฆษณาก็สามารถที่จะสร้างความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้ (ในเมื่อ P เท่ากับราคาขาย)

$$N = 150 - 15P + 0.2AQ + 2A + Q \qquad \text{..........} (23)$$

$$S = 150P - 15P^2 + 0.2PAQ + PQ + 2PA \;\; (\text{คูณ} N \text{ ด้วย } P) \qquad \text{..........} (24)$$

ฟังก์ชันผลกำไรสุทธิก่อนเสียภาษีรายได้ ($P_n = S - C$) ขึ้นอยู่กับสมการ (22) ถึง (24) เขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
P_n &= S - C \\
&= (150P - 15P^2 + 0.2PAQ + PQ + 2PA) - (15 + 0.5N + Q + A) \\
&= 150P - 15P^2 + 0.2PAQ + PQ + 2PA - 15 - 0.5(150 - 15P + 0.2AQ + Q + 2A) \\
&\quad - Q - A \\
&= 150P - 15P^2 + 0.2PAQ + PQ + 2PA - 15 - 75 + 7.5A - 0.1AQ - 0.5 - Q \\
&\quad - A - Q - A \\
&= -90 + 157.5P - 15P^2 + 0.2PAQ + PQ + 2PA - 0.1AQ - 1.5Q - 2A
\end{aligned}$$

$$\text{..........} (25)$$

ผลกำไรสุทธิสำหรับผลิตภัณฑ์ E สามารถทำให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันของสามตัวแปร P (ราคาขาย), Q (ค่าควบคุมคุณภาพ) และ A (ค่าโฆษณา) ในการเพิ่มเติมกับสมการซึ่งได้สร้างขึ้นแล้ว ยังมีอีกหนึ่งสมการที่ต้องการ ข้อกำหนดเกี่ยวกับเงินงบประมาณหรือจำนวนเงินรายปีที่นำมาใช้ได้สำหรับการโฆษณาและการควบคุมคุณภาพของผลิตภัณฑ์ E คือ \$ 17.5 ล้าน ข้อกำหนดเกี่ยวกับเงินงบประมาณคิดเป็นล้านดอลล่าร์คือ

$$Q + A = \$\,17.5 \text{ ล้าน} \qquad \text{..........} (26)$$

คำถามแรก การเพิ่มของราคาที่จะมีผลในผลกำไรมากขึ้นหรือไม่ สามารถหาคำตอบได้โดยการแก้เมื่อ P = \$ 1.00 และ P = \$ 1.10 ตัวแปรของราคาสามารถขจัดออกไปจากสมการ (25) โดยการแทนค่าจริง ๆ ของราคาเดี่ยวนี้ P_n เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปร Q กับ A อย่างไรก็ตาม การแก้คำไขสำหรับ Q ในสมการ (26) ฟังก์ชัน P_n กลายเป็นฟังก์ชันหนึ่งตัวแปรตัวเดียว A นี้แสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned} P_n &= -90 + 157.5P - 15P^2 + 0.2PAQ + PQ + 2PA - 0.1AQ - 1.5Q - 2A \\ &= -90 + 157.5(1) - 15(1)^2 + 0.2(1)A(17.5 - A) + (1)(17.5 - A) + 2(1)A \\ &\quad - 0.1A(17.5 - A) - 1.5(17.5 - A) - 2A \\ &= -90 + 157.5 - 15 + 3.5A - 0.2A^2 + 17.5 - A + 2A - 1.75A + 0.1A^2 - 26.25 \\ &\quad + 1.5A - 2A \\ &= 43.75 + 2.25A - 0.1A^2 \qquad \text{..........} (27) \end{aligned}$$

ผลกำไรมากที่สุดสามารถคำนวณได้สำหรับระดับที่ดีที่สุดของการโฆษณาโดยการหาอนุพันธ์ที่หนึ่งของสมการ (27) และปรับให้เท่ากับศูนย์

$$P_n = 43.75 + 2.25A - 0.1A^2 \qquad \text{..........} (28)$$

$$\frac{dP_n}{dA} = 2.25 - 0.2A = 0$$

$$0.2A = 2.25$$

$$A = \$\,11.25$$ ล้านสำหรับการโฆษณาที่ราคา \$ 1.00 อนุพันธ์ที่สองของสมการก่อนคือ

$$\frac{d^2P_n}{dA^2} = o - o.2$$

นี้แสดงว่า หาค่าสูงสุดได้แล้ว ค่าของ Q สามารถคำนวณได้

$$\begin{aligned} Q &= 17.5 - A \\ &= 17.5 - 11.25 \\ &= \$\,6.25 \text{ ล้านสำหรับควบคุมคุณภาพ} \end{aligned}$$

ระดับของการโฆษณา (\$ 11.25 ล้าน) และควบคุมคุณภาพ (\$ 6.25 ล้าน) ซึ่งจะทำให้ผลกำไรมากที่สุดด้วยการคำนวณราคา \$ 1 ต่อหน่วย ผลกำไรที่คาดหวังสูงสุดคือ \$ 56.4 ล้าน คำนวณได้ดังนี้ จากสมการ (25) (เมื่อ P = \$ 1.00, A = \$ 11.25 ล้าน และ Q = \$ 6.25 ล้าน)

$$P_n = -90 + 157.5P - 15P^2 + 0.2PAQ + PQ + 2PA - 0.1AQ - 1.5Q - 2A$$
$$= -90 + 157.5(1) - 15(1)^2 + 0.2(1)(11.25)(6.25) + (1)(6.25) + 2(1)(11.25)$$
$$- 0.1(11.25)(6.25) - 1.5(6.25) - 2(11.25)$$
$$= -90 + 157.5 - 15 + 14.0625 + 6.25 + 22.50 - 7.03125 - 9.375 - 22.50$$
$$= \$\,56.4 \text{ ล้าน}$$

วิธีการแบบเดียวกัน สามารถใช้สำหรับราคาขายที่เสนอ \$ 1.10 เงื่อนไขคือว่า สมการ (24) สำหรับฟังก์ชั่นของจำนวนที่ขายจะไม่มีผลกระทบกระเทือนด้วยราคาเพิ่มขึ้น \$ 0.10 สมการ P_n กลายเป็น

$$P_n = 58.10 + 2.70A - 0.12A^2 \qquad (29)$$

อนุพันธ์ที่หนึ่งของสมการ (29) ได้

$$\frac{dP_n}{dA} = 2.70 - 0.24A = 0$$
$$0.24A = 2.70$$
$$A = \$\,11.25 \text{ ล้าน}$$

อนุพันธ์ที่สองของสมการข้างต้นได้

$\frac{d^2P_n}{dA^2} = 0 - 0.24$ (ลบแสดงว่าได้บรรลุค่าสูงสุดแล้ว) การโฆษณา (A) และการควบคุมคุณภาพ (Q) คือจำนวนเงินที่จะทำผลกำไรมากที่สุดสำหรับบริษัท เมื่อราคาขาย \$ 1.10 การโฆษณา \$ 11.25 ล้าน และค่าการควบคุมคุณภาพ \$ 6.25 ล้าน ผลกำไรสุทธิ \$ 73.3 ล้าน เมื่อได้เปรียบเทียบกับราคาขายปัจจุบัน \$ 1.00 สามารถเพิ่มผลกำไร \$ 16.9 ล้าน

การตอบคำถามเริ่มแรกของการบริหารเกี่ยวกับผลิตภัณฑ์ E คณะวิจัยการดำเนินมีปัญหาอื่น ๆ อีก คณะบริหารของบริษัทไทยทำกำลังพิจารณาผลิตภัณฑ์ใหม่ และต้องการขายที่ราคาสูงกว่าผลิตภัณฑ์ E มาก เพื่อต้องการที่จะทราบว่าราคาอะไรควรจะทำผลกำไรมากที่สุด สมมติว่าฟังก์ชันพยากรณ์การขายของสมการ (23) ยังสมบูรณ์และการจำกัดเงินงบประมาณสำหรับ Q กับ A คือ \$ 17.5 ล้าน มีการเปลี่ยนแปลงในฟังก์ชันต้นทุน (สมการ 22) เท่านั้น ดังนั้นต้นทุนผันแปร (นอกจากค่าขนส่งที่ลูกค้าชำระ) ต้องเป็น 30 เปอร์เซ็นต์ของขายทั้งหมด ฟังก์ชันต้นทุนที่ได้แก้ไขแล้วเป็น

$$C = 15 + 0.3PN + Q + A \qquad \text{.......... (30)}$$

เนื่องจากว่าฟังก์ชันต้นทุนที่ได้แก้ไขแล้ว ฟังก์ชันผลกำไรสุทธิที่ได้แก้ไขคือ

$$
\begin{aligned}
P'' &= s - c \\
&= PN - (15 + 0.3PN + Q + A) \\
&= PN - 15 - 0.3PN - Q - A \\
&= 0.7PN - 15 - Q - A \\
&= 0.7P(150 - 15P + 0.2AQ + Q + 2A) - 15 - Q - A \\
&= 105P - 105P^2 + 0.14PAQ + 0.7PQ + 1.4PA15 - Q - A \\
&= -15 - Q - A + 105P - 10.5P^2 + 0.14PAQ - 0.7PQ + 1.4PA
\end{aligned}
$$

.... (31)

เนื่องจากว่าสองตัวแปรที่ไม่ทราบยังอยู่ในสมการ (31) จึงจำเป็นที่จะใช้อนุพันธ์เชิงส่วนเป็นชั้นที่สอง เพื่อที่จะบรรลุถึงการแก้คำไขสุดท้าย อนุพันธ์เชิงส่วนที่หนึ่งของ P_n เทียบกับ P และ A ปรับให้เท่ากับศูนย์สำหรับจุดสูงสุดคือ (แทนค่า $Q = 17.5 - A$)

$$P_n = -32.5 + 92.75P - 10.5P^2 + 4.55PA - .14PA^2$$

$$\frac{\partial P_n}{\partial p} = 92.75 - 21P + 4.55A - 0.14A^2 = 0 \qquad \text{......... (32)}$$

$$\frac{\partial P_n}{\partial A} = 4.55P - 0.28PA = 0 \qquad \text{.......... (33)}$$

สมการที่สอง (สมการ 33) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\frac{\partial P_n}{\partial A} = P(4.55 - 0.28A) = 0$$

ในเมื่อ

$P = 0$ หรือ $4.55 - 0.28A = 0$

ราคาขาย \$ 0 จะให้ผลกำไรเป็นศูนย์ นี้อยู่นอกกฎคณิตศาสตร์ด้วยการทดสอบอนุพันธ์เชิงส่วนที่สอง

$$\frac{\partial^2 P_n}{\partial A^2} = -0.28P = 0 \quad \text{สำหรับ } P = 0$$

เพราะฉะนั้น p (เท่ากับศูนย์) ไม่สามารถให้ผลกำไรของสมการ (33) (เขียนเสียใหม่) ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
3.15 - 0.28A &= 0 \\
0.28A &= 4.55 \\
A &= \$16.25 \text{ ล้านสำหรับการโฆษณา}
\end{aligned}
$$

สมการที่หนึ่ง (สมการ 32) สำหรับ $\partial Pn/\partial P = 0$ ให้ P ในเทอมของ A เป็นดังนี้

$$92.75-21P+4.55A-0.14A^2 = 0$$

$$21P = 92.75+4.55A-0.14A^2$$

$$P = \frac{92.75+4.55A-0.14A^2}{21}$$

แทนค่า A ในสมการได้ราคาขาย \$6.18 ต่อหน่วย

$$P = \frac{92.75+4.55(16.25)-0.14(16.25)'}{21}$$

$$= \frac{92.75+74.03-36.97}{21}$$

$$= \frac{129.81}{21}$$

$$= \$6.18$$

เพื่อที่จะคำนวณว่าผลกำไรสุทธิ (Pn) ได้บรรลุถึงจุดสุดในเมื่อ A = \$16.25 ล้าน และ P = \$6.18 ขั้นที่สามจึงเป็นสิ่งจำเป็นเพื่อที่จะหาอนุพันธ์เชิงส่วนที่สองของ p และ A ไม่มีกำลังของอนุพันธ์เชิงส่วนที่สองเทียบกับ P และ A (ทดสอบอนุพันธ์เชิงส่วนที่สอง)

$$\left(\frac{\partial^2 Pn}{\partial P^2}\right)\left(\frac{\partial^2 Pn}{\partial A^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 Pn}{\partial P\,\partial A}\right)^2 \geqslant \text{ หรือ } \leqslant 0 \qquad (34)$$

$$(-21)(-0.28P)-(4.55-0.28A)^2 = (-21)(-0.28P)$$

$$[4.55-0.28(16.25)]^2 = 5.88P > 0$$

เนื่องจากว่าสมการ $4.55-0.28A = 0$ และตัวอย่างข้างต้น $5.88 > 0$ จุดที่ให้ค่าสูงสุดสำหรับผลกำไรสุทธิได้บรรลุถึงแล้วสำหรับค่าการโฆษณา \$16.25 ล้าน และราคาขาย \$6.18 เพราะว่าการแสดงทั้งสองมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์อย่างใดอย่างหนึ่ง ถ้าหากว่าผลลัพธ์น้อยกว่าหรือเท่ากับศูนย์ ผลกำไรสุทธิมากที่สุดไม่ควรจะบรรลุถึง ขั้นที่สี่และสุดท้ายต้องคำนวณอนุพันธ์เชิงส่วนที่สองของราคาขาย (p) หรือ -21 ลบแสดงว่าคำนวณผลกำไรสูงสุดได้แล้ว

LAGRANGE MULTIPLIERS

ในปัญหาก่อน ๆ สมการที่กำหนดให้ $(Q + A = 17.5)$ เป็นรูปธรรมดาซึ่งให้เรารวมเข้าไว้ในสมการผลกำไรสุทธิ อย่างไรก็ตามไม่ได้เป็นกรณีอย่างนี้เสมอไป การพัฒนาวิธีการ

เพื่อที่จะรวมสมการที่กำหนดไว้ในฟังก์ชันสำหรับหาจุดให้ค่ามากที่สุด วิธีการสามารถทำฟังก์ชันให้ดีที่สุด ถ้าหากได้รับ (subject to) ข้อกำหนดที่แน่นอน โดยใช้ Lagrange multipliers

การใช้ Lagrange multipliers สามารถแสดงได้โดยการพิจารณาปัญหาทั่ว ๆ ไปของการคำนวณจุดที่สูงที่สุดของ $Z = f(x, y)$ ถ้าหากได้รับ (subject to) ข้อกำหนด $g(x, y)$ มีสมการ

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = f_x(x, y) = 0 ; \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = f_y(x, y) = 0$$

และ $g(x, y) = 0$ ต้องสอดคล้องกับคู่ของ x และ y ที่ไม่ทราบระบบนี้ของสมการมีอะไรบางสิ่งบางอย่างยากที่จะแก้ได้เนื่องจากว่า มีสมการมากกว่าตัวที่ไม่รู้ค่า การใช้ Lagrange multipliers และตัวไม่รู้ค่า λ แสดงแบบได้ สำหรับปัญหาทั่ว ๆ ไป

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) \qquad \text{..........} (35)$$

ตรวจสอบสมการ (35) แสดงว่า L เป็นฟังก์ชันหนึ่งของสามตัวแปร x, y และ λ เงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับจุดที่ให้ค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของฟังก์ชันนี้คือสามสมการ

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 : \frac{\partial L}{\partial y} = 0 ; \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

สมการเหล่านี้สามารถเขียนเสียใหม่ได้

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(f + \lambda g) \\
&= f_x + g_x \text{ หรือ } f_x(x, y) + \lambda g_x(x, y \quad) = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}(f + g) \\
&= f_y + g_y \text{ หรือ } f_y(x, y) + \lambda g_y(x, Y \quad) = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= \frac{\partial}{\partial \lambda}(f + g) = g \text{ หรือ } g(x, y) = 0
\end{aligned}$$

สมการสุดท้ายข้างต้นเป็นสมการที่กำหนด (บังคับ) จริง ๆ ถ้าหากว่าหาจุดที่สูงที่สุด (x_m, y_m) ของ L ได้ ที่สอดคล้องสมการที่กำหนด สมการ (35) สามารถเขียนเสียใหม่ได้

$$L(x_m, y_m, \lambda) = f(x_m, y_m) + \lambda g(x_m, y_m) = \phi(x_m, y_m) \quad . \qquad \text{..........} (36)$$

ในเมื่อ $g(x_m, y_m) = 0$ ค่าของ L กับ f เหมือนกันอยู่ที่จุดสูงที่สุดและต่ำที่สุดของ L

กล่าวถึงปัญหาของบริษัทไทยทำในการพิจารณาการแทนที่สำหรับผลิตภัณฑ์ E สมการผลกำไรสุทธิ (สมการ 31) ขึ้นอยู่กับราคาขายใหม่ กลับผลิตได้ต่ำกว่าปกติ

$$P_n = -15 - Q - A + 105p - 10.5p^2 + 0.14pAQ + 0.7pQ + 14.pA \quad \text{.........(31)}$$

Subject to สมการที่กำหนด 28

$$Q + A = 17.5 \quad \text{..........(26)}$$

สมการ (31) กับ (26) สามารถเขียนเสียใหม่ได้ตามแบบของสมการ (36) ได้

$$L(P, A, Q, \lambda) = P_n(P, A, Q) + \lambda(Q + A - 17.5) \quad (37)$$

เงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับจุดสูงสุดขึ้นอยู่กับสมการ (37) ดังกำหนดให้ดังนี้

$$\frac{\partial L}{\partial p} = 105 - 21p + 0.14AQ + 0.7Q + 1.4A = 0 \quad \text{..........(I)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial A} = -1 + 0.14pQ + 1.4p + \lambda = 0 \quad \text{.....(II)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial Q} = -1 + 0.14pA + 0.7p + \lambda = 0 \quad \text{.....(III)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = Q + A - 17.5 = 0 \quad \text{.....(IV)}$$

การหาอนุพันธ์เชิงส่วนขั้นต่อไปต้องขจัดค่า λ ออกจากสมการที่สองและที่สาม ลบสมการหนึ่งออกจากอีกสมการหนึ่ง สมการใหม่ได้

$$
\begin{aligned}
-1 + 0.14pQ + 1.4p + \lambda &= 0 \\
-1 + 0.14pA + 0.7p + \lambda &= 0 \\
\hline
0.14p(Q - A) + 0.7p &= 0 \\
|0.14(Q - A) + 0.7|p &= 0
\end{aligned}
$$

p ไม่สามารถเท่ากับศูนย์ สมการสุดท้ายเขียนเสียใหม่ได้

$$
\begin{aligned}
0.14(Q - A) + 0.7 &= 0 \\
0.14(Q - A) &= -0.7 \\
Q - A &= -5
\end{aligned}
$$

เพื่อที่จะแก้ค่าไขสำหรับ A (การโฆษณา) แทนค่า Q ของสมการ (IV) ลงใน $(Q - A = -5)$ ดังนั้นเราได้

$$
\begin{aligned}
Q - A &= -5 \\
17.5 - A - A &= -5 \\
17.5 - 2A &= -5 \\
-2A &= -22.5 \\
A &= \$\,11.25 \text{ ล้าน}
\end{aligned}
$$

เมื่อ A = $ 11.25 ล้าน และ Q = $ 6.25 ล้าน (Q = 17.5 – A) ราคาขาย (P) สามารถคำนวณได้จากสมการที่หนึ่งข้างต้นได้ $ 6.43

$$105 - 21p + 0.14AQ + 0.7Q + 1.4A = 0 \qquad \ldots (1)$$

$$21p = 105 + 0.14(11.25)(6.25) + 0.7(6.25) + 1.4(11.25)$$

$$p = \frac{105 + 9.84375 + 4.375 + 15.75}{21}$$

$$= \frac{134.97}{21}$$

$$= \$\,6.43$$

ผลลัพธ์สำหรับวิธีทำนี้มีค่าเท่ากันกับวิธีทำก่อน สังเกตเห็นว่าการคำนวณน้อยกว่าในการใช้ Lagrange multiplier นี้สำเร็จลงได้โดยไม่ต้องแทนค่า Q = 17.5 – A ในสมการผลกำไรสุทธิหลาย ๆ เทอม (สมการ 31) เพิ่มความรวดเร็วกว่าวิธีการ Lagrange multiplier จัดหาส่วนที่เพิ่มขึ้นของเนื้อหา λ การคำนวณค่า โดยการใช้สมการที่สองข้างต้น ค่าของ λ คือผลกำไรเพิ่มขึ้นจริง ๆ ที่สามารถคำนวณได้ ถ้าบวกหน่วยที่เพิ่มขึ้นเข้ากับสมการที่กำหนด (Q + A = 17.5) ดังนั้น ถ้าบริษัทจ่ายไป $ 18.5 ($ 17.5 + $ 1) ล้านเกี่ยวกับการตลาดและการควบคุมคุณภาพร่วมกัน ผลกำไรควรจะเพิ่มขึ้นหลายล้านโดยการสมมติว่า เงื่อนไขอื่น ๆ ทั้งหมดคงที่

สรุป

การใช้คณิตศาสตร์สูงขึ้น แคลคูลัสว่าด้วยการหาอนุพันธ์, ปฏิยานุพันธ์, อนุพันธ์เชิงส่วน และ Lagrange multiplier สามารถทำให้ผู้วิจัยการดำเนินงานแก้ปัญหาธุรกิจที่ยุ่งยากซึ่งไม่สามารถแก้ด้วยพีชคณิตได้ เนื้อแท้ของแคลคูลัสพื้นฐานที่จะบริการสำหรับปัญหาที่ได้แสดง การสำรวจโดยวิธีเลือกของปัญหาต่าง ๆ กันสามารถแก้ได้ดังได้เสนอไปแล้ว

แบบจำลองการกระทำที่ได้ผลดีที่สุดในที่นี้ ใช้วิธีต่าง ๆ ของแคลคูลัส ในเมื่ออนุพันธ์ที่หนึ่งของฟังก์ชันการหาอนุพันธ์ถูกปรับให้เท่ากับศูนย์ ในกรณีของฟังก์ชันเชิงซ้อนเทียบอนุพันธ์เชิงส่วนกับแต่ละตัวของตัวแปร n ตัว เมื่อข้อกำหนดเพื่อว่าจำนวนได้ถูกตั้งขึ้นก็ทำ Lagrange multipliers เข้ามาหนึ่งของแต่ละข้อกำหนดเพื่อว่าจำนวนของสมการที่อิสระกับจำนวนที่ไม่ทราบค่าเท่ากัน ดังนั้น เพื่อที่จะใช้วิธีการวิเคราะห์ของแคลคูลัส ฟังก์ชันการคำนวณต้องอยู่ในรูปคณิตศาสตร์และต้องสามารถหาอนุพันธ์ได้ด้วยการมีลักษณะพื้นฐานของการหา

คำตอบหนึ่งเท่านั้น แบบจำลองการกระทำที่ได้ผลดีที่สุดไม่ได้แสดงทิศทางหรือทางเดินที่ต้องการบรรลุถึงการหาคำตอบ ขณะที่เกี่ยวกับการกระทำที่ได้ผลดีที่สุดด้วยการเลือก choice ที่ดีที่สุดโดยปราศจากต้องค้นหาหลาย ๆ วิธีการที่เลือกได้ของพฤติการณ์นี้ไม่เป็นความจริงสำหรับเนื้อหาอื่น ๆ ที่จะเสนอต่อไป โปรแกรมเชิงเส้น, โปรแกรมไม่เชิงเส้น, โปรแกรมเคลื่อนที่และแบบจำลองการขนส่ง สิ่งเหล่านี้เกี่ยวกับการใช้ algorithm เพื่อเลือกเซทต่อไปของค่าสำหรับตัวแปรในปัญหาและหาฟังก์ชันวัตถุประสงค์แต่ละครั้งเพื่อว่าแต่ละวิธีการหาคำตอบที่สำเร็จลงได้และเข้าใกล้คำตอบที่ดีที่สุด กระบวนการซ้ำ ๆ กันนี้ต่างไปจากแบบจำลองที่ได้กำหนดขึ้นอย่างชัดเจน

แบบฝึกหัด

1. สร้างสูตรราคาทั่ว ๆ ไป (ให้กำไรมากที่สุด) ที่สามารถประยุกต์กับสภาพใด ๆ ในที่ซึ่งฟังก์ชันอุปสงค์เชิงเส้นและความสัมพันธ์ต้นทุนเชิงเส้นได้รับการเสนอ

2. บริษัท Smith Arms Manufacturing กำลังพิจารณาเสนอผลิตภัณฑ์ใหม่หลายชนิดต่อตลาด โดยเฉพาะกลุ่มการวิจัยตลาดของบริษัทได้คำนวณอุปสงค์และราคาสำหรับผลิตภัณฑ์ใหม่เป็นดังนี้

ราคา	อุปสงค์สำหรับปีแรก
$ 100	9,000
200	6,000
300	3,000
400	0

แผนกบัญชีของบริษัทร่วมกับแผนกผลิตได้ประมาณต้นทุนที่ผลิตขึ้นของผลิตภัณฑ์ใหม่เป็นดังนี้

ต้นทุนคงที่	$ 100,000
ต้นทุนแปรผัน ต่อหน่วย	$ 75

(ก) จงคำนวณราคาขายที่ดีที่สุดซึ่งจะทำให้ผลกำไรมากที่สุดสำหรับบริษัท

(ข) จงแสดงว่าราคาขายเป็นราคาที่ดีที่สุดแล้ว (Optimum)

(ค) จำนวนกี่หน่วยที่ควรจะผลิตในปีแรกเพื่อที่จะทำให้ผลกำไรมากที่สุดสำหรับบริษัท

(ง) ผลกำไรที่ดีที่สุดที่คาดหวังจะเป็นเท่าไรสำหรับผลิตภัณฑ์ใหม่ของบริษัทในปีแรก

3. บริษัท Champion กำลังพิจารณาผลิตภัณฑ์ใหม่ แผนกการตลาดของบริษัทได้ประมาณความสัมพันธ์ของจำนวนที่ขายกับราคาดังนี้

ราคา	อุปสงค์ต่อปี
$ 2	2,000
4	1,500
6	1,000
8	500
10	0

ฟังก์ชันต้นทุนต่อหน่วยได้กำหนดโดยแผนกต้นทุนของบริษัทขึ้นอยู่กับผลิตภัณฑ์ชนิดเดียวกัน ดังต่อไปนี้

$$C \text{ (ต่อหน่วย)} = \frac{\$ 1.000}{u} + \$ 0.80$$

เทอมแรกในสมการคือต้นทุนคงที่ และเทอมที่สองคือต้นทุนผันแปร

(ก) คำนวณจำนวนที่คาดหวังของหน่วยสำหรับผลกำไรที่ดีที่สุด

(ข) คำนวณผลกำไรที่ดีที่สุดสำหรับปีแรก

4. บริษัท Regis ได้คำนวณความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนขายได้ (S) กับค่าโฆษณา (X) สำหรับผลิตภัณฑ์หนึ่งของหลาย ๆ ผลิตภัณฑ์ได้

$$S = \frac{20,000x}{500+x}$$

บริษัทได้กำหนดว่าผลกำไรสุทธิก่อนหักค่าโฆษณาเป็น 20 เปอร์เซ็นต์ของรายได้ทั้งหมด สมการสำหรับผลกำไรสุทธิ (P) ฟังก์ชันของจำนวนขายกับค่าโฆษณาคือ

$$P = \frac{1}{5}S - X$$

(ก) จงหาจำนวนเงินที่จะจ่ายเกี่ยวกับการโฆษณาสำหรับผลิตภัณฑ์หนึ่งที่จะทำให้ผลกำไรสุทธิมากที่สุดสำหรับบริษัท

(ข) จงแสดงว่าเราได้ผลกำไรมากที่สุดโดยการหาอนุพันธ์ที่สองของฟังก์ชันผลกำไรสุทธิ

5. บริษัท Atlas Battery มีปัญหางบประมาณการโฆษณา สำหรับปีต่อมาบริษัท

สามารถตั้งจำนวนเงินโดยไม่มีเกณฑ์จ่ายเงินจำนวนหนึ่งคิดเป็นเปอร์เซ็นต์ที่แน่นอนของจำนวนที่ขาย บริษัทได้คำนวณว่า จำนวนขายที่ได้พยากรณ์สำหรับ Batteries คือ 550,000 สำหรับปีนี้ ฟังก์ชันผลกำไรที่ได้มา (P) เท่ากับ 20u – 10,000,000 ในเมื่อ u เป็นจำนวนของหน่วย ถ้าหากว่าจำนวนที่ขายจริง ๆ เท่ากับจำนวนที่ขายที่ได้พยากรณ์บริษัทควรทำผลกำไร $ 1,000,000 ก่อนเสียภาษีรายได้ รองประธานทำหน้าที่การตลาดรู้สึกว่างบประมาณการโฆษณาของบริษัทควรได้รับการพิจารณา แผนกวิจัยการตลาดรู้ดีว่า ผู้แข่งขันวางแผนเพื่อที่จะจ่าย $ 300,000 โดยเฉลี่ย และ industry sales ที่ได้พยากรณ์คือ 2,000,000 batteries ต้นทุนผันแปรทั้งหมดจำนวนเงิน $ 15 ต่อ battery ที่ปรึกษาวิจัยดำเนินงานได้ตัดสินใจที่จะใช้เทอมต่อไปนี้ในสมการแรกของเขา ให้ x เป็นทุนโฆษณาที่ไม่ทราบของบริษัท Atlas Battery ให้ y เท่ากับงบประมาณที่ไม่ทราบโดยเฉลี่ยของผู้แข่งขันและให้ Q เป็นอำนาจการขายที่ได้พยากรณ์ (หน่วย) สำหรับอุตสาหกรรมทั้งหมด คนวิจัยการดำเนินงานกำลังสมมิตว่า industry sales ทั้งหมดมีความอิสระกันของจำนวนเงินทั้งหมดที่ได้ใช้จ่ายในการโฆษณา และส่วนแบ่งของบริษัทของจำนวนที่ขายเป็นสัดส่วนกับส่วนแบ่งของบริษัทของงบประมาณการโฆษณาเกี่ยวกับอุตสาหกรรมทั้งหมด จำนวนขายที่คาดหวังจะขึ้นอยู่กับข้อความข้างต้นเท่ากับ

$$Q\left(\frac{x}{x+y}\right)$$

(ก) ใช้เงื่อนไขธรรมดาข้างต้น (ซึ่งเป็นสภาพที่เป็นจริงเพื่อบรรยายตลาดขาย battery แข่งขันกันของบริษัท) คนวิจัยการดำเนินงานควรจะให้คำแนะนำอะไรเกี่ยวกับงบประมาณการโฆษณาที่ดีที่สุดสำหรับบริษัท Atlas Battery

(ข) ส่วนประกอบอื่น ๆ อะไรควรได้รับการพิจารณาเมื่อถึงการตัดสินใจครั้งสุดท้ายสำหรับบริษัท?

6. บริษัท Searle ขายผลิตภัณฑ์หลายชนิดในหลาย ๆ รัฐ บริษัทได้ตัดสินใจเฝ้าดูแลรายการในบัญชีผลิตภัณฑ์ E ได้ขายในสองรัฐด้วยกัน ในรัฐหนึ่งกำหนดภาษี $ 2.00 ต่อหน่วย อีกรัฐหนึ่งไม่มีภาษี รองประธานทำหน้าที่การตลาดได้ถามคณะวิจัยการดำเนินงานจากกลุ่ม Systems Analysis ว่าบริษัทควรคิดราคาเท่าไรในแต่ละรัฐ เพื่อที่จะทำให้ผลกำไรมากที่สุดสำหรับบริษัท รายได้และฟังก์ชันต้นทุนกำหนดได้ดังนี้

$$N = 9,000 - 90P \qquad \text{(ฟังก์ชันจำนวนที่ขายของผลิตภัณฑ์ E)}$$

$$TC = 25,000 + 50N \qquad \text{(ฟังก์ชันต้นทุนทั้งหมดของผลิตภัณฑ์ E)}$$

ในเมื่อ P คือราคาขาย

7. บริษัท Kline French ได้พัฒนาผลิตภัณฑ์ใหม่ซึ่งได้สิทธิบัตรมาหลายปีแล้ว ผลิตภัณฑ์ได้อยู่ในท้องตลาดมาสามปีแล้ว อัตราการขายปีแรก 50,000 หน่วย ปีที่สอง 65,000 หน่วย และปีที่สาม 90,000 หน่วย บริษัทวางเงื่อนไขจำนวนขายที่เพิ่มขึ้นชนิดเดียวกันนี้จะนำไปประยุกต์ปีต่อมา สาเหตุการเพิ่มขึ้นอย่างกว้างขวางของผลิตภัณฑ์ การตรวจสอบจำนวนที่ขายในสามปีที่ผ่านมาแสดงว่าจำนวนที่ขายกำลังเจริญขึ้นไม่อยู่ในรูปเชิงเส้นมากกว่าเชิงเส้น จำนวนขายที่ได้พยากรณ์สำหรับปีที่สี่ของการดำเนินงานจะเป็นเท่าไร?

8. บริษัท Ajax มีผลิตภัณฑ์ที่สำคัญชนิดหนึ่ง กำลังขายลดลงด้วยอัตรา 2 เปอร์เซ็นต์ต่อเดือน ถ้าหากว่ารายได้จากการขายเดือนแรก $ 40,000 (รายเดือน) บริษัทสามารถคาดหวังจำนวนที่ขายได้ในเดือนที่สิบสองเป็นเท่าไร? คำตอบของท่านจะช่วยในการตัดสินอนาคตของผลิตภัณฑ์นี้ สังเกตว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนที่ขายเทียบกับเวลา (เดือน) เป็น quadratic function

9. บริษัท Jarvis Manufacturing ได้พิจารณาเพิ่มราคาของผลิตภัณฑ์หลักจาก $ 2.00 เป็น $ 2.10 เนื่องจากว่ามีคู่แข่งขันหลายบริษัทได้กระทำเมื่อสัปดาห์ที่แล้ว ต้นทุนสำหรับผลิตภัณฑ์นี้ไม่ยากที่จะแยกออก เนื่องจากว่าโรงงานใหญ่อุทิศผลิตภัณฑ์นี้อย่างจำกัด สำนักงานใหญ่ได้กำหนดผลิตภัณฑ์นี้ขึ้นอยู่กับการสนับสนุนของสำนักงานใหญ่ที่มีต่อจำนวนที่ขายได้ทั้งหมด ดังนั้นการศึกษาต้นทุนปัจจุบันเสนอภาพที่แท้จริงของต้นทุนที่มีความสัมพันธ์กับราคาขายปัจจุบัน บริษัทได้คำนวณต้นทุนคงที่ทั้งหมด ไม่รวมค่าใช้จ่ายการโฆษณาและค่าใช้จ่ายในการขายส่วนบุคคล (พนักงานขายอยู่บนพื้นฐานเงินเดือน) $ 6 ล้าน เพราะสถานะเงินสดฝืดของบริษัท คณะกรรมการงบประมาณได้กำหนด $ 6 ล้าน ต่อการโฆษณาและการขายส่วนบุคคลต่อปี ต้นทุนผันแปรเป็น 45 เปอร์เซ็นต์ของราคาขาย ภายหลังบริษัทพิจารณางานเกี่ยวกับฟังก์ชันพยากรณ์ของบริษัทได้กำหนดจำนวนของหน่วยซึ่งสามารถอธิบายได้ด้วยสมการ

$$N = 100 - 25p + 0.15AS + S + 0.5A$$

ในเมื่อ

N = หน่วยเป็นล้านที่สามารถขายได้

p = ราคาขายต่อหน่วย

A = ค่าโฆษณาทั้งหมด

S = ต้นทุนการขายส่วนบุคคลทั้งหมด (total personal selling cost)

(ก) ผลกำไรปัจจุบันและผลกำไรที่คาดหวังพร้อมด้วยราคาที่เพิ่มขึ้นจะเป็นเท่าไร? ผลกำไรควรจะเพิ่มขึ้นเท่าไรถ้าราคาเพิ่มขึ้น?

(ข) พิสูจน์ค่าใช้จ่ายส่วนบุคคลและการโฆษณาว่าถูกต้องโดยใช้ Lagrange multiplier

(ค) ถ้าหากว่างบประมาณสำหรับค่าการโฆษณาและต้นทุนการขายส่วนบุคคลเพิ่มขึ้น $ 0.5 ล้านที่ราคาปัจจุบัน $ 2.00 จำนวนผลกำไรเพิ่มขึ้นเท่าไรที่สามารถคาดหวัง ถ้าหากว่าเงื่อนไขอื่น ๆ ทั้งหมดยังคงเหมือนเดิม

(ง) จาก (ค) อัตราเท่าไรของการลงทุนเพิ่ม $ 0.5 ล้าน สำหรับการโฆษณาและการขายส่วนบุคคลที่คาดหวังกลับคืน?

10. บริษัท Cranin Manufacturing (ปัญหาที่เป็นตัวอย่างในบทนี้) มีสมการดังนี้สำหรับฟังก์ชันผลกำไรสุทธิก่อนเสียภาษีรายได้

$P_n = -90 + 157.5p - 15p^2 + 0.2pAQ + pQ + 2pA - 0.1AQ - 1.5Q - 2A$ ข้อกำหนดงบประมาณคือ

$$Q + A = 17.5$$

ประธานของบริษัทมีการสำรองบางอย่างเกี่ยวกับคำตอบไว้สนับสนุนเขา โดยคณะวิจัยการดำเนินงานของเขา เขาได้ยินบางคนอ้างถึงวิธีการ Lagrange multiplier เหมือนวิธีการที่เลือกได้เพื่อหา solution ของปัญหาของบริษัทเขา เพื่อที่จะทำให้ตัวของเขาเชื่อแน่ว่าราคาเพิ่มถึง $ 1.10 จะมีผลในการใช้จ่ายโฆษณาและใช้จ่ายควบคุมคุณภาพ $ 17.5 ล้านของส่วนที่เหลือเหมือนกัน (million remaining the same) เขาขอร้องท่านพิสูจน์เงินจำนวน $ 17.5 ล้านนี้ใช้วิธีการนี้ เขาต้องการจะรู้ (ขึ้นอยู่กับราคาขาย $ 1.10) ถ้าหากว่าได้บวก $ 1 ล้าน เข้ากับสมการที่ได้กำหนดงบประมาณ อะไรควรจะเกิดขึ้นกับผลกำไร?