เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 6

เกมและอุบาย

ตอบคำถาม

1. ทฤษฎีเกมเกี่ยวข้องกับการใช้เทคนิคทางคณิตศาสตร์และแนวความคิดอย่างมีเหตุผลในการเลือกจากสองวิธีการที่ดีที่สุดหรือมากกว่า เพื่อที่จะทำให้ผลกำไรมากที่สุดหรือขาดทุนน้อยที่สุด เกมมีความเกี่ยวข้องกับผู้ร่วมมือสองคนหรือมากกว่าที่มีผลประโยชน์ขัดแย้งกัน แต่ละฝ่ายต้องการที่จะสำเร็จผลของเขาให้ดีที่สุดจากอุบายที่เป็นประโยชน์ของเขา ทฤษฎีเกมสามารถใช้ในสภาวะธุรกิจที่เกี่ยวข้องกับความขัดแย้งระหว่างคู่แข่งขันตลอดระยะเวลาหนึ่ง แต่ละคู่แข่งจะสมมติคู่แข่งขันอื่น ๆ เลือกอุบายที่ดีที่สุด มูลค่าเกมและอุบายควรจะหาได้ดังนี้

   ก. ตรวจสอบเกมสำหรับจุดมูลค่าเท่ากัน (saddle point) หรืออุบายบริสุทธิ์

   ข. ตรวจสอบเกมและพยายามใช้หลักการครอบงำ (dominance) เพื่อลดอุบายให้อยู่ภายใต้เกม 2×2

   ค. ถ้าหากว่าเกมที่มีผลเป็น 2×2 (หาค่าจุดมูลค่าเท่ากันไม่ได้ และหลักการครอบงำไม่สำเร็จ) แล้ว การหาอุบายผสมและมูลค่าเกมให้เลือกใช้หนึ่งวิธีจากหลาย ๆ วิธี

      1. **อุบาย** อาจเลือกใช้วิธี

         ก. เลขคณิต

         ข. พีชคณิต

      2. **มูลค่าเกม** อาจเลือกใช้วิธี

         ก. พีชคณิต

         ข. ความน่าจะเป็นร่วม

         ค. กราฟ

         ง. ถ้าหากว่าเกมที่มีผลเป็น $2 \times M$ หรือ $M \times 2$ แล้ว ให้แก้โดยใช้วิธีเกมย่อยแบ่งเมตริกซ์เป็นอนุกรมของเกม 2×2 และแก้เกมทั้งหมด

         จ. ถ้าหากว่าเกมที่มีผลเป็น 3×3 หรือใหญ่กว่า ให้แก้โดยวิธีซิมเพล็กซ์ของการโปรแกรมเชิงเส้นตรง

2. เกมสำหรับสองคนต่างไปจากเกมสำหรับสามคนหรือมากกว่าคือ เกมสำหรับสองคนเกี่ยวกับสองคู่แข่งขันที่ขัดแย้งซึ่งกันและกัน แต่ละคู่แข่งพยายามต่อสู้เพื่อทำให้ผลลัพธ์ของเขาดีที่สุด (ของเกม) เกมสำหรับสองคนสามารถแก้ได้อย่างมีประสิทธิภาพโดยวิธีการเลขคณิต พีชคณิต ความน่าจะเป็นร่วม หรือกราฟ แต่เกมสำหรับสามคนหรือมากกว่าเกี่ยวข้องกับสามคู่แข่งขันหรือมากกว่า แต่ละคู่แข่งต้องเผชิญสิ่งที่สนใจเดียวกัน แต่ละคู่แข่งพยายาม

ที่จะทำให้ผลลัพธ์ของเขาดีที่สุด เกมสำหรับสามคนหรือมากกว่าสามารถแก้ได้โดยการโปรแกรมเชิงเส้นตรง การใช้คอมพิวเตอร์สามารถแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นตรงเหล่านี้

3. อุปสรรคส่วนใหญ่ของทฤษฎีเกมและสามารถ**ฟัน**ฝ่าอุปสรรคได้ คือ

หนึ่ง ความยากลำบากต่อทฤษฎีเกมคือ ปัญหาในการคำนวณหามูลค่าที่ถูกต้องสำหรับเมตริกซ์สิ่งตอบแทน (pay off matrix) ข้อมูลที่ไม่ถูกต้องในเมตริกซ์สิ่งตอบแทนจะมีผลในการเลือกอุบายซึ่งเป็นอุบายที่ดีที่สุด การหาคำตอบอย่างมีเหตุมีผลควรเรียงสิ่งตอบแทนจากดีที่สุดไปเลวที่สุด และให้แต่ละคำตอบที่ดีกว่าตามลำดับของค่าสูงกว่าในเมตริกซ์สิ่งตอบแทน

สอง ความยากลำบากคือว่า คณิตศาสตร์ต้องการปัญหาเกมใหญ่กว่า จึงกลายเป็นความยุ่งยากยิ่งขึ้นและทำให้การหาคำตอบยุ่งยาก ทฤษฎีเกมอยู่ในสภาวะคงที่ (static) ไม่มีการเปลี่ยนแปลง คำตอบสำหรับปัญหาเฉพาะไม่อาจสมบูรณ์ ถ้าหากว่าเงื่อนไขเปลี่ยนซึ่งเป็นสภาวะทางธุรกิจธรรมดา

ทำแบบฝึกหัด

1. **วิธีทำ**

ให้ วงกลม (ค่าน้อยที่สุดในแถว)

สี่เหลี่ยม (ค่าสูงสุดในคอลัมน์)

ก.

$$\begin{array}{cc} & Y \\ X & \begin{pmatrix} \boxed{11} & -3 & -4 \\ 8 & \boxed{7} & -8 \\ -5 & 5 & -6 \end{pmatrix} \end{array}$$

ค่าน้อยที่สุดในแถว: -4, -8, -6

ค่ามากที่สุดในคอลัมน์: 11, 7, -4

จุดมูลค่าเท่ากัน $= -4$

คือ มูลค่าเกม

อุบาย : $X = 1, 0, 0$

$Y = 0, 0, 1$

ข.

$$\begin{array}{cc} & Y \\ X & \begin{pmatrix} 4 & \boxed{4} & 3 \\ \boxed{8} & 1 & \boxed{7} \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

คาน้อยที่สุดในแถว: 3, 1, -1

ค่ามากที่สุดในคอลัมน์: 8, 4, 7

ไม่มีจุดมูลค่าเท่ากัน

การครอบงำ แถว 1

ครอบงำแถว 3

$$X\begin{pmatrix} 4 & Y & \\ 8 & 41 & 73 \end{pmatrix}$$

การครอบงำ **คอลัมน์** 21 **และ** 3 ครอบงำ

$$\begin{array}{cc} & Y \\ X & \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \frac{6}{7} \\ \frac{1}{7} \end{matrix} \\ & \begin{matrix} \frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{matrix} \end{array}$$

อุบาย : $X = \frac{6}{7}, \frac{1}{7}, 0$

$Y = 0, \frac{4}{7}, \frac{3}{7}$

$$\text{มูลค่าเกม} \quad V = \frac{4}{7}\left(4\left(\frac{6}{7}\right)+1\left(\frac{1}{7}\right)\right)+\frac{3}{7}\left(3\left(\frac{6}{7}\right)+7\left(\frac{1}{7}\right)\right)$$

$$= \frac{4}{7}\left(\frac{25}{7}\right)+\frac{3}{7}\left(\frac{25}{7}\right) = \frac{25}{7}$$

$\therefore$ โอกาสชนะที่คาดหวังของ $X = \frac{25}{7}$

$$\text{มูลค่าเกม} \quad V = \frac{6}{7}\left(4\left(\frac{4}{7}\right)+3\left(\frac{3}{7}\right)\right)+\frac{1}{7}\left(1\left(\frac{4}{7}\right)+7\left(\frac{3}{7}\right)\right)$$

$$= \frac{6}{7}\left(\frac{25}{7}\right)+\frac{1}{7}\left(\frac{25}{7}\right) = \frac{25}{7}$$

$\therefore$ โอกาสเสียที่คาดหวังของ $Y = \frac{25}{7}$

2. วิธีทำ

$$\begin{array}{cc} & Y \\ X & \begin{pmatrix} -8 & \boxed{8} & \boxed{9} \\ \boxed{-3} & -4 & -5 \\ \boxed{-3} & -4 & -6 \end{pmatrix} \end{array}$$

ไม่มีจุดมูลค่าเท่ากัน

การครอบงำ : แถวที่ 2 ครอบงำแถวที่ 3

$$\begin{array}{cc} & Y \\ X & \begin{pmatrix} -8 & 8 & 9 \\ -3 & -4 & -5 \end{pmatrix} \end{array}$$

เป็นเมตริกซ์สิ่งตอบแทน 2×3 แยกเป็นเกมย่อย 2×2 ได้ดังนี้

เกมย่อยที่ 1 $\begin{pmatrix} -8 & \boxed{8} \\ \boxed{-3} & -4 \end{pmatrix}$ คอลัมน์ 1 กับ 2

คอลัมน์ที่ 3 ไม่ได้ใช้

ไม่มีจุดมูลค่าเท่ากัน

$$\begin{array}{cc} & Y \\ X & \begin{pmatrix} -8 & 8 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \end{array}$$

$8-(-8) = 16$

$-3-(-4) = 1$

สับเปลี่ยน

1 $\frac{1}{17}$

16 $\frac{16}{ii}$

$$\begin{array}{cc} -3 & 8 \\ - & - \\ -8 & -4 \\ \hline 5 & 12 \end{array}$$

สับเปลี่ยน

12 5

$\frac{12}{ii}$ $\frac{5}{ii}$

เกมย่อยที่ 1

อุบาย : $X : \frac{1}{17}, \frac{16}{17}$

$Y : \frac{12}{17}, \frac{5}{17}, 0$

มูลค่าเกม $V = \frac{12}{17}\left(8\left(\frac{1}{17}\right)(-3)\left(\frac{16}{17}\right)\right)+\frac{5}{17}\left(\left(\frac{1}{17}\right)-4)\left(\frac{16}{17}\right)\right)$

$= -\frac{56}{17} = -3.27$

เกมย่อยที่ 2

ไม่มีจุดมูลค่าเท่ากัน

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ X & \begin{pmatrix} -8 & 9 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \frac{2}{19} \\ \frac{17}{19} \end{array} \\ & \begin{array}{cc} \frac{14}{19} & \frac{5}{19} \end{array} & \end{array}$$

อุบาย : $X : \frac{2}{19}, \frac{17}{19}$

$Y : \frac{14}{19}, 0, \frac{5}{19}$

มูลค่าเกม $V = \frac{14}{19}\left(-8\left(\frac{2}{19}\right)+(-3)\left(\frac{17}{19}\right)\right)+\frac{5}{19}\left(9\left(\frac{2}{19}\right)+(-5)\left(\frac{17}{19}\right)\right)$

$= -\frac{\quad}{19} = -3.53$

เกมย่อยที่ 3

$$\begin{array}{cc} & \text{Y} \\ \text{X} & \begin{pmatrix} \boxed{8} & \boxed{9} \\ -4 & -5 \end{pmatrix} \end{array}$$

จุดมูลค่าเท่ากัน = 8 = มูลค่าเกม

อุบาย : **x : 1, 0**

Y : 0, 1, 0

เนื่องจากว่า Y มีสามคอลัมน์ ความยืดหยุ่นมากกว่า X ดังนั้น Y เลือกมูลค่าเกม $-\frac{67}{19}$ ของเกมย่อยที่ 2

อุบายที่ดีที่สุด สอดคล้องกับเกมอสมการดังนี้

โอกาสการชนะที่คาดหวังของ X

Y เล่นคอลัมน์ที่ 1 $\quad -8\left(\frac{2}{19}\right)+(-3)\left(\frac{17}{19}\right) \geqslant -\frac{67}{19}\ ;\ -\frac{16}{19}-\frac{51}{19} = -\frac{67}{19}$

Y เล่นคอลัมน์ที่ 2 $\quad 8\left(\frac{2}{19}\right)+(-4)\left(\frac{17}{19}\right) \geqslant -\frac{67}{19}\ ;\ \frac{16}{19}-\frac{68}{19} = -\frac{52}{19}$

คอลัมน์ 2 ไม่ได้เล่น

Y เล่นคอลัมน์ที่ 3 $\quad 9\left(\frac{2}{19}\right)+(-5)\left(\frac{17}{19}\right) \geqslant -\frac{67}{19}\ ;\ \frac{18}{19}-\frac{85}{19} = -\frac{67}{19}$

โอกาสการชนะที่คาดหวังของ Y

X เล่นแถวที่ 1 $\quad -8\left(\frac{14}{19}\right)+8(0)+9\left(\frac{5}{19}\right) \leqslant -\frac{67}{19}\ ;\ -\frac{112}{19}+\frac{45}{19} = -\frac{67}{19}$

X เล่นแถวที่ 2 $\quad -3\left(\frac{14}{19}\right)+(-4)(0)+(-5)\left(\frac{5}{19}\right) \leqslant -\frac{67}{19}\ ;\ -\frac{42}{19}-\frac{25}{19} = -\frac{67}{19}$

3. **วิธีทำ**

$$\begin{array}{cc} & \text{Y} \\ \text{X} & \begin{pmatrix} \boxed{6} & 1 & \boxed{6} & 1 & \boxed{4} \\ 4 & \boxed{4} & 5 & -2 & \boxed{4} \\ 3 & -1 & 3 & \boxed{2} & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

ไม่มีจุดมูลค่าเท่ากัน

การครอบงำ : คอลัมน์ที่ 2 ครอบงำคอลัมน์ 1 กับคอลัมน์ 3

$$\begin{array}{cc} & \text{Y} \\ \text{X} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & \boxed{4} \\ \boxed{4} & -2 & \boxed{4} \\ -1 & \boxed{2} & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

เนื่องจากว่าเมตริกซ์สิ่งตอบแทนนี้เป็น 3×3 ซึ่งเป็นเกมใหญ่ การอุบายและมูลค่าเกมจำเป็นต้องใช้หลักการโปรแกรมเชิงเส้นตรง

ให้ Y_1, Y_2 และ Y_3 เป็นอุบายของ Y

X_1, X_2 และ X_3 เป็นอุบายของ X

V เป็นมูลค่าเกม

$$
\begin{array}{ccc}
 & & Y \\
 & & \begin{array}{ccc} Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{array} \\
X & \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

ในกรณีของ Y

$$Y_1 + Y_2 + 4Y_3 \leqslant V \Rightarrow \frac{Y_1}{V} + \frac{Y_2}{V} + 4\frac{Y_3}{V} \leqslant 1$$

$$4Y_1 - 2Y_2 + 4Y_3 \leqslant V \Rightarrow 4\frac{Y_1}{V} - 2\frac{Y_2}{V} + 4\frac{Y_3}{V} \leqslant 1$$

$$-Y_1 + 2Y_2 - 2Y_3 \leqslant v \Rightarrow -\frac{Y_1}{V} + 2\frac{Y_2}{V} - 2\frac{Y_3}{V} \leqslant 1$$

$$Y, + Y_1 + Y_3 = 1 \Rightarrow \frac{Y_1}{V} + \frac{Y_j}{V} + \frac{Y_3}{V} = \frac{1}{V}$$

เปลี่ยนอสมการให้เป็นสมการได้ และให้ $\bar{Y}_i = \frac{Y_i}{V}$

$$\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + 4\bar{Y}_3 + \bar{Y}_4 + 0\bar{Y}_5 + 0\bar{Y}_6 = 1$$

$$4\bar{Y}_1 - 2\bar{Y}_2 + 4\bar{Y}_3 + 0\bar{Y}_4 + \bar{Y}_5 + 0\bar{Y}_6 = 1$$

$$-\bar{Y}_1 + 2\bar{Y}_2 - 2\bar{Y}_3 + 0\bar{Y}_4 + 0\bar{Y}_5 + \bar{Y}_6 = 1$$

$$\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3 + 0\bar{Y}_4 + 0\bar{Y}_4 + 0\bar{Y}_5 = \frac{1}{V}$$

ในกรณีนี้เราต้องการ V ให้มีค่าน้อยที่สุด ดังนั้น $\frac{1}{V}$ ให้มีค่ามากที่สุด

ตารางซิมเพล็กซ์ที่ 1

โปรแกรม	กำไร C_j	ปริมาณ	1	1	1	0	0	0	
			$\bar{Y}_1$	$\bar{Y}_2$	$\bar{Y}_3$	$\bar{Y}_4$	$\bar{Y}_5$	$\bar{Y}_6$	
Y_4	0	1	1	1	4	1	0	0	1
$\bar{Y}_5$	0	1	4	-2	4	0	1	0	$\frac{1}{4}$
$\bar{Y}_6$	0	1	-1	2	-2	0	0	1	-1
แถวประเมินสุทธิ			1	1	1	0	0	0	

ตารางซิมเพล็กซ์ที่ 2

โปรแกรม	กำไร C_j	ปริมาณ	1	1	1	0	0	0	
			$\bar{Y}_1$	$\bar{Y}_2$	$\bar{Y}_3$	$\bar{Y}_4$	$\bar{Y}_5$	$\bar{Y}_6$	
$\bar{Y}_4$	0	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{2}$	3	1	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
$\bar{Y}_1$	1	$\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$
$\bar{Y}_6$	0	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{3}{2}$	-1	0	$-\frac{1}{4}$	1	$\frac{5}{6}$
แถวประเมินสุทธิ $(C_j - Z_j)$			0	2	0	0	$-\frac{1}{4}$	0	

โปรแกรม	กำไร C_j	ปริมาณ	1	1	1	0	0	0
			$\bar{Y}_1$	Y_2	Y_3	$\bar{Y}_4$	$\bar{Y}_5$	$\bar{Y}_6$
$\bar{Y}_2$	1	$\frac{1}{2}$	0	1	2	3	-6	0
$\bar{Y}_1$	1	$\frac{1}{2}$	1	0	2	3	$\frac{1}{6}$	0
$\bar{Y}_6$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	-4	-1	0	1
แถวประเมินสุทธิ $(C_j - Z_j)$			0	0	-3	-1	0	0

เนื่องจากว่า แถวประเมินสุทธิมีค่าเป็นลบและ 0 แสดงให้เห็นว่าถึงจุดสูงสุด ดังนั้น

$$\bar{Y}_1 = \frac{1}{2}, \quad \bar{Y}_2 = \frac{1}{2}, \quad \bar{Y}_6 = \frac{1}{2}$$

แต่

$$\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3 = \frac{1}{V}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{V}$$

$$V = 1 \qquad Y_1 = \bar{Y}_1 V = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

$$Y_2 = \bar{Y}_2 V = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

อุบาย : $Y = 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0$

มูลค่าเกม $V = 1$

ในกรณีของ x

$$x , + 4 x , - x , \geqslant v$$

$$X_1 - 2X_2 + 2X_3 \geqslant v$$

$$4X_1 + 4X_2 - 2X_3 \geqslant V$$

$$x , + x , + x , = 1$$

$$\frac{X_1}{V} + 4\frac{X_2}{V} - \frac{X_3}{V} \geqslant 1$$

$$\frac{X_1}{V} - 2\frac{X_2}{V} + 2\frac{X_3}{V} \geqslant 1$$

$$4\frac{X_1}{V} + 4\frac{X_2}{V} - 2\frac{X_3}{V} \geqslant 1$$

$$\frac{X_1}{V} + \frac{X_2}{V} + \frac{X_3}{V} = \frac{1}{V}$$

ให้ $\bar{X}_i = \frac{\bar{X}_i}{V}$ และเปลี่ยนอสมการให้เป็นสมการได้

$$\bar{X}_1 + 4\bar{X}_2 - \bar{X}_3 - \bar{X}_4 + 0\bar{X}_5 + 0\bar{X}_6 + \bar{X}_7 + 0\bar{X}_8 + 0\bar{X}_9 = 1$$

$$\bar{X}_1 - 2\bar{X}_2 + 2\bar{X}_3 + 0\bar{X}_4 - \bar{X}_5 + 0\bar{X}_6 + 0\bar{X}_7 + \bar{X}_8 + 0\bar{X}_9 = 1$$

$$4\bar{X}_1 + 4\bar{X}_2 - 2\bar{X}_3 + 0\bar{X}_4 + 0\bar{X}_5 - \bar{X}_6 + 0\bar{X}_7 + 0\bar{X}_8 + \bar{X}_9 = 1$$

$$\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \bar{X}_3 + 0\bar{X}_4 + 0\bar{X}_5 + 0\bar{X}_6 + M\bar{X}_7 + M\bar{X}_8 + M\bar{X}_9 = \frac{1}{V}$$

ตารางซิมเพล็กซ์ที่ 1

โปรแกรม	ทุน C_j	ปริมาณ	1 $\bar{X}_1$	1 $\bar{X}_2$	1 $\bar{X}_3$	0 $\bar{X}_4$	0 $\bar{X}_5$	0 $\bar{X}_6$	M $\bar{X}_7$	M $\bar{X}_8$	M $\bar{X}_9$	
X_7	M	1	1	4	-1	-1	0	0	1	0	0	1
X_8	M	1	1	-2	2	0	-1	0	0	1	0	1
$\bar{X}_9$	M	1	4	4	-2	0	0	-1	0	0	1	$\frac{1}{4}$
แถวประเมินสุทธิ $(C_j - Z_j)$			$1-6M$	$1-6M$	$1+M$	M	M	M	0	0	0	

โปรแกรม	ทุน C_j	ปริมาณ	1 $\bar{X}_1$	1 $\bar{X}_2$	1 $\bar{X}_3$	0 $\bar{X}_4$	0 $\bar{X}_5$	0 $\bar{X}_6$	M $\bar{X}_7$	M $\bar{X}_8$	M $\bar{X}_9$	
$\bar{X}_7$	M	$\frac{3}{4}$	0	3	$-\frac{1}{2}$	-1	0	$\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$
$\bar{X}_8$	M	$\frac{3}{4}$	0	-3	$\frac{5}{1}$	0	-1	$\frac{1}{4}$	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{10}$
X_1	1	$\frac{1}{4}$	1	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
แถวประเมินสุทธิ $(C_j - Z_j)$			0	0	$\frac{1-4M}{2}$	M	M	$\frac{1-2M}{4}$	0	0	$M-\frac{1}{4}$	

โปรแกรม	ทุน C_j	ปริมาณ	1 X_1	1 $\bar{X}_2$	1 $\bar{X}_3$	0 $\bar{X}_4$	0 $\bar{X}_5$	0 $\bar{X}_6$	M $\bar{X}_7$	M $\bar{X}_8$	M $\bar{X}_9$	
$\bar{X}_7$	M	$\frac{0}{10}$	0	$\frac{12}{5}$	0	-1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{3}{8}$
$\bar{X}_3$	1	$\frac{3}{10}$	0	$-\frac{6}{5}$	1	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{4}$
$\bar{X}_1$	1	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{2}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1
แถวประเมินสุทธิ $(C_j - Z_j)$			0	$\frac{9-12M}{5}$	0	M	$\frac{3+M}{5}$	$\frac{1-3M}{10}$	0	$\frac{-3+4M}{5}$	$\frac{13M-1}{10}$	

โปรแกรม	ทุน C_j	ปริมาณ	1 $\bar{X}_1$	1 $\bar{X}_2$	1 $\bar{X}_3$	0 $\bar{X}_4$	0 $\bar{X}_5$	0 $\bar{X}_6$	M $\bar{X}_7$	M $\bar{X}_8$	M $\bar{X}_9$	
$\bar{X}_2$	1	$\frac{3}{8}$	0	1	0	$-\frac{5}{12}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{8}$	3
$\bar{X}_3$	1	$\frac{3}{4}$	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	3
$\bar{X}_1$	1	$\frac{1}{4}$	1	0	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	-1
แถวประเมินสุทธิ $(C_j - Z_j)$			0	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$M-\frac{3}{4}$	$M-\frac{3}{4}$	$M+\frac{1}{8}$	

โปรแกรม	ทุน C_j	ปริมาณ	1 $\bar{X}_1$	1 $\bar{X}_2$	1 $\bar{X}_3$	0 $\bar{X}_4$	0 $\bar{X}_5$	0 $\bar{X}_6$	M $\bar{X}_7$	M $\bar{X}_8$	M $\bar{X}_9$
$\bar{X}_2$	1	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	0
$\bar{X}_6$	0	3	0	0	4	-2	-2	1	2	2	-1
$\bar{X}_1$	1	1	1	0	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
แถวประเมินสุทธิ $(C_j - Z_j)$			0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$M-\frac{1}{2}$	$M-\frac{1}{2}$	M

การประเมินสุทธิ มีค่าเป็นบวกหรือศูนย์ แสดงว่าตารางซิมเพล็กซ์นี้ให้ประโยชน์สูงสุดแล้ว

มูลค่าเกม V หาค่าได้จาก

$$\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \bar{X}_3 = \frac{1}{V}$$

$$1 + 0 + 0 = \frac{1}{V}$$

$$V = 1$$

$$\frac{X_1}{V} = \bar{X}_1 = 1$$

$$X_1 = 1 , \quad X_2 = 0 , \quad X_3 = 0$$

อุบาย : X : 1, 0, 0

ข้อสังเกต : โจทย์ข้อนี้ไม่ค่อยสมบูรณ์นัก เพราะอุบายของ X ออกมาในรูปอุบายบริสุทธิ แต่อุบายของ Y เป็นแบบผสม

4. **วิธีทำ**

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \text{บริษัท B} \\
 & & \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{array} \\
\text{บริษัท A} & \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} & \left(\begin{array}{cccc}
\$50{,}000 & (\$20{,}000) & \boxed{\$120{,}000} & \boxed{(\$50{,}000)} \\
\boxed{\$60{,}000} & \boxed{\$20{,}000} & \$70{,}000 & \$70{,}000 \\
(\$20{,}000) & 0 & (\$40{,}000) & \boxed{\$75{,}000}
\end{array} \right)
\end{array}
$$

(*หมายเหตุ* : จำนวนเงินหรือตัวเลขที่อยู่ในวงเล็บ ( ) แสดงถึงจำนวนเงินที่ขาดทุน)

$\boxed{}$ = แสดงถึงค่ามากที่สุดในคอลัมน์

= แสดงถึงค่าน้อยที่สุดในแถว

$20,000 เป็นจำนวนเงินที่มากที่สุดในคอลัมน์ b_2 แต่น้อยที่สุดในแถว a_2 เพราะฉะนั้น $20,000 คือจุดมูลค่าเท่ากันหรือมูลค่าเกม

อุบาย : A = 0, 1, 0

B = 0, 1, 0, 0

มูลค่าเกม : $20,000

5. **วิธีทำ**

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & \text{บริษัท B} & \\
 & & \text{ไม่มีการโฆษณา} & \text{โฆษณาปานกลาง} & \text{โฆษณามาก} \\
 & \text{ไม่มีการโฆษณา} & 50\% & 40\% & 28\% \\
\text{บริษัท A} & \text{โฆษณาปานกลาง} & 70\% & \boxed{50\%} & 45\% \\
 & \text{โฆษณามาก} & \boxed{75\%} & 47\frac{1}{2}\% & \boxed{50\%}
\end{array}
$$

เนื่องจากว่า เมตริกซ์สิ่งตอบแทนไม่มีจุดมูลค่าเท่ากัน

การครอบงำ : แถวที่ 2 และ 3 ครอบงำแถวที่ 1

คอลัมน์ที่ 2 และ 3 ครอบงำคอลัมน์ที่ 1

$$\begin{array}{c|cc} & \multicolumn{2}{c}{B} \\ A & 50\% & 45\% \\ & 47\frac{1}{2}\% & 50\% \end{array}$$

$50-45 = 5 \quad \left| \; 2\frac{1}{2}\right.$

$50-47\frac{1}{2} = 2\frac{1}{2} \quad \left| \; 5\right.$

สับเปลี่ยน

$\dfrac{2\frac{1}{2}}{2\frac{1}{2}+5} = \dfrac{1}{3}$

$\dfrac{5}{2\frac{1}{2}+5} = \dfrac{2}{3}$

$$\begin{array}{ccc} & 50 & 50 \\ & -47\frac{1}{2} & \underline{45} \\ & 2\frac{1}{2} & 5 \\ \hline \text{สับเปลี่ยน} & 5 & 2\frac{1}{2} \\ & \dfrac{5}{5+2\frac{1}{2}} & \dfrac{2\frac{1}{2}}{5+2\frac{1}{2}} \\ & \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \end{array}$$

อุบาย : บริษัท A : 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$

บริษัท B : 0, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$

เพราะฉะนั้น บริษัท A ควรจะใช้โอกาส $\frac{1}{3}$ เกี่ยวกับการโฆษณาปานกลาง และ $\frac{2}{3}$ โฆษณามาก

รายได้ของบริษัท A		
ขายได้ 20,000 หน่วย ๆ ละ \$4.00 เป็นเงินทั้งหมด		\$ 80,000
ต้นทุนทั้งหมดของบริษัท A		
ต้นทุนผันแปรทั้งหมด (20,000 หน่วย ๆ ละ \$2.5) เท่ากับ		\$50,000
ส่วนช่วยเหลือ		\$30,000
ต้นทุนคงที่		
โฆษณาปานกลาง	$\frac{1}{3}\times\$5,000$ เท่ากับ	\$ 1,661
โฆษณามาก	$\frac{2}{3}\times\$15,000$ เท่ากับ	\$10,000
ต้นทุนคงที่ทั้งหมด		\$11,667
∴ ผลกำไรสุทธิ	$\$30,000-\$11,667$	= **\$18,333**

6. **วิธีทำ**

$$\begin{array}{cc|cc|cc} & & \multicolumn{2}{c|}{\text{IBM}} & & \\ & & \text{ลดราคา} & \text{เพิ่มคุณภาพ} & & \\ \text{RBM} & \text{ลดราคา} & 10\% & -15\% & \dfrac{35}{(35+25)} & \dfrac{7}{12} \\ & \text{เพิ่มคุณภาพ} & 15\% & 20\% & \dfrac{25}{(35+25)} & \dfrac{5}{12} \end{array}$$

$$\frac{35}{35+25} \qquad \frac{25}{35+25}$$

$$\frac{7}{12} \qquad \frac{5}{12}$$

อุบาย :

บริษัท RBM : $\frac{7}{12}, \frac{5}{12}$

บริษัท IBM : $\frac{7}{12}, \frac{5}{12}$

มูลค่าเกม V $= \frac{7}{12}\left[10\left(\frac{7}{12}\right)+(-15)\left(\frac{5}{12}\right)\right] + \frac{5}{12}\left[-15\left(\frac{7}{12}\right)+20\left(\frac{5}{12}\right)\right]$

$= \left(\frac{7}{12}\right)\left(-\frac{5}{12}\right)+\left(\frac{5}{12}\right)\left(-\frac{5}{12}\right) = -\frac{5}{12}$

$= -\frac{5}{12}$

7. **วิธีทำ** ตารางดังที่กำหนดให้ไม่ได้เป็นไปตามกฎปกติของทฤษฎีของเกม เพราะฉะนั้นจึงจำเป็นจะต้องดำเนินการ transpose ของเมตริกซ์สิ่งตอบแทนที่หาค่าได้

อุบายสหพันธ์

$$\text{อุบายบริษัท}\quad \begin{array}{c} \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} U_1 & U_2 & U_3 & U_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 25 & 27 & 35 & -2 \\ 20 & 16 & 8 & 8 \\ 14 & 12 & 15 & 13 \\ 30 & 14 & 19 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

หมายเหตุ : มูลค่าทั้งหมดมีหน่วยเป็นเซนต์

อุบายบริษัท

$$\text{อุบายสหพันธ์}\quad \begin{array}{c} \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 25 & 20 & 14 & 30 \\ 27 & 16 & 12 & 14 \\ 35 & 8 & 15 & 19 \\ -2 & 8 & 13 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

ไม่มีจุดมูลค่าเท่ากัน

การครอบงำ :

แถวที่ 1 กับ 3 ครอบงำแถวที่ 4

$$
\begin{array}{c} \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 25 & 20 & 14 & 30 \\ 27 & 16 & 12 & 14 \\ 35 & 8 & 15 & 19 \end{pmatrix} \end{array}
$$

การครอบงำ :
คอลัมน์ที่ 2 **กับ** 3 **ครอบงำคอลัมน์ที่ 1**

$$
\begin{array}{c} \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_2 & C_3 & C_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 20 & 14 & 30 \\ 16 & 12 & 14 \\ 8 & 15 & 19 \end{pmatrix} \end{array}
$$

การครอบงำ :
แถวที่ 1 **ครอบงำแถวที่** 2

$$
\begin{array}{c} \\ U_1 \\ U_3 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_2 & C_3 & C_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 20 & 14 & 30 \\ 8 & 15 & 19 \end{pmatrix} \end{array}
$$

การครอบงำ :
คอลัมน์ที่ 2 กับ 3 ครอบงำ คอลัมน์ที่ 4

$$
\begin{array}{c} \\ U_1 \\ U_2 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cc} C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 20 & 14 \\ 8 & 15 \end{pmatrix} \end{array}
\quad
\begin{array}{l} \dfrac{7}{7+6} = \dfrac{7}{13} \\ \dfrac{6}{7+6} = \dfrac{6}{13} \end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc} \dfrac{1}{1+12} & \dfrac{12}{1+12} \\ \dfrac{1}{13} & \dfrac{12}{13} \end{array}
$$

อุบาย :

สหพันธ์ : $\frac{7}{13}$, 0, $\frac{6}{13}$, 0

บริษัท : 0, $\frac{1}{13}$, $\frac{12}{13}$, 0

มูลค่าเกม V $= \left[\left(\frac{7}{13}\right)\left(\frac{7}{13}\right)\left(\frac{6}{13}\right)\right] \frac{}{13}\frac{12}{13}\left[\frac{}{13}\left(\frac{7}{13}\right)\frac{}{13}\left(\frac{6}{13}\right)\right]\frac{}{13}$

$= \left(\frac{1}{13}\right)\left(\frac{188}{13}\right) + \left(\frac{12}{13}\right)\left(\frac{188}{13}\right) = \frac{188}{13} = 14.46$ **เซนต์**

$= \$0.1446$ **เพิ่มขึ้นในแรงงาน**

8. วิธีทำ

		Eura Corporation		
		ไม่เปลี่ยน (E_1)	เปลี่ยนเล็กน้อย (E_2)	เปลี่ยนมาก E_3 (E_3)
	ไม่เปลี่ยน (R_1)	0	−4	−10
Roover Company	เปลี่ยนเล็กน้อย (R_2)	3%	$\boxed{0}$	−5%
	เปลี่ยนมาก (R_3)	$\boxed{8\%}$	−1%	$\boxed{0}$

ไม่มีจุดสมมูลเท่ากัน

$$\begin{array}{cc} & \text{Eura} \\ & \begin{array}{ccc} E_1 & E_2 & E_3 \end{array} \\ \text{Roover} \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & -4 & -10 \\ 3 & 0 & -5 \\ 8 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

การครอบงำ :

แถวที่ 2 กับ 3 ครอบงำแถวที่ 1

และคอลัมน์ที่ 3 ครอบงำคอลัมน์ที่ 1

$$\begin{array}{cc} & \text{Eura} \\ & \begin{array}{cc} E_2 & E_3 \end{array} \\ \text{Roover} \begin{array}{c} R_2 \\ R_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\frac{1}{1+5} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{5}{1+5} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{5}{1+5} \qquad \frac{1}{1+5}$$

$$\frac{5}{6} \qquad \frac{1}{6}$$

อุบาย :

Eura : $0, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}$

Roover : $0, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}$

ก. มูลค่าเกม V $= \frac{5}{6}\left[0\left(\frac{1}{6}\right)+(-1)\left(\frac{5}{6}\right)\right] + \frac{1}{6}\left[-5\left(\frac{1}{6}\right)+0\left(\frac{5}{6}\right)\right]$

$$= \frac{5}{6}\left(-\frac{5}{6}\right)+\frac{1}{6}\left(-\frac{5}{6}\right)$$

$$= -\frac{5}{6}$$

ข. ถ้าหากว่าทราบรายละเอียดในเมตริกซ์สิ่งตอบแทนต่อบริษัท Roover บริษัทควรหาช่องโหว่ที่เห็นได้ชัดในอุบายของบริษัท Eura และเล่นเกมไปตามนั้น

ค. ข้อมูลอื่น ๆ

1. ผลกำไรหรือขาดทุนของแต่ละค่าที่เป็นไปได้ (เก้าค่า) ขณะเริ่มดำเนินในเมตริกซ์สิ่งตอบแทน
2. ผลของต้นทุนคงที่ (เครื่องจักร, เครื่องมือ และการโฆษณา) สำหรับการเปลี่ยนแปลงเล็กน้อยกับการเปลี่ยนแปลงส่วนใหญ่
3. ผลของการเปลี่ยนแปลงแบบจำลองในการขายในอนาคต
4. ผลอนาคตของบริษัท เช่น สต็อกชิ้นส่วนมากขึ้นสำหรับการเปลี่ยนแปลงเล็กน้อยกับการเปลี่ยนแปลงมาก และบริการจัดหาแบบจำลองทั้งหมด โดยเฉพาะเมื่อเขาทั้งหมดเห็นแก่ได้

9. **<u>วิธีทำ</u>** จากเกมแมทริกซ์

บริษัท Y

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & A & B & & \\
\text{บริษัท X} & A & 2 & 6 & 2 & \text{(maximin)} \\
 & B & 0 & -4 & -8 & \\
 & \text{(minimax)} & 2 & 6 & &
\end{array}
$$

ขั้นที่ 1 คำนวณหาจุดมูลค่าเท่ากันหรือจุดอานม้า จะได้ค่า maximin และ minimax จุดมูลค่าเท่ากันคือ 2

ดังนั้น เกมนี้เป็นอุบายหรือแผนบริสุทธิ

อุบาย : X : $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Y: : $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

มูลค่าเกม V เท่ากับ 2

<u>สรุป</u> บริษัท X กับบริษัท Y จะแข่งขันกันในจังหวัด A เท่านั้นที่จะทำให้ได้บริษัท X ได้ผลประโยชน์สูงสุด บริษัท Y เสียผลประโยชน์น้อยที่สุด

10. **<u>วิธีทำ</u>** จากโจทย์ที่กำหนดให้ เขียนเป็นเกมแมทริกซ์ได้

นาย ก.

$$
\begin{array}{ccc}
 & 1 & 5 \\
\text{นาย ข.} & 50 & -51 \\
 & -1 & 1
\end{array}
$$

เนื่องจากว่าไม่มีจุดมูลค่าเท่ากัน แสดงว่าเกมแมทริกซ์เป็นอุบายผสม ใช้วิธีการแบบเลขคณิตคำนวณหาอุบายได้

นาย ก.

$$
\begin{array}{cccc}
 & 1 & 5 & \\
\text{นาย ข.} & +1 & 1 & 5/(1 + 5) = 5/6 \\
 & 50 & +5 & 1/(1 + 5) = 1/6 \\
 & 5/6 = 5/(1 + 5) & 1/(1 + 5) = 1/6 &
\end{array}
$$

$$\text{อุบาย : นาย ข. :} \begin{bmatrix} 5/6 \\ \\ 1/6 \end{bmatrix}$$

$$\text{นาย ก. :} \begin{bmatrix} 5/6 & 1/6 \end{bmatrix}$$

มูลค่าเกม $V = (0)(5/6) + (5)(1/6) = 5/6$ บาท

∴ นาย ข. ควรจะชำระเงินสำหรับเกม 5/6 บาท เกมจึงยุติธรรม

11. **__วิธีทำ__** จากโจทย์ที่กำหนดให้เขียนเป็นเกมแมทริกซ์ได้ ดังนี้

นาย ข.

$$\text{นาย ก.} \quad \begin{array}{c} \\ 1 \\ \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ & \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \end{array}$$

เนื่องจากว่า เกมแมทริกซ์นี้ไม่เป็นแผนบริสุทธิ์ นั่นคือไม่มีจุดมูลค่าเท่ากัน (saddle point) ใช้วิธีการแบบเลขคณิตคำนวณหาอุบายหรือแผน

นาย ข.

$$\text{นาย ก.} \quad \begin{array}{c} \\ 1 \\ \\ 2 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ & \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} \frac{7}{7+5} & \frac{5}{7+5} \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} \frac{7}{7+5} = \frac{7}{12} \\ \\ \frac{5}{7+5} = \frac{5}{12} \\ \\ \end{array}$$

$$\text{อุบาย : นาย ก.} \begin{bmatrix} \frac{7}{12} \\ \\ \frac{5}{12} \end{bmatrix}$$

$$\text{นาย u.} \begin{bmatrix} 7/12 & 5/12 \end{bmatrix}$$

มูลค่าเกม $v = (3)(7/12) + (-4)(5/12) = 21/12 - 20/12 = 1/12$

12. **วิธีทำ** จากโจทย์ที่กำหนดให้เขียนเป็นเกมแมทริกซ์ได้

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{นาย ข.} \\
 & \begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array} \\
\text{นาย ก.} \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ +5 & -6 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

เนื่องจากว่า เกมแมทริกซ์เป็นแผนหรืออุบายผสมไม่มีจุดมูลค่าเท่ากัน การคำนวณหาใช้อุบายหรือวิธีการแบบเลขคณิต

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{นาย ข.} \\
 & \begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array} \\
\text{นาย ก.} \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ +5 & -6 \end{bmatrix} \quad \frac{11}{11+9} \quad \frac{9}{11+9} \\
 & \frac{11}{11+9} \quad \frac{9}{11+9}
\end{array}
$$

อุบาย : นาย ก. $\begin{bmatrix} \frac{11}{20} \\ \frac{9}{20} \end{bmatrix}$

นาย ข. $\begin{bmatrix} \frac{11}{20} & \frac{9}{20} \end{bmatrix}$

มูลค่าเกม v = (-4)(11/20) + (5)(9/20) = -44/20 + 45/20

= 1/20

13. **<u>วิธีทำ</u>** จากโจทย์ที่กำหนดให้เขียนเกมแมทริกซ์ได้

$$
\begin{array}{ccc}
 & \text{บริษัท ข.} & \\
 & \begin{array}{cc} \text{จังหวัดที่ 1} & \text{จังหวัดที่ 2} \end{array} & \\
\text{บริษัท ก.} \begin{array}{c} \text{จังหวัดที่ 1} \\ \\ \text{จังหวัดที่ 2} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ & \\ -6 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 0 \text{ (maximin)} \\ \\ \\ \end{array} \\
 & \begin{array}{cc} 0 & 8 \end{array} & \\
 & \text{(minimax)} &
\end{array}
$$

เนื่องจากว่า เกมแมทริกซ์นี้เป็นแผนหรืออุบายบริสุทธิ์ เพราะมีจุดมูลค่าเท่ากัน นั่นคือ ค่า maximin เท่ากับค่า minimax

อุบาย : บริษัท ก. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

บริษัท ข. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

<u>สรุป</u> ทั้งนาย ก. และนาย ข. ควร จะสร้างที่จังหวัดที่ 1

14. **<u>วิธีทำ</u>** เกมแมทริกซ์เขียนได้

$$
\begin{array}{ccc}
 & \text{นาย ข.} & \\
 & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} & \\
\text{นาย ก.} \begin{array}{c} 1 \\ \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} & 3 \\ & \\ & 4 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 2 \\ \\ 3 \text{ (maximin)} \end{array} \\
 & \begin{array}{cc} 3 & 4 \end{array} & \\
 & \text{(minimax)} &
\end{array}
$$

เกมแมทริกซ์นี้เป็นแผนหรืออุบายบริสุทธิ์ มีค่า maximin เท่ากับ minimax

อุบาย : นาย ก. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

นาย ข. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

มูลค่าเกม $v = 3$

is. วิธีทำ เกมแมทริกซ์เขียนได้เป็น

$$
\begin{array}{cc|cc|c}
 & & \multicolumn{2}{c|}{\text{นาย ข.}} & \\
 & & 1 & 2 & \\
\hline
\text{นาย ก.} & 1 & 0 & -1 & -1 \\
 & 2 & 1 & 0 & 0 \ \text{(maximin)} \\
\hline
 & & 1 & 0 & \\
 & & & \text{(minimax)} &
\end{array}
$$

เกมแมทริกซ์นี้เป็นแผนหรืออุบายบริสุทธิ์ มีจุดมูลค่าเท่ากันเป็น 0

อุบาย : นาย ก. $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

นาย u. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$

มูลค่าเกม v = 0

16. วิธีทำ เกมแมทริกซ์เขียนได้เป็น

$$
\begin{array}{cc|cc|c}
 & & \multicolumn{2}{c|}{\text{บริษัท B}} & \\
 & & \text{กำไรดี} & \text{กำไรน้อย} & \\
\hline
 & \text{กำไรดี} & -4 & -6 & a \\
\text{บริษัท A} & \text{กำไรน้อย} & 3 & -4 & -4 \\
 & \text{เท่าทุน} & 6 & 2 & 2 \ \text{(maximin)} \\
\hline
 & & 6 & 2 & \\
 & & & \text{(minimax)} &
\end{array}
$$

เกมแมทริกซ์นี้เป็นแผนหรืออุบายบริสุทธิ์ มีจุดมูลค่าเท่ากันเป็น 2

อุบาย : บริษัท A $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

บริษัทB $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$

มูลค่าเกม v = 2

17. **วิธีทำ** จากโจทย์เกมแมทริกซ์เป็น

$$
\begin{array}{ll|ccc|l}
 & & & \text{สถานที่ Y} & & \\
 & & \text{ปกติ} & \text{ต่ำ} & \text{ต่ำกว่าทุน} & \\
 & \text{ปกติ} & -4 & 2 & -8 & -8 \\
\text{สถานที่ X} & \text{ต่ำ} & 6 & 4 & -1 & -1 \ (\text{maximin}) \\
 & \text{ต่ำกว่าทุน} & 11 & 6 & -6 & -6 \\
 & & 11 & 6 & -1 & \\
 & & & & (\text{minimax}) &
\end{array}
$$

เกมแมทริกซ์นี้มีแผนหรืออุบายบริสุทธิ์ จุดมูลค่าเท่ากันคือ (-1)

อุบาย : สถานที่ X $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

สถานที่ Y $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

มูลค่าเกม V = -1

สรุป การแข่งขันสำหรับธุรกิจสามราคาต่างๆ กัน สถานที่ X ใช้อุบายที่ราคาต่ำ ขณะที่สถานที่ Y ใช้อุบายที่ราคาต่ำกว่าทุนเท่านั้น

18. **วิธีทำ** เกมแมทริกซ์เขียนได้เป็นตามโจทย์

$$
\begin{array}{ll|ccc|l}
 & & & \text{บริษัท A} & & \\
 & & \text{วิทยุ} & \text{โทรทัศน์} & \text{สิ่งพิมพ์} & \\
 & \text{วิทยุ} & 1 & -1.4 & 0.6 & -1.4 \\
\text{บริษัท B} & \text{โทรทัศน์} & 1.5 & -0.6 & 1.8 & -0.6 \ (\text{maximin}) \\
 & \text{สิ่งพิมพ์} & -0.4 & -2.8 & 0 & -2.8 \\
 & & 1.5 & -0.6 & 1.8 & \\
 & & & (\text{minimax}) & &
\end{array}
$$

เกมแมทริกซ์มีแผนหรืออุบายบริสุทธิ์ จุดมูลค่าเท่ากัน คือ (-0.6)

อุบาย: บริษัท B $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

บริษัท A [0 1 0]

สรุป ทั้งบริษัท A และ B ทำการโฆษณาทางโทรทัศน์เท่านั้น ที่จะเสียผลประโยชน์ต่ำสุด และให้ผลประโยชน์สูงสุด

19. **วิธีทำ** จากโจทย์ เกมแมทริกซ์เขียนได้เป็น

		ผู้เล่นที่ 2		
		ก้อนหิน	ตะไกร	กระดาษ
ผู้เล่นที่ 1	ก้อนหิน	0	1	-1
	ตะไกร	-1	0	1
	กระดาษ	1	-1	0

เนื่องจากว่าเกมแมทริกซ์นี้ ไม่เป็นแผนหรืออุบายบริสุทธิ์ เพราะไม่มีจุดมูลค่าเท่ากัน และแต่ละแผนหรืออุบายของแต่ละแถวหรือคอลัมน์ก็ไม่เหนือกว่ากัน ดังนั้นเกมแมทริกซ์นี้จึงเป็นแผนหรืออุบายผสมและเป็นเกมใหญ่ ให้ X_1, X_2 และ X_3 เป็นอุบายของผู้เล่นที่ 1 ของ ก้อนหิน ตะไกร และกระดาษ Y_1, Y_2 และ Y_3 เป็นอุบายของผู้เล่นที่ 2 ของ ก้อนหิน ตะไกร และกระดาษ V เป็นมูลค่าเกม
เราหาอสมการซึ่งแสดงค่าคาดหวังของผู้เล่นที่ 2

$$0Y_1 + 1Y_2 - Y_3 \leq V$$
$$-Y_1 + 0Y_2 + Y_3 \leq V$$
$$Y_1 - Y_2 + 0Y_3 \leq V$$
$$Y_1 + Y_2 + Y_3 = 1$$

แต่ละอสมการ เอา V หารตลอด ได้

$$\frac{0Y_1}{V} + \frac{1Y_2}{V} - \frac{Y_3}{V} \leq 1$$

$$\frac{-Y_1}{V} + \frac{0Y_2}{V} + \frac{Y_3}{V} \leq 1$$

$$\frac{Y_1}{V} - \frac{Y_2}{V} + \frac{0Y_3}{V} \leq V$$

และ $\quad Y_1 + Y_2 + Y_3 = 1$ เปลี่ยนเป็น

$$\frac{Y_1}{V} + \frac{Y_2}{V} + \frac{Y_3}{V} = \frac{1}{V}$$

ให้ $\quad \overline{Y}_i = \dfrac{Y_i}{V} \qquad i = 1, 2, 3$

ดังนั้น

$$0\overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 - \overline{Y}_3 \leq 1$$

$$-\overline{Y}_1 + 0\overline{Y}_2 + \overline{Y}_3 \leq 1$$

$$\overline{Y}_1 - \overline{Y}_2 + 0\overline{Y}_3 \leq 1$$

และ $\quad \overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 + \overline{Y}_3 = \dfrac{1}{V}$

เนื่องจากว่าต้องการมูลค่าเกม V น้อยที่สุด จึงต้องทำให้ $\dfrac{1}{V}$ มากที่สุด นั่นคือ

ทำ $\quad \overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 + \overline{Y}_3 = \dfrac{1}{V}$ ให้มีค่ามากที่สุด โดยขึ้นอยู่กับ

$$0\overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 - \overline{Y}_3 + \overline{Y}_4 + 0\overline{Y}_5 + 0\overline{Y}_6 = 1$$

$$-\overline{Y}_1 + 0\overline{Y}_2 + \overline{Y}_3 + 0\overline{Y}_4 + \overline{Y}_5 + 0\overline{Y}_6 = 1$$

$$\overline{Y}_1 - \overline{Y}_2 + 0\overline{Y}_3 + 0\overline{Y}_4 + 0\overline{Y}_5 + \overline{Y}_6 = 1$$

ในเมื่อ $\overline{Y}_4$, $\overline{Y}_5$ และ $\overline{Y}_6$ เป็นตัวแปรสำรอง ตารางซิมเพล็กซ์แรก

ตารางซิมเพล็กซ์แรก

โปรแกรม	ทุน หรือ กำไร	ปริมาณ หรือ คำตอบ	$\overline{Y}_1$ (1)	$\overline{Y}_2$ (1)	$\overline{Y}_3$ (1)	$\overline{Y}_4$ (0)	$\overline{Y}_5$ (0)	$\overline{Y}_6$ (0)	
$\overline{Y}_4$	0	1	0	1	-1	1	0	0	∞
$\overline{Y}_5$	0	1	-1	0	1	0	1	0	-1
$\overline{Y}_6$	0	1	1	-1	0	0	0	1	1
Z_j			0	0	0	0	0	0	
$C_j - Z_j$			1	1	1	0	0	0	

<u>ตารางซิมเพล็กซ์ที่สอง</u>

โปรแกรม	ทุน หรือ กำไร	ปริมาณ หรือ คำตอบ	1 $\overline{Y}_1$	1 $\overline{Y}_2$	1 $\overline{Y}_3$	0 $\overline{Y}_4$	0 $\overline{Y}_5$	0 $\overline{Y}_6$	
$\overline{Y}_4$	0	1	0	1	-1	1	0	0	1
$\overline{Y}_5$	0	2	0	-1	1	0	1	0	-2
$\overline{Y}_1$	1	1	1	-1	0	0	0	1	-1
Z_j			1	-1	0	0	0	1	
$C_j - Z_j$			0	2	1	0	0	-1	

<u>ตารางซิมเพล็กซ์ที่สาม</u>

โปรแกรม	ทุน หรือ กำไร	ปริมาณ หรือ คำตอบ	1 $\overline{Y}_1$	1 $\overline{Y}_2$	1 $\overline{Y}_3$	0 $\overline{Y}_4$	0 $\overline{Y}_5$	0 $\overline{Y}_6$	
$\overline{Y}_2$	1	1	0	1	[illegible]	1	0	0	-1
Y_5	0	3	0	0	0	1	1	1	∞
$\overline{Y}_1$	1	2	1	0	-1	1	0	1	-2
Z_j			1	1	-2	2	0	1	
$C_j - Z_j$			0	0	3	-2	0	-1	

เราพบว่า ตัวแปร $\overline{Y}_3$ พร้อมด้วยค่า $C_j - Z_j = 3$ เป็นค่าบวกมากที่สุด ที่ควรนำเข้าในการดำเนินขั้นที่สี่ แต่คำนวณหาตัวแปรเข้ามาแทนที่ เราพบว่า

แถว $\overline{Y}_2$: $1 \div (-1) = -1$

แถว $\overline{Y}_5$: $3 \div 0$ เข้าใกล้อนันต์

แถว $\overline{Y}_1$: $2 \div (-1) = -2$

$\therefore$ ตัวแปร $\overline{Y}_3$ ไม่มีขอบเขต เนื่องจาก $\overline{Y}_3$ สามารถเข้าใกล้อนันต์ เนื่องจาก $\overline{Y}_3$ เป็นตัวแปรในขอบข่าย

$$0\overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 - \overline{Y}_3 \leq 1$$

$$-\overline{Y}_1 + 0\overline{Y}_2 + \overline{Y}_3 \leq 1$$

$$\overline{Y}_1 - \overline{Y}_2 + \overline{Y}_3 \leq 1$$

นี้มีผลให้ ตัวแปร $\overline{Y}_1$ และ $\overline{Y}_2$ อยู่ในโปรแกรม จะเข้าใกล้อนันต์ด้วย

ดังนั้น $\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3 = \frac{1}{V}$

$$2 + 1 + 0 = \frac{1}{V}$$

$$v = 1/3$$

$\bar{Y}_1 = Y_1/V$ $\qquad$ $\bar{Y}_2 = Y_2/V$

$2 = \frac{Y_1}{1/3}$ $\qquad Y_1 = 2/3$ $\qquad$ $1 = \frac{Y_2}{1/3}$

$$Y_2 = 1/3$$

กระบวนการนำไปใช้การคำนวณอุบายของ X อสมการต่อไปนี้ แทนค่าคาดหวังของ X ได้

$$0X_1 - X_2 + X_3 \geq V$$
$$X_1 + 0X_2 - X_3 \geq V$$
$$-X_1 + X_2 + 0X_3 \geq V$$
$$X_1 + X_2 + X_3 = 1$$

เอา v หารตลอด ได้

$$\frac{0X_1}{V} - \frac{X_2}{V} + \frac{X_3}{V} \geq 1$$
$$\frac{X_1}{V} + \frac{0X_2}{V} - \frac{X_3}{V} \geq 1$$
$$\frac{-X_1}{V} + \frac{X_2}{V} + \frac{0X_3}{V} \geq 1$$
$$\frac{X_1}{V} + \frac{X_2}{V} + \frac{X_3}{V} = \frac{1}{V}$$

ให้ $\bar{X}_i = \frac{X_i}{V}$ เราได้

$$0\bar{X}_1 - \bar{X}_2 + \bar{X}_3 \geq 1$$
$$\bar{X}_1 + 0\bar{X}_2 - \bar{X}_3 \geq 1$$
$$-\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + 0\bar{X}_3 \geq 1$$
$$\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \bar{X}_3 = \frac{1}{V}$$

เปลี่ยนอสมการให้เป็นสมการ เขียนได้

$$0\overline{X}_1 - \overline{X}_2 + \overline{X}_3 - \overline{X}_4 + 0\overline{X}_5 + 0\overline{X}_6 + \overline{X}_7 + 0\overline{X}_8 + 0\overline{X}_9 = 1$$

$$\overline{X}_1 + 0\overline{X}_2 - \overline{X}_3 + 0\overline{X}_4 - \overline{X}_5 + 0\overline{X}_6 + 0\overline{X}_7 + \overline{X}_8 + 0\overline{X}_9 = 1$$

$$-\overline{X}_1 + \overline{X}_2 + 0\overline{X}_3 + 0\overline{X}_4 + 0\overline{X}_5 - \overline{X}_6 + 0\overline{X}_7 + 0\overline{X}_8 + \overline{X}_9 = 1$$

โดยให้ $\overline{X}_1 + \overline{X}_2 + \overline{X}_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6 + MX_7 + MX_8 + MX_9 = \frac{1}{V}$

มีค่าน้อยที่สุด

ตารางซิมเพล็กซ์แรก

โปรแกรม	ทุน หรือ กำไร	ปริมาณ หรือ คำตอบ	1 $\overline{X}_1$	1 $\overline{X}_2$	1 $\overline{X}_3$	0 $\overline{X}_4$	0 $\overline{X}_5$	0 $\overline{X}_6$	M $\overline{X}_7$	M $\overline{X}_8$	M $\overline{X}_9$	
$\overline{X}_7$	M	1	0	-1	1	-1	0	0		100		∞
$\overline{X}_8$	M	1	1	0	-1	0	-1	0		010		1
$\overline{X}_9$	M	1	-1	1	0	0	0	-1	0	0	1	-1
Z_j			0	0	0	-M	-M	-M	M	M	M	
$C_j - Z_j$			1	1	1	M	MM		0	0	0	

เนื่องจากว่า แถว $C_j - Z_j$ ให้ค่าเป็นศูนย์และค่าบวก แสดงว่าโปรแกรมนี้ ให้ผลลัพธ์ดีที่สุด นั่นคือ ทุนน้อยที่สุด แต่ผลลัพธ์อันนี้เกิดขึ้นตรงกันข้ามกัน โปรแกรมนี้เป็นอันยุติและหาค่าไม่ได้

20. สิ่งที่กำหนดให้

	ฤดูกาลทางการเมือง		
	เหตุการณ์ปัจจุบัน	สงครามเพิ่มขึ้น	สงบ
พันธบัตร	13%	13%	13%
หุ้นการบินไทย	15%	10%	18%
หุ้นการไฟฟ้า	12%	6 %	24%

เกมส์เมทริกซ์นี้มีอุบายบริสุทธิ์ จุดมูลค่าเท่ากันคือ 13 อุบายและมูลค่าเกมคือ

อุบาย : $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

คำถามแบบเติมในช่องว่าง

	คำตอบ
1. อุบาย..............................เป็นอุบายหนึ่งซึ่งจะดำเนินเรื่อยไปตลอดเวลา และอุบาย ....เป็นอุบายหนึ่งซึ่งมีคุณลักษณะดำเนินตามสัดส่วนของเวลาที่เล่นแต่ละแถว (หรือคอลัมน์)	บริสุทธิ์ ผสม
2. ในทฤษฎีเกม สิ่งตอบแทนเฉลี่ยต่อเกมตลอดอนุกรมอันยาวของการเล่นเกม เรียกว่า..............................	มูลค่าเกม
3. สภาวะในที่ซึ่งอุบายเฉพาะจะดีกว่าหรือเลวกว่าอุบายอื่น ๆ เสมอ เรียกว่า	การครอบงำ

คำถามแบบถูกผิด

TF 4. ในเกมผลรวมสองบุคคลเป็นศูนย์ (two person zero – sum game) จุดมูลค่าเท่ากันคือมูลค่าของเกมซึ่งเป็นผลลัพธ์เมื่อไรแต่ละผู้เล่นดำเนินอุบายบริสุทธิ์ไปเรื่อย

TF 5. การขจัดของแถวที่ถูกครอบงำ (หรือคอลัมน์ที่ถูกครอบงำ) มีประโยชน์ในการลดปัญหาใหญ่ เป็นปัญหาหนึ่งซึ่งสามารถนำเอาวิธีการมาควบคุมการใช้ให้เป็นประโยชน์ในการคำนวณอุบายผสม

TF 6. จุดมูลค่าเท่ากัน คือ สมาชิกหนึ่งในเมตริกซ์สิ่งตอบแทนซึ่งมีค่ามากที่สุดในแถวของจุดมูลค่าเท่ากันกับมีค่าน้อยที่สุดในคอลัมน์ของจุดมูลค่าเท่ากัน

TF 7. ข้อเสียข้อหนึ่งต่อการใช้ทฤษฎีเกมในทางปฏิบัติ คือว่า เป็นการยากต่อการแสดงสิ่งตอบแทนในรูปเชิงปริมาณ

คำถามแบบปรนัย

8. สำหรับเกมซึ่งไม่มีจุดมูลค่าเท่ากัน มูลค่าเกมสามารถคำนวณหาได้อย่างไร ?
   ก. โดยใช้ความน่าจะเป็นร่วมของแต่ละส่วนประกอบของแถวกับคอลัมน์เพื่อถ่วงน้ำหนักสิ่งตอบแทนสำหรับส่วนประกอบนั้นและรวมส่วนประกอบที่เป็นไปได้ทั้งหมด
   ข. โดยการถ่วงน้ำหนักมูลค่าคาดหวังของสิ่งตอบแทนเมื่อไรฝ่ายตรงข้ามเล่นคอลัมน์ที่กำหนดให้ โดยใช้ความน่าจะเป็นที่ฝ่ายตรงข้ามจะเล่นคอลัมน์นั้นและรวมตลอดคอลัมน์ทั้งหมด
   ค. มูลค่าเกมไม่สามารถคำนวณหาได้ในตัวอย่างนี้
   ง. ทั้งข้อ ก และ ข

9. เกมซึ่งเกี่ยวข้องกันมากกว่าสองบุคคลหรือสิ่งได้เสียคู่กัน เรียกว่า
   ก. เกม N บุคคล
   ข. เกมที่เจรจาได้ (negotiable games)
   ค. เกมไม่จำกัดข้อกำหนด
   ง. เกมที่ขัดแย้งกัน

10. ในทฤษฎีเกม เมื่อไรที่ผลรวมของฝ่ายที่ได้ของบุคคลหนึ่งเท่ากับผลรวมของฝ่ายที่เสียของอีกบุคคลหนึ่ง ที่เป็นที่ทราบเป็นเสมือน
    ก. เกมสะสม
    ข. เกมที่ความเอนเอียง
    ค. เกมเมตริกซ์
    ง. เกมรวมเป็นศูนย์

11. สิ่งตอบแทนที่เมื่อไรแต่ละผู้ร่วมมือในเกมทำการตัดสินใจเหมือนกันเสมอ เรียกว่า
    ก. จุดสมดุล
    ข. จุดมูลค่าเท่ากัน
    ค. สิ่งตอบแทนที่ให้ผลประโยชน์สูงสุดส่วนย่อย
    ง. ถูกทุกข้อ

12. ถ้าหากว่าอนุญาตให้ผู้เล่นในเกมเพื่อการรวบรวมกำลังกัน เรียกว่า
    ก. เกม N บุคคล
    ข. เกมที่เจรจาได้
    ค. เกมไม่เป็นศูนย์
    ง. เกมที่ไม่ยุติธรรม

เฉลยคำตอบ

4. T 5. T 6. F 7. T 8. ง 9. ก 10. ง 11. ก 12. ข