เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 1

ความน่าจะเป็น

ทำแบบฝึกหัด

1. กำหนดให้

$$f(y) = \frac{100}{y^2} \qquad \text{สำหรับ } y \geqslant 100$$
$$= 0 \qquad \text{สำหรับ } y < 100$$

ก. **วิธีทำ** ให้ Y เป็นอายุของหลอดวิทยุและเป็นตัวแปรต่อเนื่อง

$$P(Y = 150) = \int_{150}^{150} \frac{100}{y^2} dy$$
$$= \left. \frac{100y^{-1}}{-1} \right|_{150}^{150}$$
$$= -\frac{100}{150} + \frac{100}{150} = 0$$

หมายเหตุ ตัวแปรต่อเนื่องเมื่อไรหาค่าความน่าจะเป็นของจุด จะมีค่าเท่ากับศูนย์

ข. **วิธีทำ** หาค่าคาดหวังของ Y (E(Y)) ได้

$$E(Y) = \int_{100}^{\infty} \frac{100y}{Y^2} dy = \int_{100}^{\infty} \frac{100}{y} dy$$
$$= 100 \ell n\, y \Big|_{100}^{\infty} = 100(\ell n\ \infty - \ell n\ 100)$$
$$= 100 \ell n\, \infty - 200 Pn\ 10 \qquad \text{ซึ่งหาค่าไม่ได้}$$

2 . กำหนดให้

$$f(y) = K(1 - y^2) \qquad \text{สำหรับ } -1 < y < 1$$
$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

ก. **วิธีทำ** หาค่า K ที่จะทำให้ f(y) เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นจริง ๆ จะได้ว่า

$$\int_{-1}^{1} f(y)dy = \int_{-1}^{1} K(1 - y^2)dy = 1$$
$$= \int_{-1}^{1} Kdy - \int_{-1}^{1} Ky^2 dy = 1$$
$$= Ky \Big|_{-1}^{1} - \frac{Ky^3}{3} \Big|_{-1}^{1} = 1$$

$$= \quad K(1+1) - \frac{K}{3}(1^3 + 1^3) \quad = \quad 1$$

$$\int_{-1}^{1} f(y)dy \quad = \quad 2K - \frac{2K}{3} \quad = \quad 1$$

$$\frac{4K}{3} \quad = \quad 1$$

$$K \quad = \quad \frac{3}{4}$$

ข. **วิธีทำ** ให้ C.D.F. ของ y เขียนได้เป็น F(y) ซึ่งคำนวณหาได้

$$F(y) \quad = \quad \int_{-1}^{y} \frac{3}{4}(1 - t^2)dt$$

$$= \quad \left(\frac{3t}{4} - \frac{3t^3}{12}\right)\Big|_{-1}^{y} \quad = \quad \left(\frac{3y}{4} - \frac{y^3}{4}\right) - \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= \quad \frac{1}{2} + \frac{y}{4}(3 - y^2) \qquad\qquad -1 < y < +1$$

$$= \quad 0 \qquad\qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

ค. **วิธีทำ**

$$E(2Y - 1) \quad = \quad \int_{-1}^{1} (2y - 1)\, \frac{3}{4}(1 - y^2)dy$$

$$= \quad \int_{-1}^{1} \left(-\frac{3}{4} + \frac{3}{2}y + \frac{3}{4}y^2 - \frac{3}{2}y^3\right)dy$$

$$= \quad \int_{-1}^{1} -\frac{3}{4}dy + \int_{-1}^{1} \frac{3}{2}ydy + \int_{-1}^{1} \frac{3}{4}y^2dy - \int_{-1}^{1} \frac{3}{2}y^3dy$$

$$= \quad \left(-\frac{3}{4}y + \frac{3}{4}y^2 + \frac{y^3}{4} - \frac{3}{8}y^4\right)\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \quad \left(-\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{3}{8}\right) - \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{3}{8}\right)$$

$$= \quad -\frac{1}{8} - \frac{7}{8} \quad = \quad -1$$

94

ง. **วิธีทำ**

$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))$$

$$E(Y) \quad = \quad \int_{-1}^{1} y\frac{3}{4}(1 - y^2)dy \quad = \quad \int_{-1}^{1} \frac{3}{4}ydy - \int_{-1}^{1} \frac{3}{4}y^3dy$$

$$= \left(\frac{3}{4}\times\frac{y^2}{2}-\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$= \left(\frac{3}{8}-\frac{3}{16}\right)-\left(\frac{3}{8}-\frac{3}{16}\right) = 0$$

$$E(Y^2) = \int_{-1}^{1} y^2\frac{3}{4}(1-y^2)dy$$

$$= \int_{-1}^{1}\frac{3}{4}y^2dy-\int_{-1}^{1}\frac{3}{4}y^4dy$$

$$= \left(\frac{3}{4\times 3}y^3-\frac{3}{4}\frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$= \left(\frac{1}{4}-\frac{3}{20}\right)-\left(-\frac{1}{4}+\frac{3}{20}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{20}\right)-\left(-\frac{2}{20}\right) = \frac{1}{5}$$

$$V(Y) = E(Y^2)-(E(Y))^2$$

$$= \frac{1}{5}-0 = \frac{1}{5}$$

จ. วิธีทำ

เนื่องจากว่า $\bar{Y} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}$

$$E(\bar{Y}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}Y_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(Y_i)$$

$$= E(Y_i) = 0$$

$$V(\bar{Y}) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 V\left(\sum_{i=1}^{n}Y_i\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2\sum_{i=1}^{n}V(Y_i)$$

$$= \frac{V(Y_i)}{n} = \frac{1}{500} = 0.002$$

จากทฤษฎีขีดจำกัดส่วนกลาง $\bar{Y}$ มีการแจกแจงเข้าใกล้ปกติ ดังนั้น

$$P(\bar{Y} > 0.05) = P\left[\frac{\bar{Y}-E(\bar{Y})}{\sqrt{V(\bar{Y})}} > \frac{0.05-0}{\sqrt{0.002}}\right]$$

$$= 1-P\left(Z \leqslant \frac{0.05}{\sqrt{0.002}}\right)$$

$$= 1-P\left(Z \leqslant \frac{0.05}{0.0447}\right)$$

$$= 1 - P(Z \leqslant 1.12) = 1-0.8686$$
$$= 0.1314$$

3. วิธีทำ

$$f(y) = \frac{\alpha}{10{,}000}\left(1-\frac{y}{10{,}000}\right) \qquad 0 < y < 10{,}000$$
$$= 0 \qquad \text{สำหรับค่าอื่น ๆ}$$

ก. คำนวณหาค่า α

$$\int_0^{10{,}000} \frac{\alpha}{10{,}000}\left(1-\frac{y}{10{,}000}\right)dy = 1$$

$$\alpha\int_0^{10{,}000} \left(\frac{1}{10{,}000}-\frac{y}{10{,}000^2}\right)dy = 1$$

$$\alpha\left[\int_0^{10{,}000} \frac{1}{10{,}000}dy - \int_0^{10{,}000} \frac{y}{10{,}000^2}dy\right] = 1$$

$$\alpha\left[\frac{y}{10{,}000}\Big|_0^{10{,}000} - \frac{y^2}{2\times 10{,}000^2}\Big|_0^{10{,}000} 1 = 1\right.$$

$$\alpha\left[1-1 = 1\right.$$

$$a = 2$$

ข. หาค่าคาดหวังของอายุทรานซิสเตอร์

$$E(Y) = \int_0^{10{,}000} \frac{2y}{10{,}000}\left(1-\frac{y}{10{,}000}\right)dy$$

$$= \int_0^{10{,}000} \frac{2y}{10{,}000}dy - \int_0^{10{,}000} \frac{2y^2}{10{,}000^2}dy$$

$$= \frac{y^2}{10{,}000}\Big|_0^{10{,}000} - \frac{2y^3}{3\times 10{,}000^2}\Big|_0^{10{,}000}$$

$$= (10{,}000) - \left(\frac{2\times 10{,}000}{3}\right)$$

$$= \frac{10{,}000}{3}$$

ค. คำนวณ C.D.F.

$$F(y) = \int_0^Y f(y)dy = 0 \qquad y < 0$$

$$= \int_0^{10,000} \frac{2}{10,000}\left(1 - \frac{y}{10,000}\right)dy = \frac{2}{10,000}\left(y - \frac{y^2}{20,000}\right), 0 < Y < 10,000$$

$$= 1 \qquad y \geqslant 1$$

ง. $F(z) = P(Z \leqslant z) = P(2Y \leqslant z)$

$$= P\left(Y \leqslant \frac{z}{2}\right)$$

แทนค่าลงในข้อ ค. ได้

$$F(z) = 0 \qquad \text{ถ้าหากว่า } z < 0$$

$$= \frac{2}{10,000}\left(\frac{z}{2} - \frac{z^2}{80,000}\right) \qquad 0 \leqslant z < 20,000$$

$$= 1 \qquad z \geqslant 20,000$$

4. **วิธีทำ**

ก. ให้ X_i เป็นขนาดของขวดบรรจุของเหลวมาตรฐาน มีการแจกแจงพร้อมด้วย $E(X_i) =$ 16 ออนซ์ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 0.07 ออนซ์

ให้ $Y = X_1 + X_2 + X_3$ แล้ว

$$E(Y) = E(X_1 + X_2 + X_3) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)$$

$$= 16 + 16 + 16 = 48$$

$$V(Y) = V(X_1 + X_2 + X_3) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3)$$

$$= 0.07^2 + 0.07^2 + 0.07^2 = 3(0.07)^2$$

ข. $P(Y > 48.25) = P\left[\frac{Y - E(y)}{\sqrt{V(Y)}} > \frac{48.25 - 48}{\sqrt{3(.07)^2}}\right]$

$$= P\left(Z > \frac{.25}{0.12}\right) = P(Z > 2.08)$$

$$= 0.5000 - P(Z \leqslant 2.08)$$

$$= 0.5000 - 0.4812 = 0.0188$$

5. **วิธีทำ** จาก Chebychev's inequality

$$P\left[|\bar{X}-\mu| \leqslant k\sigma_{\bar{X}}\right] \geqslant 1-\frac{1}{k^2}$$

ในเมื่อ

$$P\left[\left|\frac{1,000}{5,000}\bar{X}-\frac{1,000}{5,000}\mu\right| \leqslant 20\right] \geqslant 0.95$$

$$P\left[\frac{1}{5}\left|\bar{X}-\mu\right| \leqslant 20\right] \geqslant 0.95$$

$$P\left[\left|\bar{X}-\mu\right| 6 \quad 100\right] \geqslant 0.95$$

$$k\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 100, \qquad k^2 = 20$$

ในเมื่อ $k = \sqrt{20}, \quad \sigma = 200$

$$\frac{\sqrt{20}\times 200}{\sqrt{n}} = 100$$

$$\sqrt{n} = \frac{\sqrt{20}\times 200}{100} = \sqrt{20}\times 2$$

$$n = 20\text{x}4 = 80$$

6. **วิธีทำ**

ให้ $P(c_1) = 0.6$ คือ ความน่าจะเป็นที่จะโยนเหรียญที่ 1

$P(c_2) = 0.4$ คือ ความน่าจะเป็นที่จะโยนเหรียญที่ 2

$P(H/c_1) = 0.3$ คือ ความน่าจะเป็นที่ปรากฏเป็นหัวของเหรียญที่ 1

$P(H/c_2) = 0.6$ คือ ความน่าจะเป็นที่ปรากฏเป็นหัวของเหรียญที่ 2

ก. กระบวนการของเบย์ส ก่อนการโยนเหรียญจะเป็น

$$E\left[\ell(a_1)\right] = (0)(.6)+1(.4) = 0.4 \qquad \text{(โยนเหรียญที่ 1)}$$

$$E\left[\ell(a_2)\right] = (1)(.6)+0(.4) = 0.6 \qquad \text{(โยนเหรียญที่ 2)**}$$

กระบวนการของเบย์สก่อนการโยนเหรียญจะเป็น 0.6

ข. กระบวนการของเบย์ส ถ้าโยนเหรียญหนึ่งครั้งและผลลัพธ์เป็นหัว

$$P(c_1/H) = \frac{P(c_1)P(H/c_1)}{P(c_1)P(H/c_1)+P(c_2)P(H/c_2)}$$

$$= \frac{(0.6)(0.3)}{(0.6)(0.3)+(0.4)(0.6)} = \frac{18}{42} = \frac{3}{7}$$

$$P(c_2/H) = \frac{P(c_2)P(H/c_2)}{P(c_1)P(H/c_1)+P(c_2)P(H/c_2)}$$

$$= \frac{(0.4)(0.6)}{(0.6)(0.3)+(0.4)(0.6)} = \frac{24}{42} = \frac{4}{7}$$

$$E[\ell(a_1/H)] = (0)\left(\frac{3}{7}\right)+(1)\left(\frac{4}{7}\right) = \frac{4}{7} \quad \text{(เหรียญที่ 1)}$$

$$E[\ell(a_2/H)] = (1)\left(\frac{3}{7}\right)+(0)\left(\frac{4}{7}\right) = \frac{3}{7} \quad \text{(เหรียญที่ 2)} \;**$$

กระบวนการของเบย์ส ถ้าผลลัพธ์เป็นหัวคือ $\frac{3}{7}$

จาก $P(H/c_1) = 0.3 \Rightarrow P(T/c_1) = 0.7$

$P(H/c_2) = 0.6 \Rightarrow P(T/c_2) = 0.4$

$$\therefore\ P(c_1/T) = \frac{P(c_1)P(T/c_1)}{P(c_1)P(T/c_1)+P(c_2)P(T/c_2)}$$

$$= \frac{(0.6)(0.7)}{(0.6)(0.7)+(0.4)(0.4)} = \frac{42}{58} = \frac{21}{29}$$

$$P(c_2/T) = \frac{P(c_2)P(T/c_2)}{P(c_1)P(T/c_1)+P(c_2)P(T/c_2)}$$

$$= \frac{(0.4)(0.4)}{(0.6)(0.7)+(0.4)(0.4)} = \frac{16}{58} = \frac{8}{29}$$

$$E[\ell(a_1/T)] = (0)\left(\frac{21}{29}\right)+(1)\left(\frac{8}{29}\right) = \frac{8}{29} \quad **$$

$$E[\ell(a_2/T)] = (1)\left(\frac{21}{29}\right)+(0)\left(\frac{8}{29}\right) = \frac{21}{29}$$

กระบวนการของเบย์ส ถ้าผลลัพธ์เป็นก้อยคือ $\frac{8}{29}$

7. **วิธีทำ**

ราคาขายกำหนดที่ \$1.00 ถ้าการรับประกันนี้สมบูรณ์

ราคาขาย \$0.50 ถ้าการรับประกันนี้จะชดใช้ 10 เซนต์ต่อแผ่นที่เสียหนึ่ง

ต้นทุนของฟิล์ม \$0.25 และไม่มีการคืน

ผู้ซื้อเลือกได้ 3 พฤติกรรม

- a_1 ทิ้งฟิล์มเสีย
- a_2 ขายฟิล์ม \$1.00
- a_3 ขายฟิล์ม \$0.50

ก) ถ้าสภาวะธรรมชาติทั้งหกสมนัยกับแผ่นกระดาษที่เสีย 0, 1, 2, 3, 4, 5 ในการห่อ

a \ θ	0	1	2	3	4	5
a_1	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25
a_2	−0.75	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25
a_3	−0.25	−0.15	−0.05	0.05	0.15	0.25

ข) จาก

$$P(\theta = k) = \binom{5}{k}(0.05)^k(0.95)^{5-k}$$

$$P(\theta = 0) = \binom{5}{0}(0.05)^0(0.95)^5 = 0.774$$

$$P(\theta = 1) = \binom{5}{1}(0.05)(0.95)^4 = 0.2036$$

$$P(\theta = 2) = \binom{5}{2}(0.05)^2(0.95)^3 = 0.021'4$$

$$P(\theta = 3) = \binom{5}{3}(0.05)^3(0.95)^2 = 0.00113$$

$$P(\theta = 4) = \binom{5}{4}(0.05)^4(0.95)^1 = 0.296\times 10^{-4}$$

$$P(\theta = 5) = \binom{5}{5}(0.05)^5(0.95)^0 = 0.3125\times 10^{-6}$$

$$E(\ell(a_1)) = (0.25)(0.744)+(0.25)(0.2036)+(0.25)(0.0214)+(0.25)(0.00113)$$
$$+(0.25)(0.296x\ 10^{-4})+(0.25)(0.3125\times 10^{-6})$$
$$= 0.25$$

$$E(\ell(a_2)) = (-0.75)(0.744)+(.25)(0.2036)+(0.25)(0.0214)+(0.25)(.00113)$$
$$+(0.25)(0.296x\ 10^{-4})+(0.25)(0.3125)(10^{-6})$$
$$= -0.558+0.064 = -0.494 \quad ***$$

$$E(\ell(a_3)) = (-0.25)(0.744)+(-0.15)(0.2036)+(-0.05)(0.0214)+(0.05)(0.00113)$$
$$(0.15)(0.296\times 10^{-4})+(0.25)(0.3125\times 10^{-6})$$

$= -0.186-0.03054-0.00107+0.0000565+0.0000044+0.078125\times 10^{-6}$

$= -0.21761+0.60978\times 10^{-4} = -0.21754$

$= -0.21754$

กระบวนการของเบย์สก่อนการทดสอบแผ่นกระดาษคือ -0.494

ค) กระบวนการของเบย์ส ภายหลังลงมือทดสอบแผ่นกระดาษ ถ้าหากว่าการพิมพ์ นั่น คือ $\theta = 0$

$E(\ell(a_1/\theta = 0)) = (0.25)(0.774) = 0.1935$

$E(\ell(a_2/\theta = 0)) = (-0.75)(0.774) = -0.5805$ **

$E(\ell(a_2/\theta = 0)) = (-0.25)(0.774) = -0.1935$

กระบวนการของเบย์สถ้าหากว่าการพิมพ์ดี คือ -0.5805

กระบวนการของเบย์สภายหลังลงมือทดสอบแผ่นกระดาษ ถ้าหากว่าการพิมพ์เสีย นั่น คือ $\theta = 1, 2, 3, 4, 5$

$E(\ell(a_1/\theta = 1,2,3,4,5)) = (0.25)(0.2036)+(0.25)(0.0214)+(0.25)(0.00113)$
$+(0.25)(0.296\times 10^{-4})+(0.25)(0.3125\times 10^{-6})$
$= (0.25)(0.226) = 0.0565$
$= 0.0565$

$E(\ell(a_2/\theta = 1,2,3,4,5)) = (0.25)(0.226) = 0.0565$

$E(\ell a_3/\theta = 1,2,3,4,5) = (-0.15)(0.2036)+(-0.05)(0.0214)+(0.05)(0.00113)$
$+(0.15)(0.296\times 10^{-4})+(0.25)(0.3125\times 10^{-6})$
$= -0.03054-0.00107+.0000565+0.0444\times 10^{-4}$
$+0.07813\times 10^{-6}$
$= -0.03161+0.61018\times 10^{-4}$
$= -0.03155$