

ความแปรปรวนและความแปรปรวนรวมของแบบทดสอบ 6

วัตถุประสงค์

- เมื่อผู้อ่านได้ศึกษาเนื้อหาบทที่ 6 แล้ว ควรจะมีความสามารถดังนี้
1. นิยามและคำนวณความแปรปรวนของคะแนนที่กำหนดให้ได้
 2. แยกองค์ประกอบของความแปรปรวนของข้อสอบทั้งฉบับได้
 3. คำนวณค่าความแปรปรวนรวมจากคะแนนที่กำหนดให้ได้

6.1 ความแปรปรวน

การแปรเปลี่ยนของการแจกแจงของข้อมูล อาจแสดงให้เห็นได้ในรูปของพิสัย ความเบี่ยงเบนมาตรฐาน semi-interquartile range โดยปกติคะแนนที่ได้จากการสอบ มักจะแสดงการแปรเปลี่ยนของคะแนนในรูปกำลังสองของความเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S^2) ซึ่งเรียกความแปรปรวน (Variance) หาได้จากสูตร

$$S_x^2 = \frac{\sum (X - M_x)^2}{N}$$

เมื่อ S_x^2 แทนความแปรปรวนของคะแนนในตัวแปร X

X แทนคะแนนที่วัดได้

M_x แทนคะแนนเฉลี่ย

N แทนจำนวนการวัดทั้งหมด

ถ้าให้ x แทน $X - M_x$

$$\text{จะได้ว่า } S_x^2 = \frac{\sum x^2}{N} \quad \dots\dots\dots (6-1)$$

$$\text{หรือ } S_x = \sqrt{\frac{\sum x^2}{N}} \quad \dots\dots\dots (6-2)$$

จากสูตรข้างต้น จะเห็นได้ว่าความแปรปรวนของคะแนนหาได้จากผลรวมของกำลังสองของคะแนนที่เบี่ยงเบนไปจากค่าเฉลี่ย (mean) ดังนั้น ถ้าไม่มีความแตกต่างกันเลย คือนักเรียนทุกคนต่างได้คะแนนเท่ากัน ความแปรปรวนของคะแนนก็จะเป็น 0

ในกรณีที่ความแปรปรวนคำนวณมาจากตัวแปรที่เป็น dichotomous เช่น ได้กับตักค่าความแปรปรวนจะเท่ากับผลคูณของสัดส่วนของจำนวนนักเรียนที่ตอบข้อนั้นถูก (p) กับสัดส่วนของจำนวนนักเรียนที่ตอบข้อนั้นผิด (q) ดังนั้นจะได้ว่า

$$S^2 = pq$$

เมื่อ S^2 แทนความแปรปรวนของคะแนนในข้อสอบแต่ละข้อ

p แทนสัดส่วนของนักเรียนที่ตอบข้อนั้นถูก กับจำนวนนักเรียนทั้งหมด

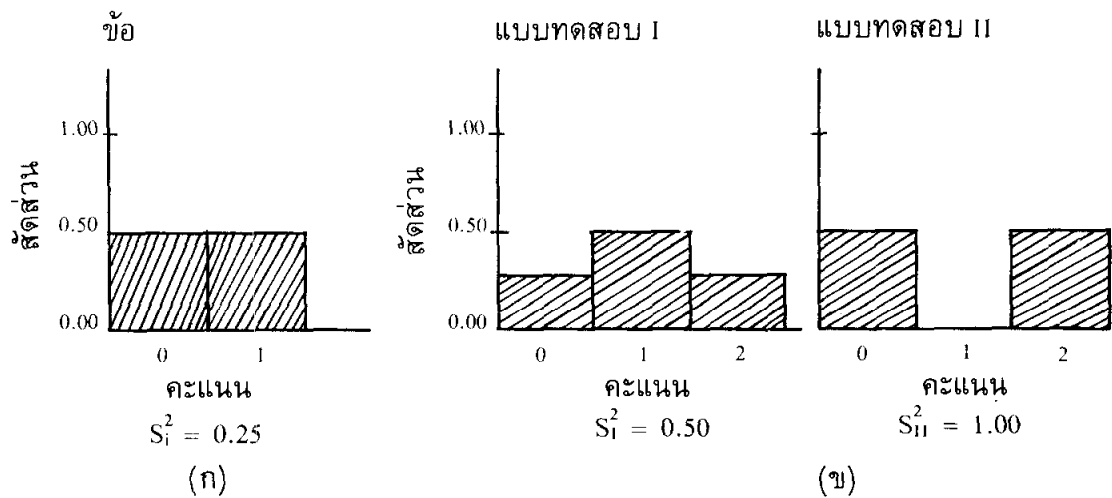
q แทนสัดส่วนของนักเรียนที่ตอบข้อนั้นผิด กับจำนวนนักเรียนทั้งหมด

จะเห็นได้ว่าความแปรปรวน (S^2) ของข้อสอบแต่ละข้อแปรเปลี่ยนไปตามสัดส่วนของนักเรียนที่ตอบข้อนั้นถูก (p) เช่น ถ้าไม่มีผู้ตอบถูกเลย p จะเท่ากับ 0 และความแปรปรวนก็จะเป็น 0 ความแปรปรวนจะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อความถี่ของจำนวนนักเรียนที่ตอบข้อนั้นถูกเพิ่มขึ้น จนกระทั่ง $p = 0.50$ นั่นคือ $p = 0.50, q = 0.50$ ค่าความแปรปรวนจะมีค่าสูงสุด และความแปรปรวนจะมีค่าลดลง เมื่อ p มีค่ามากกว่า 0.50

ตาราง 6-1 แสดงคะแนนของนักเรียน 12 คน ในข้อ 1 และข้อ 2 จากแบบทดสอบ 2 ฉบับ

แบบทดสอบ	I		II	
ข้อ	1	2	1	2
1	1	0	1	1
2	1	0	0	0
3	1	0	1	1
4	0	1	1	1
5	0	1	1	1
6	0	1	0	0
7	0	0	0	0
8	0	0	0	0
9	0	0	1	1
10	1	1	0	0
11	1	1	1	1
12	1	1	0	0
p	0.50	0.50	0.50	0.50
q	0.50	0.50	0.50	0.50
r_{phi}	0		1.0	

จากตาราง 6-1 จะเห็นได้ว่า r_{phi} ของข้อสอบ 2 ข้อ ในแบบทดสอบฉบับที่ 1 เป็น 0 ดังนั้นจะใช้คะแนนจากข้อหนึ่งทำนายอีกข้อหนึ่งไม่ได้ และค่า r_{phi} ของข้อสอบ 2 ข้อ ในแบบทดสอบฉบับที่ 2 เป็น 1 นั่นคือสามารถทำนายได้ว่าคนที่ทำข้อสอบข้อ 1 ถูก จะทำข้อสอบข้อ 2 ถูกด้วย



รูป 6-1 แสดงการแจกแจงของคะแนน

การแจกแจงความถี่ของข้อสอบข้อใดข้อหนึ่ง ซึ่งแสดงในรูป 6-1 (ก) นั้น จะเหมือนกัน และมีความแปรปรวนเท่ากัน กล่าวคือทุก ๆ ข้อใน 4 ข้อนี้ มีค่า p และ q เท่ากับ 0.50 และความแปรปรวนเท่ากับ 0.25

ดังนั้น สามารถคำนวณหาความแปรปรวนของข้อสอบฉบับที่ 1 (S_1^2) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} S_1^2 &= S_1^2 + S_2^2 + 2r_{12}S_1S_2 \\ &= 0.25 + 0.25 + 0 \\ &= 0.50 \end{aligned}$$

เนื่องจากสหสัมพันธ์ระหว่างข้อ 1 และข้อ 2 ในแบบทดสอบฉบับที่ 1 เป็น 0

$$\text{ดังนั้น } 2r_{12}S_1S_2 = 0$$

และความแปรปรวนของข้อสอบฉบับที่ 2 (S_{II}^2) จะเป็นดังนี้

$$\begin{aligned} S_{II}^2 &= S_1^2 + S_2^2 + 2r_{12}S_1S_2 \\ &= 0.25 + 0.25 + (2 \times 1.0 \times 0.25) \\ &= 1.0 \end{aligned}$$

จากแบบทดสอบฉบับที่ 2 จะได้ว่า $S_1 = S_2$

$$\text{ดังนั้น } S_1S_2 = S_1^2$$

จากรูป 6-1 (ข) ได้แสดงให้เห็นถึงลักษณะของการแจกแจงของข้อสอบ 2 ฉบับ กล่าวคือ ถ้าสหสัมพันธ์ระหว่างข้อสอบ 2 ข้อ เป็น 0 จะได้ลักษณะการแจกแจงเป็นแบบ binomial และถ้าสหสัมพันธ์ระหว่างข้อสอบ 2 ข้อ เป็น 1.0 จะได้ลักษณะการแจกแจงเป็นแบบ bimodal

โดยทั่วไปความแปรปรวนของข้อสอบ n ข้อ จะเป็นดังนี้

$$S_x^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + \dots + S_i^2 + \dots + S_n^2 + 2r_{12}S_1S_2 + \dots + 2r_{1i}S_1S_i \\ + \dots + 2r_{1n}S_1S_n + \dots + 2r_{(n-1)n}S_{n-1}S_n$$

หรือเขียนให้อยู่ในรูปอย่างง่ายได้ดังนี้

$$S_x^2 = \sum S_i^2 + 2 \sum r_{ik}S_iS_k, i > k \quad \dots\dots\dots (6-3)$$

เมื่อ $\sum S_i^2$ แทนผลรวมของความแปรปรวนของข้อสอบแต่ละข้อ

$2 \sum r_{ik}S_iS_k$ แทนผลรวมของความแปรปรวนร่วม ซึ่งมี $n(n-1)$ เทอม

ความแปรปรวนสามารถสรุปเป็นกฎเกณฑ์ได้ดังนี้

1. ความแปรปรวนของแบบทดสอบ หาได้จากความแปรปรวนของข้อสอบแต่ละข้อ กับค่าสหสัมพันธ์ภายในของข้อสอบแต่ละข้อ
2. ความแปรปรวนของแบบทดสอบ จะมีค่าสูงเมื่อข้อสอบแต่ละข้อมีความแปรปรวนสูง
3. ความแปรปรวนของแบบทดสอบ จะมีค่าสูงเมื่อสหสัมพันธ์ภายในของข้อสอบแต่ละข้อมีค่าสูง

6.2 ความแปรปรวนร่วม

จากสมการ 6-3 ซึ่งเป็นสมการของความแปรปรวน จะประกอบด้วยเทอมที่เป็นผลบวกของ $r_{ik}S_iS_k$ ค่าของเทอมนี้คือค่าความแปรปรวนร่วม (Covariance) เขียนแทนด้วย C_{ik}

สมการทั่วไปของสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่างข้อสอบข้อ i กับข้อ k เขียนได้ดังนี้

$$r_{ik} = \sum x_i x_k / NS_i S_k$$

$$\text{เนื่องจาก } C_{ik} = r_{ik}S_iS_k$$

$$\text{ดังนั้น } C_{ik} = \sum x_i x_k / N \quad \dots\dots\dots (6-4)$$

นั่นคือ ความแปรปรวนร่วมเป็นค่าเฉลี่ยของผลคูณของค่าความเบี่ยงเบนจากค่าเฉลี่ยในตัวแปรทั้งสองชุด

ค่า r_{ik} สามารถคำนวณโดยใช้ ϕ -coefficient

$$\text{เนื่องจาก } S_i = \sqrt{p_i q_i} \quad \text{และ} \quad S_k = \sqrt{p_k q_k}$$

ดังนั้น สามารถเขียนสมการของความแปรปรวนร่วมให้อยู่ในรูปอย่างง่ายได้ดังนี้

$$C_{ik} = p_{ik} - p_i p_k \quad \dots\dots\dots (6-5)$$

เมื่อ p_{ik} แทนสัดส่วนของจำนวนคนที่สามารถตอบถูกทั้ง 2 ข้อ

สรุปเนื้อหาบทที่ 6

1. ความแปรปรวนของแบบทดสอบทั้งฉบับ หาได้จากผลรวมของความแปรปรวนของข้อสอบแต่ละข้อกับความแปรปรวนรวม
2. ความแปรปรวนของแบบทดสอบทั้งฉบับจะมีค่าสูงเมื่อข้อสอบแต่ละข้อมีความแปรปรวนสูง หรือสหสัมพันธ์ภายในของข้อสอบแต่ละข้อมีค่าสูง
3. ความแปรปรวนรวมเป็นผลคูณระหว่างค่าสหสัมพันธ์ภายในของข้อสอบแต่ละข้อกับค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อสอบแต่ละข้อ ดังนั้นถ้าไม่มีความสัมพันธ์ระหว่างข้อสอบแต่ละข้อแล้วก็จะไม่มีความแปรปรวนรวม
4. แบบทดสอบที่มี n ข้อ จะมีค่าความแปรปรวนรวมอยู่ $n(n - 1)$ เทอม

คำถามท้ายบทที่ ๕

1. ถ้าแบบทดสอบฉบับหนึ่งแบ่งออกเป็น 2 ส่วน คือ ข้อคู่ (a) กับข้อคี่ (b) ความแปรปรวนของข้อสอบทั้งฉบับจะมีค่าเท่าไร
2. ถ้าแบบทดสอบฉบับหนึ่งมี 50 ข้อ จะมีความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วมอย่างละเอียดเท่าใด
3. ถ้าข้อสอบทุกข้อในแบบทดสอบฉบับหนึ่งไม่มีความสัมพันธ์กันเลย แบบทดสอบฉบับนั้นจะมีค่าความแปรปรวนรวมเป็นเท่าไร