

ความแปรปรวนของข้อสอบเป็นรายข้อ 3

วัตถุประสงค์

เมื่อผู้อ่านได้ศึกษาเนื้อหาบทที่ 3 แล้ว ควรจะมีความสามารถดังนี้

1. คำนวณหาความแปรปรวนของข้อสอบเป็นรายข้อได้
2. พิสูจน์ได้ว่าการให้คะแนนแบบ 0, 1 ความแปรปรวนของข้อสอบแต่ละข้อมีค่าเท่ากับ pq
3. อธิบายได้ว่าข้อสอบที่มีค่า p ใกล้ ๆ .50 มีผลดีอย่างไร

ข้อมูลทางการศึกษาหรือจิตวิทยา อาจได้มาจากคะแนนจากแบบทดสอบ แบบสอบถาม หรือมาตราส่วนประมาณค่า ข้อมูลที่ได้จากการตอบข้อสอบ หรือแบบสอบถาม หรือมาตราส่วนประมาณค่าจะเป็นเครื่องมือในการตัดสินใจว่าคุณคนนั้นเป็นเช่นไร

ในบทนี้จะกล่าวถึงเฉพาะคะแนนที่ให้ในระบบ 1, 0 เท่านั้น โดยที่ 1 หมายถึงตอบถูก หรือตอบในทางบวก ส่วน 0 หมายถึงตอบผิด หรือตอบในทางลบ

3.1 The Score Matrix

ในทางสถิติ คะแนนดิบที่ได้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ Score Matrix ได้โดยในแต่ละเซลล์ของ Score Matrix จะมีเฉพาะคะแนน 1 และ 0 เท่านั้น สัญลักษณ์ในตาราง 3-1 จะช่วยให้เข้าใจการแปลความได้ดีขึ้น โดยปกติในแนวนอนจะแทนนักเรียน และแนวตั้งจะแทนข้อสอบ แต่ละข้อ และ subscript ตัวแรกจะแทนตำแหน่งของแนวนอน ส่วน subscript ตัวที่สองจะแทนตำแหน่งของแนวตั้ง เช่น

x_{ji} แทนคะแนนดิบของนักเรียนคนที่ j ในข้อที่ i

x_{73} แทนคะแนนดิบของนักเรียนคนที่ 7 ในข้อที่ 3

เพื่อความสะดวกแก่การเข้าใจ ในหนังสือเล่มนี้จะแทนคะแนนของนักเรียนคนที่ j ในแบบทดสอบ t ด้วย t_j

ตาราง 3-1 แสดงสัญลักษณ์ทั่วไปของ Score matrix

ข้อ นักเรียน	1	2	i	n	t_j
1	X_{11}	X_{12}	X_{1i}	X_{1n}	$\sum_{i=1}^n X_{1i}$
2	X_{21}	X_{22}	X_{2i}	X_{2n}	$\sum_{i=1}^n X_{2i}$
⋮							
j	X_{j1}	X_{j2}	X_{ji}	X_{jn}	$\sum_{i=1}^n X_{ji}$
⋮							
N	X_{N1}	X_{N2}	X_{Ni}	X_{Nn}	$\sum_{i=1}^n X_{Ni}$
f_i	$\sum_{j=1}^N X_{j1}$	$\sum_{j=1}^N X_{j2}$		$\sum_{j=1}^N X_{ji}$		$\sum_{j=1}^N X_{jn}$	$\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n x_{ji}$

ค่าของ t_j ได้มาจากผลรวมของคะแนนในแถวที่ j ของ Score Matrix ดังตัวอย่าง

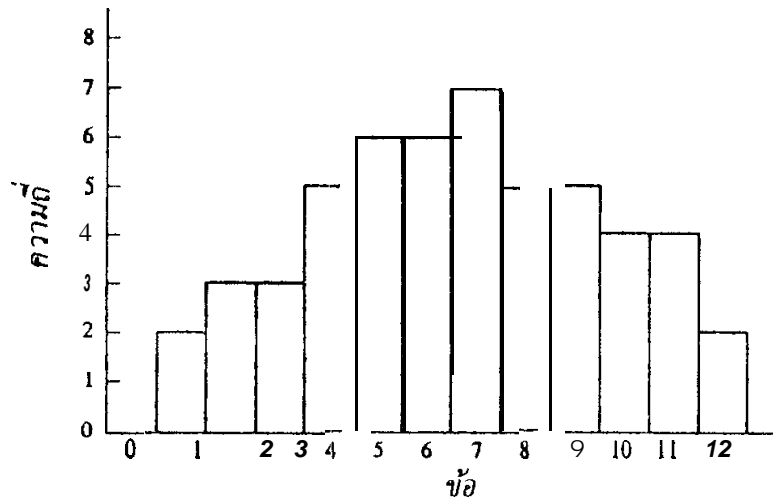
$$t_j = \sum_{i=1}^n x_{ji} \quad \text{..... (3-1)}$$

เนื่องจากคะแนนใน Score Matrix จะเป็น 1 หรือ 0 ดังนั้นคะแนนรวมของนักเรียนคนที่ j คือจำนวนข้อที่นักเรียนคนที่ j ตอบถูก

จำนวนคนที่ตอบข้อที่ i ถูก เขียนแทนด้วย f_i ซึ่งมีค่าเท่ากับผลรวมของคะแนนใน Score Matrix ใน Column ที่ i

$$f_i = \sum_{j=1}^N x_{ji} \quad \text{..... (3-2)}$$

เนื่องจากคะแนนของคำตอบใน Score Matrix เป็น 1 หรือ 0 ดังนั้น ความถี่ของคนตอบข้อที่ i ถูก คือ ผลรวมของคะแนนที่เป็น 1 ใน Column ที่ i



รูป 3-1 การแจกแจงของคะแนน

3.2 ความแปรปรวน (Variance)

การกระจายความสามารถของนักเรียน สามารถแสดงให้เห็นได้โดยการแจกแจงความถี่ ดังรูป 3-1 จากรูปการแจกแจงจะบอกได้ว่ามีนักเรียนกี่คนที่ตอบข้อนั้นถูก และยังสามารถบอกได้ต่อไปว่าข้อใดที่นักเรียนทำถูกมาก และข้อใดที่นักเรียนตอบถูกน้อย

การแปรเปลี่ยนของการแจกแจง สามารถแสดงให้เห็นในรูปของพิสัย หรือ semi-inter-quartile range หรือความเบี่ยงเบนมาตรฐาน โดยปกติคะแนนที่ได้จากการทดสอบมักจะใช้แสดงการแปรเปลี่ยนของคะแนนในรูปกำลังสองของความเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S^2) ซึ่งเรียกว่า ความแปรปรวน (Variance) ซึ่งหาได้จากสูตร

$$S_x^2 = \frac{\sum (X - M_x)^2}{N} \quad \dots\dots\dots (3-3)$$

จากสูตร จะเห็นได้ว่าความแปรปรวนของคะแนนหาได้จากผลรวมของกำลังสองของคะแนนที่เบี่ยงเบนไปจากค่าเฉลี่ย (mean) ดังนั้น ถ้าไม่มีความแตกต่างกันเลย คือนักเรียนทุกคนได้คะแนนเท่ากัน ความแปรปรวนของคะแนนจะเป็น 0

3.3 ความแปรปรวนของข้อสอบแต่ละข้อ

ตาราง 3-2 แสดงคะแนนของนักเรียน 20 คน ที่ทำข้อสอบ 8 ข้อ

ข้อ นักเรียน	1	2	3	4	5	6	7	8	t_j
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1
2	1	1	1	1	0	0	1	1	6
3	1	0	1	0	0	0	0	0	2
4	1	1	1	1	1	1	1	0	7
5	1	1	1	1	0	0	0	0	4
6	1	1	0	0	0	0	0	0	2
7	1	0	1	1	1	1	0	0	5
8	1	1	1	0	0	0	0	0	3
9	1	1	1	0	1	1	1	0	6
10	1	0	0	1	1	1	0	0	4
11	1	1	1	1	1	1	0	1	7
12	1	1	0	1	1	0	1	0	5
13	1	1	1	1	1	1	0	0	6
14	0	1	1	1	1	0	0	0	4
15	1	1	1	0	0	0	0	0	3
16	1	1	1	0	1	0	0	0	4
17	1	1	0	1	0	0	0	0	3
18	1	1	1	1	1	1	1	1	8
19	1	1	1	1	0	1	0	0	5
20	1	1	1	1	1	0	0	0	5
f_i	19	16	15	13	11	8	5	3	90

$$p_i = \begin{matrix} 0.95 & 0.80 & 0.75 & 0.65 & 0.55 & 0.40 & 0.25 & 0.15 \end{matrix}$$

$$q_i = \begin{matrix} 0.05 & 0.20 & 0.25 & 0.35 & 0.45 & 0.60 & 0.75 & 0.85 \end{matrix}$$

$$s_i^2 = p_i q_i \begin{matrix} 0.0475 & 0.1600 & 0.1875 & 0.2275 & 0.2475 & 0.2400 & 0.1875 & 0.1275 \end{matrix}$$

$$M = 20 = 4.50, \quad \Sigma p = 4.50$$

จากตาราง 3-2 แสดงถึงคะแนนของนักเรียน 20 คน ที่ทำข้อสอบ 8 ข้อ โดยคนที่ตอบถูกได้ 1 และคนที่ตอบผิดได้ 0 ฉะนั้นในข้อที่ 5 จะมีผู้ตอบถูก 11 คน ตอบผิด 9 คน คะแนนในข้อที่ 5 จะเป็น 0 คะแนน 9 คน และเป็น 1 คะแนน 11 คน

$$\text{สัดส่วนคนที่ตอบข้อที่ 5 ถูก} = \frac{11}{20} \text{ หรือ } \frac{55}{100} = 0.55$$

สัดส่วนของคนที่ตอบถูกในแต่ละข้อ แสดงไว้ในแถว p ใน Score Matrix

สัดส่วนของคนที่ตอบถูกเขียนแทนด้วย p สัดส่วนของคนที่ตอบผิดเป็น 1 - p หรือ q

$$\therefore p + q = 1$$

ถ้าให้ p_i แทนสัดส่วนคนที่ตอบข้อที่ i ถูก จะได้ว่า

$$p_i = \frac{\sum X_i}{N} \dots\dots\dots (3-4)$$

เมื่อ X แทนคะแนน 1 หรือ 0

จะเห็นได้ว่า ข้างขวาของสมการ (3-4) ก็คือค่าเฉลี่ย (mean)

ดังนั้น ค่าสัดส่วนของคนที่ตอบข้อ i ถูก หรือค่าความยากง่ายของข้อ i ก็คือ ค่าเฉลี่ยของข้อสอบข้อ i นั้นเอง

$$\sum X_i / N = M_i$$

$$\text{ดังนั้น } p_i = M_i \dots\dots\dots (3-5)$$

ซึ่งหมายความว่าค่าของสัดส่วนของนักเรียนที่ตอบข้อนั้นถูก คือค่าเฉลี่ยของนักเรียนทุกคนในข้อนั้น

ถ้าจำนวนนักเรียนที่ถูกทดสอบในแต่ละข้อเท่ากัน ค่าเฉลี่ยของคะแนนของนักเรียนทุกคนในแบบทดสอบฉบับนั้น (M_i) จะเท่ากับผลรวมของค่าเฉลี่ยของแต่ละข้อ

$$\text{นั่นคือ } M_i = \sum M_i \dots\dots\dots (3-6)$$

จากสมการ (3-5) จะได้ว่า

$$\sum M_i = \sum p_i$$

$$\text{ดังนั้น } M_i = \sum p_i \dots\dots\dots (3-7)$$

จากสมการ (3-7) จะเห็นได้ว่าการหาค่าเฉลี่ยของแบบทดสอบนั้น สามารถทำได้ โดยการเอาค่าความยากของข้อสอบแต่ละข้อมารวมกัน

และจากสมการของความเบี่ยงเบนมาตรฐาน จะได้ว่า ความแปรปรวนของข้อสอบแต่ละข้อ เป็นดังนี้

$$S_i^2 = \frac{\sum (X_i - M_i)^2}{N} \dots\dots\dots (3-8)$$

แต่เนื่องจาก $M_i = p_i$ ดังนั้น สมการ (3-8) สามารถแทนได้ดังนี้

$$S_i^2 = \frac{\sum (X_i - p_i)^2}{N} = \frac{\sum X_i^2}{N} + \frac{\sum p_i^2}{N} - \frac{2p_i \sum X_i}{N} \dots\dots\dots (3-9)$$

เนื่องจากค่าของ X จะเป็น 1 หรือ 0 ดังนั้น $X_i^2 = X_i$ และ

$$\sum X_i^2/N = \sum X_i/N = p_i$$

และเนื่องจาก p_i เป็นตัวคงที่ จะได้ว่า $\sum p_i^2/N = Np_i^2/N = p_i^2$

จากสมการ (3-9) สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

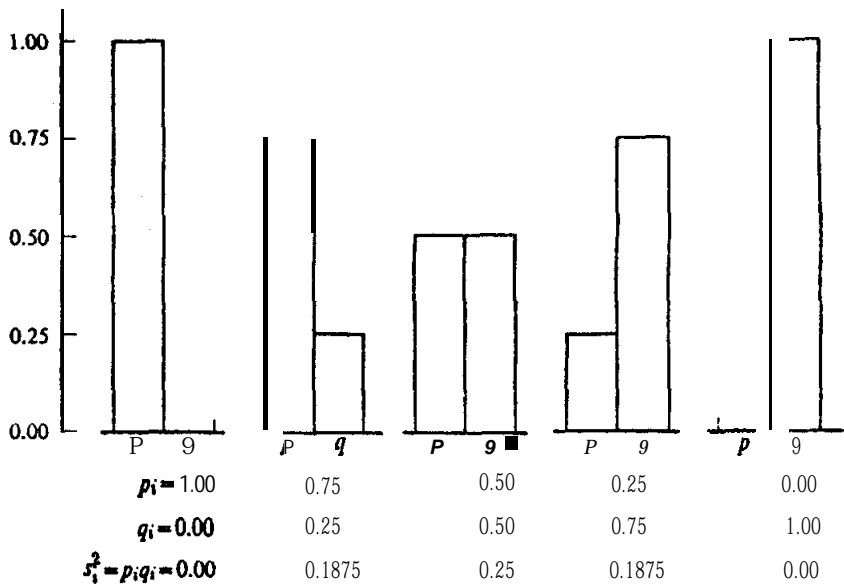
$$S_i^2 = p_i + p_i^2 - 2p_i^2 = p_i - p_i^2 = p_i(1 - p_i) = p_iq_i \dots\dots\dots (3-10)$$

นั่นคือ ความแปรปรวนของข้อสอบแต่ละข้อเท่ากับผลคูณของสัดส่วนของคนตอบข้อนั้นถูกกับสัดส่วนของคนตอบข้อนั้นผิด

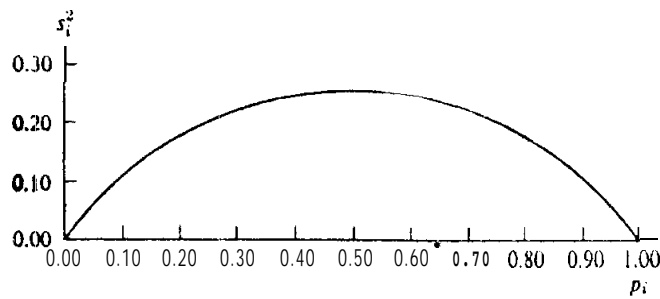
จากตัวอย่างข้อ 5 ในตาราง 3-2 จะได้ว่า $p = 0.55$ และ $q = 0.45$

$$\therefore S_5^2 = 0.55 \times 0.45 = 0.2475$$

ความแปรปรวนของข้อสอบแต่ละข้อสามารถคำนวณได้ตามวิธีการข้างต้นนี้



รูป 3-2 ความแปรปรวนของข้อสอบที่แปรผันไปตามความถี่ของคนตอบถูก

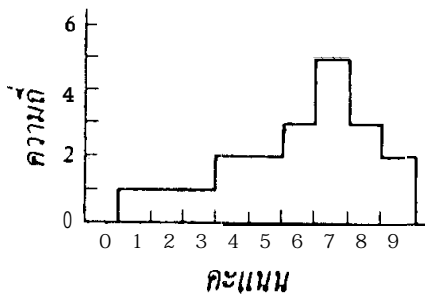


รูป 3-3 แสดงความแปรปรวนของข้อสอบแต่ละข้อ

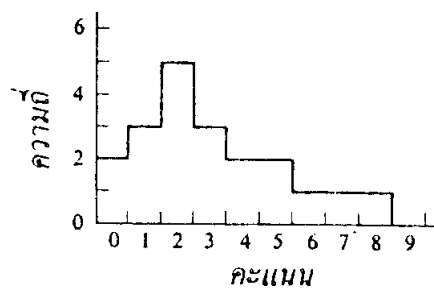
จากรูป 3-3 จะเห็นได้ว่าความแปรปรวน (s^2) ของข้อสอบแต่ละข้อแปรเปลี่ยนไปตามสัดส่วนของคนที่ตอบข้อนั้นถูก (p) เช่น ถ้าไม่มีผู้ใดตอบถูกเลย p จะเท่ากับ 0 และความแปรปรวนก็จะเป็น 0 ความแปรปรวนจะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อความถี่ของคนที่ตอบข้อนั้นถูกเพิ่มขึ้น จนกระทั่ง $p = 0.50$ นั่นคือ เมื่อ $p = 0.50$, $q = 0.50$ และ pq จะมีค่าสูงสุด (0.25) ซึ่งอาจกล่าวได้ว่าความแปรปรวนจะมีค่าสูงสุดเมื่อจำนวนคนตอบข้อนั้นถูกครึ่งหนึ่ง และตอบข้อนั้นผิดครึ่งหนึ่ง ($p = 0.50$ และ $q = 0.50$)

ข้อสอบข้อที่นักเรียนทุกคนทำถูกหมด ($p = 1.00$) หรือข้อที่นักเรียนทำผิดหมด ($p = 0$) จะเป็นข้อสอบที่ไม่มีประโยชน์เลย เพราะไม่สามารถจะจำแนกนักเรียนได้ และความแปรปรวนของข้อสอบข้อนั้นจะเป็น 0

หรืออาจกล่าวได้ว่า การกระจายของคะแนนขึ้นอยู่กับความยากของข้อสอบ ตัวอย่างในตาราง 3-3, 3-4 และในรูป 3-4 และ 3-5 จะช่วยให้ผู้อ่านเห็นภาพพจน์ของความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ของจำนวนคนที่ตอบข้อนั้นถูก กับการกระจายของคะแนนได้ดีขึ้น



รูป 3-4 negatively skewed



รูปที่ 3-5 positively skewed

ตาราง 3-3 แสดงคะแนนของนักเรียน 20 คน ที่ทำข้อสอบ 9 ข้อ

ข้อ นักเรียน	1	2	3	4	5	6	7	8	9	t_j
1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	8
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9
3	1	0	1	1	1	1	0	0	0	5
4	1	1	1	1	1	1	0	1	0	7
5	0	1	1	1	0	0	0	0	0	3
6	1	1	1	1	1	1	0	1	1	8
7	1	1	0	1	1	1	1	0	0	6
8	1	1	1	1	1	1	0	1	0	7
9	1	1	1	1	1	1	0	0	0	6
10	1	1	1	1	1	1	1	0	0	7
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9
12	1	0	1	1	1	0	0	0	0	4
13	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
14	0	1	1	1	1	0	0	0	0	4
15	1	1	1	1	0	1	1	1	0	7
16	1	1	1	1	1	0	0	0	0	5
17	1	1	1	1	1	1	1	0	1	8
18	1	0	1	0	0	0	0	0	0	2
19	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9
20	1	1	1	1	1	1	0	1	0	7
f_i	18	16	18	18	16	14	8	8	6	
P_i	0.90	0.80	0.90	0.90	0.80	0.70	0.40	0.40	0.30	

จากตาราง 3-3 จะเห็นได้ว่าข้อสอบฉบับนี้ค่อนข้างง่าย กล่าวคือมีข้อสอบจำนวน 6 ข้อ ใน 9 ข้อ ที่มีคนตอบถูกมากกว่าครึ่ง ($p > 0.50$) เมื่อเขียนรูปการแจกแจงของคะแนนดังรูป

3-4 ก็พบว่าคะแนนจะไปจับกลุ่มกันมากทางขวามือของรูปการแจกแจง นั่นคือถ้าข้อสอบง่าย การแจกแจงของคะแนนจะเป็น negatively skewed (เบ้ซ้าย)

ตาราง 3-4 แสดงคะแนนของนักเรียน 20 คน ในแบบทดสอบอีกฉบับหนึ่ง


ข้อ นักเรียน	1	2	3	4	5	6	7	8	9	t_j
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	2
2	1	0	1	1	1	1	0	0	0	5
3	1	1	0	1	0	0	0	0	0	3
4	1	1	1	0	0	0	0	0	0	3
5	1	1	1	1	1	1	0	1	0	7
6	1	1	0	0	0	0	0	0	0	2
7	1	1	1	0	1	0	0	0	0	4
8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
9	1	1	0	1	1	0	0	0	0	4
10	1	1	1	1	1	1	1	0	1	8
11	1	0	1	0	0	0	0	0	0	2
12	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
13	1	1	0	0	0	0	0	0	0	2
14	1	1	1	1	0	1	0	0	0	5
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	1	1	1	1	1	1	0	0	0	6
19	1	1	0	0	0	0	0	0	0	2
20	1	1	1	0	0	0	0	0	0	3
f_i	18	14	9	7	6	5	1	1	1	
p_i	0.90	0.70	0.45	0.35	0.30	0.25	0.05	0.05	0.05	

จากตาราง 3-4 ย่อมแสดงว่าข้อสอบฉบับนี้ค่อนข้างยาก นั่นคือมีข้อสอบจำนวน 2 ข้อ ใน 9 ข้อ ที่มีคนตอบถูกเกินกว่าครึ่งหนึ่ง ความยากของข้อสอบแต่ละข้อดูได้จากผลรวมของ คะแนนในแนวตั้งของนักเรียนแต่ละคน หากด้วยจำนวนคนทั้งหมด และจากรูป 3-5 จะเห็นว่า คะแนนจะจับกลุ่มกันมากทางด้านซ้ายมือของรูป นั่นคือถ้าข้อสอบยาก การแจกแจงของคะแนน จะเป็นแบบ positively skewed (เบ้ขวา)

สหสัมพันธ์ระหว่างข้อสอบแต่ละข้อมีค่าสูงทั้ง 2 ฉบับ การแจกแจงคะแนนในรูป 3-4 และ 3-5 มีความแปรปรวนเท่ากัน ($S^2 = 22.56$) นั่นคือข้อสอบทั้ง 2 ฉบับ สามารถจำแนก นักเรียนได้ดีเท่า ๆ กัน อย่างไรก็ตามข้อสอบฉบับที่แสดงในตาราง 3-3 (รูป 3-4) จำแนก นักเรียนที่ได้คะแนนต่ำ ๆ ได้ดี ในขณะที่ข้อสอบฉบับที่ได้แสดงในตาราง 3-4 (รูป 3-5) สามารถ จำแนกนักเรียนที่ได้คะแนนสูงได้ดี

สรุปเนื้อหาบทที่ 3

1. การวัดความแปรปรวน เป็นการวัดการกระจายของข้อมูล โดยดูว่าข้อมูลแต่ละตัวเบี่ยงเบนไปจากค่าเฉลี่ยของข้อมูลชุดนั้นมากน้อยเพียงใด
2. ค่าความยากง่ายของข้อสอบแต่ละข้อ ก็คือค่าเฉลี่ยของข้อสอบข้อนั้น ๆ นั่นเอง
3. ในการให้คะแนนแบบ 0, 1 ความแปรปรวนของข้อสอบแต่ละข้อจะมีค่าเท่ากับผลคูณของสัดส่วนของคนที่ตอบข้อนั้นถูก กับสัดส่วนของคนที่ตอบข้อนั้นผิด
4. ความแปรปรวนของข้อสอบแต่ละข้อจะมีค่าสูงสุดเมื่อจำนวนคนที่ตอบข้อนั้นถูกครึ่งหนึ่ง และตอบข้อนั้นผิดครึ่งหนึ่ง

- 
1. ทำไมครูจึงอยากได้ข้อสอบที่มีค่าความยากใกล้เคียง .50
 2. ค่าความยากของข้อสอบคือค่าอะไรทางสถิติ
 3. จงพิสูจน์ว่าในการให้คะแนนแบบ 0, 1 ความแปรปรวนของข้อสอบแต่ละข้อมีค่าเท่ากับผลคูณของสัดส่วนของคนที่ตอบข้อนั้นถูก กับสัดส่วนของคนที่ตอบข้อนั้นผิด
 4. ในการหาค่าเฉลี่ยของแบบทดสอบฉบับหนึ่งที่เป็น 0, 1 หากไม่นำคะแนนของนักเรียนทุกคนมารวมกันแล้วหารด้วยจำนวนคน เราสามารถหาค่าเฉลี่ยของแบบทดสอบฉบับนั้นได้อย่างไร