ความรู้เบื้องต้น เกี่ยวกับแมทริคซ์และดีเทอมิแนนท์ 2

วัตถุประสงค์

เมื่อผู้อ่านได้ศึกษาเนื้อหาบทที่ 2 แล้ว ควรจะมีความสามารถดังนี้

1. บอกความหมายและอธิบายคุณสมบัติของแมทริคซ์ได้
2. บอกความหมายและอธิบายคุณสมบัติของดีเทอมิแนนท์ได้
3. สามารถนำแมทริคซ์ไปใช้ในการคำนวณหาค่าสถิติพื้นฐานได้

เนื้อหา

2.1 Matrix คือกลุ่มของสมาชิก (element) ที่จัดเรียงเป็นรูปสี่เหลี่ยม เช่น

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & . & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matrix order (m, n) คือ Matrix ที่มี m แถว n column

Matrix order (3, 2) คือ Matrix ที่มี 3 แถว 2 column เช่น

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

a_{ij} หมายถึง element ซึ่งอยู่ในแถวที่ i และ column ที่ j เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$a_{12} = 3$$

$$a_{22} = 7$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & & & \\ . & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

อาจเขียนใหม่ได้ว่า

$$\left[a_{ij}\right] \quad (m, n)$$

Square Matrix คือ Matrix ซึ่งมีจำนวนแถวและจำนวน column เท่ากัน

Square Matrix order n คือ Matrix ที่มี n แถว และ n column

Row Matrix คือ Matrix ที่มี 1 แถว เช่น

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

Column Matrix คือ Matrix ที่มี 1 column เช่น

$$\begin{vmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \\ \\ a_{m1} \end{vmatrix}$$

Zero Matrix คือ Matrix ที่ทุก ๆ element เป็น 0 เขียนแทนด้วย 0

Main diagonal ของ Square Matrix

ให้ A = $\left[a_{i,(n,n)}\right]$ เป็น square matrix order n. main diagonal ของ A คือ element ทั้งหมดที่อยู่ในรูป a_{ii} เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

main diagonal คือ 1, 0, 0

Identity matrix (I_n) คือ square matrix ที่ element ของ main diagonal เป็น 1 ทุกตัว และ element ตัวอื่นเป็น 0 ทั้งหมด เช่น

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & & \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2 **การเท่ากันของ** Matrix

ให้ A และ B เป็น matrix A = B ก็ต่อเมื่อ

1. order เท่ากัน
2. element ที่อยู่ตำแหน่งเดียวกันเท่ากันทุกตัว

ตัวอย่าง I A = B และ C = D หรือไม่

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$A \neq B$ **Ans.**

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$C \neq D$ **Ans.**

ตัวอย่าง II จงหาค่าของ X ที่ทำให้

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$X = 1$ **Ans.**

ตัวอย่าง III จงหาค่า X ที่ทำให้

$$\begin{bmatrix} \text{[illegible]} & \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

ไม่มี X ที่ทำให้ทั้ง 2 matrix เท่ากัน **Ans.**

2.3 **การบวก** Matrix

A + B จะ defined (นิยาม) ก็ต่อเมื่อ A, B ต้องมี order เท่ากัน เช่น

ตัวอย่าง I

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$ ไม่ defined **Ans.**

ตัวอย่าง II

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 0+0 \\ 2+0 & 3+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$ **Ans.**

ตัวอย่าง III จงหา X ที่ทำให้

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} + X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$ **Ans.**

2.4 **การคูณ** Matrix **ด้วย** Scalar

ให้ A **เป็น** matrix **ซึ่งเขียนแทนด้วย** $[a_{ij}]_{(m,\ n)}$ **และ** C **เป็น** scalar

$$CA = [Ca_{ij}]\ m,\ n\ .$$

ตัวอย่าง I

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

. **การลบของ** matrix

, , A − B **จะ** defined **ก็ต่อเมื่อ มี** order **เท่ากัน**

$$A - B = A + (-1)B$$

2.5 **การคูณ** matrix **ด้วย** matrix

ให้ A, B เป็น matrix AB จะเกิดขึ้นได้เมื่อจำนวนแถวของ B เท่ากับจำนวน column ของ A

$$A = [a_{ij}]_{(m,\ n)}$$

$$B = [b_{ij}]_{(p,\ q)}$$

$$AB \text{ defined} \iff n = p$$

$$BA \text{ defined} \iff m = q$$

ตัวอย่าง I ให้ $A = [a_{ij}]_{(m,\ k)}$

$B = [b_{ij}]_{(k,\ n)}$

AB คือ matrix $[c_{ij}]_{(m,\ n)}$

ตัวอย่าง II

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & \\ 1 & -1 \\ 1 & -0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2+3 & 0-2+03 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง III

จงหา $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

$$= \begin{bmatrix} 0+1+0 & 0+1+0 & 0+1+0 & 0+1+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 0+1+0 & 0+1+0 & 0+1+0 & 0+1+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ans.

2.0 **คุณสมบัติของ matrix**

1. การคูณ matrix ด้วย matrix ไม่เป็น commutative law คือ AB = BA จะไม่จริงเสมอไป เช่น

$$\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 2 & 2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+2+0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$$

2. AI $\doteq$ A = IA เช่น

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

2.7 Determinant เป็นการกำหนดค่าของ square matrix ด้วยตัวเลข เช่น ให้ A เป็น square matrix

determinant ของ A เขียนแทนด้วย $|A|$

$$A = \begin{bmatrix}a_{11} & \dots & a_{1n}\\a_{21} & \dots & a_{2n}\\ & \vdots & \\a_{11} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ldots a_{2n} \\ \\ a_{n1} \quad a_{nn} \end{vmatrix}$$

Determinant order 2

ให้ A เป็น square matrix order 2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

กำหนดค่า determinant order 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 0 = 6$$

Determinant order 3 เกิดจาก square matrix order 3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

กำหนดค่า determinant order 3

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix} = -2+0-1+2+1-0=0$$

Determinant order N > 3

ให้ A เป็น square matrix order n.

minor ของ a_{ij} = determinant ของผลที่เหลือจากการตัดแถวที่ i และ column ที่ j ออกจาก matrix A.

$$\begin{array}{|cc|c|c|} \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array} \qquad \text{minor ของ } a_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Minor ของ a_{ij} เขียนแทนด้วย M_{ij}

Cofactor

Cofactor ของ $a_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

Cofactor ของ $a_{34} = (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix}$

$$= \quad - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix}$$

ตัวอย่าง I

จงหา Cofactor ของ 0

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & -1 & -2 \\ -5 & -6 & -7 & -9 \end{vmatrix}$$

$$\text{Cofactor ของ } 0 \quad = \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ -5 & -7 & -9 \end{vmatrix}$$

เขียนแทน Cofactor ของ a_{ij} ด้วย C_{ij}

Determinant order n

$$|A| \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} \text{ ; สำหรับแถว } i \text{ ใด ๆ}$$

$$= \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij} \text{ ; สำหรับหลัก } j \text{ ใด ๆ}$$

การหาค่า determinant แบบนี้เรียกว่า Laplace expansion

ตัวอย่าง I

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ 0 & & 2 \\ -1 & & 2 \end{vmatrix} + 0(-1) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+\ 3\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 0(-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1\left\{1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)(-1)\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}\right\} + 0 +$$

$$3\left\{1(-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 0(-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}\right\} + 0$$

$$= 1\{(2+2)+(2)+0\} + 3\{-(-2+1)-(4+1)+0\}$$

$$= 6 + 3\{1-5\}$$

$$= 6 - 12$$

$$= -6$$ **Ans.**

ตัวอย่าง II

$$\begin{vmatrix} 1 & 1\ 2 & 5 & 9 & 7 \\ 0 & -1 & 3 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & 3 & 10 & 11 \\ 0 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{vmatrix} +$$

$$0(-1)\begin{vmatrix} 2 & 5 & 9 & 7 \\ 0 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0$$

$$= 1\left\{12\begin{vmatrix} -1 & 3 & 10 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}\right\}$$

$$1\,(12)\,(-1)\begin{vmatrix} 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (1)\,(12)\,(-1)\,\{6 - 0\}$$

$$= -12 \times 6 = -72 \qquad \textbf{Ans.}$$

ตัวอย่าง III

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \qquad 0 \qquad \textbf{Ans.}$$

ตัวอย่าง IV

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1\{3 - 4\} - 2\,(1 - 1 \quad + 1\{4 - 3\}$$

$$= -1 + 0 + 1$$

$$0 \qquad \textbf{Ans.}$$

และสามารถหาได้ว่า

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

และ
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

2.8 คุณสมบัติของ determinant

1. เปลี่ยนแถวเป็นหลัก และเปลี่ยนหลักเป็นแถว ค่า determinant เท่าเดิม เช่น

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

2. ถ้าแถวใดหรือ column ใดเป็น 0 ทุกตัว จะได้ค่า determinant เป็น 0 เช่น

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

3. ถ้าเปลี่ยนที่ระหว่าง 2 แถวใด หรือ 2-Column ใด จะได้ค่า determinant เป็น negative ของค่าเดิม เช่น

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a22 & a_{23} \\ a_{31} & a32 & a33 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a32 & a33 \\ a_{21} & a22 & a23 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{33} & a32 & a_{31} \\ a23 & a22 & a_{21} \end{vmatrix}$$

ดังนั้น $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$

4. ถ้าเอา k คูณทุก ๆ element ในแถวใดหรือหลักใดแล้ว จะได้ค่าเป็น k เท่าของค่าเดิม เช่น

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & k\,a_{13} \\ a_{21} & a22 & k\,a_{23} \\ a_{31} & a32 & k\,a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a22 & a23 \\ a_{31} & a32 & a33 \end{vmatrix}$$

ตัวอย่าง I ถ้า A เป็น square matrix order 3 และ $|A| = 3$

จงหา $|2A|$

วิธีทำ

ให้ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a22 & a23 \\ a_{31} & a32 & a33 \end{bmatrix}$

$$2A = \begin{bmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2\text{[redacted]} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2\text{[redacted]} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{bmatrix}$$

$$|2A| = \begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times 2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 2a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 2a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$= 8 \times 3 = 24$ Ans.

ในทำนองเดียวกันอาจหาได้ว่า $2|A| = 6$

5. ถ้า 2 แถว หรือ 2 column ใดก็ตาม มี element เดียวกันทั้งหมดแล้ว ค่า determinant เป็น 0 เช่น

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & a_{24} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & b_4 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 10 & 15 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 5\ |0| = 0$$

6. Matrix A เรียก Triangular matrix& A เป็น square matrix และ element ทุกตัว เหนือ main-diagonal หรือใต้ main-diagonal เป็น 0

ถ้า A เป็น triangular matrix

$|A|$ = ผลคูณของ element ใน main diagonal เช่น

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 9 & 7 \\ 0 & -1 & 3 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{vmatrix} = -72$$

2.9 Inverse ของ square matrix

ถ้า AB = I แล้ว เรียก A ว่าเป็น inverse ของ B

และ B เป็น inverse ของ A

เขียนแทน inverse ของ A ด้วย A-'

$A^{-1}A = AA^{-1} = I$

การหา inverse

หา x ซึ่งทำให้ Ax = I

ตัวอย่าง I Ml inverse ขอ $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 + 3x_3 & x_2 + 3x_4 \\ 2x_1 - x_3 & 2x_2 - x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ x_1 + 3x_3 &= 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1) \\ x_2 + 3x_4 &= 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2) \\ 2x_1 - x_3 &= 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (3) \\ 2x_2 - x_4 &= 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (4) \end{aligned}$$

จากสมการ จะได้

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{7} \\ x_2 &= \frac{3}{7} \\ x_3 &= \frac{2}{7} \\ x_4 &= -\frac{1}{7} \end{aligned}$$

$$\therefore\ x = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix} = A^{-1}$$

2.10 Transpose **ของ** Matrix A คือ matrix ที่ได้จากการเปลี่ยนที่ระหว่างแถวและ column ของ A ใช้สัญลักษณ์ว่า A^T เช่น

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \\ 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Adjoint matrix **ของ** A คือ Transpose ของ cof (A) เขียนแทนด้วย adj (A)

$$\text{adj}(A) = (\text{cof}(A))^T$$

2.11 การใช้แมทริคซ์ในการคำนวณหาค่าสถิติพื้นฐาน

ค่าเฉลี่ย (Mean)

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X}{N} \quad .... (2\text{-}1)$$

ให้ $X' = [X_1 \quad x2 \quad x3 \quad . \quad . \quad . \quad X_n]$ Row matrix (order $1 \times n$)

$$1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{vmatrix} \quad \text{Column matrix (order } n \times 1)$$

$$X'1 = [X_1 + x2 + X_3 + . . . + X_n] \text{ (order } 1 \times 1)$$

$$\overline{X} = \frac{X'1}{N} \quad .... (2\text{-}2)$$

ความแปรปรวน (Variance)

$$S^2 = \frac{\Sigma (X\text{-}X)'}{N} \quad .... (2\text{-}3)$$

ถ้าให้ $x = X - \overline{X}$

จะได้ว่า $S^2 = \frac{\Sigma x^2}{N}$

ให้ $x' = [X_1 - \overline{X} \quad x \; 1 \; - \; x \quad x \; , \; - \; X \; . \; . \; . \quad x.\text{-}X]$

$$x = \begin{bmatrix} X_1 - \overline{X} \\ X_2 - \overline{X} \\ X_3 - \overline{X} \\ . \\ . \\ . \\ X_n - \overline{X} \end{bmatrix}$$

$$x'x = [(X_1 - \overline{X})^2 + (X_2 - \overline{X})^2 + (X_3 - \overline{X})^2 + . . . + (X_n - \overline{X})^2]$$

$$\therefore S^2 = \frac{x'x}{N} \quad .... (2\text{-}5)$$

$$\therefore S = \sqrt{\frac{x'x}{N}} \quad .... (2\text{-}6)$$

สมการ 2-3 เป็นการคำนวณหาความแปรปรวนที่ค่อนข้างจะยุ่งยาก เพราะต้องหาคะแนนแต่ละตัวที่เบี่ยงเบนไปจากค่าเฉลี่ย $(X - \overline{X})$ จึงได้มีการเปลี่ยนแปลงให้อยู่ในรูปของคะแนนดิบ ดังนี้

$$S^2 = \frac{\Sigma X^2}{N} - \left(\frac{\Sigma X}{N}\right)^2 \quad \ldots\ldots. \quad (2\text{-}7)$$

$$X = \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \\ \\ X_n \end{vmatrix} \quad \textbf{(order } n \times 1)$$

$$X'X = \left| X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \_\_ + X_n^2 \right| \text{ (order 1 x 1)}$$

$$S^2 = \frac{X'X}{N} \quad \left(\frac{X'1}{N}\right)^2 \quad (2\text{-}8)$$

$$S = \sqrt{\frac{X'X}{N} - \left(\frac{X'1}{N}\right)^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2\text{-}9)$$

ความแปรปรวนร่วม (Covariance)

เนื่องจาก $r_{xy} = \frac{\Sigma xy}{N S_x S_y}$ (2-10)

$$r_{xy}S_xS_y = \frac{\Sigma xy}{N} \quad (2\text{-}11)$$

$$C_{xy} = \frac{\Sigma xy}{N} \quad . \quad (2\text{-}12)$$

ให้ $x' = | x_1 \quad x_2 \quad x_n |$

$$y = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \\ \\ y_n \end{vmatrix}$$

$$x'y = | x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$$

$$C_{xy} = \frac{x'y}{N} \quad (2\text{-}13)$$