บทที่ 2
กฎการนับและความน่าจะเป็น
(COUNTING RULES AND PROBABILITY)

วัตถุประสงค์

เพื่อให้ผู้ที่ศึกษามีความสามารถดังต่อไปนี้

1. บอกความหมายของเครื่องหมายแฟคทอเรียล (Factorial Notation) ได้
2. นำกฎว่าด้วยการคูณไปแก้ปัญหาโจทย์ที่เกี่ยวข้องได้
3. บอกความแตกต่างของการจัดหมู่แบบเปอร์มิวเตชั่น (Permutation) และแบบคอมบิเนชั่น (Combination) ได้
4. นำหลักการของเปอร์มิวเตชั่น และคอมบิเนชั่นไปแก้ปัญหาโจทย์ที่เกี่ยวข้องได้
5. แก้ปัญหาโจทย์เกี่ยวกับความน่าจะเป็น (Probability) ได้
6. บอกสัจจะพจน์ของความน่าจะเป็นได้

เนื้อหา

2.1 กฎการนับ

- 2.1.1 เครื่องหมายแฟคทอเรียล (Factorial Notation)
- 2.1.2 กฎว่าด้วยการคูณ
- 2.1.3 การจัดหมู่แบบเปอร์มิวเตชั่น (Permutation)
- 2.1.4 การจัดหมู่แบบคอมบิเนชั่น (Combination)

2.2 ความน่าจะเป็น (Probability)

- 2.2.1 นิยามศัพท์เฉพาะ
- 2.2.2 การหาความน่าจะเป็น
- 2.2.3 สัจจะพจน์ของความน่าจะเป็น

เนื้อหาที่ 2.1 กฎการนับ

2.1.1 เครื่องหมายแฟคทอเรียล (!)

เครื่องหมายแฟคทอเรียล เป็นสัญลักษณ์ที่ใช้แทนความหมายของการคูณกันตั้งแต่ 1 ถึงตัวที่ n ! เป็นเครื่องหมายที่ใช้แทนแฟคทอเรียล ดังนั้น

$n! = (1)\ (2)\ (3)\ (4) \text{-------} (n-3)\ (n-2)\ (n-1)\ (n)$ หรืออาจเขียนกลับเสียใหม่ได้เป็น ดังนี้

$$n! = n\ (n-1)\ (n-2)\ (n-3) \ldots\ldots (3)\ (2)\ (1)$$

$$(n-1)! = (n-1)\ (n-2)\ (n-3) \ldots\ldots (3)\ (2)\ (1)$$

$$1! = 1$$

$$O! = 1$$

ตัวอย่างเช่น

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

หรือ $5! = 5 \times (4!)$

$$8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

2.1.2 กฎว่าด้วยการคูณ

ถ้าเหตุการณ์ $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_n$ เกิดขึ้นได้ $k_1, k_2, \ldots\ldots, k_n$ วิธีตามลำดับ (นั่นคือ เหตุการณ์ A_1 เกิดขึ้นได้ k_1 วิธี เหตุการณ์ A_2 เกิดขึ้นได้ k_2 วิธี ตามลำดับ) แล้วจะมีเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ที่จะเกิด $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_n$ พร้อม ๆ กัน ได้เท่ากับ (k_1) คูณ (k_2) คูณ.....(k_n) วิธี

ถ้า $k_1 = k_2 = k_3 = \ldots\ldots = k_n$ แล้ว จะเกิดเหตุการณ์ $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_n$ พร้อม ๆ กันได้ k^n วิธี

ตัวอย่าง 2.1 สมมุติว่าเหตุการณ์ A_1 เป็นการโยนเหรียญ 1 เหรียญ 1 ครั้งและเหตุการณ์ A_2 เป็นการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง ดังนั้นจะมีเหตุการณ์ที่เป็นไปได้จากการทอดลูกเต๋า และโยนเหรียญพร้อม ๆ กัน 1 ครั้ง กี่วิธี

วิธีทำ

ถ้า A_1 = การโยนเหรียญ 1 ครั้ง

ดังนั้น k_1 = 2 (คือเกิด H หรือ T)

ถ้า A_2 = การทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง

ดังนั้น k_2 = 6 (คือเกิดหน้า 1 หรือ 2 หรือ 3 หรือ 4 หรือ 5 หรือหน้า 6)

ดังนั้นจะเกิดเหตุการณ์ที่เป็นไปได้จากการทอดลูกเต๋า 1 ลูก และโยนเหรียญ 1 เหรียญพร้อม ๆ กัน

$$= (k_1)(k_2)$$

$$= (2)(6)$$

= 12 วิธี

จากคำถามในตัวอย่าง 2.1 อาจตรวจสอบโดยการทดลองเขียนเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นจริง ๆ จากการทดลองโยนเหรียญ 1 เหรียญและโยนลูกเต๋า 1 ลูกพร้อม ๆ กัน เพื่อให้เกิดความเข้าใจในวิธีการคิด ได้ดังนี้

การโยนเหรียญ 1 เหรียญ 1 ครั้ง จะเกิดเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ คือ H (หัว) หรือ T (ก้อย)

การทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง จะเกิดเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ 6 เหตุการณ์ คือ หน้า 1 หรือ 2 หรือ 3 หรือ 4 หรือ 5 หรือ 6

ดังนั้นถ้าโยนเหรียญและทอดลูกเต๋าพร้อม ๆ กัน จะเกิดเหตุการณ์ใดเหตุการณ์หนึ่งดังนี้

H1 หรือ H2 หรือ H3 หรือ H4 หรือ H5 หรือ H6 หรือ T1 หรือ T2 หรือ T3 หรือ T4 หรือ T5 หรือ T6

เนื่องจากการโยนเหรียญ 1 เหรียญ และการทอดลูกเต๋า 1 ลูก พร้อม ๆ กัน อาจเกิดเหตุการณ์ใดเหตุการณ์หนึ่งจาก 12 เหตุการณ์ข้างบน ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า จะเกิดเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ 12 วิธี

ตัวอย่าง 2.2 ถ้าโยนเหรียญ 3 เหรียญ พร้อม ๆ กัน จะเกิดเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดกี่เหตุการณ์

วิธีทำ

A_1 = การโยนเหรียญอันที่ 1

k_1 = 2 (นั่นคือ อาจเกิดหัวหรือก้อย)

A_2 = การโยนเหรียญอันที่ 2

k_2 = 2

A_3 = การโยนเหรียญอันที่ 3

k_3 = 2

ดังนั้นจะเกิดเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด = $(k_1)(k_2)(k_3)$

= $(2)(2)(2)$

= 8 เหตุการณ์

ตัวอย่าง 2.3 มีลูกบอลอยู่ 3 ลูก มีกล่องอยู่ 2 ใบ จะมีวิธีหยิบลูกบอลทั้งหมดใส่ลงในกล่องได้กี่วิธี

วิธีทำ

A_1 = ลูกบอลลูกที่ 1

k_1 = 2 (กล่องใบที่ 1 หรือใบที่ 2)

A_2 = ลูกบอลลูกที่ 2

k_2 = 2

A_3 = ลูกบอลลูกที่ 3

k_3 = 2

จะมีวิธีหยิบลูกบอลใส่กล่อง $= 2 \times 2 \times 2$

$= 2^3$

$=$ 8 วิธี

ตัวอย่าง 2.4 ถ้าโยนเหรียญ 1 เหรียญ และลูกเต๋า 2 ลูก พร้อม ๆ กัน จะเกิดเหตุการณ์ที่แตกต่างกันได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ

โยนเหรียญ 1 เหรียญ เกิดได้	2 เหตุการณ์
ทอดลูกเต๋าลูกที่ 1 เกิดได้	6 เหตุการณ์
ทอดลูกเต๋าลูกที่ 2 เกิดได้	6 เหตุการณ์

ดังนั้นจะเกิดเหตุการณ์ที่แตกต่างกันได้ทั้งหมด $= 2 \times 6 \times 6$

$=$ 72 เหตุการณ์

2.1.3 การจัดหมู่แบบเปอร์มิวเตชั่น (Permutation)

การจัดหมู่แบบเปอร์มิวเตชั่น เป็นวิธีการนำสิ่งของหรือคนมาจัดลำดับในหมู่หรือกลุ่มด้วยวิธีต่าง ๆ กัน ลำดับที่ (order) ของสมาชิกที่นำมาจัดกลุ่มมีความสำคัญมาก ลำดับที่ของสมาชิกที่แตกต่างกันในแต่ละกลุ่ม นับเป็นวิธีการจัดกลุ่มหรือหมู่ที่แตกต่างกัน

การจัดหมู่แบบเปอร์มิวเตชั่น มีทฤษฎีสำคัญที่เกี่ยวข้องดังนี้

ทฤษฎี 1 มีของอยู่ n สิ่ง นำมาจัดลำดับทีละ r สิ่ง และ r มีค่าน้อยกว่า n จะจัดลำดับได้ $\frac{n!}{(n-r)!}$ วิธีเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad \text{..............(2.1)}$$

ตัวอย่าง 2.5 มีนักเรียนอยู่ 4 คน คือ ก. ข. ค. ง. นำมาจัดเข้าแถวทีละ 2 คน จะจัดได้กี่วิธี

วิธีทำ

$$ {}_{4}P_{2} = \frac{4!}{(4-2)!} $$

$$ = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 12 \text{ วิธี} $$

ซึ่งการจัดเข้าหมู่แต่ละวิธี สามารถจัดลำดับสมาชิกในแต่ละหมู่ได้ดังนี้

วิธีที่ 1	ได้สมาชิก	ก ข	วิธีที่ 2	ได้สมาชิก	ข ก
" 3	"	ก ค	" 4	"	ค ก
" 5	"	ก ง	" 6	"	ง ก
" 7	"	ข ค	" 8	"	ค ข
" 9	"	ข ง	" 10	"	ง ข
" 11	"	ค ง	" 12	"	ง ค

ตัวอย่าง 2.6 จะจัดนักเรียน 10 คน ให้นั่งเรียงแถวบนเก้าอี้แถวหน้าซึ่งมีอยู่ 5 ตัว ได้กี่วิธี

$$ {}_{10}P_{5} = \frac{10!}{(10-5)!} $$

$$ = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} $$

$$ = 30{,}240 \text{ วิธี} $$

ในกรณีที่เมื่อนำของมาจัดลำดับทีละ r สิ่ง และค่าของ r เท่ากับ n แล้ว จะจัดลำดับได้โดยใช้ทฤษฎีที่ 1 เช่นกัน ดังนี้

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

เนื่องจาก r = n ฉะนั้น

$$\therefore \; _nP_r = \frac{n!}{0!} = n!$$

ฉะนั้น $_nP_n = n!$ ....(2.2)

ตัวอย่าง 2.7 มีนักเรียนอยู่ 4 คน คือ ก. ข. ค. และ ง. นำมาจัดเข้าแถวทีละ 4 คน จะจัดได้กี่วิธี

เนื่องจาก n = r ดังนั้น

$$_nP_n = n!$$

$$= 4!$$

$$= 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$= 24$$ วิธี

โดยแต่ละวิธี สามารถจัดลำดับสมาชิกในกลุ่มได้ ดังนี้

ก ข ค ง	ก ข ง ค	ก ค ข ง	ก ค ง ข	ก ง ข ค	ก ง ค ข
ข ก ค ง	ข ก ง ค	ข ค ก ง	ข ค ง ก	ข ง ก ค	ข ง ค ก
ค ก ข ง	ค ก ง ข	ค ข ก ง	ค ข ง ก	ค ง ก ข	ค ง ข ก
ง ก ข ค	ง ก ค ข	ง ข ก ค	ง ข ค ก	ง ค ก ข	ง ค ข ก

ตัวอย่าง 2.8 จะนำต้นไม้ 4 ต้น มาจัดปลูกสลับกันในแถว 1 แถว ได้กี่วิธี

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
{}_4P_4 &= \frac{4!}{(4-4)!} \\
&= \frac{4\times 3\times 2\times 1}{0!} \\
&= \frac{24}{1} \\
&= 24 \text{ วิธี}
\end{aligned}
$$

ทฤษฎี 2 มีของอยู่ n สิ่ง นำมาจัดลำดับเป็นวงกลม จะจัดได้ (n-1)! วิธี

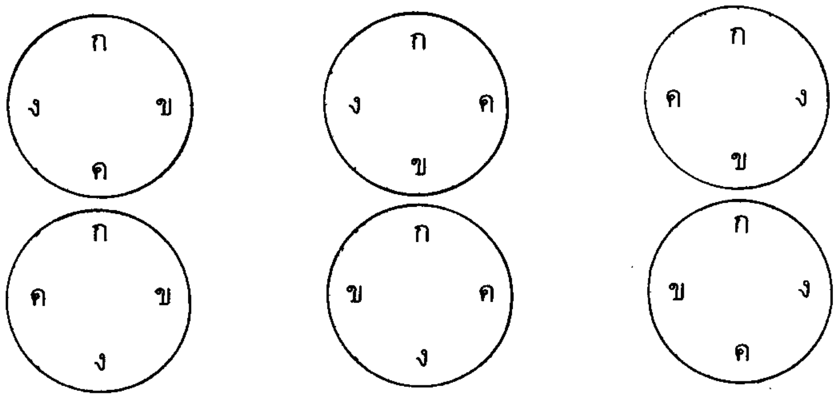
ฉะนั้น $${}_nP_n = (n-1)! \qquad \text{.......(2.3)}$$

ตัวอย่าง 2.9 มีนักเรียน 4 คน คือ ก. ข. ค. ง. นำมานั่งเป็นวงกลมจะจัดได้กี่วิธี

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
\text{จะจัดได้} &= (4-1)! \text{ วิธี} \\
&= 3\times 2\times 1 \\
&= 6 \text{ วิธี}
\end{aligned}
$$

การจัดหมู่แต่ละวิธีมีวิธีการจัดลำดับสมาชิกดังนี้



ตัวอย่าง 2.10 มีต้นไม้อยู่ 6 ต้น จะปลูกเป็นวงกลมสลับกันได้กี่วิธี

วิธีทำ

จะปลูกได้ $= (6-1)!$ วิธี

$= 5\times4\times3\times2\times1$

$= 120$ วิธี

2.1.4 การจัดหมู่แบบคอมบิเนชั่น (Combination)

การจัดหมู่แบบคอมบิเนชั่น คือการนำสิ่งของมาจัดหมู่โดยที่ลำดับของสมาชิกในแต่ละหมู่ไม่มีความสำคัญ (สมาชิกของหมู่ซึ่งมีลำดับต่างกัน ถือว่าเป็นหมู่เดียวกัน เช่น กข กับ ขก ถือว่าเป็นการจัดหมู่เพียง 1 วิธี) ดังนั้นการจัดหมู่จะทำได้น้อยวิธีกว่าการจัดแบบเปอร์มิวเตชั่น

การจัดหมู่แบบคอมบิเนชั่น มีทฤษฎีสำคัญที่เกี่ยวข้อง ดังนี้

ทฤษฎี 1 ถ้ามีของอยู่ n สิ่ง นำมาจัดหมู่ทีละ r สิ่ง จะจัดได้ $\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$ วิธี เขียนเป็นสูตรทั่วไปได้

$$ {}_{n}C_{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \qquad \text{.......(2.4)} $$

เนื่องจากการจัดหมู่แบบคอมบิเนชั่น ได้ถูกนำมาใช้ในการหาค่าสถิติต่าง ๆ เป็นจำนวนมาก จึงได้มีการกำหนดสัญลักษณ์ $\binom{N}{R}$ แทน ${}_{n}C_{r}$ เพื่อสะดวกในการเขียน ฉะนั้น

$$ \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} $$

ตัวอย่าง 2.11 มีนักเรียน 5 คน คือ ก. ข. ค. ง. และ จ. นำมาเข้ากลุ่มสัมมนากลุ่มละ 3 คน จะจัดกลุ่มสัมมนาได้กี่กลุ่ม

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!}$$

$$= \frac{5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1\times2\times1}$$

$$= 10 \text{ กลุ่ม}$$

กลุ่มสัมมนาทั้ง 10 กลุ่ม มีสมาชิกดังนี้

กขค	กขง	กขจ	กคง	กคจ
กงจ	ขคง	ขคจ	ขงจ	คงจ

ตัวอย่าง 2.12 มีคนอยู่ 33 คน ต้องการสมัครเข้าดำรงตำแหน่งเป็นคณะกรรมการแนะแนวการศึกษาของชุมชนแห่งหนึ่ง คณะกรรมการชุดนี้จะประกอบด้วย กรรมการเพียง 3 คนเท่านั้น ดังนั้นจะมีกี่วิธีที่คน 3 คน จะถูกคัดเลือกเข้าเป็นคณะกรรมการ

$$\binom{33}{3} = \frac{33!}{3!\,(33-3)!}$$

$$= \frac{33\times32\times31\times30!}{3\times2\times1\times30!}$$

$$= 5{,}456 \text{ วิธี}$$

ทฤษฎี 2 ถ้าสิ่งที่จะนำมาจัดหมู่แยกออกเป็นกลุ่มย่อย ๆ n_1, n_2,..... n_n กลุ่ม และการเลือกสมาชิกจากกลุ่มย่อย ๆ มาเข้าหมู่ไม่เป็นอิสระจากกันแล้ว จะจัดได้

$$\binom{n_1}{r_1} \quad \binom{n_2}{r_2} \ldots\ldots \binom{n_n}{r_n} \text{ วิธี}$$

ตัวอย่าง 2.13 นักเรียนห้องหนึ่งมี 30 คน เป็นชาย 20 คน หญิง 10 คน เลือกมาทำงานพิเศษ 6 คน โดยกำหนดให้เป็นชาย 4 คน หญิง 2 คน จะจัดนักเรียนเข้ากลุ่มทำงานได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ

n_1 = นักเรียนชาย = 20 คน

n_2 = นักเรียนหญิง = 10 คน

เนื่องจากการเลือกสมาชิกจาก n_1 และ n_2 มีเงื่อนไขว่าต้องเลือกผู้ชาย 4 คน ดังนั้น การเลือกจำนวนนักเรียนจึงไม่เป็นอิสระ เพราะจะเลือกนร.หญิงได้เพียง 2 คน เท่านั้น

ฉะนั้น $r_1 = 4, \quad r_2 = 2$

ดังนั้นจะจัดนักเรียนเข้าทำงานได้ $= \binom{n_1}{r_1}\binom{n_2}{r_2}$

$$= \binom{20}{4}\binom{10}{2}$$

ซึ่ง $\binom{20}{4} = \frac{20!}{4!\,(20-4)!}$

$\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!\,(10-2)!}$

ฉะนั้น จะจัดนักเรียนเข้าทำงานได้ $= \left[\frac{20!}{4!\,(20-4)!}\right] \times \left[\frac{10!}{2!\,(10-2)!}\right]$ วิธี

$$= \left[\frac{20\times 19\times 18\times 17\times 16!}{4\times 3\times 2\times 1\times 16!}\right] \times \left[\frac{10\times 9\times 8!}{2\times 1\times 8!}\right] \text{ วิธี}$$

$= 4845 \times 45$ วิธี

$= 218{,}025$ วิธี

ตัวอย่าง 2.14 กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลอยู่ 10 ลูก เป็นบอลสีแดง 6 ลูก สีเขียว 4 ลูก ให้หยิบลูกบอลออกจากกล่อง 3 ลูก จงหาว่าจะมีกี่วิธีที่จะหยิบลูกบอลสีแดงได้ 1 หรือ 2 ลูก

วิธีทำ

n_1 = บอลสีแดง = 6

n_2 = บอลสีเขียว = 4

หยิบลูกบอลมา 3 ลูก ถ้าเป็นสีแดง 1 ลูก จะเป็นสีเขียว 2 ลูก

$r_1 = 1, \quad r_2 = 2$

วิธีที่จะหยิบได้ลูกบอลสีแดง 1 ลูก = $\binom{6}{1}\binom{4}{2}$ วิธี

ถ้าหยิบได้บอลสีแดง 2 ลูก จะเป็นสีเขียวเพียง 1 ลูก

$r_1 = 2, \quad r_2 = 1$

วิธีที่จะหยิบได้ลูกบอลสีแดง 2 ลูก = $\binom{6}{2}\binom{4}{1}$ วิธี

ฉะนั้นวิธีที่จะหยิบได้ลูกบอลสีแดง 1 หรือ 2 ลูก = $\left[\binom{6}{1}\binom{4}{2}\right] + \left[\binom{6}{2}\binom{4}{1}\right]$ วิธี

$$\left[\binom{6}{1}\binom{4}{2}\right] + \left[\binom{6}{2}\binom{4}{1}\right] = \left[\frac{6!}{1!\,5!} \times \frac{4!}{2!\,2!}\right] + \left[\frac{6!}{2!\,4!} \times \frac{4!}{1!\,3!}\right]$$

$$= (6\times 6) + \left[\frac{6\times 5}{2} \times \frac{4}{1}\right]$$

$$= 36 + (15\text{x}4)$$

$$= 36 + 60$$

= 96 วิธี

เนื้อหาที่ 2.2 ความน่าจะเป็น

2.2.1 นิยามศัพท์เฉพาะ

2.2.1.1 แซมเปิ้ลสเปซ (Sample space)

หมายถึง เซ็ทของผลการทดลองทั้งหมดที่จะเป็นไปได้ในการทดลองแต่ละครั้ง (All possible outcomes) และโอกาสที่จะเกิดผลการทดลองแต่ละอย่างจะต้องเท่ากัน และเป็นอิสระจากกัน แซมเปิ้ลสเปซ เขียนแทนด้วยอักษร S

2.2.1.2 แซมเปิ้ลพ้อยท์ (Sample point)

หมายถึง ผลการทดลองต่าง ๆ ที่เกิดขึ้น (outcome) ซึ่งเป็นสมาชิกของแซมเปิ้ลสเปซ

2.2.1.3 เหตุการณ์ (Event)

หมายถึง อนุเซ็ท (subset) ของแซมเปิ้ลสเปซ

ตัวอย่าง 2.15 ในการโยนเหรียญ 1 เหรียญ จะมีผลการทดลองเกิดขึ้น 2 กรณีคือ หัว กับ ก้อย ถ้าให้ H แทนกรณีที่เหรียญขึ้นหัว และ T แทนกรณีที่เหรียญขึ้นก้อย ฉะนั้น

$$S = \{H, T\}$$

แซมเปิ้ลพ้อยท์ คือ H กับ T

ถ้า A คือ เซ็ทของการเกิดหัว ดังนั้นเหตุการณ์ A เท่ากับ $\{H\}$

ตัวอย่าง 2.16 ในการโยนลูกเต๋า 1 ลูก จะมีผลการทดลองที่เป็นไปได้ 6 กรณีคือ ขึ้นแต้ม 1, 2, 3, 4, 5 หรือ 6 ฉะนั้น

$$s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

แซมเปิ้ลพ้อยท์ = สมาชิกแต่ละตัวในแซมเปิ้ลสเปซ เช่น 1,4 จากตัวอย่าง 2.16 2 จะมี Sample point อยู่ 6 จุด

ถ้า A คือ เหตุการณ์ของการขึ้นหน้า 5 ขึ้นไป

ดังนั้น $A = \{5, 6\}$

ตัวอย่าง 2.17 ในการโยนเหรียญ 3 เหรียญ จะเกิดผลการทดลองที่เป็นไปได้ทั้งหมดดังนี้

S = {(H, H, H), (H, H, T), (H, T, T), (T, H, H), (T, T, H) (T, H, T), (H, T, H), (T, T, T)}

แซมเปิ้ลพ้อยท์ = สมาชิกแต่ละตัวในแซมเปิ้ลสเปซ เช่น (H, H, T) หรือ (H, T, T) เป็นต้น จากตัวอย่างข้างบนนี้มี Sample point อยู่ 8 เหตุการณ์

2.2.2 การหาความน่าจะเป็น

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A มีค่าเท่ากับจำนวนสมาชิกในเหตุการณ์ A หารด้วยจำนวนสมาชิกในแซมเปิ้ลสเปซ S เขียนในรูปของสมการได้ดังนี้

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(S)} \qquad \text{.......(2.5)}$$

เมื่อ P(A) = ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A

N(A) = จำนวนสมาชิกในเซ็ท A

N(S) = จำนวนสมาชิกในแซมเปิ้ลสเปซ

ตัวอย่าง 2.17 จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้แต้มมากกว่า 4 จากการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง

วิธีทำ

A (เหตุการณ์ที่ได้แต้มมากกว่า 4) = {5, 6}

$\therefore$ N (A) = 2

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

N (S) = 6

$$\therefore P(A) = \frac{N(A)}{N(S)}$$

$$= \frac{2}{6}$$

$$= .33$$

ตัวอย่าง 2.18 มีนักเรียนอยู่ 10 คน เป็นชาย 4 คน หญิง 6 คน เลือกนักเรียนมาอย่างสุ่ม 4 คน จงหาความน่าจะเป็นที่จะสุ่มได้ชาย 2 คน หญิง 2 คน

วิธีทำ

A = เหตุการณ์ที่จะสุ่มได้ชาย 2 คน หญิง 2 คน

N (A) = $\binom{4}{2}\binom{6}{2}$

N (S) = จำนวนวิธีที่จะเลือกนักเรียน 4 คน จากนักเรียน 10 คน = $\binom{10}{4}$

$$P(A) = \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{2}}{\binom{10}{4}}$$

$$= \frac{\frac{4!}{2!2!} \times \frac{6!}{2!4!}}{\frac{10!}{4!6!}}$$

$$= \frac{\frac{4\times3\times2\times1}{2\times1\times2\times1} \times \frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times1\times4\times3\times2\times1}}{\frac{10\times9\times8\times7\times6!}{4\times3\times2\times1\times6!}}$$

$$= \frac{6\times15}{210}$$

$$= \frac{90}{210}$$

$$= .43$$

ตัวอย่าง 2.19 หยิบไพ่อย่างสุ่มจากสำรับมา 3 ใบ จงหา ความน่าจะเป็นที่จะได้ J, Q, K

วิธีทำ

กำหนดให้ A = เหตุการณ์ที่จะได้ J, Q, K

$N(A)$ = จำนวนวิธีที่จะเลือกไพ่ J, Q, K

เนื่องจากมี J, Q, K อย่างละ 4 ใบ

ดังนั้นจะมีวิธีที่จะเลือก J = $\binom{4}{1}$ วิธี

จะมีวิธีที่จะเลือก Q = $\binom{4}{1}$ วิธี

และจะมีวิธีที่จะเลือก K = $\binom{4}{1}$ วิธี

ฉะนั้น $N(A) = \binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}$ วิธี

$$= \frac{4!}{1!\,(4-1)!} \times \frac{4!}{1!\,(4-1)!} \times \frac{4!}{1!\,(4-1)!} \text{ วิธี}$$

$$= \frac{4\times3\times2\times1}{1\times3\times2\times1} \times \frac{4\times3\times2\times1}{1\times3\times2\times1} \times \frac{4\times3\times2\times1}{1\times3\times2\times1}$$

$$= 4\times4\times4$$

= 64 วิธี

$N(S)$ = จำนวนวิธีที่จะเลือกไพ่ 3 ใบ จากไพ่ 52 ใบ

$N(S) = \binom{52}{3}$

ดังนั้น $P(A) = \dfrac{64}{\binom{52}{3}}$

$$= \frac{64}{\frac{52!}{3!49!}}$$

$$= \frac{64}{\frac{52 \times 51 \times 50 \times 49!}{3 \times 2 \times 49!}}$$

$$= \frac{64 \times 3}{52 \times 51 \times 25}$$

$$= \frac{192}{66300}$$

$$= .003$$

2.2.3 สัจจะพจน์ของความน่าจะเป็น

1. $P(S) = 1$
2. $O \leqslant P(A) \leqslant 1$
3. $P(\phi) = 0$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

ถ้าเหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B ไม่มีสมาชิกร่วมกัน (disjoint set) แล้ว $A \cap B = \phi$

$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

5. A และ B จะเป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระจากกัน (Independent events) ก็ต่อเมื่อ

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

สรุปเนื้อหาบทที่ 2

1. เครื่องหมายแฟคทอเรียล (!) เป็นสัญลักษณ์ที่ใช้แทนความหมายของการคูณกันตั้งแต่ 1 ถึงตัวที่ n
2. $n! = (1)(2)(3)(4) \ldots\ldots (n-3)(n-2)(n-1)(n)$
3. $O! = 1$
4. ถ้าเหตุการณ์ $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_n$ เกิดขึ้นได้ $k_1, k_2, k_3, \ldots\ldots, k_n$ วิธีตามลำดับแล้ว จะมีเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ที่จะเกิด $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_n$ พร้อม ๆ กัน ได้เท่ากับ (k_1) คูณ (k_2) คูณ (k_3) คูณ.......(k_n) วิธี
5. การจัดหมู่แบบเปอร์มิวเตชั่น เป็นวิธีการนำสิ่งของหรือคนมาจัดลำดับในหมู่หรือกลุ่มด้วยวิธีต่าง ๆ กัน ลำดับที่ (order) ของสมาชิกที่นำมาจัดกลุ่มมีความสำคัญมาก ลำดับที่ของสมาชิกที่แตกต่างกันในแต่ละกลุ่มนับเป็นวิธีการจัดกลุ่มหรือหมู่ที่แตกต่างกัน
6. ถ้ามีของอยู่ n สิ่ง นำมาจัดลำดับแบบเปอร์มิวเตชั่นทีละ r สิ่ง และ r มีค่าน้อยกว่า n จะจัดลำดับได้เท่ากับ $\frac{n!}{(n-r)!}$ วิธี
7. ถ้ามีของอยู่ n สิ่ง นำมาจัดลำดับแบบเปอร์มิวเตชั่นทีละ n สิ่ง จะจัดลำดับได้เท่ากับ n! วิธี
8. ถ้ามีของอยู่ n สิ่ง นำมาจัดลำดับเป็นวงกลม จะจัดได้เท่ากับ (n-1)! วิธี
9. การจัดหมู่แบบคอมบิเนชั่น เป็นการนำสิ่งของมาจัดหมู่โดยที่ลำดับที่ของสมาชิกในแต่ละหมู่ไม่มีความสำคัญดังนั้นการจัดหมู่จะทำได้น้อยวิธีกว่าการจัดแบบเปอร์มิวเตชั่น
10. ถ้ามีของอยู่ n สิ่ง นำมาจัดหมู่แบบคอมบิเนชั่นทีละ r สิ่งจะจัดได้เท่ากับ $\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$ วิธี
11. ถ้าสิ่งที่จะนำมาจัดหมู่แบบคอมบิเนชั่นแยกออกเป็นกลุ่มย่อย ๆ $n_1, n_2, \ldots\ldots, n_n$ กลุ่ม และการเลือกสมาชิกจากกลุ่มย่อย ๆ มาเข้าหมู่ไม่เป็นอิสระจากกันแล้ว จะจัดได้เท่ากับ

$$\binom{n_1}{r_1} \binom{n_2}{r_2} \ldots\ldots\ldots\ldots \binom{n_n}{r_n} \quad \text{วิธี}$$

12. แซมเปิ้ลสเปซ (S) หมายถึงเซ็ทของผลการทดลองทั้งหมดที่จะเป็นไปได้ ในการทดลองแต่ละครั้ง และโอกาสที่จะเกิดผลการทดลองแต่ละอย่างจะต้องเท่ากัน และเป็นอิสระจากกัน
13. แซมเปิ้ลพ้อยท์ หมายถึงผลการทดลองต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นซึ่งเป็นสมาชิกของแซมเปิ้ลสเปซ
14. เหตุการณ์ หมายถึงอนุเซ็ทของแซมเปิ้ลสเปซ
15. ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A มีค่าเท่ากับจำนวนสมาชิกในเหตุการณ์ A หารด้วยจำนวนสมาชิกในแซมเปิ้ลสเปซ S

ฉะนั้น $$F'(A) = \frac{N(A)}{N(S)}$$

16. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
17. A และ B จะเป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระจากกันก็ต่อเมื่อ $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

คำถามท้ายบทที่ 2

1. ถ้า $P(A) = 0.8$ $P(B) = 0.5$ A และ B เป็นเหตุการณ์อิสระจากกัน ให้หา $P(A \cap B)$
2. มีกี่วิธีที่แตกต่างกันที่จะนำอักษร **ก ข ค ง จ** มาเรียงลำดับ
3. ถ้า $P(A) = 0.30$ ให้หา $P(A')$
4. มีเลขอยู่ 5 ตัว คือ 1 2 3 4 5 นำมาจัดเรียงทีละ 3 ตัว จะจัดได้กี่วิธี
5. พ่อ แม่ และลูกอีก 4 คน จะมีวิธีนั่งล้อมโต๊ะอาหารกลมได้กี่วิธี
6. พ่อ แม่ และลูกอีก 4 คน นั่งล้อมโต๊ะอาหารกลมจะมีวิธีนั่งได้กี่วิธีถ้ามีข้อแม้ว่า พ่อและแม่ ต้องนั่งติดกัน
7. นักเรียนห้องหนึ่งมี 20 คน จะเลือกนักเรียนเป็นตัวแทนของห้อง 5 คน ได้กี่วิธี
8. นักเรียนห้องหนึ่งมี 20 คน เป็นชาย 12 หญิง 8 คน จะเลือกนักเรียนเป็นตัวแทนของห้อง 5 คน โดยเป็นชาย 3 คน หญิง 2 คน ได้กี่วิธี
9. โยนเหรียญ 3 เหรียญ พร้อม ๆ กัน 1 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่เหรียญจะขึ้นหัว 2 เหรียญ และก้อย 1 เหรียญ
10. ในการคัดเลือกทหารแห่งหนึ่ง มีตั๋วสีแดงอยู่ 140 ใบ ตั๋วสีดำอยู่ 60 ใบ ถ้าใครจับได้ตั๋วสีแดงต้องเป็นทหาร ถ้าจับได้ตั๋วสีดำไม่ต้องเป็นทหาร ถ้าวินิจเป็นผู้มารับการคัดเลือกด้วยคนหนึ่ง จงหาความน่าจะเป็นที่วินิจจะไม่ต้องเป็นทหาร
11. มีจดหมายอยู่ 5 ฉบับ จะนำไปทิ้งตู้ไปรษณีย์ 3 ตู้ จะมีวิธีกระทำต่าง ๆ กันได้กี่วิธี
12. มีอักษร a, b, c, d, e, f นำมาจัดเรียงทีละ 4 ตัว จะจัดได้กี่วิธี
13. นก 5 ตัว เกาะกิ่งไม้ 4 กิ่ง ได้กี่วิธี
14. เราจะมีวิธีจัดหนังสือต่าง ๆ กัน 10 เล่ม บนหิ้งได้กี่วิธี ถ้ามีหนังสือ 2 เล่ม ต้องอยู่ชิดกันเสมอ
15. ถ้ามีข้อสอบแบบถูก-ผิด จำนวน 10 ข้อ จะมีวิธีตอบคำถามได้กี่แบบ
16. เราจะจัดนักเรียนเข้ากลุ่มโต้วาที 3 คน จากนักเรียนซึ่งเป็นชาย 5 คน หญิง 3 คน ได้กี่วิธี ถ้า

    1) นักเรียนในกลุ่มนั้นจะเป็นชายหรือหญิงก็ได้

    2) นักเรียนในกลุ่มนั้นเป็นชาย 2 คน หญิง 1 คน

    3) นักเรียนในกลุ่มนั้นต้องเป็นชายอย่างน้อย 2 คน
17. มีหนังสือประเภทต่าง ๆ กันอยู่ 10 เล่ม จะแจกให้นักเรียน 2 คน คือแดงและดำได้กี่วิธี ถ้านักเรียนคนหนึ่งได้รับแจกหนังสือ 6 เล่ม อีกคนหนึ่งจะได้รับ 4 เล่ม