บทที่ 10
ทฤษฎีกลุ่มตัวอย่างขนาดเล็ก
(SMALL SAMPLE THEORY)

วัตถุประสงค์

เมื่อท่านศึกษาเนื้อหาบทที่ 10 โดยละเอียดแล้ว ควรมีความสามารถ ดังนี้

1. บอกความหมายของการแจกแจงแบบที (t-distribution) ได้
2. บอกความหมายของ **ชั้นแห่งความอิสระ** (degree of freedom) และหาค่าของ **ชั้นแห่งความอิสระ** ได้
3. บอกสถิติที่ใช้ในการทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยของประชากร เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดเล็กได้
4. เขียนสมมุติฐาน และทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยของประชากรเมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดเล็กได้
5. วิเคราะห์ข้อมูลทางการศึกษาโดยใช้ทฤษฎีกลุ่มตัวอย่างขนาดเล็กได้

เนื้อหา

10.1 การแจกแจงแบบที (t-distribution)

10.2 ชั้นแห่งความอิสระ (degress of freedom)

10.3 การทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยของประชากร

- 10.3.1 กรณีกลุ่มตัวอย่างกลุ่มเดียว (The one sample case)
- 10.3.2 กรณีกลุ่มตัวอย่าง 2 กลุ่ม ที่เป็นอิสระจากกัน (The two independent sample case)
- 10.3.3 กรณีกลุ่มตัวอย่าง 2 กลุ่ม ที่มีความสัมพันธ์เกี่ยวข้องกัน (The two related sample case)

เนื้อหาที่ 10.1 การแจกแจงแบบที

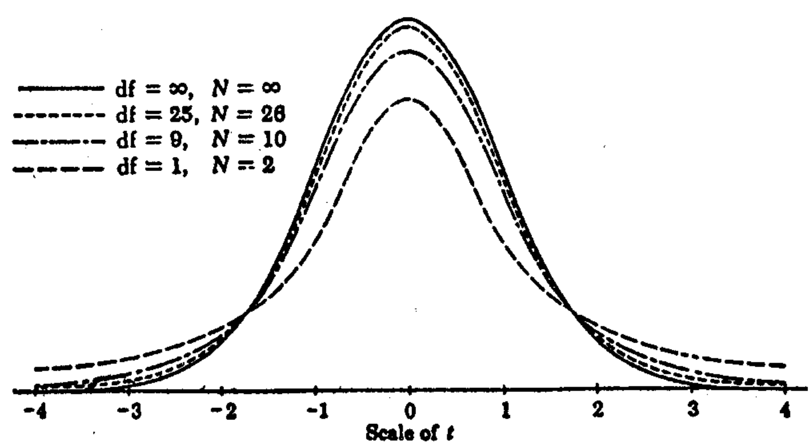
1. การแจกแจงแบบที

เราได้ทำการศึกษาการแจกแจงแบบซี (Z-distribution) มาแล้วในบทก่อนว่า ซีมีการแจกแจงแบบปกติ (Normal distribution) ซึ่งมี $\mu = 0$ และ $\sigma = 1$ ในบทนี้จะกล่าวถึงการแจกแจงอีกแบบหนึ่งที่มีชื่อว่า "การแจกแจงแบบที" การแจกแจงแบบทีเป็นการแจกแจงของกลุ่มตัวอย่างขนาดเล็ก (จำนวนกลุ่มตัวอย่างน้อยกว่าหรือเท่ากับ 30) ซึ่งมี $\mu = 0$, $\sigma = \sqrt{\frac{n}{n-2}}$ ผู้ที่คิดการแจกแจงแบบทีขึ้นมาเป็นชาวอังกฤษชื่อ W.S. Gosset Gosset ได้ตีพิมพ์บทความเกี่ยวกับการแจกแจงแบบทีเผยแพร่โดยใช้นามปากกาว่า "Student" ด้วยเหตุนี้จึงมีผู้นิยมเรียกการแจกแจงแบบทีว่า "Student's distribution" การแจกแจงแบบทีมีคุณสมบัติทั่วไปดังนี้

1) กราฟของการแจกแจงมีลักษณะสมมาตร เมื่อใช้ค่าเฉลี่ยเป็นจุดหลัก

2) การแจกแจงมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 นั่นคือ $E(t) = 0$

3) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของการแจกแจงมีค่าเท่ากับ $\sqrt{\frac{n}{n-2}}$ ดังนั้นส่วนมาตรฐานของการแจกแจงจึงมีค่ามากกว่า 1 ($\sigma > 1$) โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดเล็ก ($n \leqslant 30$) ดังนั้นการแจกแจงแบบทีจะไม่เป็นการแจกแจงแบบปกติ แต่ถ้ากลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่ขึ้น การแจกแจงแบบทีจะมีลักษณะคล้ายการแจกแจงแบบปกติมากขึ้นดังรูป 10.1



รูป 10.1 *การแจกแจงแบบที เมื่อชั้นแห่งความอิสระ* (df) *มีค่าตั้งแต่ 1 ถึง ∞ ถ้า* df *ยิ่งมีค่ามาก การแจกแจงแบบทีก็จะมีลักษณะใกล้เคียงกับการแจกแจงแบบปกติ*

4) การแจกแจงแบบที ถูกกำหนดโดยค่าดีกรีอ๊อฟฟรีดอม นั่นคือ ถ้า df มีค่ามาก การแจกแจงแบบทีจะมีการแจกแจงใกล้เคียงกับการแจกแจงแบบปกติ ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 1

เนื้อหาที่ 10.2 ชั้นแห่งความอิสระ

ชั้นแห่งความอิสระ (ใช้สัญลักษณ์ df) หมายถึง ความมีอิสระในการเลือกหรือการทำสิ่งหนึ่งสิ่งใดของกลุ่มตัวอย่าง เช่น ถ้ามีนักเรียนอยู่ 5 คน คือ ก ข ค ง และ จ และมีขนมอยู่ 5 ชิ้น ถ้าให้ ก ข ค ง และ จ เลือกขนมคนละ 1 ชิ้น โดยเริ่มจาก "ก" "ก" จะมีโอกาสเลือกขนม 1 ชิ้น จากขนมทั้ง 5 ชิ้น "ข" จะมีโอกาสเลือก 1 จาก 4 "ค" จะมีโอกาสเลือก 1 จาก 3 "ง" จะมีโอกาสเลือก 1 จาก 2 ส่วน "จ" จะไม่มีโอกาสเลือกเลยต้องกินขนมชิ้นที่เหลือเท่านั้น จากตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นว่า มีนักเรียนอยู่ 4 คน ที่มีอิสระในการเลือกขนม แต่จะมีนักเรียนอยู่ 1 คน ที่ไม่มีอิสระในการเลือกขนมเลย ดังนั้นชั้นแห่งความอิสระของกลุ่มตัวอย่าง = 4 ($df = n-1 = 5-1 = 4$)

เนื้อหาที่ 10.3 การทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยของประชากร

เนื่องจากในการสุ่มกลุ่มตัวอย่างที่มี**จำนวนน้อยกว่าหรือเท่ากับ 30 คนนั้น** การแจกแจงของค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างจะไม่เป็นการแจกแจงแบบปกติ ดังนั้นเราจึงไม่สามารถใช้การทดสอบแบบซี (Z-test) ในการทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยของประชากร สถิติที่เหมาะสมสำหรับใช้กับกลุ่มตัวอย่างขนาดเล็กคือการทดสอบแบบที (t-test)

ในการใช้การทดสอบแบบที วิเคราะห์ข้อมูลเมื่อต้องการจะทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยของประชากร สามารถกระทำได้ใน 3 กรณี คือ

10.3.1 กรณีกลุ่มตัวอย่างกลุ่มเดียว

10.3.2 กรณีกลุ่มตัวอย่าง 2 กลุ่มที่เป็นอิสระจากกัน และ

10.3.3 กรณีกลุ่มตัวอย่าง 2 กลุ่มที่มีความสัมพันธ์เกี่ยวข้องกัน

การทดสอบโดยใช้การทดสอบแบบทีแต่ละกรณีมีรายละเอียด ดังนี้

10.3.1 กรณีกลุ่มตัวอย่างกลุ่มเดียว

ขั้นตอนในการทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยของประชากรเมื่อมีกลุ่มตัวอย่างขนาดเล็ก 1 กลุ่ม มีดังนี้

1) สถิติสำหรับการคำนวณ

ในกรณีที่กลุ่มตัวอย่างมีจำนวนน้อยกว่าหรือเท่ากับ 30 และผู้ทำวิจัยไม่รู้ค่า σ^2 สถิติที่เหมาะสมสำหรับการทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยของประชากร (μ) เมื่อมีกลุ่มตัวอย่างเพียงกลุ่มเดียวคือ

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}, \quad df = n-1 \qquad \text{.......(10.1)}$$

เมื่อ $\bar{X}$ = ค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่าง

μ = ค่าเฉลี่ยของประชากร

s = ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มตัวอย่าง

n = จำนวนกลุ่มตัวอย่าง

2) ข้อตกลงเบื้องต้นของการใช้ t-test

ก. กลุ่มตัวอย่างจะต้องถูกเลือกมาแบบสุ่ม

ข. ประชากรมีการกระจายแบบปกติ

3) การตั้งสมมุติฐาน

สมมุติฐานกลางและสมมุติฐานเผื่อเลือก อาจจะตั้งเป็นแบบใดแบบหนึ่งใน 3 แบบข้างล่างนี้คือ

ก. $H_0 : \mu \quad \mu_0$

$H_1 : \mu \neq \mu_0$

หรือ

ข. $H_0 : \mu = \mu_0$

$H_1 : \mu < \mu_0$

หรือ

ค. H_O : $\mu = \mu_O$

H_1 : $\mu > \mu_O$

เมื่อ μ_O เป็นค่าคงที่ตัวหนึ่ง

4) **กำหนดขอบเขตวิกฤต**

ในการจะพิจารณาตัดสินว่าจะปฏิเสธหรือไม่ปฏิเสธสมมุติฐานกลางหรือไม่นั้นมีหลักการพิจารณา 3 แบบ คือ

ก. ในกรณีที่สมมุติฐานเผื่อเลือกคือ $H_1 : \mu > \mu_O$ เรา**จะปฏิเสธสมมุติฐานกลาง**ถ้าค่า t ที่ได้จากการคำนวณ**มีค่ามากกว่า**หรือเท่ากับ $t_{(1-\infty;\ df)}$

ค่า $t_{(1-\infty;\ df)}$ จะหาได้จากตารางที่ 2 ในภาคผนวก ในการเปิดหาค่า t จากตารางนั้นให้หาค่า df เสียก่อนว่า df มีค่าเท่าไร ตัวอย่างเช่นถ้ากำหนดให้ $\infty = .05$ และ $n = 25$ ดังนั้น $df = n-1 = 24$ เมื่อได้ค่า df แล้วก็เปิดหาค่า $t_{(.95,\ 24)}$ จากตารางดังกล่าวโดยหาค่า $1-\infty$ ให้พบว่าตกอยู่ในสดมภ์ที่ 2 ของหน้า 2 ของตาราง t แล้วจึงหาว่า df ตกอยู่แถวใด (ในตารางใช้สัญลักษณ์ v แทนค่า df) แล้วจึงลากเส้นจากแถวนั้นมาตัดกับสดมภ์ที่ 2 ก็จะได้ค่า t จากตารางที่ต้องการ จากตัวอย่าง df = 24 เมื่อลากมาตัดกับสดมภ์ที่ 2 ของหน้า 2 ของตาราง t แล้วจะพบว่า t จากตารางมีค่า 1.711 ถ้าเราคำนวณ t จากสูตรได้ค่ามากกว่า 1.711 เราก็จะปฏิเสธสมมุติฐานกลาง แต่ถ้า t จากตารางคำนวณมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับค่า t ที่ได้จากการเปิดตารางเราก็จะไม่ปฏิเสธสมมุติฐานกลาง

ข. ในกรณีที่สมมุติฐานเผื่อเลือกคือ $H_1 : \mu < \mu_O$ เรา**จะปฏิเสธสมมุติฐานกลาง** ถ้า t ที่ได้จากการคำนวณมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ $-t_{(1-\infty;\ df)}$

ค. ในกรณีที่สมมุติฐานเผื่อเลือกคือ $H_1 : \mu \neq \mu_O$ เรา**จะปฏิเสธสมมุติฐานกลาง** ถ้า t ที่ได้จากการคำนวณมีค่า**มากกว่า**หรือเท่ากับ $-t_{(1-\infty/2;\ df)}$ t หรือถ้า t ที่ได้จากการคำนวณมีค่า**น้อยกว่า**หรือเท่ากับ $-t_{(1-\infty/2;\ df)}$ ตัวอย่างเช่น

สมมุติว่ากำหนดให้ $\infty = .05$ $n = 25$ ฉะนั้น $1-\infty/2 = .975$ ก็ให้ไปเปิดตารางหาค่าของ $t_{(.975;24)}$ ตามวิธีที่กล่าวมาแล้วในข้อ ก.

ตัวอย่าง 10.1 นักเรียน 16 คน ได้รับการฝึกอบรมเป็นพิเศษเกี่ยวกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ข้อสอบมาตรฐานซึ่งมี $\mu = 80$ ได้ถูกนำมาทดสอบความสามารถใน

การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์กับนักเรียน 16 คนนี้ ค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่างมีค่าเท่ากับ 86 และ 64 ตามลำดับ อยากทราบว่าการฝึกอบรมมีผลต่อคะแนนสอบหรือไม่ กำหนดให้ $\infty = .05$

วิธีทำ

ในที่นี้ $\mu_O = 80$

$\overline{X} = 86$

$s^2 = 64$ **ฉะนั้น** $s = 8$

$n = 16$

1) $H_O : \mu = 80$

$H_1 : \mu \neq 80$

2) $t = \dfrac{\overline{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$, $df = n-1$

เนื่องจาก $n = 16$ ดังนั้น $df = n-1 = 15$

ฉะนั้น $t = \dfrac{86-80}{8/\sqrt{16}}$, $df = 15$

$= \dfrac{6}{8/4}$

$= 3$

3) จะปฏิเสธสมมุติฐานกลาง ถ้า t จากการคำนวณมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ $t_{(.975:15)}$ หรือน้อยกว่าหรือเท่ากับ $-t_{(.975:15)}$ จากการเปิดตาราง $t_{(.975:15)} = 2.131$

4) สรุปผล

เนื่องจาก t ที่คำนวณได้มีค่าเท่ากับ 3 แต่ t ที่ได้จากการเปิดตารางมีค่าเท่ากับ 2.131 ดังนั้นเราจึงปฏิเสธสมมุติฐานกลาง

ฉะนั้นแสดงว่าค่าเฉลี่ยของประชากรมีค่าไม่เท่ากับ 80 จึงสรุปได้ว่า การฝึกอบรมมีผลต่อคะแนนการสอบ

10.3.2 กรณีกลุ่มตัวอย่าง 2 กลุ่มที่เป็นอิสระจากกัน

ขั้นตอนในการทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยของประชากร เมื่อมีกลุ่มตัวอย่างขนาดเล็ก ($n \leqslant 30$) 2 กลุ่มที่เป็นอิสระจากกัน มีดังนี้

1) **สถิติสำหรับการคำนวณ**

ในกรณีที่เราไม่รู้ค่าความแปรปรวนของประชากร และเมื่อกลุ่มตัวอย่างแต่ละกลุ่มมีจำนวนน้อยกว่าหรือเท่ากับ 30 คนแล้ว สถิติที่เหมาะสมสำหรับการทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยของประชากรเมื่อมีกลุ่มตัวอย่าง 2 กลุ่ม ที่เป็นอิสระจากกันคือ

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}, df = n_1 + n_2 - 2 \qquad ....(10.2)$$

เมื่อ $$s_p^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

2) **ข้อตกลงเบื้องต้น**

จะใช้สถิติที่กล่าวมาแล้วข้างต้นได้ต่อเมื่อ

ก. กลุ่มตัวอย่างถูกเลือกมาแบบสุ่ม

ข. ประชากรมีการกระจายแบบปกติ

ค. ประชากรแต่ละกลุ่มมีค่าความแปรปรวนเท่ากัน ในกรณีที่เราไม่รู้ค่าความแปรปรวนของประชากร ถ้าเรากำหนดให้ $n_1 = n_2$ แล้ว ก็สามารถใช้สถิติดังกล่าวได้โดยไม่ต้องเป็นกังวลว่าจะผลที่ได้จากการวิจัยจะมีความคลาดเคลื่อน เพราะใช้สถิติไม่เหมาะสมกับข้อมูล

3) **การตั้งสมมุติฐาน**

สมมุติฐานกลางและสมมุติฐานเผื่อเลือกอาจจะตั้งเป็นแบบใดแบบหนึ่งใน 3 แบบข้างล่างนี้

ก. $H_O : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

หรือ

ข. $H_O : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 > \mu_2$

หรือ

ค. $H_O : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 < \mu_2$

เมื่อ

μ_1 = ค่าเฉลี่ยของประชากรกลุ่มที่ 1
μ_2 = ค่าเฉลี่ยของประชากรกลุ่มที่ 2

4) **กำหนดขอบเขตวิกฤติ**

ในการจะพิจารณาตัดสินว่าจะปฏิเสธหรือไม่ปฏิเสธสมมุติฐานกลางหรือไม่นั้นมีหลักการพิจารณา 3 แบบ คือ

ก. ในกรณีที่สมมุติเผื่อเลือกคือ $H_1 : \mu_1 > \mu_2$ เราจะปฏิเสธสมมุติฐานกลางถ้าค่า t ที่ได้จากการคำนวณมีค่ามากกว่า $t_{(1-\infty;\ df)}$ ในการทดสอบสมมุติฐานครั้งนี้ df มีค่าเท่ากับ $n_1 + n_2 - 2$

ข. ในกรณีที่สมมุติฐานเพื่อเลือกคือ $H_1 : \mu_1 < \mu_2$ **เราจะปฏิเสธสมมุติฐานกลางถ้า** t ที่ได้จากการคำนวณมีค่า**น้อยกว่า**หรือเท่ากับ $-t_{(1-\infty;\ df)}$

ค. ในกรณีที่สมมุติฐานเพื่อเลือกคือ $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ **เราจะปฏิเสธสมมุติฐานกลางถ้า** t ที่ได้จากการคำนวณมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ $t_{(1-\infty/2;\ df)}$ หรือน้อยกว่าหรือเท่ากับ $-t_{(1-\infty/2;\ df)}$

ตัวอย่าง 10.2 สมมุติว่านักวิจัยต้องการทำการศึกษาเปรียบเทียบเกี่ยวกับตำราเรียน 2 เล่ม กับกลุ่มตัวอย่างที่สุ่มมา 40 คน เขาได้แบ่งกลุ่มตัวอย่างออกเป็น 2 กลุ่ม ๆ ละ 20 คนแบบสุ่ม และทดลองให้แต่ละกลุ่มใช้ตำราเรียนที่แตกต่างกัน อยากทราบว่าเมื่อใช้แบบทดสอบความสามารถในการเรียนของนักเรียน 2 กลุ่มหลังจากที่เรียนจบหลักสูตรแล้ว นักเรียน 2 กลุ่มนี้จะมีความสามารถแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติหรือไม่ กำหนดให้ $\infty = .05,\ \bar{X}_1 = 28,\ \bar{X}_2 = 23,\ s_1^2 = 120,\ s_2^2 = 80$

วิธีทำ

1) $H_O : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

2) $$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}},\ df = n_1 + n_2 - 2$$

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)\ s_1^2 + (n_2 - 1)\ s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

แทนค่าในสูตร

$$s_p^2 = \frac{19\,(120) + 19\,(80)}{20 + 20 - 2}$$

$$= 100$$

ฉะนั้น

$$t = \frac{28 - 23}{100\,(1/_{20} + 1/_{20})}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{10}}$$

$$= 1.58$$

$$df = n_1 + n_2 - 2 = 20 + 20 - 2 = 38$$

3) จะปฏิเสธสมมุติฐานกลางถ้า t จากการคำนวณมีค่ามากกว่า $t_{(.975;38)}$ หรือน้อยกว่า $-t_{(.975;38)}$ จากการเปิดตาราง $t_{(.975;38)} = 2.02$

4) สรุปผล

เนื่องจาก t ที่คำนวณได้มีค่าน้อยกว่า $t_{(.975;38)}$ แต่มากกว่า $-t_{(.975;38)}$ ดังนั้นเราจึงไม่ปฏิเสธสมมุติฐานกลาง

ฉะนั้นผลจากการทดสอบสมมุติฐานแสดงให้เห็นว่าตำราเรียน 2 เล่มนี้**ไม่ทำให้ผล**การเรียนของนักเรียนแตกต่างกัน

10.3.3 กรณีกลุ่มตัวอย่าง 2 กลุ่มที่มีความสัมพันธ์เกี่ยวข้องกัน

ในการทำวิจัยบางประเภท ผู้ทำการวิจัยต้องการควบคุมให้กลุ่มตัวอย่างทั้ง 2 กลุ่ม มีความรู้ความสามารถหรือสติปัญญาเท่ากัน เป็นพื้นฐานก่อนที่จะทำการทดลองเพื่อให้สามารถสรุปผลจากการทดลองได้ถูกต้องมากยิ่งขึ้น ดังนั้นผู้ทำการวิจัยจึงเลือกกลุ่มตัวอย่างที่มีลักษณะเหมือนกัน หรือคล้ายคลึงกันมากที่สุด เช่น ฝาแฝด คนที่มี I.Q. เท่ากัน หรือคนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเท่ากันเป็นคู่ ๆ ไป แล้วจึงแยกกลุ่มตัวอย่างในแต่ละคู่เข้ากลุ่มการทดลองแบบสุ่ม ดังนั้นกลุ่มตัวอย่างในการทดลองแบบนี้ จึงถือว่ามีจำนวน n คู่ วิธีการเลือกกลุ่มตัวอย่างที่มีความคล้ายคลึงกันทีละคู่เราเรียกว่า "matched pairs" ขั้นตอนในการทดสอบสมมุติฐาน มีดังนี้

1) สถิติที่ใช้ในการคำนวณ

ถ้าต้องการจะทดสอบผลต่างของค่าเฉลี่ยของประชากร 2 กลุ่ม เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดน้อยกว่า หรือเท่ากับ 30 คู่แล้ว สถิติที่เหมาะสมคือ

$$t = \frac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}}, df = n - 1 \qquad \text{.......(10.3)}$$

เมื่อ n = จำนวนคู่ของการทดลอง

$\bar{d} = \sum d_i/n$

$s_d^2 = \dfrac{n\sum d_i^2 - (\sum d_i)^2}{n(n-1)}$

d_i = ผลต่างของคะแนนของกลุ่มตัวอย่างคู่ที่ i

2) **ข้อตกลงเบื้องต้น**

ก. กลุ่มตัวอย่างแต่ละคู่ถูกเลือกมาแบบสุ่ม

ข. ประชากรมีการกระจายแบบปกติ

3) **การตั้งสมมุติฐาน**

สมมุติฐานกลางและสมมุติฐานเผื่อเลือก อาจจะตั้งเป็นแบบใดแบบหนึ่งใน 3 แบบข้างล่างนี้

ก. $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 > \mu_2$

หรือ

ข. $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 < \mu_2$

หรือ

ค. $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

4) กำหนดขอบเขตวิกฤต

ใช้หลักการเดียวกับกรณีที่ 3.1 และ 3.2 แต่ในการหาค่า df ของกรณีที่ 3.3 นี้ ขอให้ผู้อ่านพึงระวังว่าถึงแม้จะเป็นการทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยของประชากร 2 กลุ่ม แต่ df จะมีค่าเท่ากับ n-1 เท่านั้น เพราะประชากร 2 กลุ่มนั้นมีความสัมพันธ์เกี่ยวข้องกัน ดังได้อธิบายไว้แล้วข้างต้น

ตัวอย่าง 10.3 นำนักเรียน 12 คู่ ซึ่งแต่ละคู่มี I.Q. เท่ากัน มาทดลองเรียนวิชาคณิตศาสตร์โดยใช้วิธีสอน 2 แบบ คือแบบ A กับแบบ B ในการทดลองนี้ได้แยกนักเรียนแต่ละคู่ให้เรียนวิธีสอนที่แตกต่างกัน เมื่อจบการสอนในเวลา 3 อาทิตย์ ได้นำข้อสอบมาตรฐานวิชาคณิตศาสตร์มาทดสอบกับนักเรียนทั้ง 2 กลุ่ม อยากทราบว่าคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนกลุ่มที่เรียนวิธีสอนแบบ A แตกต่างจากคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนกลุ่มที่เรียนวิธีสอนแบบ B หรือไม่ ที่ระดับ $\infty = .05$ สมมุติว่าข้อมูลที่ได้จากการทดลองเป็นดังนี้

นักเรียน คู่ที่	คะแนนของกลุ่ม A (X_{1i})	คะแนนของกลุ่มB (X_{2i})	d_i	d_i^2
1	62	50	12	144
2	40	42	−2	4
3	61	51	10	100
4	35	26	9	81
5	30	35	−5	25
6	52	42	10	100
7	68	60	8	64
8	51	41	10	100
9	84	70	14	196
10	63	55	8	64
11	72	62	10	100
12	50	38	12	144
ผลรวม (Σ)	668	572	96	1122

วิธีทำ

1) H_O : $\mu_1 = \mu_2$

H_1 : $\mu_1 \neq \mu_2$

2) $$t = \frac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}}, \ df = n-1 \qquad \text{.......(10.3)}$$

$$d = \Sigma d_{i/n}$$

$$= 96/_{12}$$

$$= 8$$

$$df = n-1 = 12-1 = 11$$

$$s_d = \sqrt{\frac{n\,\Sigma d_i^2 - (\Sigma d_i)^2}{n\,(n-1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(12)\,(1122) - (96)^2}{12\,(12-1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{13464 - 9216}{132}}$$

$$= \sqrt{\frac{4248}{132}}$$

$$= \sqrt{32.48}$$

$$= 5.67$$

แทนค่า $\bar{d}$, s_d , และ n ในสูตร 10.3

$$t = \frac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}}$$

$$= \frac{8}{5.67/\sqrt{12}}$$

$$= \frac{(8)(\sqrt{12})}{5.67}$$

$$= \frac{(8)(3.46)}{5.67}$$

ดังนั้น

$$t = \frac{27.68}{5.67} =$$

3) จะปฏิเสธสมมุติฐานกลางถ้า t ที่คำนวณได้มีค่ามากกว่า $t_{(.975;11)}$ หรือน้อยกว่า $-t_{(.975:11)}$ จากตาราง $t_{(.975;11)} = 2.201$

4) สรุปผล

เนื่องจาก t ที่คำนวณได้มีค่า 4.88 ซึ่งมากกว่า t ที่ได้จากการเปิดตาราง $t_{(.975;11)} = 2.201$ ดังนั้นเราจึงปฏิเสธสมมุติฐานกลาง

ฉะนั้นจึงสรุปได้ว่าวิธีสอน 2 แบบ ให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ที่แตกต่างกัน

สรุปเนื้อหาบทที่ 10

1. การแจกแจงแบบที เป็นการแจกแจงของกลุ่มตัวอย่างขนาดเล็ก ($n \leqslant 30$)
2. การแจกแจงแบบที จะไม่เป็นการแจกแจงแบบปกติ แต่ถ้ากลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่ขึ้น การแจกแจงแบบทีจะมีลักษณะคล้ายการแจกแจงแบบปกติมากขึ้น
3. สถิติที่เหมาะสมสำหรับการทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยของประชากร เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีจำนวนน้อยกว่าหรือเท่ากับ 30 คือ การทดสอบแบบที (t-test)
4. สูตร $t = \dfrac{X-\mu}{s/\sqrt{n}}$ ใช้วิเคราะห์ข้อมูลเมื่อมีกลุ่มตัวอย่างเพียงกลุ่มเดียว
5. สูตร $t = \dfrac{\bar{X}_1-\bar{X}_2}{\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$ ใช้วิเคราะห์ข้อมูล

   เมื่อมีกลุ่มตัวอย่าง 2 กลุ่มที่เป็นอิสระจากกัน
6. สูตร $t = \dfrac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}}$ ใช้วิเคราะห์ข้อมูลเมื่อมีกลุ่มตัวอย่าง 2 กลุ่มที่มีความสัมพันธ์เกี่ยวข้องกัน

คำถามท้ายบทที่ 10

1. ในการทดลองวิธีการสอน 2 แบบ ในวิชาวิทยาศาสตร์ กับนักเรียน 2 กลุ่มโดยทำการสุ่มมากลุ่มละ 10 คน โดยให้กลุ่มที่ 1 ทำการสอนแบบใช้การทดลอง กลุ่มที่ 2 ใช้การสอนแบบบรรยาย ได้ผลการทดลอง ดังนี้

คะแนนกลุ่มที่ 1	คะแนนกลุ่มที่ 2
25	17
22	20
18	26
22	18
19	20
20	25
25	19
34	16
20	18
28	21

ก. อยากทราบว่าการสอน 2 แบบ ให้ผลการเรียนที่แตกต่างกันหรือไม่ที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติ .05

ข. สมมุติว่าท่านใช้ฝาแฝด 10 คู่ ในการทดลอง ให้ท่านทดสอบดูว่าการสอน 2 แบบให้ผลการเรียนที่แตกต่างกันหรือไม่ที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติ .05

2. คะแนนจากการตอบข้อสอบความถนัดของผู้ชาย 10 คน และผู้หญิง 20 คน เป็นดังนี้

ชาย : 22, 31, 38, 47, 48, 48, 49, 50, 52, 61

หญิง : 22, 23, 25, 25, 31, 33, 34, 34, 35, 37, 40, 41, 42, 43, 44, 44, 46, 48, 53, 54

อยากทราบว่ามีความแตกต่างระหว่างคำตอบของชายและหญิงที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติ .01 หรือไม่

3. คะแนนเฉลี่ยที่ได้จากการทดสอบกลุ่มตัวอย่าง 20 คน เท่ากับ 35 และมีค่าของความเบี่ยงเบนมาตรฐาน 3.7 อยากทราบว่าคะแนนเฉลี่ยของประชากรมีค่ามากกว่า 32 หรือไม่ กำหนดระดับนัยสำคัญทางสถิติเท่ากับ .05
4. หลอดไฟบริษัทหนึ่งถูกโฆษณาวามีอายุใช้งานโดยเฉลี่ยอย่างต่ำ 850 ชั่วโมง ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 35 ชั่วโมง แต่จากการสุ่มตัวอย่างมาจำนวน 25 หลอด ปรากฏว่าหลอดไฟที่สุ่มมามีอายุการใช้งานเฉลี่ย 820 ชั่วโมง อยากทราบว่าหลอดไฟบริษัทนี้มีอายุใช้งานโดยเฉลี่ยเท่ากับ 850 ชั่วโมงหรือไม่ กำหนดระดับนัยสำคัญทางสถิติเท่ากับ .01
5. ผลการสอบวิชาภาษาอังกฤษของนักศึกษาปริญญาโท 2 กลุ่ม ๆ ละ 8 คน เป็นดังนี้

กลุ่มที่ 1 : 19, 28, 14, 23, 14, 17, 12, 15
กลุ่มที่ 2 : 25, 23, 29, 15, 27, 21, 24, 30

ก. อยากทราบว่าความสามารถในวิชาภาษาอังกฤษของนักศึกษา 2 กลุ่มนี้แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 หรือไม่

ข. หา point estimation ของคะแนนเฉลี่ยของทั้ง 2 กลุ่ม

ค. หา 95% confidence interval ของ $\mu_1 - \mu_2$