บทที่ 6

ค่าคาดหวังและความแปรปรวน

(Expected Value and Variance)

6.1 ค่าคาดหวัง หมายถึงค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่มซึ่งหาได้จากค่าทั้งหมดที่เป็นไปได้ของตัวแปรสุ่มนั้น ๆ ค่าคาดหวังของตัวแปรสุ่มเป็นค่าที่หวังว่าจะเกิดขึ้นมากที่สุดในการทดลองหลาย ๆ ครั้ง โดยทั่วไปเขียนสัญญลักษณ์แทนค่าคาดหวังของตัวแปรสุ่ม X ด้วย E (X)

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง

$$E(X) = \Sigma x f(x) \qquad \text{..............(6–1)}$$

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx \qquad \text{..............(6–2)}$$

ตัวอย่าง 1 ในกรณีที่ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง เช่น X = 1, 2, 3, 4 ด้วย $f(x) = \frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{2}{5}$ และ $\frac{1}{10}$ ตามลำดับ จงหา E (X)

$$E(X) = (1 \times \frac{1}{5}) + (2 \times \frac{3}{10}) + (3 \times \frac{2}{5}) + (4 \times \frac{1}{10})$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{6}{10} + \frac{6}{5} + \frac{4}{10}$$

$$= \frac{24}{10}$$

ตัวอย่าง 2 ในกรณีที่ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง เช่น X มีค่าอยู่ในช่วง (0, 2) ด้วย $f(x) = 1 - \frac{x}{2}$ จงหา E (X)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

$$= \int_{0}^{2} x \left(1 - \frac{x}{2}\right) dx$$

$$= \int_0^2 \left(x - \frac{x^2}{2}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right]_0^2$$

$$= \frac{4}{2} - \frac{8}{6}$$

$$= \frac{2}{3}$$

ตัวอย่าง 3 นำนาฬิกาเรือนหนึ่งราคา 800 บาท มาออกเบอร์ 100 เบอร์ ขายเบอร์ เบอร์ละ 10 บาท หากฉันซื้อเบอร์ 1 เบอร์ จงหาค่าเฉลี่ยที่ฉันจะได้กำไร

X : ค่าที่ฉันจะได้กำไรจากการซื้อเบอร์

range of X $= \{-10, 790\}$

จะเห็นได้ว่า x เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง

X	-10	790
$f(x)$	$\frac{99}{100}$	$\frac{1}{100}$
$x f(x)$	$\frac{-990}{100}$	$\frac{790}{100}$

ดังนั้น $E(X) = \Sigma x f(x)$

$$= \frac{-990}{100} + \frac{790}{100}$$

$$= \frac{-200}{100}$$

$$= -2$$

หมายความว่า ถ้าซื้อเบอร์แบบนี้หลาย ๆ ครั้ง ค่าเฉลี่ยที่จะได้กำไรในการซื้อครั้งหนึ่ง ๆ เป็น -2 บาท

ตัวอย่าง 4 หมอให้นาย ก. ลดอาหาร 2 สัปดาห์ โดยหมอ assume ว่า น้ำหนักที่นาย ก. จะลดได้อยู่ระหว่าง 5–10 ก.ก. ซึ่งกำหนด p.d.f. ดังนี้ $f(x) = \frac{3}{125}(x-5)^2$ จงหาน้ำหนักเฉลี่ยที่ นาย ก. จะลดได้

X : น้ำหนักที่นาย ก. จะลดได้

range of X $= \{x \mid 5 < x < 10\}$

จะเห็นได้ว่า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง

ดังนั้น $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$

$$= \int_{5}^{10} x \frac{3}{125} (x-5)^2\, dx$$

$$= \frac{3}{25} \int_{5}^{10} x\,(x^2 - 10x + 25)\, dx$$

$$= \frac{3}{125} \int_{5}^{10} (x - 10x^2 + 25x)\, dx$$

$$= \frac{3}{125} \left[\frac{x^4}{4} - \frac{10x^3}{3} + \frac{25x^2}{2} \right]_5^{10}$$

$$= \frac{3}{125} \left[\frac{10^4}{4} - \frac{10(10)^3}{3} + \frac{25(10)^2}{2} - \frac{5^4}{4} + \frac{10(5)^3}{3} - \frac{25(5)^2}{2} \right]$$

$$= \frac{3}{125} \left[\frac{10000}{4} - \frac{10000}{3} + \frac{2500}{2} - \frac{625}{4} + \frac{125}{3} - \frac{625}{2} \right]$$

$$= \frac{3}{125} \left(\frac{4375}{12} \right)$$

$$= \frac{35}{4}$$

$$= 8.75$$

หมายความว่า ถ้านาย ก. ทำการลดอาหารแบบนี้หลาย ๆ ครั้ง ค่าเฉลี่ยที่นาย ก. จะลดน้ำหนักได้ในครั้งหนึ่ง ๆ เท่ากับ 8.75 ก.ก.

6.2 ทฤษฎีเกี่ยวกับค่าคาดหวัง

ทฤษฎี 1 ถ้า c เป็นค่าคงที่จะได้ว่า $E(c) = c$

พิสูจน์ ในกรณีที่ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่องจะได้ว่า

$$E(c) = \Sigma\, c\, f(x)$$

$$= c\, \Sigma f(x)$$

$$= c \quad (\because \Sigma f(x) = 1)$$

ในกรณีที่ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง จะได้ว่า

$$E(c) = \int_{-\infty}^{\infty} c\, f(x)\, dx$$

$$= c \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

$$= c \quad (\because \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1)$$

ทฤษฎี 2 $E(cX) = c\,E(X)$

พิสูจน์ ในกรณีที่ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง จะได้ว่า

$$E(cX) = \Sigma\, cxf(x)$$

$$= c\, \Sigma\, xf(x)$$

$$= c\,E(X) \quad (\because E(X) = \Sigma\, xf(x))$$

ในกรณีที่ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง จะได้ว่า

$$E(cX) = \int_{-\infty}^{\infty} cxf(x)\, dx$$

$$= c \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\, dx$$

$$= c\,E(X) \quad (\because E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\, dx)$$

ทฤษฎี 3 $E(cX + b) = cE(X) + b$

ในทำนองเดียวกันสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$E(cX + b) = c\,E(X) + b$ โดยอาศัยการพิสูจน์จาก

ทฤษฎี 1 และ 2

6.3 ความแปรปรวน (Variance)

ความแปรปรวน หมายถึง ผลรวมทั้งหมดของคะแนนที่เบี่ยงเบนไปจากคะแนนเฉลี่ยยกกำลังสองแล้วหารด้วยจำนวนของคะแนนทั้งหมด โดยทั่วไปใช้ σ^2 แทนความแปรปรวนของประชากร และใช้ S^2 แทนความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่าง ความแปรปรวนหาได้จากสูตร

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma (X-\mu)^2}{N} \qquad (6-3)$$

หรือ $$S^2 = \frac{\Sigma (X-\bar{X})^2}{N-I} \qquad (6-4)$$

เมื่อ X แทน คะแนนของนักเรียนแต่ละคน

μ แทน คะแนนเฉลี่ยของประชากร

$\bar{X}$ แทน คะแนนเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่าง

N แทน จำนวนคะแนนทั้งหมด

การคำนวณหาความแปรปรวนของประชากร (σ^2) และความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่าง (S^2) จากสูตรดังกล่าวข้างต้นนี้ ค่อนข้างจะยุ่งยาก เพราะต้องนำคะแนนของนักเรียนแต่ละคนไปลบออกจากคะแนนเฉลี่ย แล้วนำมายกกำลังสอง จึงได้มีผู้ดัดแปลงสูตรข้างต้นให้อยู่ในรูปที่ง่ายต่อการคำนวณดังนี้

$$S^2 = \frac{\Sigma (X\ \ \bar{X})^2}{N-1}$$

$$= \frac{\Sigma (X^2 - 2\bar{X}X + \bar{X}^2)}{N-1}$$

$$= \frac{\Sigma X^2 - 2\left(\frac{\Sigma X}{N}\right)\Sigma X + \Sigma\left(\frac{\Sigma X}{N}\right)^2}{N-1}$$

$$= \frac{x\,X^2 - 2\frac{(\Sigma X)^2}{N} + N\frac{(\Sigma X)^2}{N^2}}{N-I}$$

$$= \frac{N\Sigma X^2 - 2(\Sigma X)^2 + (\Sigma X)^2}{N(N-r)}$$

$$= \frac{N\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}{N(N-1)} \qquad \text{I............. (6-5)}$$

ค่า $s^2 = \frac{\Sigma (X-\overline{X})^2}{N-1}$ นี้เป็นค่าประมาณที่ไม่ลำเอียงของ σ^2

ทั้งนี้เพราะ $E(s^2) = \sigma^2$

ความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม x เขียนแทนด้วย v (x)

นิยาม ถ้า x เป็นตัวแปรสุ่มจะได้ว่า

$v(x) = E\left[(X - E(x))^2\right]$ ....*............(6–6)

หรือได้ว่า

$v(x) = E(x)^2 - (E(x))^2$ ....(6–7)

พิสูจน์

จากนิยาม $V(x) = E\left[(X-E(x))^2\right]$

$= E\left[X^2 - 2XE(x) + (E(x))^2\right]$

$= E(X^2) - E\left[2XE(x)\right] + E\left[(E(x))^2\right]$

เนื่องจาก E (x) เป็นค่าคงที่ จะได้

$V(x) = E(X^2) - 2E(x)E(x) + (E(x))^2$

$= E(X^2) - (E(x))^2$

ค่ารากที่สองที่เป็นบวก ของ V (x) เรียกว่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวแปรสุ่ม X

ตัวอย่าง 5 จงหาความแปรปรวนของ X โดยที่ X หมายถึงผลรวมของแต้มที่ปรากฏจากการทอดเต๋า 2 ลูก ซึ่ง X จะมีค่าเป็น 2,3,4,...,12

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f (x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
x f (x)	$\frac{2}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{20}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{42}{36}$	$\frac{40}{36}$	$\frac{36}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{22}{36}$	$\frac{12}{36}$
x^2 f (x)	$\frac{4}{36}$	$\frac{18}{36}$	$\frac{48}{36}$	$\frac{100}{36}$	$\frac{180}{36}$	$\frac{294}{36}$	$\frac{330}{36}$	$\frac{324}{36}$	$\frac{300}{36}$	$\frac{242}{36}$	$\frac{144}{36}$

จะเห็นว่า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง

จาก $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$$E(X) = \Sigma x\, f(x)$$

$$= \frac{2}{36} + \frac{6}{36} + \frac{12}{36} + \frac{20}{36} + \frac{30}{36} + \frac{42}{36} + \frac{40}{36} + \frac{36}{36} + \frac{30}{36} + \frac{22}{36} + \frac{12}{36}$$

$$= \frac{252}{36}$$

$$E(X^2) = \Sigma\, x^2\, f(x)$$

$$= \frac{4}{36} + \frac{18}{36} + \frac{48}{36} + \frac{100}{36} + \frac{180}{36} + \frac{294}{36} + \frac{320}{36}$$

$$+ \frac{324}{36} + \frac{300}{36} + \frac{242}{36} + \frac{144}{36}$$

$$= \frac{1974}{36}$$

$$\therefore V(X) = \frac{1974}{36} - \left(\frac{252}{36}\right)^2$$

$$= \frac{210}{36}$$

ตัวอย่าง 6 ในกรณีที่ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง เช่น X มีค่าอยู่ในช่วง $(0, 2)$ ด้วย $f(x) = 1 - \frac{x}{2}$ จงหา $V(X)$

จาก $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, ds$$

$$= \int_0^2 x\left(1 - \frac{x}{2}\right) dx$$

$$= \int_0^2 \left(x - \frac{x^2}{2}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right]_0^2$$

$$= \frac{4}{2} - \frac{8}{6}$$

$$= \frac{2}{3}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx$$

$$= \int_0^2 x^2 \left(1-\frac{x}{2}\right) dx$$

$$= \int_0^2 \left(x^2 - \frac{x^3}{2}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{8}\right]_0^2$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{16}{8}$$

$$= \frac{2}{3}$$

$$\therefore V(X) = \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$= \frac{2}{9}$$

6.4 ทฤษฎีเกี่ยวกับความแปรปรวน

ทฤษฎี 1 ถ้า c เป็นค่าคงที่จะได้ว่า $V(c) = 0$

พิสูจน์ จากนิยาม

$$V(c) = E\left[(c - E(c))^2\right]$$

$$= E\left[c-c\right]^2$$

$$= E(0)$$

$$= 0$$

ทฤษฎี 2 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่ม และ c เป็นค่าคงที่ จะได้ว่า

$$V(cX) = c^2 V(X)$$

พิสูจน์

$$V(cX) = E\left[(cX - E(cX))^2\right]$$

$$= E\left[(cX - cE(X))^2\right]$$

$$= E\left[c^2 (X - E(X))^2\right]$$

$$= c^2 E\left[(X - E(X))^2\right]$$

$$= c^2 V(X)$$

ทฤษฎี 8 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่ม a และ b เป็นค่าคงที่ จะได้ว่า

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

พิสูจน์

$$\begin{aligned} V(aX + b) &= E\left[\left((aX + b) - E(aX + b) \right)^2 \right] \\ &= E\left[\left(aX + b - E(aX) - E(b) \right)^2 \right] \\ &= E[a^2 (X - E(X))^2] \\ &= a^2 E\left[(X - E(X))^2 \right] \\ &= a^2 V(X) \end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 6

1. ในการพนันทอดลูกเต๋าระหว่าง A กับ B ถ้าออกแต้ม 1 A จะได้เงินจาก B 5 บาท ถ้าไม่ออกแต้ม 1 A จะเสียเงินให้ B 2 บาท ทอดลูกเต๋าไปครั้งหนึ่ง A ควรจะได้หรือเสียเงินให้ B กี่บาท

2. จงหาค่าคาดหวังของตัวแปรสุ่ม X ซึ่งมีฟังก์ชันความน่าจะเป็นดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{6} & , x = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{สำหรับค่า } x \text{ อื่น ๆ} \end{cases}$$

3. ถ้าตัวแปรสุ่ม X มีฟังก์ชันความน่าจะเป็น เป็น $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{10} & , x = 1, 2, 3, 4 \\ 0 & \text{สำหรับค่า } x \text{ อื่น ๆ} \end{cases}$

   จงหาความแปรปรวนของ X

4. จงแสดงว่า $V(X) = E(X-E(X))^2 = \frac{\Sigma X^2}{N} - (\frac{\Sigma X}{N})^2$

   ในกรณีที่ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง

5. ถ้า X มี $f(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^x & , x = 1, 2, 3 \ldots \\ 0 & \text{สำหรับค่า } x \text{ อื่น ๆ} \end{cases}$

   จงหา $E(X^2 - 5X)$

6. จงหาความเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวแปรสุ่ม X ซึ่ง X = 3, 5, 5, 3, 7, 2, 0, 4 และหาความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม Y ซึ่ง Y^2 = 5, 1, 1, 16, 4, 25, 25