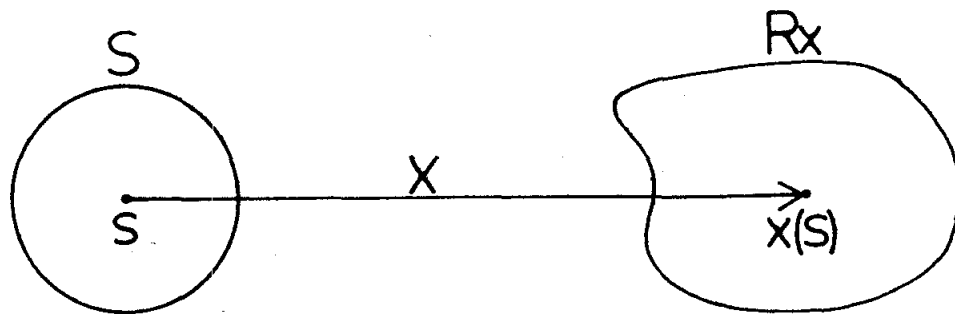


# บทที่ 5

## ตัวแปรสุ่มและฟังก์ชันความน่าจะเป็น

(Random Variable and Probability Function)

5.1 ตัวแปรสุ่ม (Random Variable) หมายถึงฟังก์ชันซึ่งเชื่อมโยงเหตุการณ์ทุก ๆ เหตุการณ์ในแซมเปิลสเปซ กับ เซ็ตของจำนวนจริง (Real number) ดังรูป



นั่นคือถ้าให้  $x$  แทนฟังก์ชันซึ่งเชื่อมโยงเหตุการณ์ทุก ๆ เหตุการณ์ในแซมเปิลสเปซ "S" กับ เซ็ตของจำนวนจริงแล้ว  $x$  มีชื่อว่าตัวแปรสุ่ม

ตัวอย่าง 1 ถ้าแซมเปิลสเปซ (S) หมายถึงเซตของผลที่ได้จากการทอดลูกเต๋า 2 ลูก

$$S = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), \\ (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), \\ (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), \\ (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), \\ (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), \\ (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) \}$$

ถ้าให้ตัวแปรสุ่ม  $x$  หมายถึงผลรวมของแต้มที่ปรากฏ

ดังนั้น  $X$  จะเป็นฟังก์ชันจาก  $S$  ไปยังเซตของจำนวนจริง ( $R$ ) ดังนี้

Sample space ( $S$ )	$R$
(1, 1)	→ 2
(1, 2), (2, 1)	→ 3
(1, 3), (2, 2), (3, 1)	→ 4
(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)	→ 5
(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)	→ 6
(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)	→ 7
(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)	→ 8
(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)	→ 9
(4, 6), (5, 5), (6, 4)	→ 10
(5, 6), (6, 5)	→ 11
(6, 6)	→ 12

ตัวอย่าง 2 ในการโยนเหรียญ 2 อัน 1 ครั้ง

ถ้าแซมเปิลสเปซ ( $S$ ) หมายถึง เซตของผลที่ได้จากการโยนเหรียญ 2 อัน 1 ครั้ง

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

ถ้าให้ตัวแปรสุ่ม  $X$  หมายถึงจำนวนเหรียญที่ขึ้นหัว

ดังนั้น  $X$  จะเป็นฟังก์ชันจาก  $S$  ไปยังเซตของจำนวนจริง ( $R$ ) ดังนี้

Sample space ( $S$ )	$R$
HH	→ 2
HT, TH	→ 1
TT	→ 0

## 5.2 ชนิดของตัวแปรสุ่ม

ตัวแปรสุ่มมี 2 ชนิด คือ

1. ตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete random variable)
2. ตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง (Continuous random variable)

5.2.1 ตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง เป็นฟังก์ชันซึ่งเชื่อมโยงเหตุการณ์ทุก ๆ เหตุการณ์ใน sample space ซึ่งเป็นเซตที่มีจำนวนจำกัด และสามารถนับได้ ไปยังเซตของจำนวนจริง เช่น

ถ้าให้  $S$  เป็นเซตของผลที่ได้จากการโยนเหรียญ 2 อัน 1 ครั้ง

$$S = \{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$$

และให้  $Y$  เป็นเซตของจำนวนเหรียญที่ขึ้นหัว

$$Y = \{2, 1, 0\}$$

ดังนั้นตัวแปรสุ่ม  $X$  ซึ่งเป็นฟังก์ชันจาก  $S$  ไปยัง  $\{2, 1, 0\}$  จึงเป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง

5.2.2 ตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง เป็นฟังก์ชันซึ่งเชื่อมโยงเหตุการณ์ใน Sample space ซึ่งเป็นเซตที่มีจำนวนสมาชิกไม่จำกัด ไปยังเซตของจำนวนจริง

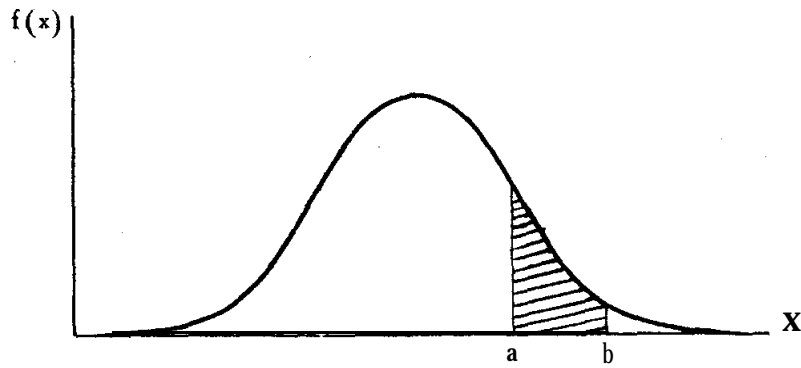
ถ้า  $S$  หมายถึงส่วนโค้งของวงกลม 1 หน่วยที่เลือกขึ้นมา เพื่อให้ให้มีจุดคงที่จุดหนึ่งอยู่ในส่วนโค้งนั้น

ถ้าให้ตัวแปรสุ่ม  $Z$  หมายถึงความยาวของส่วนโค้งที่เลือก

ดังนั้น  $Z$  จะเป็นฟังก์ชันจาก  $S$  ไปยังเซตของจำนวนจริงซึ่งอยู่ระหว่าง 0 กับ  $2\pi$  (เพราะวงกลมหนึ่งหน่วยมีความยาวของเส้นรอบวงเท่ากับ  $2\pi$ ) ช่วง  $(0, 2\pi)$  นี้ เป็นเซตนับไม่ได้

ค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง จะหาได้จากพื้นที่ใต้โค้ง โดยการกำหนดค่าของตัวแปรแบบเป็นช่วง (interval) แต่ถ้ากำหนดค่าของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องเป็นค่าใดค่าหนึ่งโดยเฉพาะ ค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มนั้นจะมีค่าเป็นศูนย์ ฉะนั้น

1.  $P(X = x) = 0$
2.  $P(a \leq Y \leq b) =$  พื้นที่แรเงาจาก  $a$  ถึง  $b$  ดังรูป



3. พื้นที่ใต้โค้งมีค่าเท่ากับ 1

4. ความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์

### 5.3 ฟังก์ชันความน่าจะเป็น (Probability function)

ฟังก์ชันความน่าจะเป็น หมายถึงฟังก์ชันจาก range ของตัวแปรสุ่มไปยังช่วง

(0,1) ตัวอย่างเช่น

ถ้า S หมายถึงเซตของผลที่ได้จากการทอดลูกเต๋า 2 ลูก

$$S = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \}$$

ถ้าตัวแปรสุ่ม x หมายถึงผลรวมของแต้มที่ปรากฏ x จะมีค่าเป็น 2,3,4,...,12

$$\begin{aligned} \text{โดยที่ } P(X = 2) &= \frac{1}{36} \\ P(X = 3) &= \frac{2}{36} \\ P(X = 4) &= \frac{3}{36} \\ P(X = 5) &= \frac{4}{36} \end{aligned}$$

$$P(X = 6) = \frac{5}{36}$$

$$P(X = 7) = \frac{6}{36}$$

$$P(X = 8) = \frac{5}{36}$$

$$P(X = 9) = \frac{4}{36}$$

$$P(X = 10) = \frac{3}{36}$$

$$P(X = 11) = \frac{2}{36}$$

$$P(X = 12) = \frac{1}{36}$$

ฟังก์ชันจาก  $\{2, 3, 4, \dots, 12\}$  ไปยัง  $\left\{\frac{1}{36}, \frac{2}{36}, \frac{3}{36}, \frac{4}{36}, \frac{5}{36}, \frac{6}{36}\right\}$

คือฟังก์ชันความน่าจะเป็น (Probability function)

หรือตัวอย่าง Probability function อื่น เช่น

$$f(X) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n,$$

ถ้า  $X$  เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง เรียก Probability function ของ  $X$  ว่า

Probability density function ก็คือเมื่อ

1.  $f(x) > 0$  ทุกๆ ค่าของ  $x$

2.  $\sum f(x) = 1$  เมื่อ  $X$  เป็นตัวแปรสุ่มที่ไม่ต่อเนื่อง

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad \text{เมื่อ } X \text{ เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง}$$

3.  $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$  ทุกค่า  $a, b$

$$\text{ซึ่ง } -\infty < a < b < \infty$$

ตัวอย่าง Probability density function เช่น

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2/\sigma^2}}{\sigma \sqrt{2\pi}}, \quad -\infty < x < \infty$$

## แบบฝึกหัด 5

1. สับเซตของตัวแปรสุ่มเป็นตัวแปรสุ่มหรือไม่ เพราะเหตุใด
2. ตัวแปรสุ่มต่อไปนี้ เป็นแบบต่อเนื่องหรือไม่ต่อเนื่อง
  - ก. จำนวนอุบัติเหตุที่เกิดจากรถยนต์ในกรุงเทพมหานครในแต่ละเดือน
  - ข. ระยะเวลาที่เล่นเทนนิส 2 เกมส์
  - ค. ปริมาณของนมที่ได้จากวัวพันธุ์นมในฟาร์มโคนมในแต่ละปี
  - ง. จำนวนไร่ที่ได้จากไร่พันธุ์เล็กฮอร์นในแต่ละเดือน
  - จ. จำนวนตึกที่สร้างในกรุงเทพมหานครในแต่ละเดือน
3. ข้อต่อไปนี้ ข้อใดเป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็น ข้อใดเป็นแบบต่อเนื่อง และข้อใดเป็นแบบไม่ต่อเนื่อง

$$\text{ม. } f(x) = \begin{cases} 2^{x-1} & , 0 < x < 1 \\ 0 & \text{สำหรับค่า } x \text{ อื่น ๆ} \end{cases}$$

$$\text{ข. } f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , 0 \leq x < \infty \\ 0 & \text{สำหรับค่า } x \text{ อื่น ๆ} \end{cases}$$

$$\text{น. } f(x) = \begin{cases} x^{115} & , x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 0 & \text{สำหรับค่า } x \text{ อื่น ๆ} \end{cases}$$

$$\text{ง. } f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} & , x = 1, 2, 3, \dots, n \\ 0 & \text{สำหรับค่า } x \text{ อื่น ๆ} \end{cases}$$

$$\text{จ. } f(x) = \begin{cases} 0 & , x < 1 \\ \frac{1}{6} & , 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{6} & , 2 \leq x < 3 \\ 1 & , 3 \leq x \end{cases}$$

$$\text{ฉ. } f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x & , x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{สำหรับค่า } x \text{ อื่น} \end{cases}$$

$$\text{ข. } f(x) = \begin{cases} 40-x^2 & , x = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{สำหรับค่า } x \text{ อื่น ๆ} \end{cases}$$