

บทที่ 4

ความน่าจะเป็น (Probability)

4.1 นิยามศัพท์เฉพาะ

การทดลองอย่างสุ่ม (Random experiment) หมายถึงการทดลอง ซึ่งเราไม่อาจบอกได้อย่างแน่ชัดว่า ผลการทดลองจะเป็นอย่างไร ตัวอย่างเช่น การโยนเหรียญ 1 เหรียญ 1 ครั้ง เป็นการทดลองอย่างสุ่ม ทั้งนี้เพราะเราไม่สามารถบอกได้ว่าผลจากการโยนเหรียญนั้นจะเป็นหัว หรือจะเป็นก้อย

แซมเปิลสเปซ (Sample space) หมายถึงเซตของผลการทดลองทั้งหมดที่ได้จากการกระทำ ตัวอย่างเช่นแซมเปิลสเปซของการโยนเหรียญ 1 เหรียญ 1 ครั้ง ได้แก่ $\{H, T\}$ หรือแซมเปิลสเปซของการทอกลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้งได้แก่ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

เหตุการณ์ (Event) หมายถึงสับเซตใดๆ ของแซมเปิลสเปซ ตัวอย่างเช่น การได้ก้อยจากการโยนเหรียญ 1 เหรียญ 1 ครั้ง ได้แก่ $\{T\}$

หรือการได้แต้มมากกว่า 2 และน้อยกว่า 5 จากการทอกลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง ได้แก่ $\{3, 4\}$

เนื่องจากเซตว่างเป็นสับเซตของทุกเซต ดังนั้นเซตว่างเป็นเหตุการณ์ (Event) และเนื่องจากแซมเปิลสเปซต้องเป็นสับเซตของแซมเปิลสเปซ ดังนั้นแซมเปิลสเปซก็ต้องเป็นเหตุการณ์ (Event) ด้วย

ความน่าจะเป็น (Probability)

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A เท่ากับ จำนวนสมาชิกในเหตุการณ์ A หารด้วยจำนวนสมาชิกในแซมเปิลสเปซ (S) หรือเท่ากับขนาดของ A หารด้วยขนาดของ S เขียนแทนด้วย

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$\text{หรือ } P(A) = \frac{\text{ขนาดของ } A}{\text{ขนาดของ } S}$$

ตัวอย่าง 1 ทอลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้แต้มมากกว่า 4

$$A : \text{เหตุการณ์ที่ได้แต้มมากกว่า 4} = \{5, 6\}$$

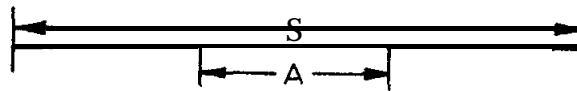
$$n(A) = 2$$

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$n(S) = 6$$

$$\therefore P(A) = \frac{2}{6}$$

ตัวอย่าง 2 กำหนดให้แซมเปิลสเปซ (S) และเหตุการณ์ (A) ดังรูป จงหา P (A)



$$P(A) = \frac{\text{ความยาวของ } A}{\text{ความยาวของ } S}$$

ตัวอย่าง 3 มีนักเรียนชาย 4 คน หญิง 6 คน เลือกนักเรียนมาอย่างสุ่ม 5 คน จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ชาย 2 คน และหญิง 3 คน

A : เหตุการณ์ที่ได้ชาย 2 หญิง 3 คน

n (A) : จำนวนวิธีที่จะได้ชาย 2 คน หญิง 3 คน

$$n(A) = \binom{4}{2} \binom{6}{3}$$

n (S) : จำนวนวิธีที่ได้จากการเลือก 5 คน จาก 10 คน

$$n(S) = \binom{10}{5}$$

$$\therefore P(A) = \frac{\binom{4}{2} \binom{6}{3}}{\binom{10}{5}}$$

ตัวอย่าง 4 หยิบไพ่จากสำรับอย่างสุ่ม (random) 3 ใบ จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้

J, Q, K

A : เหตุการณ์ที่จะได้ J, Q, K

$$n(A) = 4 \times 4 \times 4 = 4^3$$

$$n(S) = \binom{52}{3}$$

$$\therefore P(A) = \frac{4^3}{\binom{52}{3}}$$

ตัวอย่าง 5 หยิบไพ่จากสำรับอย่างสุ่ม 1 ใบ จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้โพธิ์แดงหรือ Q

A : เหตุการณ์ที่จะได้โพธิ์แดงหรือ Q

$$n(A) = 13 + 4 - 1$$

$$n(S) = \binom{52}{1}$$

$$\therefore P(A) = \frac{13 + 4 - 1}{\binom{52}{1}}$$

ตัวอย่าง 6 หยิบไพ่จากสำรับอย่างสุ่ม 4 ใบ จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้โพธิ์ดำอย่างน้อย 1 ใบ

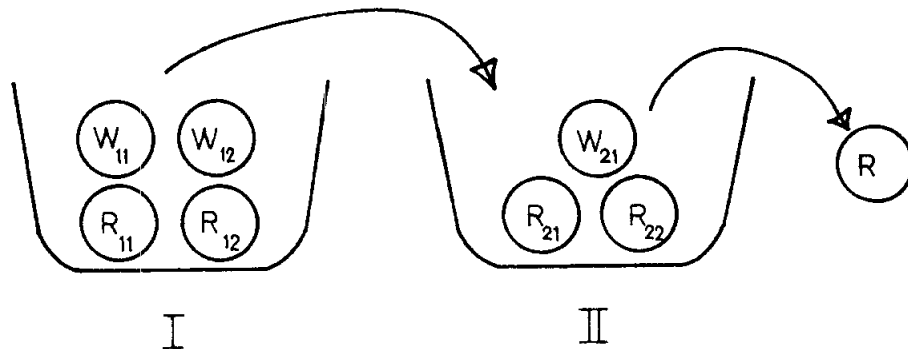
A : เหตุการณ์ที่จะได้โพธิ์ดำอย่างน้อย 1 ใบ

$$n(A) = \binom{13}{1} \binom{39}{3} + \binom{13}{2} \binom{39}{2} + \binom{13}{3} \binom{39}{1} + \binom{13}{4} \binom{39}{0}$$

$$n(S) = \binom{52}{4}$$

$$\therefore P(A) = \frac{\binom{13}{1} \binom{39}{3} + \binom{13}{2} \binom{39}{2} + \binom{13}{3} \binom{39}{1} + \binom{13}{4} \binom{39}{0}}{\binom{52}{4}}$$

ตัวอย่าง 7 มีกล่อง 2 ใบ กล่องใบที่หนึ่งมีบอลขาว 2 ลูก และแดง 2 ลูก กล่องใบที่สองมีบอลขาว 1 ลูก และแดง 2 ลูก หยิบบอลจากกล่องที่หนึ่งใส่กล่องที่สอง แล้วหยิบบอลจากกล่องที่สอง จงหาความน่าจะเป็นที่จะหยิบบอลจากกล่องที่สองเป็นสีแดง



A : เหตุการณ์ที่หยิบบอลจากกล่องที่สองเป็นสีแดง

$$S = \{ (W_{11}, W_{11}), (W_{11}, W_{21}), (W_{11}, R_{21}), (W_{11}, R_{22}), (W_{12}, W_{12}), \\ (W_{12}, W_{21}), (W_{12}, R_{21}), (W_{12}, R_{22}), (R_{11}, R_{11}), (R_{11}, W_{21}), \\ (R_{11}, R_{21}), (R_{11}, R_{22}), (R_{12}, R_{12}), (R_{12}, W_{21}), (R_{12}, R_{21}), \\ (R_{12}, R_{22}) \}$$

$$n(S) = 16$$

$$A = \{ (W_{11}, R_{21}), (W_{11}, R_{22}), (W_{12}, R_{21}), (W_{12}, R_{22}), (R_{11}, R_{11}), \\ (R_{11}, R_{21}), (R_{11}, R_{22}), (R_{12}, R_{12}), (R_{12}, R_{21}), (R_{12}, R_{22}) \}$$

$$n(A) = 10$$

$$\therefore P(A) = \frac{10}{16}$$

$P(\emptyset) = 0$ เพราะเซตว่างไม่มีสมาชิก ดังนั้นเราจึงเรียกเซตว่างว่าเป็น impossible event ตัวอย่างของ impossible event เช่นการได้ทั้งหัว และก้อยจากการโยนเหรียญ 1 เหรียญ 1 ครั้ง

และเนื่องจาก $P(S) = 1$ เราจึงเรียกแซมเปิลสเปซว่าเป็น Sure event ตัวอย่างของ Sure event เช่นการได้หัวหรือก้อยจากการโยนเหรียญ 1 เหรียญ 1 ครั้ง

4.2 เหตุการณ์ซึ่งเป็นอิสระต่อกัน (Independent event)

A และ B จะเป็นเหตุการณ์ซึ่งเป็นอิสระต่อกันก็ต่อเมื่อ

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

ตัวอย่างเช่น A เป็นการได้หัวจากการโยนเหรียญครั้งที่ 1

B เป็นการได้หัวจากการโยนเหรียญครั้งที่ 2

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad \text{ทั้งนี้เพราะในการโยนเหรียญ 2 ครั้ง}$$

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

$$A \cap B = \{HH\}$$

4.3 สัจพจน์ของความน่าจะเป็น (Probability axioms)

1. $P(S) = 1$
2. $P(A) \geq 0$ ทุก ๆ A
3. ถ้า $A \cap B = \emptyset$ แล้ว $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

4.4 ทฤษฎีเบื้องต้นเกี่ยวกับความน่าจะเป็น

4.4.1 Mutually exclusive

A และ B จะเป็น mutually exclusive ก็ต่อเมื่อ $A \cap B = \emptyset$ หมายความว่า A กับ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่มีกรณีใดร่วมกันเลย ตัวอย่างเช่น

A เป็นการได้หัวจากการโยนเหรียญ 1 เหรียญ 1 ครั้ง จะได้ว่า $A = \{H\}$

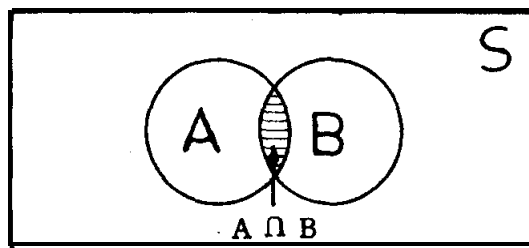
B เป็นการได้ก้อยจากการโยนเหรียญ 1 เหรียญ 1 ครั้ง จะได้ว่า $B = \{T\}$

จะเห็นว่า A กับ B เป็น mutually exclusive เพราะว่า $A \cap B = \emptyset$

ทฤษฎี 1 ถ้า A และ B เป็น event ใด ๆ แล้ว

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

พิสูจน์



เมื่อ A, B เป็น event

$$\text{จากนิยาม } P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)}$$

แต่เราทราบแล้วว่า

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

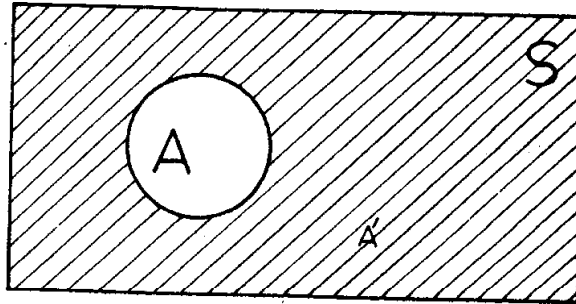
$$\therefore P(A \cup B) = \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(S)}$$

$$= \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ทฤษฎี 2 ถ้า $A \subseteq S$ แล้ว $P(A) = 1 - P(A')$

พิสูจน์



$$S = A \cup A' \text{ และ } A \cap A' = \emptyset$$

จากสัจพจน์ข้อ 3, $P(A \cup A') = P(A) + P(A')$

$$P(S) = P(A) + P(A')$$

$$1 = P(A) + P(A')$$

$$P(A) = 1 - P(A')$$

ทฤษฎี 8 ถ้า $A \subseteq S$ แล้ว $0 \leq P(A) \leq 1$

พิสูจน์

จากสัจพจน์ข้อ 1 ได้ว่า $0 \leq P(A)$

ดังนั้นเราพิสูจน์อีกด้านเดียวคือ $P(A) \leq 1$

$$P(S) = P(A) + P(A')$$

$$1 = P(A) + P(A')$$

$$P(A) = 1 - P(A')$$

$$P(A') > 0 \text{ จากสัจพจน์ข้อ 1}$$

$$\therefore P(A) \leq 1$$

ทฤษฎี 4 ความน่าจะเป็นของเซตว่างเท่ากับ 0

$$P(\emptyset) = 0$$

พิสูจน์

$$\emptyset \cup S = S \text{ และ } \emptyset \cap S = \emptyset$$

จากสัจพจน์ข้อ 3

$$P(\emptyset \cup S) = P(\emptyset) + P(S)$$

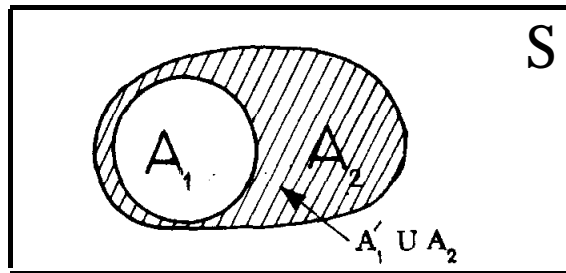
$$P(S) = P(\emptyset) + 1$$

$$1 = P(\emptyset) + 1$$

$$P(\emptyset) = 0$$

ทฤษฎี 5 ถ้า A_1 และ A_2 เป็นสับเซตของ S และ A_1 เป็นสับเซตของ A_2 แล้ว $P(A_1) \leq P(A_2)$

พิสูจน์



$A_2 = A_1 \cup (A_1' \cap A_2)$ และ A_1 กับ $(A_1' \cap A_2)$ เป็น mutually exclusive

$$P(A_2) = P(A_1 \cup (A_1' \cap A_2))$$

$$P(A_2) = P(A_1) + P(A_1' \cap A_2)$$

$$P(A_1' \cap A_2) > 0 \text{ จากสัจพจน์ข้อ 2}$$

$$\dots P(A_1) \leq P(A_2)$$

4.4.2. ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (Conditional probability)

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ B เมื่อเหตุการณ์ A เกิดขึ้นแล้ว เรียกว่า Conditional Probability เขียนแทนด้วย $P(B/A)$ อ่านว่า Probability of B given A

$P(B/A)$ หมายความว่าค่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ B นั้นเหตุการณ์ A เกิดขึ้นแล้ว

ตัวอย่าง 8 ในครอบครัวหนึ่งมีสมาชิก 19 คน เป็นชาย 8 คน หญิง 11 คน แต่งงานแล้ว 10 คน โสด 9 คน ชายแต่งงานแล้ว 3 คน ยังไม่แต่งงาน 5 คน หญิงแต่งงานแล้ว 7 คน ยังไม่แต่งงาน 4 คน ดังแสดงไว้ในตาราง

| | โศก (S) | แต่งงาน (MA) | รวม |
|----------|---------|--------------|-----|
| ชาย (M) | 5 | 3 | 8 |
| หญิง (F) | 4 | 7 | 11 |
| รวม | 9 | 10 | 19 |

ถ้าสุ่มคนขึ้นมา 1 คน จะได้ว่า

$$P(M) = \frac{8}{19}$$

$$P(F) = \frac{11}{19}$$

$$P(S) = \frac{9}{19}$$

$$P(MA) = \frac{10}{19}$$

ถ้าหากทราบว่าคนที่สุ่มได้นั้นเป็นชาย ความน่าจะเป็นที่จะได้คนโศก $P(S/M)$ เท่ากับ $\frac{5}{8}$ นั่นคือเมื่อรู้ว่าคนที่สุ่มได้เป็นชาย เราก็จะมาพิจารณาเฉพาะเซตของผู้ชายเท่านั้น ซึ่งมี 8 คน ในจำนวน 8 คนนี้มีคนโศก 5 คน

$$\therefore P(S/M) = \frac{5}{8} \quad (\text{ดูจากตาราง})$$

$$\text{หรืออาจใช้สูตร } P(S/M) = \frac{P(S \cap M)}{P(M)}$$

$$P(S \cap M) = \frac{5}{19}$$

$$P(M) = \frac{8}{19}$$

$$\begin{aligned} \therefore P(S/M) &= \frac{\frac{5}{19}}{\frac{8}{19}} \\ &= \frac{5}{8} \end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 4

1. จงเขียนสมาชิกของ sample space S ในการทอดลูกเต๋า 2 ลูก
2. จงเขียนสมาชิกของ sample space S ในการโยนเหรียญ 1 เหรียญ โดยมีเงื่อนไขดังนี้คือ ถ้าเกิดหัวในครั้งแรกให้โยนเหรียญอีก 1 ครั้ง และถ้าเกิดก้อยในครั้งแรกให้ทอดลูกเต๋่อีก 1 ครั้ง
3. ในการสุ่มนักศึกษา 4 คน จากคณะศึกษาศาสตร์ ซึ่งมีทั้งนักศึกษาชายและหญิง จงเขียนสมาชิกของ sample space S โดยใช้ M แทนนักศึกษาชาย และ F แทนนักศึกษาหญิง
4. ในการสอบถามแม่บ้าน 3 คน ว่าใช้ผงซักฟอกตรา "X" หรือไม่ จงเขียนสมาชิกของ sample space S โดยใช้ Y แทนใช่ และ N แทนไม่ใช่
5. จากข้อ 1 ก. จงเขียนสมาชิกของ A โดยที่ A คือ event ที่ผลบวกของแต้มน้อยกว่า 5
 ข. จงเขียนสมาชิกของ B โดยที่ B คือ event ที่เกิดแต้ม 6 ขึ้นในลูกเต๋าลูกใดลูกหนึ่งในทั้ง 2 ลูกนั้น
6. จากข้อ 4 จงเขียนสมาชิกของ E โดยที่ E คือ event ที่แม่บ้านอย่างน้อย 2 คนใช้ผงซักฟอกตรา "X"
7. กำหนดให้ $S = \{ \text{เงิน, ทอง, นาค, เพ็ชร, พลอย, ทับทิม, มรกต} \}$
 และ events $A = \{ \text{เงิน, ทอง, มรกต} \}$
 $B = \{ \text{ทอง, นาค, เพ็ชร} \}$
 $C = \{ \text{ทับทิม, พลอย, มรกต} \}$

จงเขียนสมาชิกของเซตซึ่งสอดคล้องกับ events ต่อไปนี้

- ก. $(A \text{ หรือ } C)$
- ข. $(A \text{ และ } C)$
- ค. $[(A \text{ และ } C) \text{ หรือ } B]$

8. หยิบไฟ 1 ใบจากสำรับ 52 ใบ
 - ก. จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้โพธิ์แดง
 - ข. จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ K
9. ห้อง มศ. 1 เป็นนักเรียนชาย 13 คน หญิง 17 คน เลือกผู้แทนนักเรียนมา 1 คน
 - ก. จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ผู้แทนเป็นชาย
 - ข. จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ผู้แทนเป็นหญิง
10. ห้อง มศ. 1 เป็นนักเรียนชาย 13 คน หญิง 17 คน มีผู้สมัครรับเลือกเป็นผู้แทน 5 คน เป็นหญิง 2 คน ชาย 3 คน เลือกผู้แทน 1 คน
 - ก. จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ผู้แทนเป็นชาย
 - ข. จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ผู้แทนเป็นหญิง
11. โจทย์เหมือนข้อ 10 แต่เลือกผู้แทน 2 คน
 - ก. จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ชายทั้งคู่
 - ข. จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้หญิงทั้งคู่
 - ค. จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ทั้งชายและหญิง
12. โจทย์เหมือนข้อ 11 แต่เลือกประธาน 1 คน รองประธาน 1 คน
 - ก. จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ประธานเป็นชาย รองประธานเป็นชาย
 - ข. จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ประธานเป็นชาย รองประธานเป็นหญิง
 - ค. จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ประธานเป็นหญิง รองประธานเป็นชาย
 - ง. จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ประธานเป็นหญิง รองประธานเป็นหญิง
13. มีอักษร a, b, c, d และ e จัดเรียงอักษรหมู่ละ 3 ตัว
 - ก. จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้พยัญชนะทั้งสามตัว
 - ข. จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้สระ 2 ตัวอยู่ริม
 - ค. จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้สระอยู่กลาง
14. มีลูกเต๋า 2 ลูกสีแดงและสีขาว ทอดลูกเต๋าคู่นี้ จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้แต้มของลูกเต๋าสีแดงน้อยกว่าแต้มของลูกเต๋าสีขาว
15. กล่องที่หนึ่งมีบอลสีขาว 2 ลูก แดง 1 ลูก กล่องที่ 2 มีบอลสีแดง 2 ลูกขาว 1 ลูก จงหยิบบอล 1 ลูกจากกล่องที่ 1 ไปใส่ลงในกล่องที่ 2 แล้วหยิบบอลออกจากกล่องที่ 2 จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้บอลสีขาว