บทที่ 3

เทคนิคการนับ (Counting Technique)

3.1 กฎว่าด้วยการคูณ (Multiplicative principle)

ถ้าเหตุการณ์ A เกิดขึ้นได้ m วิธี ในแต่ละวิธีของ m วิธีนี้เกิดเหตุการณ์ B ได้ n วิธี แล้วจะเกิดเหตุการณ์ A และ B ได้ m n วิธี

ตัวอย่าง 1 สมมุติว่ามีวิธีเดินทางระหว่างกรุงเทพ ฯ – เชียงใหม่ 3 เส้นทาง จะมีวิธีเดินทางไปกลับระหว่างกรุงเทพ ฯ – เชียงใหม่ ได้ทั้งหมดกี่วิธีตามเงื่อนไขต่อไปนี้

ก. สามารถเลือกเดินทางไปกลับได้ทั้งหมดกี่วิธี

ข. จะต้องเดินทางไปและกลับด้วยเส้นทางที่ต่างกัน

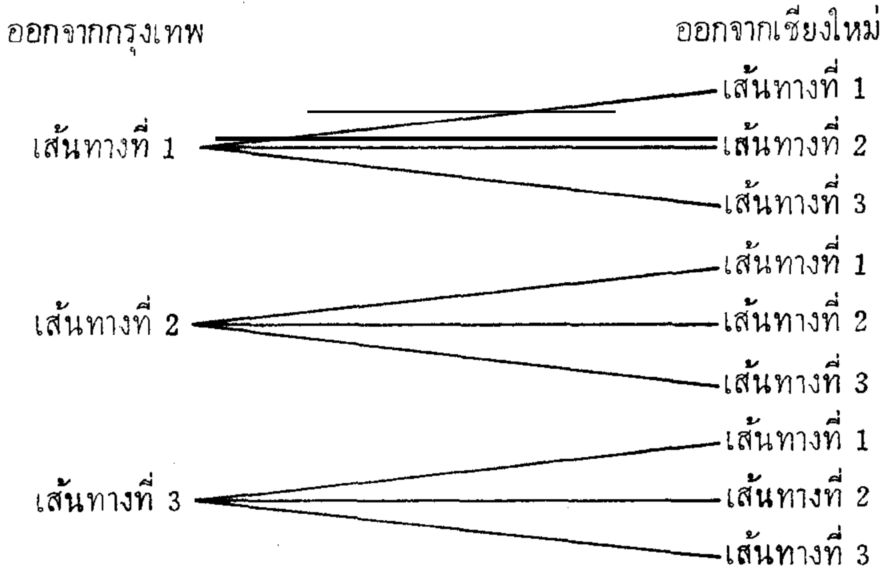
ค. จะต้องไปและกลับด้วยเส้นทางเดียวกัน

ก. เลือกเดินทางออกจากกรุงเทพ ฯ ได้ 3 เส้นทาง

เลือกเดินทางกลับได้ 3 เส้นทาง

$\therefore$ สามารถเลือกเส้นทางไป – กลับได้ $3 \times 3 = 9$ เส้นทาง

ซึ่งอาจเขียนแสดงให้ง่ายขึ้น โดยใช้ tree diagram ดังนี้



หรืออาจเขียนเซ็ตของจำนวนเส้นทางที่อาจเป็นไปได้ทั้งหมด ได้ดังนี้

$S = \{ (1,1), (1,2), (1,3)\ (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2)\ (3,3) \}$

โดย (1, 1) หมายความว่าไปเส้นทางที่ 1 กลับเส้นทางที่ 1

(1, 2) หมายความว่าไปเส้นทางที่ 1 กลับเส้นทางที่ 2

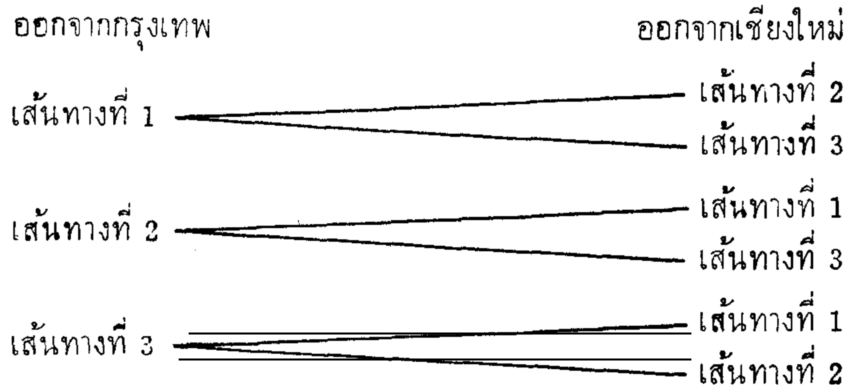
(3, 3) หมายความว่าไปเส้นทางที่ 3 กลับเส้นทางที่ 3

ข. เลือกเดินทางออกจากกรุงเทพ ฯ ได้ 3 เส้นทาง

เลือกเดินทางกลับได้ 2 เส้นทาง

$\therefore$ เลือกเดินทางไป–กลับได้ $3 \times 2 = 6$ เส้นทาง

ซึ่งอาจเขียนโดยใช้ tree diagram ได้ดังนี้

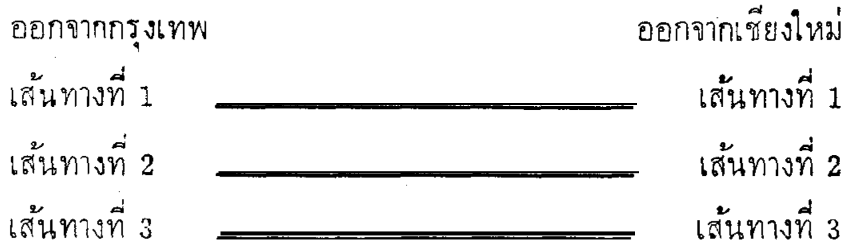


ค. เลือกเดินทางออกจากกรุงเทพ ฯ ได้ 3 เส้นทาง

เลือกเดินทางกลับได้ 1 เส้นทาง (คือกลับเส้นทางเดิม)

$\therefore$ เลือกเดินทางไป–กลับได้ $3 \times 1 = 3$ เส้นทาง

อาจเขียนเป็น tree diagram ได้ดังนี้



ตัวอย่าง 2 ถ้าโยนเหรียญ 2 อัน 1 ครั้ง จะเกิดเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดกี่เหตุการณ์

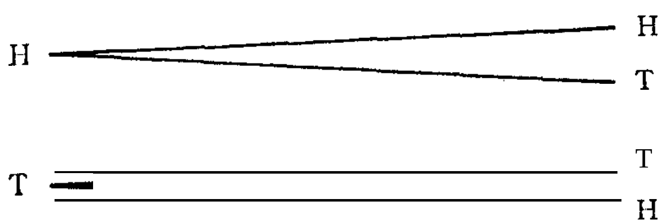
เหรียญอันที่ 1 มีโอกาสเกิด 2 เหตุการณ์ (หัวหรือก้อย)

เหรียญอันที่ 2 มีโอกาสเกิด 2 เหตุการณ์

$\therefore$ เหตุการณ์ทั้งหมดที่เป็นไปได้ $2 \times 2 = 4$ เหตุการณ์

เหตุการณ์ทั้งหมดที่เป็นไปได้ หากนำมาเขียนเป็น tree diagram จะได้ดังนี้

เหรียญอันที่ 1 เหรียญอันที่ 2



หรือเขียนเป็นเซ็ตของจำนวนเหตุการณ์ที่อาจเป็นไปได้ทั้งหมดดังนี้

$$S = \{(H, H), (H, T), (T, T), (T, H)\}$$

ตัวอย่าง 3 มีวิธีเขียนเลข 3 หลักจากเลข 1, 2, 3, 4 ได้ทั้งหมดกี่วิธี

เลือกเขียนหลักหน่วยได้ 4 วิธี

เลือกเขียนหลักสิบได้ 4 วิธี

เลือกเขียนหลักร้อยได้ 4 วิธี

$\therefore$ เขียนเลข 3 หลักได้ $4 \times 4 \times 4 = 4^3$ วิธี

จากตัวอย่าง 3 หากกำหนดเพิ่มเติมอีกว่าให้เขียนเลข 3 หลัก โดยไม่มีเลขหลักใดซ้ำกัน จะเขียนได้ทั้งหมดกี่วิธี

เลือกเขียนหลักหน่วยได้ 4 วิธี

เลือกเขียนหลักสิบได้ 3 วิธี

เลือกเขียนหลักร้อยได้ 2 วิธี

$\therefore$ เลือกเขียนเลข 3 หลักโดยไม่ซ้ำกันได้ $4 \times 3 \times 2$ วิธี

ตัวอย่าง 4 มีบอล 4 ลูก กล่อง 3 ใบ จะมีวิธีใส่บอลทั้งหมดลงในกล่องได้กี่วิธี

บอลลูกที่ 1 ใส่ได้	3 วิธี
บอลลูกที่ 2 ใส่ได้	3 วิธี
บอลลูกที่ 3 ใส่ได้	3 วิธี
บอลลูกที่ 4 ใส่ได้	3 วิธี
∴ ใส่บอลทั้งหมดลงในกล่องได้	3^4 วิธี

3.2 แฟคเตอร์เรียล (Factorial)

แฟคเตอร์เรียล คือการคูณเลขตั้งแต่ค่าที่กำหนดกับค่าที่ลดหลั่นลงทีละหน่วยเรื่อยไปจนถึง 1 ใช้สัญญลักษณ์ "!" แทนคำว่าแฟคเตอร์เรียล

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(3)(2)(1)$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$3! = 3 \times 2 \times 1$$

$$2! = 2 \times 1$$

$$1! = 1$$

$$0! = 1$$

3.3 การจัดลำดับ (Permutation)

การจัดลำดับเป็นการนำวัตถุมาจัดเป็นหมวดหมู่ด้วยวิธีการต่าง ๆ กัน และถือว่าลำดับที่ (order) ของวัตถุที่นำมาจัดหมวดหมู่มีความสำคัญมาก ลำดับที่แตกต่างกันถือว่าเป็นวิธีที่แตกต่างกัน

ทฤษฎี 1 ของ n สิ่ง นำมาจัดลำดับทีละ n สิ่ง จะจัดได้ n! วิธี ดังตัวอย่าง

ตัวอย่าง 1 มีคน 4 คนคือ ก, ข, ค และ ง นำคนมาจัดเข้าแถวทีละ 4 คน จะจัดได้ 4 ! วิธี คือ

กขคง	กขงค	กคขง	กคงข	กงขค	กงคข
ขกคง	ขกงค	ขคกง	ขคงก	ขงกค	ขงคก
คกขง	คกงข	คขกง	คขงก	คงกข	คงขก
งกขค	งกคข	งขกค	งขคก	งคกข	งคขก

ทฤษฎี 2 ของ n สิ่งนำมาจัดลำดับทีละ r สิ่ง โดยที่ r น้อยกว่า n จะจัดได้ $\frac{n!}{(n-r)!}$ วิธี ดังตัวอย่าง

ตัวอย่าง 5 มีคน 4 คน คือ ก, ข, ค และ ง นำมาจัดเข้าแถวทีละ 2 คน จะจัดได้ $\frac{4!}{(4-2)!}$ วิธี คือ

กข	ขก	nfl	คก	กง	งก
ขค	คข	ขง	งข	คง	งค

ตัวอย่าง 6 มีเก้าอี้ 5 ตัว จะมีวิธีจัดให้คน 12 คน นั่งเรียงแถวบนเก้าอี้ ได้กี่วิธี

จำนวนวิธีของการจัดลำดับ $= \frac{12!}{(12-5)!}$ วิธี

ตัวอย่าง 7 เขียนเลข 3 หลักจาก 1, 2, 3, 4, 5 โดยไม่ให้เลขหลักใดซ้ำกันเลย ได้ทั้งหมดกี่วิธี

จำนวนวิธีของการเขียนเลข 3 หลัก $= \frac{5!}{(5-3)!}$ วิธี

ทฤษฎี 3 ของ n สิ่ง มี x_1 สิ่งเหมือนกันเป็นชนิดที่ 1

x_2 สิ่งเหมือนกันเป็นชนิดที่ 2

$\vdots$

x_n สิ่งเหมือนกันเป็นชนิดที่ n

โดยที่ $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n$

นำของทั้ง n สิ่งมาจัดลำดับจะจัดได้ $\frac{n!}{x_1!\,x_2!\ldots x_n!}$ วิธี ดังตัวอย่าง

ตัวอย่าง 8 มีเหรียญ 10 เหรียญ เป็นเหรียญห้าบาท 3 เหรียญ เหรียญหนึ่งบาท 5 เหรียญ เหรียญห้าสิบสตางค์ 2 เหรียญ นำเหรียญทั้ง 10 เหรียญมาจัดลำดับ จะจัดได้กี่วิธี

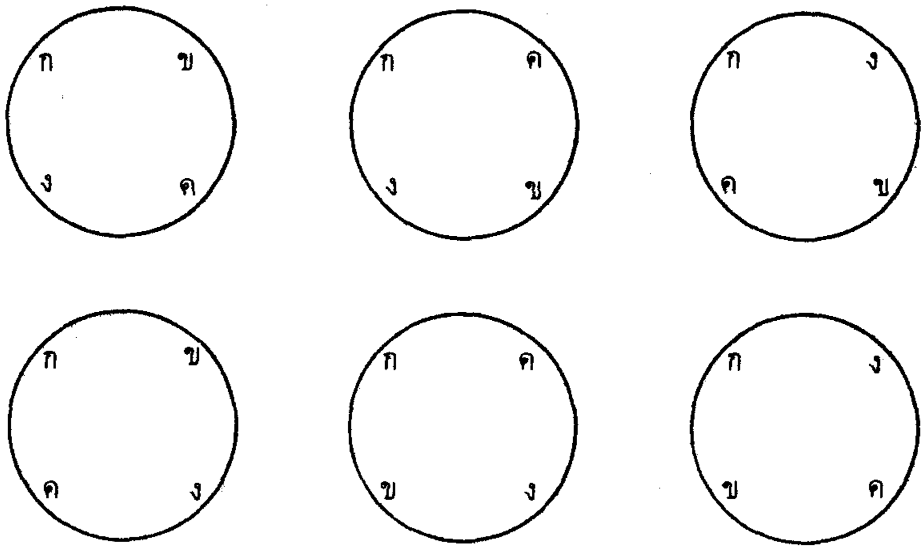
จำนวนวิธีที่จะจัด $= \frac{10!}{3!\,5!\,2!}$ วิธี

ตัวอย่าง 9 เรียงเหรียญ 5 เหรียญ ให้มีหัว 3 เหรียญ ได้กี่วิธี

จำนวนวิธีที่จะจัด $= \frac{5!}{3!\,2!}$ วิธี

ทฤษฎี 4 ของ n สิ่ง นำมาจัดลำดับเป็นวง จะจัดได้ $(n-1)!$ วิธี ดังตัวอย่าง

ตัวอย่าง 10 มีคน 4 คน คือ ก, ข, ค และ ง นำมานั่งเป็นวง จะจัดได้ $(4-1)!$ วิธี คือ



3.4 การจัดหมู่ (Combination)

การจัดหมู่ เป็นวิธีการคำนวณหาผลลัพธ์ที่อาจเป็นไปได้ทั้งหมดอีกวิธีหนึ่ง วิธีการก็คือการนำวัตถุมาจัดหมู่ ลำดับที่ของวัตถุในกลุ่มไม่มีความหมาย โดยจะพิจารณาเฉพาะองค์ประกอบรวม ๆ ของกลุ่มเท่านั้นว่าประกอบด้วยอะไรบ้าง ถ้าในกลุ่มมีองค์ประกอบเช่นเดิมไม่ว่าจะสลับที่กันอย่างไรก็ยังถือว่าเป็นกลุ่มเดิม เช่นครอบครัวหนึ่งประกอบไปด้วย (พ่อ แม่ ลูก) แม้จะสลับเป็น (พ่อ ลูก แม่) (แม่ ลูก พ่อ) (แม่ พ่อ ลูก) (ลูก แม่ พ่อ) (ลูก พ่อ แม่) ครอบครัวนี้ก็ยังหมายถึงกลุ่มที่ประกอบไปด้วย 3 คนเดิมนั่นเอง และถือว่าเป็นการจัดหมู่เพียง 1 วิธีเท่านั้น หาได้เป็น 6 วิธีเช่นเดียวกับการจัดลำดับไม่ จะเห็นได้ว่าการจัดหมู่จะทำได้น้อยวิธีกว่าการจัดลำดับ

ถ้าหากมีข้อสงสัยว่าเมื่อไรจะใช้วิธีจัดหมู่ เมื่อไรจะใช้วิธีจัดลำดับ ก็ขอให้พิจารณาดูว่าหากมีการสลับตำแหน่งภายในกลุ่มจะมีผลแตกต่างไปจากเดิมหรือไม่ ถ้าสลับตำแหน่งแล้วทำให้ความหมายของกลุ่มผิดไปจากเดิม ก็ควรใช้ Permutation แต่ถ้าสลับแล้วความหมายของกลุ่มไม่ผิดไปจากเดิมก็ควรใช้ Combination แต่อย่างไรก็ตาม จำเป็นต้องพิจารณาเจตนาของการจัดกลุ่มว่าจัดเพื่ออะไร

ทฤษฎี 1 ของ n สิ่ง นำมาจัดหมู่ทีละ r สิ่ง จะจัดได้ $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ วิธี

เขียนแทนด้วย $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ ดังตัวอย่าง

ตัวอย่าง 11 มีบอล 4 ลูก นำมาจัดเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 3 ลูก

จะจัดได้ $\frac{4\,!}{3\,!\,(4\ \ 3)\,!}$ วิธี คือ

$B_1B_2B_3 \quad B_1B_2B_4 \quad B_2B_3B_4 \quad B_1B_3B_4$

ตัวอย่าง 12 มีนักเรียนชาย 10 คน หญิง 5 คน เลือกมา 5 คน ให้เป็นชาย 3 คน หญิง 2 คน ได้ทั้งหมดกี่วิธี

จำนวนวิธีเลือกให้ได้ชาย 3 คน และหญิง 2 คน $= \binom{10}{3}\binom{5}{2}$

$$\binom{10}{3}\binom{5}{2} = \frac{10\,!}{3\,!\,(10-3)\,!} \times \frac{5\,!}{2\,!\,(5-2)\,!}$$

$\therefore$ จำนวนวิธีทั้งหมด $= \frac{10\,!}{3\,!\,7\,!} \times \frac{5\,!}{2\,!\,3\,!}$ วิธี

ตัวอย่าง 13 ในกล่องใบหนึ่งมีบอลแดง 5 ลูก ขาว 4 ลูก หยิบบอลจากกล่อง 3 ลูก จะมีวิธีได้แดงอย่างน้อย 1 ลูก ทั้งหมดกี่วิธี

แดงอย่างน้อย 1 ลูก = (แดง 1 และขาว 2) หรือ (แดง 2 และขาว 1) หรือ (แดง 3)

$$= \binom{5}{1}\binom{4}{2} + \binom{5}{2}\binom{4}{1} + \binom{5}{3}\binom{4}{0}$$

$$= \left(\frac{5\,!}{1\,!\,4\,!}\cdot\frac{4\,!}{2\,!\,2\,!}\right) + \left(\frac{5\,!}{2\,!\,3\,!}\cdot\frac{4\,!}{1\,!\,3\,!}\right) + \left(\frac{5\,!}{3\,!\,2\,!}\cdot\frac{4\,!}{0\,!\,4\,!}\right)$$

$$= (5\times6) + (10\times4) + 1\quad 0$$

$$= 30 + 40 + 10$$

$= 80$ วิธี

แบบฝึกหัด 3

1. สุ่มไพ่ 3 ใบจากสำรับได้กี่วิธี
2. มีนักเรียน 30 คน จะจัดให้เข้าแถวเรียงหนึ่งได้กี่วิธี
3. เรียงเหรียญ 5 อันให้มีหัว 3 อันได้กี่วิธี
4. ข้อสอบถูกผิด 10 ข้อจะมีวิธีตอบคำถามได้กี่แบบ
5. ไข่มุก 36 เม็ด นำมาร้อยเป็นสายสร้อยได้กี่วิธี
6. จะมีวิธีจัดคำจากอักษรทั้งหมดในคำว่า Probability ได้กี่วิธี
7. ป้ายทะเบียนรถยนต์คันหนึ่งมีเลข 4 ตัวไม่ซ้ำกันเลย ถ้าต้องการนำเลขของป้ายทะเบียนรถคันนี้มาจัดเรียงเป็นป้ายทะเบียนของรถยนต์ จะได้ป้ายทะเบียนรถยนต์ทั้งหมดกี่คัน
8. มหาวิทยาลัยรามคำแหงต้องการจัดการแข่งขันกีฬาภายใน มีทีมฟุตบอลสมัครเข้าแข่งขัน 10 ทีม หากต้องการจัดการแข่งขันแบบพบกันหมดจะต้องจัดการแข่งขันกี่ครั้ง
9. มีหลอดไฟสีแดง 5 หลอด สีเขียว 4 หลอด และสีเหลือง 3 หลอด จะมีวิธีหยิบหลอดไฟ 6 หลอด โดยให้ได้สีละ 2 หลอดได้กี่วิธี
10. นักเรียนโรงเรียนหนึ่งมี 300 คน หากต้องการสุ่มนักเรียนเป็นกลุ่มตัวอย่างเพื่อทดลองทางการศึกษาจำนวน 40 คน จะมีวิธีการสุ่มได้กี่วิธี
11. ถ้าคณะศึกษาศาสตร์มีวิชาเลือก 5 วิชา นิติศาสตร์มีวิชาเลือก 4 วิชา วิทยาศาสตร์มีวิชาเลือก 3 วิชา และมนุษย์ศาสตร์มีวิชาเลือก 2 วิชา นักศึกษารามคำแหงคนหนึ่งต้องการเลือกเรียนทุกคณะ ๆ ละวิชา เขาจะมีวิธีการเลือกวิชาต่าง ๆ ได้กี่วิธี