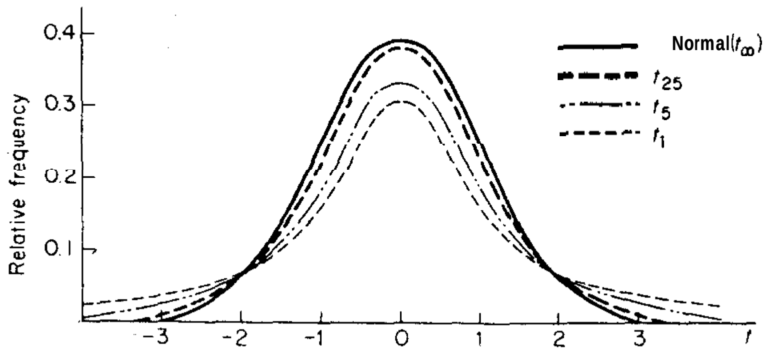
บทที่ 12
ทฤษฎีกลุ่มตัวอย่างขนาดเล็ก
(Small Sample Theory)

12.1 การแจกแจงแบบที (t-distribution)

ในกรณีที่กลุ่มตัวอย่างมีขนาดเล็ก ($n < 30$) การแจกแจงค่าสถิติของกลุ่มตัวอย่าง (Sampling distribution) จะไม่เป็นการแจกแจงปกติ การแจกแจงของกลุ่มตัวอย่างขนาดเล็ก จะเป็นการแจกแจงแบบที ผู้ที่คิดการแจกแจงแบบนี้ขึ้นมาคือ W.S. Gosset Gosset ได้พิมพ์บทความเกี่ยวกับการแจกแจงแบบทีออกเผยแพร่โดยใช้นามปากกาว่า "Student" ด้วยเหตุนี้คนทั่วไปจึงนิยมเรียกการแจกแจงแบบทีว่า "Student's t distribution" การแจกแจงแบบทีสามารถเขียนกราฟแสดงได้ดังนี้



จากกราฟข้างต้นจะเห็นได้ว่าการแจกแจงแบบทีมีลักษณะใกล้เคียงกับการแจกแจงปกติ โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่ ($n \geqslant 30$) การแจกแจงแบบทีจะมีลักษณะเข้าใกล้การแจกแจงปกติ ในกรณีที่จำนวนคนในกลุ่มตัวอย่างมีน้อย หางโค้งของการแจกแจงจะยาวมาก ถ้าจำนวนคนเพิ่มมากขึ้นหางโค้งก็จะสั้นลง การแจกแจงแบบทีจะมีลักษณะสมมาตร มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 ความเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ $\sqrt{\frac{n}{n-2}}$

12.2 คุณสมบัติของการแจกแจงแบบที

1. โค้งการแจกแจงมีลักษณะสมมาตร (symmetry)
2. โค้งการแจกแจงมีค่าเฉลี่ยและมัธยฐานเท่ากับ 0
3. โค้งการแจกแจงมีจุดที่สูงสุดของโค้งเพียงจุดเดียว (unimodal)
4. เป็นการแจกแจงที่มีความแปรปรวนเท่ากับ $\frac{n}{n-2}$
5. โค้งการแจกแจงถูกกำหนดโดยค่า degree of freedom ถ้า df มีค่ามากการแจกแจงแบบทีจะมีลักษณะใกล้เคียงกับการแจกแจงปกติ

12.3 Degree of freedom

มโนภาพของ Degree of freedom มีความสำคัญมากในทางเรขาคณิต พีชคณิต และสถิติ

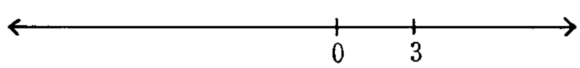
จุด ๆ หนึ่งบนเส้นคงทีเส้นหนึ่ง มี 1 Degree of freedom จุด 2 จุดบนระนาบคงที่ระนาบหนึ่งมี 4 Degree of freedom จุด 4 จุดในอวกาศ 3 มิติ (3—diminsional space) คงที่อวกาศหนึ่งมี 12 Degree of freedom

เส้น ๆ หนึ่งบนระนาบคงที่ระนาบหนึ่งมี 4 Degree of freedom เส้น 2 เส้นในอวกาศ 3 มิติคงที่อวกาศหนึ่งมี 12 Degree of freedom

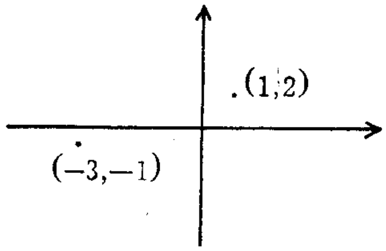
จุด ๆ หนึ่งบนเส้นคงที่ 2 เส้นมี 0 Degree of freedom เส้น ๆ หนึ่งบนระนาบคงที่ 4 ระนาบมี 0 Degree of freedom

ทำไมจึงเป็นเช่นนั้น ?

จากตัวอย่างที่ยกมาข้างต้น เราคงพอจะมองเห็นว่า Degree of freedom นั้นเป็นจำนวนซึ่งในบางครั้งก็เท่ากับจำนวนของตัวแปรซึ่งเราต้องกำหนดค่า แต่ในบางครั้งก็น้อยกว่า ตัวอย่างเช่น การที่จุด ๆ หนึ่งบนเส้นคงที่เส้นหนึ่งมี 1 Degree of freedom ก็เพราะถ้าเรากำหนดค่า ๆ หนึ่งให้แก่จุด ๆ นั้น เราก็บอกได้ว่าตำแหน่งของจุดนั้นอยู่ที่ใด (ดังรูป)

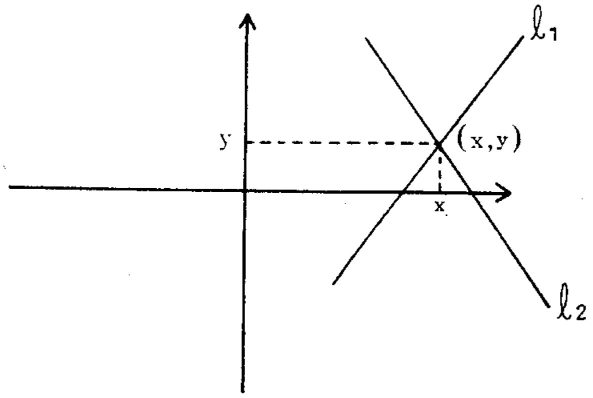


แต่สำหรับจุด 2 จุดบนระนาบคงที่ระนาบหนึ่ง เราต้องกำหนดค่าให้แก่ตัวแปรถึง 4 ค่า ดังรูป



สำหรับเส้น ๆ หนึ่งบนระนาบคงที่ระนาบหนึ่ง เราจะต้องกำหนดค่าให้ตัวแปรถึง 4 ค่า จึงจะรู้ได้ว่าเส้น ๆ นั้นอยู่ที่ใด (เพราะเส้น ๆ หนึ่งถูกกำหนดด้วยจุด 2 จุด แต่ละจุดต้องกำหนดค่า 2 ค่า)

ในทางตรงข้าม จุด ๆ หนึ่งบนเส้นคงที่ 2 เส้นมี 0 Degree of freedom เพราะถ้าหากเส้น 2 เส้นซึ่งติดกันบนระนาบ ๆ หนึ่งเป็นเส้นคงที่ จุดตัดนั้นย่อมมีตำแหน่งที่แน่นอนรู้ได้ทันทีว่าอยู่ที่ใด เราไม่สามารถที่จะเลือกกำหนดค่าให้แก่ตัวแปรในคู่ลำดับ ณ จุดตัดนั้นได้เลย



จะเห็นได้ว่า Degree of freedom จะมีค่าเป็นเท่าใดนั้นขึ้นอยู่กับ 2 สิ่ง คือจำนวนของตัวแปร กับข้อกำหนดหรือข้อจำกัด (Restriction) ซึ่งอาจจะเป็นสมการ หรือเงื่อนไขอะไรบางอย่าง

เราจึงนิยาม Degree of freedom ว่า

Degree of freedom หมายถึงจำนวนซึ่งเท่ากับจำนวนของตัวแปรลบด้วยจำนวนของข้อกำหนด

ในทางพีชคณิต สมการเชิงเส้น $3x - 2y = 5z$ มี 2 Degree of freedom เพราะมีตัวแปรอยู่ 3 ตัว และมีข้อกำหนดอยู่ 1 ข้อ (1 สมการ) ในสมการเช่นนี้ เรามีอิสระที่จะกำหนดค่าให้ตัวแปรได้เพียง 2 ค่า เช่นอาจจะเป็น $x = 4$, $y = 11$ ส่วน z นั้นเราไม่มีอิสระที่จะกำหนดค่าให้ได้ เพราะถ้า $x = 4$, $y = 11$ แล้ว z ย่อมต้องเท่ากับ -2 โดยไม่มีโอกาสเป็นค่าอื่น

ระบบสมการเชิงเส้นจะมีข้อไขแต่เพียงอย่างเดียว (Unique solution) หรือแก้สมการได้ก็ต่อเมื่อมี Degree of freedom เป็นศูนย์ (0) เช่นระบบ

$$3x + 2y = 5$$
$$x - y = 10$$

มี Degree of freedom เป็นศูนย์ ถ้าแก้สมการจะได้ว่า $x = 15$, $y = -5$ ส่วนระบบสมการ

$$3x + y - z = 2$$
$$x + 3y + 2z = 6$$

มี Degree of freedom เป็น 1 ย่อมไม่สามารถแก้สมการได้ 1

ในทางสถิติ ในการหาค่าเฉลี่ย ความแปรปรวน โควาเรียนส์ (Covariance) และอื่น ๆ เราย่อมต้องหารด้วย Degree of freedom มิฉะนั้นแล้วสถิติเหล่านี้จะเป็น Biased statistic นั่นคือ ค่าความคาดหวัง (Expectation) ของสถิติเหล่านี้จะไม่เท่ากับพารามิเตอร์ (Parameter)

ค่าเฉลี่ย มี Degree of freedom เป็น N เพราะถ้าเรามีข้อมูลอยู่ N ตัว คือ $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ เราจะต้องกำหนดค่าให้แก่ข้อมูลทั้ง N ตัว นี้จึงจะหาค่า $\bar{X}$ ได้

ความแปรปรวนมี Degree of freedom เป็น N−1 เพราะเรานิยามแปรปรวนว่าเป็นโมเมนต์ ที่ 2 รอบจุด $\bar{X}$

$$\hat{S}^2 = \frac{\Sigma(X\ \bar{X})^2}{N-1}$$

เรารู้ค่า $\bar{X}$ ซึ่งเป็นค่าประมาณ (Unbiased estimate) ของ μ นั่นคือ เราจำเป็นที่จะต้องกำหนดว่า X_i อีกเพียง N—1 ตัว เราก็สามารถที่จะหาค่าความแปรปรวนได้ตัวอย่าง เช่น ถ้าเรารู้ค่า $\bar{X}$ และกำหนดค่าของข้อมูลอีก N—1 ตัว

$$\frac{3+2+4+7+X}{5} = 4$$

ข้อมูล X ที่เหลือนั้นย่อมต้องเท่ากับ 4 จะเป็นค่าอื่นไปไม่ได้ เราไม่มีสิทธิ์กำหนดค่า X ตัวนี้ ด้วยว่ามันมีค่าตายตัวของมันเองอยู่แล้ว

ดังนั้นในการหาความแปรปรวน เรานำค่าประมาณของ μ คือ $\bar{X}$ มาใช้ แสดงว่าเรามีอิสระที่จะกำหนดค่า X_i อีกเพียง N — 1 ตัว อีก 1 ตัวนั้นกำหนดไม่ได้

t—statistic มี Degree of freedom เป็น N—1 เพราะเราใช้สถิติตัวหนึ่งคือ $\bar{X}$ ซึ่งเป็นค่าประมาณของ μ

χ^2 — statistic มี Degree of freedom เป็น N — 1 เพราะเราใช้สถิติตัวหนึ่งคือ S^2 ซึ่งเป็นค่าประมาณของ σ^2

สรุปได้ว่าถ้าเราต้องกะประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยสถิติตัวหนึ่ง Degree of freedom จะลดไปหนึ่ง และเราต้องใช้ Degree of freedom ในการคำนวณค่าสถิติ มิฉะนั้นแล้วสถิติตัวนั้นจะเป็น Biased estimate ตัวอย่างเช่น

$$S^2 = \frac{\Sigma (X - \bar{X})^2}{N}$$

$$\text{เพราะ} \quad E(S)^2 = E\left(\frac{\Sigma (X - \bar{X})^2}{N}\right) \neq \sigma^2$$

12.4 การทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยของประชากร

ดังที่ได้กล่าวมาแล้วว่าถ้ากลุ่มตัวอย่างมีขนาดเล็ก การแจกแจงค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างจะไม่เป็นการแจกแจงปกติ ดังนั้นจึงไม่สามารถใช้ Z—test ในการทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยของประชากรได้ สถิติที่เหมาะสมกับกลุ่มตัวอย่างขนาดเล็ก คือ t—test

ข้อตกลงเบื้องต้นสำหรับการทดสอบโดยใช้ t

1. ประชากรมีการแจกแจงแบบปกติ
2. กลุ่มตัวอย่างจะต้องถูกเลือกมาแบบสุ่ม

3. ข้อมูลในแต่ละกลุ่มต้องเป็นอิสระแก่กัน

4. ในกรณีที่มีประชากร 2 กลุ่ม ความแปรปรวนของประชากรทั้งสองกลุ่มต้องเท่ากัน

ในการทดสอบสมมุติฐานโดยใช้ t—test อาจทำได้ 3 กรณี คือ

1. กรณีที่มีกลุ่มตัวอย่างกลุ่มเดียว

ให้ใช้สูตรในการคำนวณ ดังนี้

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \quad , \quad df = n\text{-}1 \qquad \text{..............} \quad (12\text{-}1)$$

ตัวอย่าง 1 นำแบบทดสอบเชาวน์ซึ่งเป็นแบบทดสอบมาตรฐานที่มีคะแนนเฉลี่ย 80 คะแนน ไปทดสอบนักเรียน 25 คน ได้คะแนนเฉลี่ย 83 คะแนน และความเบี่ยงเบนมาตรฐาน 7 อยากทราบว่าคะแนนเฉลี่ยที่ได้จากการทดสอบแตกต่างไปจากค่าเฉลี่ยของประชากรหรือไม่ (ที่ระดับ .05)

$$H_0 : \mu = 80$$

$$H_1 : \mu \neq 80$$

จากสูตร

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{N}}$$

$$= \frac{83 - 80}{7/\sqrt{25}}$$

$$= 2.143$$

จากตารางที่ $\alpha = .05$, $df = 24$ two—tailed test t มีค่าเท่ากับ 2.064 แต่ค่า t ที่ได้จากการคำนวณมีค่าเท่ากับ 2.143 ซึ่งมากกว่าค่า t จากตาราง

$\therefore$ เราจึงไม่ยอมรับสมมติฐานเป็นกลาง (reject H_0)

นั่นคือคะแนนเฉลี่ยที่ได้จากการทดสอบสูงกว่าคะแนนเฉลี่ยของประชากรอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

2. กรณีที่มีกลุ่มตัวอย่าง 2 กลุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน

ก. กรณีที่ $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ แต่ไม่ทราบค่า

ให้ใช้สูตรในการคำนวณ ดังนี้

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1) S_1^2 + (n_2 - 1) S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}} \quad , \ df = n_1 + n_2 - 2 \ldots\ldots\ldots\ldots b\text{-}2)$$

กรณีนี้อาจมีผู้สงสัยว่าเมื่อไม่ทราบค่า σ_1 และ σ_2 แล้วจะทราบได้อย่างไรว่ามันเท่ากันหรือไม่ ในทางปฏิบัตินั้นให้พิจารณาจาก S_1 และ S_2 ว่าแตกต่างกันมากหรือไม่ แต่อย่างไรก็ตามในทางสถิติมีวิธีการตรวจสอบความแตกต่างนี้ได้ วิธีการในการตรวจสอบความแตกต่างจะไม่ขอกล่าวในที่นี้ แต่นักศึกษาอาจจะพบในการเรียนสถิติชั้นสูงต่อไป

ข. กรณีที่ $\sigma_1 \neq \sigma_2$

ให้ใช้สูตรในการคำนวณดังนี้

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(12-3)$$

โดยมี df เป็น

$$v = \frac{(S_1^2/n_1 S_2^2/n_2)^2}{[(S_1^2/n_1)^2/(n_1 \quad 1)]+[(S_2^2/n_2)^2/(n_2-1)]} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(12-4)$$

ค่า v ที่ได้จากการคำนวณอาจจะไม่เป็นจำนวนเต็ม แต่ในทางปฏิบัติเวลาจะนำค่า v ไปใช้ ให้คิดเป็นจำนวนเต็มที่มีค่าใกล้เคียงกับที่คำนวณได้

ตัวอย่าง 2 ต้องการเปรียบเทียบวิธีสอน 2 วิธี คือวิธีที่ 1 วิธีสอนแบบปกติ และวิธีที่ 2 วิธีสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรม จึงได้สุ่มนักเรียนมา 2 กลุ่ม เพื่อทดลองวิธีสอนทั้ง 2 วิธีนี้ เมื่อการสอนสิ้นสุดลงได้ใช้แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนชุดเดียวกัน ทดสอบนักเรียนทั้ง 2 กลุ่ม ปรากฏผลดังตารางข้างล่าง จงทดสอบดูว่าวิธีสอน 2 วิธีนี้ ให้ผลแตกต่างกันหรือไม่ (ที่ระดับ .05)

วิธีสอนแบบปกติ (x_1)	วิธีสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรม (x_2)
78	58
56	63
64	54
71	32
62	43
59	64
	62
$n_1 = 6$ $\overline{X}_1 = 65$ $S_1^2 = 66.40$	$n_2 = 7$ $\overline{X}_2 = 53.71$ $S_2^2 = 144.238$

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 > \mu_2$

จากสูตร $t = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\left[\dfrac{(n_1-1)\, S_1^2 + (n_2-1)\, S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\right]\left[\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right]}}$

$$= \frac{65-53.71}{\sqrt{\left[\dfrac{(6-1)\ 66.40 + (7-1)\ 144.2381}{6+7-2}\right]\left[\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{7}\right]}}$$

$$\frac{11.29}{\sqrt{(108.857)\ (0.3095)}}$$

$$= \frac{11.29}{\sqrt{33.693833}}$$

$$= \frac{11.29}{5.8046}$$

$$= 1.94$$

จากตารางที่ a = .05, df = 6+7 – 2 = 11, one-tailed test t มีค่าเท่ากับ 1.79

แต่ค่า t ที่ได้จากการคำนวณมีค่าเท่ากับ 1.94 ซึ่งมากกว่าค่า t จากตาราง

∴ เราจึงไม่ยอมรับสมมติฐานเป็นกลาง (reject H_0)

นั่นคือวิธีสอนแบบปกติให้ผลดีกว่าวิธีสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

3. กรณีที่กลุ่มตัวอย่างไม่เป็นอิสระ

การทดสอบผลต่างของค่าเฉลี่ยของประชากร 2 กลุ่ม เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดเล็ก หากต้องการความถูกต้องแล้วควรใช้ Matched pairs ในการทำวิจัยแบบนี้ต้องเลือกคนหรือสิ่งของที่มีลักษณะเหมือนกัน หรือคาดว่าจะเหมือนกัน เช่น ฝาแฝด คนที่มี I.Q เท่าเทียมกัน หรือคนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเท่าเทียมกันเป็นคู่ ๆ ไป แล้วนำมาทดลองภายใต้การทดลอง 2 วิธี ทั้งนี้เพื่อดูว่าการทดลอง 2 วิธีนั้นให้ผลแตกต่างกันหรือไม่ โดยใช้สูตรดังนี้

$$t = \frac{\sum D}{\sqrt{\frac{N \sum D^2 - (\sum D)^2}{N - 1}}} \qquad \text{.................} \qquad (12\text{–}5)$$

เมื่อ D แทน ความแตกต่างของคะแนนที่เป็น Matched pairs

N แทน จำนวนคู่

t มี degree of freedom เท่ากับ n – 1

ตัวอย่าง 8 ในการเปรียบเทียบผลการเรียนของฝาแฝดที่เรียนตามหลักสูตรใหม่ และหลักสูตรเก่า โดยใช้กลุ่มตัวอย่างเป็นฝาแฝด 4 คู่ ซึ่งฝาแฝดแต่ละคู่จะได้รับการเรียนทั้ง 2 หลักสูตร เมื่อฝาแฝดทั้ง 4 คู่เรียนจบหลักสูตรแล้วจึงทำการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของฝาแฝดนั้นด้วยข้อสอบชุดเดียวกัน ซึ่งปรากฏผลดังตาราง จงทดสอบดูว่าหลักสูตรทั้งสองนี้ จะทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของเด็กฝาแฝดแตกต่างกันหรือไม่ (ที่ระดับ .05)

คู่ที่	หลักสูตรใหม่ (X_1)	หลักสูตรเก่า (X_2)	D	D^2
1	32	30	2	4
2	25	27	−2	4
3	28	25	3	9
4	29	29	0	0
			$\Sigma D = 3$	$\Sigma D^2 = 17$

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

จากสูตร
$$t = \frac{\sum D}{\sqrt{\frac{N\sum D^2 - (\sum D)^2}{N-1}}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{\frac{4(17)-(3)^2}{4-1}}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{\frac{68-9}{3}}}$$

$$= .676$$

จากตารางที่ $\alpha = .05$, $df = 4-1 = 3$ two—tailed test t มีค่าเท่ากับ 3.182

แต่ t ที่ได้จากการคำนวณมีค่าเท่ากับ .676 ซึ่งน้อยกว่าค่า t จากตาราง

$\therefore$ เราจึงไม่สามารถ reject สมมติฐานเป็นกลางได้

นั่นคือ จากข้อมูลชุดนี้ไม่พบว่าหลักสูตร 2 หลักสูตรทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนแตกต่างกัน

แบบฝึกหัด 12

1. ถ้าเลือกวันมา 21 วันโดยวิธีสุ่ม พบว่าวันที่ฝนตกมีอยู่ 6 วัน จะสรุปได้ไหมว่าฝนตกเฉลี่ย 1 วันในทุก ๆ 3 วัน ($\alpha = .05$)

2. ในการทดลองเพื่อเปรียบเทียบผลการเรียนวิชาวิทยาศาสตร์กับฝาแฝดจำนวน 4 คู่ โดยกลุ่มที่ 1 ให้มีการทดลองประกอบการเรียน ส่วนกลุ่มที่ 2 ไม่มีการทดลอง พอสิ้นเทอมทำการทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียน ได้คะแนนดังปรากฏในตาราง

คู่ที่	กลุ่มที่ 1	กลุ่มที่ 2
1	110	111
2	125	120
3	139	128
4	142	135

จงทดสอบดูว่าการเรียนโดยให้มีการทดลองมีผลทำให้คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้นหรือไม่ ($\alpha = .05$)

3. ในการจัดอบรมวัดผลการศึกษาให้กับครูกรุงเทพมหานคร ก่อนอบรมได้มีการทดสอบความรู้เกี่ยวกับการวัดผล และหลังจากสิ้นสุดการอบรมได้มีการทดสอบความรู้อีกครั้งหนึ่ง ซึ่งปรากฏคะแนนดังนี้

คนที่	ก่อนอบรม	หลังอบรม
1	130	129
2	121	133
3	128	136
4	137	152
5	129	141
6	132	138
7	120	125

4. ผู้วิจัยได้ทำการฝึกอบรมเป็นพิเศษเกี่ยวกับการทำข้อสอบความถนัด ให้กับนักเรียนจำนวน 16 คน ข้อสอบความถนัดฉบับนี้เป็นข้อสอบมาตรฐาน มี $\mu = 80$ นำข้อสอบฉบับนี้มาทดสอบกับนักเรียนทั้ง 16 คน ปรากฏว่าค่าเฉลี่ยของคะแนนผลการสอบเป็น 86 ความแปรปรวนของคะแนนเป็น 64 อยากทราบว่าการฝึกอบรมมีผลต่อคะแนนสอบหรือไม่ ที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติ .05

5. นำนักเรียน 20 คู่ ที่แต่ละคู่มี I.Q เท่ากัน มาทดลองเรียนสถิติ โดยใช้ตำราเรียน 2 เล่มที่แตกต่างกัน ในการทดลองครั้งนี้ได้แยกนักเรียนแต่ละคู่ให้เรียนตำราเรียนที่แตกต่างกัน เมื่อสอนจบได้นำข้อสอบวิชาสถิติมาทดสอบกับนักเรียนทั้งสองกลุ่ม ผลคะแนนการทดสอบปรากฏดังตาราง อยากทราบว่าตำราเรียน 2 เล่มนี้ทำให้ความสามารถของนักเรียนแตกต่างกันหรือไม่กำหนดให้ $\alpha = .05$

นักเรียนคู่ที่	คะแนนของกลุ่ม 1	คะแนนของกลุ่ม 2	d_i	d_i^2
1	30	25	5	25
2	28	29	−1	1
3	.	.	.	.
.	.	.	.	.
	.	.	.	.
19	15	15	0	0
20	35	29	6	36
			$\Sigma d_i = 45$	$\Sigma d_i^2 = 320$