บทที่ 1

ความรู้เบื้องต้นทางสถิติ

(Introduction to Statistics)

ปัจจุบันสถิติได้เข้ามามีบทบาทอย่างมากต่อชีวิตประจำวันของมนุษย์ ไม่มีมนุษย์ผู้ใดในโลกนี้ที่สามารถดำรงชีวิตอยู่ได้อย่างมีความสุข โดยไม่เกี่ยวข้องกับสถิติ อาชีพเกือบทุกอาชีพ ไม่ว่าจะเป็นครู ทหาร ตำรวจ แพทย์ วิศวกร นักการเมือง นักธุรกิจ พ่อค้าแม่ค้า หมอดูใบ้หวย หรือแม้กระทั่งโหราจารย์ ก็ล้วนแต่ต้องเกี่ยวข้องกับสถิติไม่ทางใดก็ทางหนึ่งเสมอ การซื้อขายในปัจจุบันหากใช้วิชาความน่าจะเป็นและสถิติ (Probability and statistics) เข้ามาช่วยก็จะทำให้ไม่ถูกผู้อื่นเอารัดเอาเปรียบ

สถิติเป็นวิชาที่มีความสำคัญและมีประโยชน์ต่อมนุษย์มาก ทั้งนี้เพราะสถิติช่วยในการตัดสินใจ และวางแผนโครงการที่สำคัญต่าง ๆ ดังนั้นจึงเป็นสิ่งจำเป็นที่มนุษย์จะต้องรู้สถิติ และในการศึกษาเกี่ยวกับวิชาการทางด้านสถิติให้ได้ผลดีนั้น จำเป็นจะต้องมีความรู้พื้นฐานที่จำเป็นบางอย่าง ในบทนี้จึงมุ่งปูพื้นฐานทางสถิติที่ผู้อ่านควรจะต้องทราบเสียก่อนดังนี้

1.1 สัญญลักษณ์ผลรวม (Summation notation)

การใช้สัญญลักษณ์ผลรวมจะช่วยให้สูตรต่าง ๆ ทางสถิติสั้นลง และสะดวกต่อการนำไปใช้

โดยทั่วไปมักเขียน $\sum_{i=1}^{n} X_i$ แทน $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$

$\sum_{i=1}^{3} X_i^2$ แทน $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$

$\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i$ แทน $X_1Y_1 + X_2Y_2 + \ldots + X_nY_n$

$\sum_{i=1}^{3} X_i \sum_{i=2}^{4} Y_i$ แทน $(X_1 + X_2 + X_3)(Y_2 + Y_3 + Y_4)$

Σ เป็นอักษรกรีก อ่านว่าซิกม่า (Sigma) หมายถึงผลรวม โดยทั่วไปมักใช้ Σ x แทน $\sum_{i=1}^{n} X_i$

1.2 ทฤษฎีเกี่ยวกับผลรวม

ทฤษฎี 1 ผลรวมของค่าคงที่ n ตัวจะเท่ากับผลคูณของ n กับค่าคงที่นั้น นั่นคือ ถ้า c เป็นค่าคงที่จะได้ว่า

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$

พิสูจน์

$$\sum_{i=1}^{n} c = \underbrace{c + c + \ldots c}_{n \text{ ตัว}} = nc$$

ทฤษฎี 2 ถ้าตัวแปรในกลุ่มหนึ่ง ๆ คูณด้วยตัวคงที่ตัวหนึ่ง ผลรวมของผลคูณนั้นจะเท่ากับค่าคงที่คูณกับผลรวมของตัวแปรนั้น นั่นคือถ้า X เป็นตัวแปร และ c เป็นค่าคงที่จะได้ว่า

$$\sum_{i=1}^{n} cX_i = c\sum_{i=1}^{n} X_i$$

พิสูจน์

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} cX_i &= cX_1 + cX_2 + \ldots + cX_n \\ &= c(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) \\ &= c\sum_{i=1}^{n} X_i\end{aligned}$$

ทฤษฎี 3 ผลรวมของผลบวกของตัวแปรสองตัวหรือมากกว่าจะเท่ากับผลบวกของผลรวมของตัวแปรแต่ละตัว นั่นคือ ถ้า X, Y และ Z เป็นตัวแปรสามตัว จะได้ว่า

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i + Y_i + Z_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n} Y_i + \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

พิสูจน์

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i + Y_i + Z_i) = (X_1 + Y_1 + Z_1) + (X_2 + Y_2 + Z_2) + \ldots$$

$$+ (X_n + Y_n + Z_n)$$

$$= (X_1 + X_2 + \ldots + X_n) + (Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n)$$

$$+ (Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n} Y_i + \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

ตัวอย่าง 1 ถ้า $X_1 = 3,\ X_2 = 4,\ X_3 = 6,\ X_4 = 1$

$X_5 = 5,\ X_6 = 7$

จงหา ก. $\sum_{i=1}^{6} X_i$

ข. $\sum_{i=2}^{4} X_i$

ค. $\sum_{i=1}^{3} X_i^2$

ก. $\sum_{i=1}^{6} X_i$

$$= X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$$

$$= 3 + 4 + 6 + 1 + 5 + 7$$

$$= 26$$

ข. $\sum_{i=2}^{4} X_i$

$$= X_2 + X_3 + X_4$$

$$= 4 + 6 + 1$$

$$= 11$$

ค. $\sum_{i=1}^{3} X_i^2$

$$= X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$$

$$= (3)^2 + (4)^2 + (6)^2$$

$$= 9 + 16 + 36$$

$$= 61$$

ตัวอย่าง 2 fll $X_1 = 0,\ X_2 = -1,\ X_3 = 2,\ X_4 = 4$

$Y_1 = 6.\ \ Y_2 = 3,\ \ Y_3 = 4,\ \ Y_4 = 5$

และ $c = 2$

จงหา **n** . $\sum_{i=2}^{4} X_iY_i$

ข. $\sum_{i=1}^{3} X_i \sum_{i=2}^{4} Y_i$

ค. $\sum_{i=1}^{4} cX_i$

ง. $\sum_{i=1}^{6} c$

จ. $\sum_{i=1} (X_i + Y_i)$

n. $\sum_{i=2}^{4} X_i\ Y_i = X_2Y_2 + X_3Y_3 + X_4Y_4$

$= (-1)(3) + (2)(4) + (4)(5)$

$= -3 + 8 + 20$

$= 25$

ข. $\sum_{i=1}^{3} X_i \sum_{i=2}^{4} Y_i = (X_1 + X_2 + X_3)(Y_2 + Y_3 + Y_4)$

$= (0 + (-1) + 2)(3 + 4 + 5)$

$= (1)(12)$

$= 12$

ค. $\sum_{i=1}^{4} cX_i = c\sum_{i=1}^{4} X_i$

$= c\ (X_1 + X_2 + X_3 + X_4)$

$= 2\ (0 + (-1) + 2 + 4)$

$= 2 \times 5$

$= 10$

ง. $\sum_{i=1}^{6} c = c + c + c + c + c + c$

$= 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$

$= 12$

จ. $\sum_{i=1}^{3} (X_i + Y_i) = (X_1 + Y_1) + (X_2 + Y_2) + (X_3 + Y_3)$

$= (0 + 6) + (-1 + 3) + (2 + 4)$

$= 6 + 2 + 6$

$= 14$

1.3 การวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลาง (Measures of central tendency)

1.3.1 ค่าเฉลี่ย (Mean) เป็นค่าสถิติตัวหนึ่งที่ใช้เป็นตัวแทนของข้อมูลโดยการเฉลี่ยคะแนนหรือผลการวัดทั้งหมด โดยทั่วไปใช้สัญญลักษณ์ $\bar{X}$ แทนค่าเฉลี่ย ค่าเฉลี่ยหาได้จากการนำคะแนนทุก ๆ ตัวมารวมกัน แล้วหารด้วยจำนวนทั้งหมด ซึ่งสามารถสรุปเป็นสูตรสำหรับคำนวณค่าเฉลี่ย ได้ดังนี้

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N} \qquad \text{.....................(1–1)}$$

เช่น คะแนนชุดหนึ่งประกอบไปด้วย 1, 2, 3, 4, 5 ดังนั้น

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N}$$

$$= \frac{1+2+3+4+5}{5}$$

$$= 3$$

ในกรณีที่คะแนนมีการแจกแจงความถี่ การคำนวณโดยใช้สูตรดังกล่าวจะทำให้เสียเวลามาก และมีโอกาสผิดได้ง่าย จึงอาจปรับปรุงสูตรในการคำนวณใหม่ ดังนี้

$$\bar{X} = \frac{\Sigma fX}{N} \qquad \text{.....................(1–2)}$$

เมื่อ X แทน คะแนนดิบ

f แทน ความถี่ของแต่ละคะแนน

N แทน จำนวนคะแนนทั้งหมด

ตัวอย่าง 3 คะแนนจากการสอบครั้งหนึ่งเป็นดังนี้

X	f	fX
1	1	1
2	3	6
3	3	9
4	2	8
5	1	5
$\Sigma X =$	$\Sigma f = 10$	$\Sigma fX = 29$

จงคำนวณหาค่าเฉลี่ยของข้อมูลชุดนี้

จากข้อมูลชุดนี้ ได้ว่า $\Sigma fX = 29$, $N = 10$

$$\therefore \bar{X} = \frac{\Sigma fX}{N}$$

$$= \frac{29}{10}$$

$$= 2.9$$

ข้อสังเกต ค่าเฉลี่ยเหมาะที่จะใช้กับข้อมูลที่มีการกระจายอย่างสม่ำเสมอ ค่าสูงสุดและต่ำสุดไม่แตกต่างกันมากนัก หากมีข้อมูลบางตัวที่ผิดปกติ ไม่ควรวัดค่าตัวกลางด้วยค่าเฉลี่ย

1.3.2 มัธยฐาน (Median)

มัธยฐาน เป็นค่าสถิติที่ใช้หาตัวแทนของกลุ่มเช่นเดียวกับค่าเฉลี่ย โดยการหาคะแนนที่อยู่ตำแหน่งกึ่งกลางของกลุ่ม วิธีการหามัธยฐานในกรณีที่คะแนนมีน้อยตัวทำได้สะดวกโดยการนำข้อมูลมาเรียงลำดับ จะเรียงจากมากไปหาน้อยหรือน้อยไปหามากก็ได้ ค่าของข้อมูลตัวที่อยู่ตำแหน่งตรงกลางจะเป็นมัธยฐาน เช่น ต้องการหาข้อมูล N ข้อมูล มัธยฐานจะอยู่ตำแหน่งที่ $\frac{N+1}{2}$

ตัวอย่าง เช่น 2 8 15 20 30 เลขชุดนี้มี 5 ตัว $\therefore N = 5$ มัธยฐานจะอยู่ตำแหน่งที่ $\frac{5+1}{2} = 3$ ซึ่งตรงกับคะแนน 15

ในกรณีที่ข้อมูลเป็นจำนวนคู่ เช่น 15 2 8 30 20 31 นำมาเรียงลำดับใหม่ จะได้ 2 8 15 20 30 31 ตำแหน่งมัธยฐานจะอยู่ที่ $\frac{N+1}{2} = \frac{6+1}{2} = 3.5$ ซึ่งเป็นค่าระหว่าง 15 กับ 20 กรณีเช่นนี้ต้องเอาค่าทั้งสองมาหาค่าเฉลี่ย ดังนั้นค่ามัธยฐานของข้อมูลชุดนี้เท่ากับ $\frac{15+20}{2} = 17.5$

สำหรับข้อมูลที่เป็นกลุ่ม (Group data) สามารถคำนวณหาค่ามัธยฐานได้ดังนี้

1. จากตารางแจกแจงความถี่ ทำการหาความถี่สะสม (cumulative frequency)
2. คำนวณหาครึ่งหนึ่งของจำนวนคนทั้งหมด (หา $\frac{N}{2}$)
3. พิจารณาว่า $\frac{N}{2}$ ตกอยู่ในชั้นคะแนนใด แล้วกำหนด exact limit ของชั้นคะแนนนั้น
4. หาค่ามัธยฐานจากสูตร

$$\text{Mdn} = L + \left[\frac{N/2 - F}{f}\right] i \qquad \text{.....................(1–3)}$$

เมื่อ L แทน exact lower limit ของชั้นคะแนนที่ครอบคลุมมัธยฐาน

F แทน ความถี่สะสมของชั้นคะแนนก่อนถึงชั้นที่มัธยฐานอยู่

f แทน ความถี่ของชั้นคะแนนที่มัธยฐานอยู่

i แทน อันตรภาคชั้น

ตัวอย่าง 4 จงหามัธยฐานของข้อมูลในตารางต่อไปนี้

ชั้นคะแนน	ความถี่	ความถี่สะสม
45–49	1	76
40–44	2	75
35–39	3	73
30–34	6	70
25–29	8	64
20–24	17	56
15–19	26	39*
10–14	11	13
5–9	2	2
รวม	76	

$$\frac{N}{2} = \frac{76}{2} = 38$$

$$L = 14.5, \quad F = 13, \quad f = 26, \quad i = 5$$

$$\therefore \; Mdn = 14.5 + \left[\frac{38-13}{26}\right] \times 5$$

$$= 19.31$$

ข้อสังเกต การหามัธยฐานนิยมใช้ในกรณีที่คะแนนหรือข้อมูลจากการวัด มีการกระจายไม่เป็นโค้งปกติ คะแนนมีการกระจายกว้าง และทิ้งช่วงห่างของคะแนนเป็นช่วง ๆ และเมื่อต้องการแบ่งนักเรียนออกเป็นสองกลุ่ม คือกลุ่มเก่งและกลุ่มอ่อน ก็มักจะใช้ค่ามัธยฐานเป็นตัวแบ่ง

1.3.3 **ฐานนิยม** (Mode)

ฐานนิยม คือคะแนนที่มีความถี่มากที่สุดในข้อมูลชุดนั้น ดังนั้นในการหาค่าฐานนิยมก็จะพิจารณาดูว่าข้อมูลที่กำหนดมาให้นั้น ข้อมูลตัวใดที่ซ้ำกันมากที่สุด

ตัวอย่างเช่น 1, 5, 6, 5, 3, 2, 4, 5, 4, 5, 5, 7

ค่าที่ซ้ำกันมากที่สุดของข้อมูลชุดนี้คือ 5 ดังนั้นฐานนิยมของข้อมูลชุดนี้ = 5

นอกจากนี้ยังอาจคำนวณหาค่าฐานนิยมได้จากความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$\text{Mode} = 3 \ \text{Median} - 2 \ \text{Mean}$$

ข้อสังเกต การหาฐานนิยมมักจะหาในกรณีที่การแจกแจงความถี่ของคะแนนมีลักษณะที่เบ้ไปในทิศทางใดทิศทางหนึ่งมาก ๆ ไม่ค่อยมีโอกาสที่จะเป็นโค้งปกติ

1.4 การวัดการกระจาย (Measures of Variability)

การพิจารณาเฉพาะการวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลางเพียงอย่างเดียวนั้นยังไม่เพียงพอที่จะอธิบายลักษณะการแจกแจงของข้อมูลได้อย่างแจ่มชัด จำเป็นต้องพิจารณาถึงการกระจายของข้อมูลด้วย การวัดการกระจายของข้อมูลจะช่วยอธิบายสภาพของกลุ่มได้ชัดเจนยิ่งขึ้น กล่าวคือถ้าข้อมูลชุดใดมีการกระจายมากแสดงว่าข้อมูลชุดนั้นประกอบด้วยตัวเลขซึ่งมีความแตกต่างกันมาก คือคนที่ได้คะแนนต่ำก็ต่ำมาก คนที่ได้คะแนนสูงก็สูงมาก ส่วนข้อมูลที่มีการกระจายน้อยก็แสดงว่าข้อมูลชุดนั้นมีความแตกต่างกันน้อย คือเป็นข้อมูลที่ประกอบด้วยตัวเลขที่มีค่าใกล้เคียงกัน

จงพิจารณาตัวอย่างคะแนนผลการสอบของนักเรียน 2 กลุ่มนี้

กลุ่ม	คะแนน
กลุ่มที่ 1	4 5 3 6 7
กลุ่มที่ 2	2 4 5 10 4

จะเห็นได้ว่าคะแนนของนักเรียนกลุ่มที่ 1 และกลุ่มที่ 2 มีค่าเฉลี่ยเท่ากัน ($\overline{X} = 15$) ทั้ง ๆ ที่คะแนนในกลุ่มที่ 2 มีลักษณะการกระจายมากกว่าคะแนนในกลุ่มที่ 1 จากข้อมูลที่ยกมานี้พอสรุปได้ว่านักเรียน 2 กลุ่มนี้มีความสามารถใกล้เคียงกัน แต่นักเรียนในกลุ่มที่ 2 มีความสามารถแตกต่างกันมาก คือมีทั้งนักเรียนที่เก่งมากและอ่อนมาก ส่วนกลุ่มที่ 1 นั้น นักเรียนมีความสามารถแตกต่างกันน้อยกว่านักเรียนกลุ่มที่ 2

การวัดการกระจายมีวิธีการวัดดังนี้

1.4.1. พิสัย (Range)

เป็นวิธีการวัดการกระจายของคะแนนอย่างหยาบ ๆ แต่วัดได้ง่าย หาได้โดยหาผลต่างของคะแนนสูงสุดกับคะแนนต่ำสุด ดังนี้

พิสัย = คะแนนสูงสุด — คะแนนต่ำสุด

ตัวอย่าง 5 ในการสอบวิชาคณิตศาสตร์ครั้งหนึ่งปรากฏผลคะแนนดังนี้

15, 5, 20, 17, 12 จงหาพิสัยของคะแนนชุดนี้

พิสัย $= 20 - 5 = 15$

ข้อสังเกต พิสัยจะเปลี่ยนแปลงได้ง่าย ถ้าคะแนนสูงสุดหรือต่ำสุดเปลี่ยนไป แต่หากคะแนนตัวอื่น ๆ เปลี่ยนแปลงไป จะไม่กระทบกระเทือนต่อพิสัยเลย อย่างไรก็ตาม พิสัยเป็นเพียงการประมาณการกระจายอย่างหยาบ ๆ เท่านั้น ไม่สามารถให้รายละเอียดได้มากนัก

1.4.2 Interquartile range และ Quartile deviation

เป็นการวัดการกระจายโดยแบ่งข้อมูลออกเป็น 4 ส่วนเท่า ๆ กัน ซึ่งสามารถคำนวณได้จากสูตร ดังนี้

Interquartile range $= Q_3 - Q_1$ ....(1–4)

Quartile deviation $= \frac{Q_3 - Q_1}{2}$ ....(1–5)

เมื่อ Q_1 แทนตำแหน่งที่มีคะแนนอื่นอยู่ต่ำกว่า 25%

Q_3 แทนตำแหน่งที่มีคะแนนอื่นอยู่ต่ำกว่า 75%

Quartile deviation นี้บางทีก็เรียกว่า Semi–interquartile range

1.4.3 ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย (Mean deviation)

ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยสามารถวัดการกระจายได้ดีกว่า 2 วิธีแรก การคำนวณหาค่าส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย สามารถหาได้โดยใช้สูตร

$$M.D = \frac{\Sigma |X - \bar{X}|}{N}$$ ....(1–6)

1.4.4 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard deviation)

เป็นวิธีการวัดการกระจายที่มีผู้นิยมใช้มากที่สุด การคำนวณคล้ายกับการหาส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย แต่ใช้การยกกำลังสองแทนเครื่องหมาย Absolute ซึ่งสามารถคำนวณโดยใช้สูตร ดังนี้

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากร $(\sigma) = \sqrt{\frac{\Sigma (X - \mu)^2}{N}}$ ....(1–7)

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มตัวอย่าง $(s) = \sqrt{\frac{\Sigma (X - \bar{X})^2}{N-1}}$ ....(1–8)

แบบฝึกหัด 1

1. จงเขียนค่าต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปสัญญลักษณ์ผลรวม (Summation Notation)

   ก. $(X_1 + Y_1) + (X_2 + Y_2) + \ldots + (X_{10} + Y_{10})$

   ข. $cY_1 + cY_2 + \ldots + cY_n$

   ค. $X_1Y_1 + X_2Y_2 + \ldots + X_{25}Y_{25}$

   ง. $(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)\ (Y_3 + Y_4 + Y_5)$

   จ. $X_1^2Y_1 + X_2^2Y_2 + \ldots + X_n^2Y_n$

2. จงเขียนความหมายของสัญญลักษณ์ผลรวมต่อไปนี้

   n. $\sum_{i=1}^{5} X_i^2$

   ข. $\sum_{i=3}^{6} (X_i + Y_i)$

   n . $\sum_{i=1}^{n} c$

   ง. $\sum_{i=1}^{5} (X_i / c)$

   จ. $\sum_{i=1}^{3} c X_i Y_i$

3. ถ้า $X_1 = 2,\ X_2 = 3,\ x\,3 = 4,\ X_4 = 5$

   $Y_1 = 10,\ Y_2 = 8,\ Y_3 = 6,\ Y_4 = 4$

   จงหา

   ก. $\sum_{i=1}^{4} X_i^2$　　　ข. $\sum_{i=1}^{n} (X_i - 2)$

   ค. $\sum_{i=1}^{3} (X_i / Y_i)$　　　ง. $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} (X_i)}{4}$

   จ. $\sum_{i=1}^{4} (Y_i + 4)$

4. ถ้า $X_1 = 9,\ X_2 = -5,\ X_3 = 4,\ X_4 = 2$

จงหา

ก. $\sum_{i=2}^{3} (X_i + 15)$

ข. $\sum_{3}^{4} (X_i^2 - 3)$

ค. $\sum_{i=1} (X_i + 1)^2$

ง. $\sqrt{\begin{matrix} \sum^{4} (X_i + 5) \\ \sum_{i=2} (X_i + 5) \end{matrix}}$

จ. $\sqrt{\sum_{i=1}^{2} X_i (X_i - 2)}$

5. กำหนดให้ X_i แทนคะแนน 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 จงหา

ก. ΣX_i

ข. ΣX_i^2

ค. $(\Sigma X_i)^2$

ง. $\Sigma X_i^2 - \frac{\Sigma X_i}{N}$

6. กำหนด

i	X_i	Y_i
1	90	1.2
2	97	2.2
3	104	2.3
4	113	3.9
5	118	3.0
6	125	3.5

จากตารางจงหา

n . ΣX_i ข. ΣY_i

fl. ΣX_iY_i ง. $(\Sigma X_i)(\Sigma Y_i)$

จ. $\Sigma XY - \frac{(\Sigma X)(\Sigma Y)}{N}$

7. กำหนด

i	X_i	Y_i	Z_i
1	3	0	2
2	0	1	1
3	4	5	3
4	2	2	2
5	3	2	5

และให้ c = 2 จงหา

n. $\Sigma (X_i + Y_i - Z_i)$

ข. ΣcX_i

fl. Σc

8. ถ้า $X_1 = 2$, $X_2 = 5$, $X_3 = 6$, $X_4 = 8$, $X_5 = 9$

จงหา

n. $\sum_{i=1}^{5} X_i$

ข. $\sum_{i=2}^{4} Xi$

n . $\sum_{i=1}^{3} X_i^2$

9. จงพิสูจน์ว่า

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i + Y_i - Z_i) = \sum_{i=1}^{n} Xi + \sum_{i=1}^{n} Y_i - \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

10. จงพิสูจน์ว่า

$$\sum_{i=1}^{n} (aX_i + b) = a\sum_{i=1}^{n} (X_i) + nb$$

เมื่อ a และ b เป็นค่าคงที่