บทที่ 2
ธรรมชาติของวิชาคณิตศาสตร์

การที่จะวัดจะประเมินสิ่งใด ๆ นั้น ผู้ที่จะวัดจะประเมินจะต้องรู้จักสิ่งที่จะถูกวัด หรือถูกประเมินเป็นอย่างดีเสียก่อน มิฉะนั้นย่อมไม่สามารถวัดหรือประเมินได้อย่างเที่ยงตรง การวัดและการประเมินผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ก็เช่นกัน ผู้วัดผู้ประเมินจะต้องรู้จักธรรมชาติของวิชาคณิตศาสตร์พอสมควร มิฉะนั้น อาจไปวัดหรือประเมินสิ่งอื่นโดยที่เข้าใจเอาว่าเป็นผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ก็เป็นได้

ก็วิชาคณิตศาสตร์นั้นมีธรรมชาติเป็นอย่างไร?

ต่อคำถามนี้อาจสรุปตอบได้ดังนี้

คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีธรรมชาติหรือลักษณะสำคัญ ๆ อย่างน้อยที่สุด 5 ประการ คือ

1. โครงสร้างของวิชาคณิตศาสตร์

โครงสร้างของวิชาคณิตศาสตร์ มีส่วนประกอบอยู่ 4 ประการ คือ

1.1 อนิยาม (Undefined terms) หมายถึงคำที่ไม่ให้ความหมายหรือคำจำกัดความ เหตุที่ไม่ให้ความหมายหรือคำจำกัดความก็เพราะในการให้ความหมายนั้น เราจะต้องเอาคำ B ไปเป็นความหมายของคำ A เอาคำ C ไปเป็นความหมายของคำ B เช่นนี้ไปเรื่อย ๆ แต่เนื่องจากถ้อยคำในภาษาทุกภาษาในโลกนี้มีอยู่จำกัด (Finite) ดังนั้น ถ้าเราพยายามจะให้ความหมายหรือคำจำกัดความแก่คำทุกคำแล้ว เราก็จำเป็นที่จะต้องนำเอาคำซึ่งเราให้ความหมายแล้วไปเป็นความหมายของคำอื่น วิธีการเช่นนี้เรียกว่าเป็นการอธิบายวกวน (Circular explanation) ซึ่งไม่ทำให้เราได้รับความรู้อะไรกระจ่างขึ้นเลย ตัวอย่างการอธิบายวกวน เช่น

เราให้ความหมายของคำว่า "ดี" ว่าหมายถึง "ไม่ชั่ว"

และให้ความหมายของคำว่า "ชั่ว" ว่าหมายถึง "ไม่ดี"

จากตัวอย่างนี้ จะเห็นได้ว่าไม่ทำให้เรารู้จริงว่าดีหรือชั่วนั้นเป็นอย่างไร เราจะรู้ว่าดีคืออะไรก็ต่อเมื่อเรารู้ว่าชั่วคืออะไร และในทางกลับกัน ดังนั้น นักคณิตศาสตร์จึงเริ่มโครงสร้างของวิชาคณิตศาสตร์ด้วยคำกลุ่มหนึ่งซึ่งไม่ให้ความหมายหรือคำจำกัดความ โดยที่ให้ตกลงกันว่าคำเหล่านี้เป็นที่เข้าใจกันอาจจะด้วยการยกตัวอย่าง หรือเข้าใจด้วยปฏิภาณซึ่งเป็นคุณสมบัติประจำตัวของมนุษย์ ตัวอย่างของอนิยามในวิชาคณิตศาสตร์ เช่น คำว่า **"เซ็ต"**

"เป็นสมาชิกของ" "จุด" "เส้น" "ระนาบ" "อวกาศ 3 มิติ" (Three dimensional space) **"ระยะเท่ากัน"** เหล่านี้เป็นต้น อนิยามนี้จะมีจำนวนน้อยที่สุดเท่าที่จะเป็นได้

1.2 นิยาม **(Defined terms)** หมายถึงคำซึ่งเราให้ความหมายหรือคำจำกัดความ กล่าวคือ เมื่อเรามีคำกลุ่มหนึ่งซึ่งเป็นอนิยามแล้ว เราก็สามารถให้ความหมายหรือคำจำกัดความแก่คำอื่น โดยอาศัยอนิยามเหล่านั้นเองมาเป็นความหมาย ตัวอย่างเช่น เราไม่ให้ความหมายแก่คำว่า เซ็ต จุด ระนาบ ระยะเท่ากัน แต่เราสามารถให้ความหมายแก่คำว่า "วงกลม" ได้ว่า วงกลมหมายถึงเซ็ตของจุดบนระนาบซึ่งอยู่ห่างจากจุด ๆ หนึ่ง เป็นระยะเท่ากัน เราจะเห็นว่าถ้าเราให้ความหมายแก่สิ่งหนึ่งว่าหมายถึงเซ็ตของจุดในอวกาศ 3 มิติ ซึ่งอยู่ห่างจากจุด ๆ หนึ่งเป็นระยะเท่ากัน สิ่งนั้นก็จะเป็นทรงกลม (Sphere) แทนที่จะเป็นวงกลม อนึ่ง เมื่อเราได้ให้คำจำกัดความแก่คำใดซึ่งเป็นนิยามแล้ว เราก็สามารถที่จะนำนิยามนั้นไปเป็นความหมายของนิยามอื่น ๆ ดุจเดียวกับที่เราใช้อนิยามไปเป็นความหมายของคำอื่น ๆ ได้

ตัวอย่างของนิยามในวิชาคณิตศาสตร์ เช่น ตัวหารร่วมมาก วงรี สับเซ็ต (Subset) ฟังก์ชัน (Function) กรุ๊ป (Group) ฟิลด์ (Field) เป็นต้น

1.3 กติกา **(Postulates)** หมายถึงประโยคที่เราไม่ต้องพิสูจน์ แต่ให้เป็นที่ยอมรับกันว่าเป็นจริงในเรื่องที่เราพูดกันอยู่ กติกามักจะแสดงถึงความสัมพันธ์ของอนิยามหรือนิยามที่เป็นพื้นฐานมากจนกระทั่งไม่สามารถพิสูจน์ได้ ตัวอย่างของกติกาในวิชาคณิตศาสตร์ เช่น กติกาของ Euclid ที่ว่า *"กำหนดเส้นตรงให้เส้นหนึ่ง และจุด ๆ หนึ่งนอกเส้นตรงเส้นนั้น เราจะสามารถลากเส้นตรงให้ผ่านจุดนั้นให้ขนานกับเส้นตรงที่กำหนดให้ได้เพียงเส้นเดียว"* กติกาว่าด้วย Infinity ที่ว่า *"มีเซ็ตซึ่งเป็น Successor set อยู่อย่างน้อย 1 เซ็ต"* กติกาของ Hilbert ที่ว่า *"กำหนดจุด 2 จุด จะลากเส้นตรงผ่านได้เพียงเส้นเดียว"* เหล่านี้เป็นต้น กติกานี้โดยทั่วไปจะมีจำนวนน้อยที่สุดเท่าที่จะมีได้

1.4 ทฤษฎีบท **(Theorems)** หมายถึงประโยคซึ่งต้องพิสูจน์ การพิสูจน์หมายถึงการนำเอาอนิยาม กติกา (หรือทฤษฎีบทที่ได้พิสูจน์แล้วไปสนับสนุนเป็นเหตุเป็นผลเพื่อแสดงว่าทฤษฎีบทเป็นจริง ทฤษฎีบทนี้จัดได้ว่าเป็นสุดยอดของโครงสร้างของวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งจากอนิยาม นิยาม และกติกา จำนวนน้อยที่สุดเท่าที่จะเป็นได้ นักคณิตศาสตร์จะพยายามสร้างทฤษฎีบทให้ได้มากที่สุดเท่าที่จะเป็นได้ ตัวอย่างทฤษฎีบท เช่น "จำนวน 2 ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ" "จำนวนเฉพาะ (Prime number) จำนวนที่มากที่สุดไม่มีอยู่" "ถ้า A, B เป็นเซ็ต $A - B = B' - A'$ "เส้นตรงเส้นหนึ่งพบเส้นตรงอีกเส้นหนึ่ง มุมประชิดรวมกันเท่ากับ 2 มุมฉาก" เป็นต้น ในที่นี้จะยกตัวอย่างการพิสูจน์ทฤษฎีบทอันหนึ่งเท่านั้น

ถ้าเรามีนิยามว่า	$A - B = A \cap B'$	
มีกติกาว่า	$A \cap B' = B' \cap A$	
มีทฤษฎีบทว่า	$(A')' = A$	ซึ่งสมมติว่าได้พิสูจน์แล้
เราจะพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ว่า	$A - B = B' - A'$	ได้ดังนี้
พิสูจน์	$A - B = A \cap B'$	(นิยาม)
	$= B' \cap A$	(กติกา)
	$= B' \cap (A')'$	(ทฤษฎีบท)
	$= B' - A'$	(นิยาม)

ซ.ต.พ.

การรู้โครงสร้างของวิชาคณิตศาสตร์มีความจำเป็นอย่างยิ่งต่อการวัดการประเมินผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ผู้ที่จะวัดจะประเมินจะต้องสามารถแยกคำและประโยคในวิชาคณิตศาสตร์ออกได้เป็นส่วน ๆ ว่า คำใดเป็นอนิยาม คำใดเป็นนิยาม ประโยคใดเป็นกติกา ประโยคใดเป็นทฤษฎีบท เพื่อที่จะได้เขียนข้อความในข้อสอบได้ถูกต้อง และไม่เกิดคำถามซึ่งไม่ถูกต้องเช่น

(0) เซ็ตคืออะไร?

ก. กลุ่มของสิ่งของต่าง ๆ

ข. สิ่งต่าง ๆ ที่อยู่รวมกันเป็นหมวดหมู่

ค. สิ่งซึ่งอาจจะมีหรือไม่มีสมาชิก

ง. คำซึ่งใช้แทนคำว่าหมวดหมู่ พวก กอง

ข้อคำถามเช่นนี้ย่อมไม่มีคำตอบ และกล่าวได้ว่าไม่ใช่คำถามในวิชาคณิตศาสตร์ด้วยว่าคำว่าเซ็ตเป็นอนิยาม เมื่อเป็นอนิยามแล้วก็ไม่ต้องตั้งคำถามว่าคืออะไร

หรือข้อคำถามที่ว่า

(00) เพราะเหตุใด 2 จึงมากกว่า 1?

ก. เพราะของ 2 สิ่ง ย่อมมากกว่า 1 สิ่ง

ข. เพราะ 1 + 1 ได้ 2

ค. เพราะ 2 – 1 ยังเหลืออยู่อีก 1

ง. เพราะ 2 มาทีหลัง 1

ข้อคำถามเช่นนี้ก็ไม่ใช่ข้อคำถามในวิชาคณิตศาสตร์ เพราะที่ว่า “2 มากกว่า 1” นั้นเป็นกติกา เมื่อเป็นกติกาแล้วก็ไม่ต้องตั้งคำถามว่า เพราะเหตุใด หรือ ทำไม

(000) จงพิสูจน์ว่าเส้นตรง 2 เส้น ตัดกันได้ 1 จุดเท่านั้น

คำสั่งเช่นนี้ไม่สามารถปฏิบัติตามได้ และไม่ใช่คำสั่งในการวัดผลวิชาคณิตศาสตร์ เนื่องจากว่าที่ว่า “เส้นตรง 2 เส้น ตัดกันได้เพียง 1 จุดเท่านั้น” เป็นกติกา ย่อมไม่สามารถพิสูจน์ได้ หากใครจะบอกว่า เราสามารถลากเส้นตรง 2 เส้น ตัดกันให้ดูได้ นั่นก็ถือว่าเป็นเพียงการแสดง (Verification) ว่าเป็นจริง แต่ไม่ใช่การพิสูจน์ (Proof) ความแตกต่างระหว่างคำ 2 คำ คือคำว่าการแสดงกับการพิสูจน์นี้เป็นเรื่องสำคัญมาก การแสดงให้ดูได้นั้นถือว่าเป็นเรื่องเฉพาะกรณี ไม่ได้รับประกันว่าจะเป็นจริงไปทุกกรณี ส่วนการพิสูจน์นั้นย่อมรับประกันได้ว่าเป็นจริงในทุกกรณีในระบบหนึ่ง ๆ เช่น การที่ยูคลิดพิสูจน์ว่าเส้นตรงเส้นหนึ่งพบเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งมุมประชิดรวมกันเท่ากับสองมุมฉากนั้น เป็นจริงสำหรับเส้นตรงทุกคู่ ไม่เฉพาะเส้นตรง AB กับ EC หรือเส้นตรง EF กับ GH เท่านั้น หรือการที่เราจะบอกว่า “จำนวนเฉพาะทุกจำนวนนอกจาก 2 เป็นจำนวนคี่” นั้น เรา**พิสูจน์**ได้ว่าเป็นจริง แม้ว่าเราจะไม่สามารถบอกได้ว่าจำนวนเฉพาะทุกจำนวนที่ว่านั้นมีจำนวนใดบ้าง ทั้งเราไม่ได้ยกตัวอย่างให้ดู (Verify) เสียด้วยซ้ำไปว่าจำนวน 3 เป็นจำนวนคี่ จำนวน 5 เป็นจำนวนคี่ ฯลฯ เราเพียงแต่ให้เหตุผลว่า “ถ้าจำนวนเฉพาะที่ว่าเป็นจำนวนคู่แล้วก็ย่อมสามารถหารด้วยจำนวนสองได้ลงตัว ก็ไม่ใช่จำนวนเฉพาะ” การให้เหตุผลเช่นนี้เป็นการพิสูจน์ และการพิสูจน์ในทางคณิตศาสตร์นั้น เมื่อพิสูจน์แล้วครั้งหนึ่งก็เป็นการพิสูจน์ตลอดกาล ดังนั้น การพิสูจน์จึงเป็นอาวุธอันสำคัญของนักคณิตศาสตร์ที่จะก้าวไปให้ถึงสิ่งที่ยังไม่รู้ว่าถึงแม้เราจะไม่รู้ว่าสิ่งนั้นคืออะไรจริง ๆ เราก็สามารถบอกได้ว่ามันมีลักษณะอย่างไร

2. ความเป็นนามธรรม (Abstractness)

คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ว่าด้วยนามธรรม เราจะเห็นว่าคำทุกคำ ประโยคทุกประโยคในวิชาคณิตศาสตร์ว่าด้วยนามธรรมทั้งสิ้น ทั้งนี้ สืบเนื่องมาจากอนิยามเป็นนามธรรม ดังนั้นนิยามก็ดี กติกาก็ดี ทฤษฎีบทก็ดี ซึ่งล้วนแต่สร้างขึ้นมาจากอนิยามเป็นลำดับมา จึงเป็นนามธรรมไปด้วย เราต้องไม่สับสนระหว่างนามธรรมกับสัญลักษณ์ (Symbol) ซึ่งใช้แทนนามธรรม ตัวอย่างเช่น เซ็ต เป็นนามธรรม ที่เขียนกันว่า A, นั้นเป็นสัญลักษณ์ซึ่งใช้แทนเซ็ตเท่านั้น จำนวนเป็นนามธรรม ตัวเลข (Numerals) เป็นเพียงสัญลักษณ์ซึ่งใช้เขียนแทนจำนวน ตัวเลขจะบวก ลบ คูณ หาร กันไม่ได้ เพราะเราไม่ได้นิยามการบวก ลบ คูณ หาร ให้แก่ตัวเลข หากแต่เรานิยามการบวก ลบ คูณหาร ให้แก่จำนวนเท่านั้น เส้นตรงเป็นนามธรรม การที่เราขีด———————นั้น เป็นเพียงสัญลักษณ์แทนเส้นตรง ซึ่งถ้าเราจะถือที่เราขีดว่าเป็นเส้นตรงแล้ว ย่อมโต้แย้งได้ว่าไม่ตรงจริง อันที่จริงแล้วไม่มีใครสามารถเขียนเส้นตรงได้ ไม่มีสิ่งใดที่ปรากฏแก่สายตาเราว่าตรงจริง (แม้แสงยังเดินเป็นเส้นโค้งตามทฤษฎีสัมพัทธภาพ)

เส้นตรงนั้นเป็นมโนภาพที่มีอยู่แต่ในความนึกคิดของเรา ลักษณะความเป็นนามธรรมของวิชาคณิตศาสตร์นี้เป็นสิ่งที่นักวัดนักประเมินจะต้องใคร่ครวญให้จงหนัก เพื่อที่จะได้ละทิ้งข้อคำถามซึ่งไม่ใช่คำถามในวิชาคณิตศาสตร์ เช่น

(0) เลขใดเป็นตัวประกอบของเลข 35?

ก. 3

ข. 5

ค. 7

ง. 9

ซึ่งเป็นที่ทราบแล้วว่า เลขหรือตัวเลขเป็นเพียงสัญลักษณ์ บวก ลบ คูณ หาร กันไม่ได้ และเราก็ไม่ได้นิยามตัวประกอบของตัวเลขด้วย เรานิยามตัวประกอบของจำนวนซึ่งเป็นนามธรรมเท่านั้น

หรือในข้อคำถามที่ว่า

(00) บ้านหลังหนึ่งราคา 100,000 บาท ครึ่งหนึ่งของบ้านหลังนี้ราคาเท่าไร?

ก. 10,000 บาท

ข. 25,000 บาท

ค. 50,000 บาท

ง. 75,000 บาท

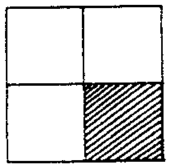
เช่นนี้ก็ไม่ใช่ข้อสอบวิชาคณิตศาสตร์ ด้วยว่าเป็นรูปธรรมจนทำให้เกิดความเขว ผู้เรียนอาจจะถามขึ้นว่า ครึ่งหนึ่งของบ้านนั้นหมายถึงครึ่งใด เพราะบ้านไม่มีลักษณะสมมาตร (Symmetry) ถ้าเป็นครึ่งหน้าบ้านอาจจะแพงกว่า ครึ่งหลังบ้านอาจจะถูก อะไรทำนองนี้ แม้ว่าโจทย์หรือข้อคำถามชนิดนี้จะเป็นที่นิยมกัน เพราะเป็นเรื่องของการประยุกต์ใช้วิชาคณิต-ศาสตร์ในชีวิตประจำวัน แต่ก็ควรให้มีลักษณะเป็นนามธรรมให้มากที่สุด เช่น จากข้อคำถามข้างต้นอาจจะเปลี่ยนเป็น

(00) บ้านหลังหนึ่งราคา 100,000 บาท ครึ่งหนึ่งของราคาบ้านหลังนั้น เป็นเงินกี่บาท หรือมิฉะนั้นก็ถามตรง ๆ ว่า 100,000 หารด้วย 2 ได้ผลลัพธ์เท่าไร?

ลักษณะความเป็นนามธรรมของวิชาคณิตศาสตร์ถูกลืมเลือนไปอย่างมากในวิชาเรขาคณิต อาจจะเป็นเพราะในเรขาคณิตนั้นเรามักนิยมใช้รูปภาพประกอบกันมาก เมื่อใช้นาน ๆ เข้า จึงทำให้ลืมไปว่าเหตุผลเป็นส่วนสำคัญของเรขาคณิต หาใช่รูปภาพไม่ ดังนั้นจึงปรากฏอยู่เสมอ ๆ ว่า ในชั้นเรียนชั้นสอบวิชาเรขาคณิต ถ้าหากนักเรียนคนใดเขียนรูปประกอบผิดไปหน่อย ครูบางคนอาจจะให้คะแนน "ศูนย์" หรือมิฉะนั้นก็หักคะแนนลงมาก ๆ

ซึ่งไม่ใช่สิ่งที่ถูกต้อง และครูบางคนอาจตั้งข้อคำถามประกอบด้วยรูปภาพ (ซึ่งครูทึกทักเอาว่าเหมือนจริง-เป็นความจริง-เป็นสิ่งที่ถูกต้อง) ตัวอย่างเช่น

(000)



จากรูป ส่วนที่แรเงามีพื้นที่เท่าใด?

ก. $\frac{1}{2}$

ข. $\frac{1}{3}$

ค. $\frac{1}{4}$

ง. $\frac{1}{5}$

คำถามข้อนี้ย่อมไม่ใช่คำถามในวิชาคณิตศาสตร์ และไม่มีใครสามารถตอบได้ เพราะเราจะทราบได้อย่างไรว่าพื้นที่ที่แรเงานั้นเท่ากับเท่าไร มุมของรูปสี่เหลี่ยมเป็นมุมฉากกระนั้นหรือ ระยะ 2 ระยะ บนด้าน ๆ หนึ่งเท่ากันหรือ เราย่อมไม่สามารถตอบได้ การทึกทักเอาว่าผู้เรียนหรือผู้สอบควรจะรู้ว่าเป็นเท่าใดนั้นเป็นความเข้าใจผิดอย่างยิ่ง นักวัดนักประเมินผลวิชาคณิตศาสตร์ไม่ควรตั้งคำถามเช่นนี้

อาจกล่าวได้ว่ามนุษย์เป็นสัตว์สัญลักษณ์ (Animale symbolicum) เช่น Cassirer นักปรัชญาผู้หนึ่งกล่าวว่า ดังนั้น มนุษย์จึงใช้สัญลักษณ์ เช่น รูปภาพ ตัวอักษร ฯลฯ สำหรับสื่อสารกัน แต่แม้เช่นนั้นเราก็ไม่ควรลืมว่านามธรรมที่เป็นมโนภาพทางคณิตศาสตร์ก็อย่างหนึ่ง สัญลักษณ์ก็อีกอย่างหนึ่ง สัญลักษณ์นั้นเป็นสิ่งซึ่งเราจะเลือกใช้อย่างไรก็ได้เหมือนเชคสเปียร์กล่าวว่า *"กุหลาบนั้นจะเรียกเป็นอย่างอื่นก็ยังหอม"* ส่วนนามธรรมซึ่งเป็นตัวคณิตศาสตร์ที่แท้จริงนั้นเราเลือกไม่ได้ นักวัดนักประเมินไม่ควรสับสนกันระหว่างคำสองคำนี้

3. ความถูกต้องเที่ยงตรง (Accuracy) และกระชับรัดกุม (Rigor)

เนื่องจากคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ว่าด้วยนามธรรมนั่นเอง จึงทำให้คณิตศาสตร์มีความถูกต้องเที่ยงตรงอย่างยิ่ง ดังจะเห็นได้ว่าถ้าเราจะแบ่งน้ำในถ้วยใบหนึ่งออกเป็น 2 ส่วนเท่า ๆ กัน ในเชิงฟิสิกส์เราย่อมไม่สามารถทำได้ เพราะเครื่องมือของเราไม่มีความละเอียดพอ ไม่ว่าจะเป็นตาชั่งหรือถ้วยตวง ทั้งเรายังไม่สามารถควบคุมอุณหภูมิในขณะที่แบ่งน้ำ การ

เคลื่อนไหวของอากาศ ฯลฯ ได้อย่างละเอียดจริง ๆ อีกด้วย แต่ถ้าเป็นการแบ่งในเชิงคณิต-ศาสตร์ เราแบ่งน้ำนั้นโดยกระบวนการคิด เราย่อมแบ่งได้เท่ากันจริง ๆ เช่นน้ำมีน้ำหนัก 1 ปอนด์ แบ่งน้ำหนักของน้ำปริมาณเท่านี้เป็น 2 ส่วน ย่อมได้ส่วนละ $\frac{1}{2}$ ปอนด์ เป็นต้น ความถูกต้องเที่ยงตรงนี้ยังรวมไปถึงความถูกต้องในการให้เหตุผล ความถูกต้องในการใช้ภาษาทุก ๆ อย่าง เช่น ถ้ามีคำถามว่า

(0) วงกลมวงหนึ่งมีรัศมียาว 7 นิ้ว จะมีเส้นรอบวงยาวกี่นิ้ว?

ก. 22

ข. 33

ค. 44

ง. 55

คำถามเช่นนี้ย่อมไม่มีคำตอบ ทั้งนี้เพราะว่า π เป็นจำนวนอตักยะ ซึ่งมีค่า**เท่ากับ** 3.14159... (จุด 3 จุด อ่านว่าไปเรื่อย ๆ ไม่มีที่สิ้นสุด) และไม่ได้มีค่าเท่ากับเศษส่วน หรือจำนวนตักยะจำนวนใด ไม่ได้เท่ากับ $\frac{22}{7}$ ดังนั้น จึงไม่เท่ากับจำนวนในตัวเลือกใดข้างต้น ถ้าจะให้ตัวเลือกข้างต้นนั้นคงที่ ก็ควรจะเปลี่ยนคำถามเสียใหม่ เช่น เปลี่ยนเป็น

(0) วงกลมวงหนึ่งมีรัศมียาว 7 นิ้ว จะมีความยาวของเส้นรอบวงเมื่อคิดเป็นนิ้วใกล้เคียงกับข้อใดมากที่สุด?

ในทางตรงข้าม ถ้ามีข้อคำถามว่า

(00) $0.\dot{9}$ มีค่า.......เท่าไร?

ก. น้อยกว่า 0.9

ข. 0.9

ค. 1.0

ง. มากกว่า 1.0

ในช่องว่างที่เว้นไว้ในตัวคำถามนั้นจะต้องเป็น "เท่ากับ" มิใช่ "ประมาณ" เพราะ $0.\dot{9}$ มีค่า**เท่ากับ** 1.0 จริง ๆ ซึ่งพิสูจน์ได้ดังนี้

ให้	$x = 0.999\ldots$	... ①
เอา 10 คูณทั้ง 2 ข้าง	$10x = 9.999\ldots$	... ②
② — ①	$9x = 9$	
เอา 9 หารทั้ง 2 ข้าง	$x = 1$	

ซ.ต.พ.

นอกจากความถูกต้องเที่ยงตรงแล้ว คณิตศาสตร์ยังเป็นวิชาที่มีความกระชับรัดกุมในด้านการใช้ภาษา และกระชับรัดกุมในการเลือกอนิยามและกติกามาก นักคณิตศาสตร์ไม่นิยมใช้คำฟุ่มเฟือยเยิ่นเย้อ หากแต่นิยมใช้คำที่ง่าย สั้น ได้ใจความชัดเจน และถูกต้องเที่ยงตรงมากที่สุด ดังจะเห็นได้ในการนิยามคำต่าง ๆ การกล่าวถึงกติกา และทฤษฎีบท โดยถือหลักง่าย ๆ ว่าใช้คำให้น้อยที่สุดให้ได้ใจความชัดเจนถูกต้องรัดกุมมากที่สุด ในการเลือกอนิยามและกติกาก็เช่นกัน คณิตศาสตร์ระบบหนึ่ง ๆ จะมีอนิยามและกติกาน้อยที่สุดเท่าที่จะเป็นได้ อนิยามและกติกาเหล่านี้จะต้องไม่ซ้ำซ้อนกัน และจะต้องสมบูรณ์ กล่าวคือ ไม่สามารถที่จะสร้างอนิยามและกติกาขึ้นมาเพิ่มได้อีกในระบบนั้น การพิสูจน์ทฤษฎีบทต่าง ๆ ก็จะต้องพิสูจน์ให้สั้นที่สุด แต่ชัดเจนที่สุด

ความกระชับรัดกุมนี้บางครั้งยังรวมไปถึงการใช้สัญลักษณ์ซึ่งไม่ใช่เนื้อแท้ของคณิตศาสตร์อีกด้วย คือสัญลักษณ์จะต้องง่าย ไม่ก่อให้เกิดปัญหา อันที่จริงแล้วไม่ว่าจะเป็นในเนื้อหาสาระใดที่นักคณิตศาสตร์เข้าไปเกี่ยวข้อง ความกระชับรัดกุมนี้ก็จะติดตามไปอยู่เสมอ ดังคำกล่าวของ คาร์ล ฟรีคริช เก๊าส์ นักคณิตศาสตร์ที่ว่า Mathematicians always have strange passion for rigor

4. ความมีเหตุผล

คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ว่าด้วยเหตุผล ทุกขั้นตอนจะต้องมีเหตุผล และเหตุผลมีความสำคัญยิ่งกว่าการใช้สัญลักษณ์ เช่น การเขียนรูป หรือการกระทำอื่นใดทั้งสิ้น คณิตศาสตร์จะตอบคำถามว่า “ทำไม” มากกว่า “อย่างไร” ดังนั้น แทนที่จะตั้งคำถามว่า

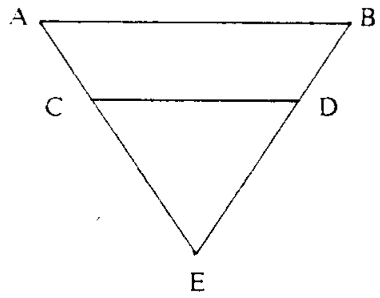
(0) $2 + 2 = ?$

เราจึงนิยมตั้งคำถามในวิชาคณิตศาสตร์ว่า

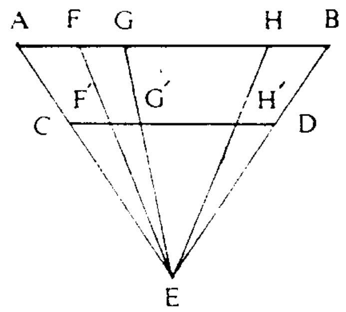
(00) ทำไม $2 + 2 = 4$?

การคำนวณนั้นไม่ใช่เนื้อแท้ของคณิตศาสตร์ เนื้อแท้ของคณิตศาสตร์คือการพิสูจน์หรือการให้เหตุผลว่าทำไมจึงเป็นอย่างนั้น ๆ บ่อยครั้งที่เราพบว่าสามัญสำนึก (Common-sense) ของเราเป็นสิ่งที่ใช้ไม่ได้ ตัวอย่างที่พบเห็นเป็นอันมาก ได้แก่ ตัวอย่างในวิชาทฤษฎีเซ็ต เช่น *“เส้นตรงซึ่งสั้นกับเส้นตรงซึ่งยาว มีจำนวนจุดเท่ากัน”* ซึ่งสามัญสำนึกของเราบอกว่าไม่น่าจะเป็นอย่างนั้น แต่จากการให้เหตุผลกลับปรากฏว่าที่กล่าวนั้นเป็นความจริง ซึ่งอาจแสดงได้ดังนี้

ให้ AB และ CD เป็นเส้นตรง 2 เส้น ซึ่ง AB ยาวกว่า CD ต่อจุดปลายข้างเดียวกันของเส้นตรงทั้งสองไปพบกันที่จุด E (ดังรูป)



เราจะเห็นได้ว่าถ้ากำหนดจุดบน AB ขึ้นมา 1 จุด CD ก็จะมีจุดซึ่งสมนัยกัน 1 จุด เสมอไป สมมติว่าเรามีจุด F, G, H บน AB เราก็จะมีจุด F′, G′, H′ บน CD โดยจุด F′, G′, H′ จะอยู่บนเส้นตรง FE, GE, HE ตามลำดับ (ดังรูป)



ดังนั้นไม่ว่า AB จะมีกี่จุด CD ก็จะมีเท่านั้นจุด

หรือถ้าใครจะตั้งคำถามขึ้นมาว่า "มีกระดาษแผ่นหนึ่งหนา 1 มิลลิเมตร ฉีกครึ่งแล้วซ้อนกันจะหนา 2 มิลลิเมตร ฉีกครึ่งแล้วซ้อนกันอีกคราวนี้จะหนา 4 มิลลิเมตร ให้ฉีกครึ่งและซ้อนกันเช่นนี้ 35 ครั้ง จะสูงประมาณเท่าไร? ต่อคำถามนี้สามัญสำนึกก็คงจะบอกเราว่าคงไม่เกิน 100 เมตร และถ้าให้กระดาษแก่เราจริง ๆ เราก็คงแสดงให้ดูได้ แต่นักคณิตศาสตร์จะไม่ใช้สามัญสำนึก หากจะนั่งลงคำนวณออกมา ดังนี้

ฉีกครั้งที่	1	หนา	2	มิลลิเมตร
”	2	”	4	”
”	3	”	8	”
”	4	”	16	”

”	5	”	32	”
”	6	”	64	”
”	7	”	128	”
”	8	”	256	”
”	9	”	512	”
”	10	”	1,024	”
”	11	”	2,048	”
”	12	”	4,096	”
”	13	”	8,192	”
”	14	”	16,384	”
”	15	”	31,768	”
”	16	”	65,536	”
”	17	”	131,072	”
”	18	”	262,144	”
”	19	”	524,288	”
”	20	”	1,048,576	”
”	21	”	2,097,152	”
”	22	”	4,194,304	”
”	23	”	8,388,608	”
”	24	”	16,737,216	”
”	25	”	33,474,432	”
”	26	”	66,948,864	”
”	27	”	133,897,728	”
”	28	”	267,795,456	”
”	29	”	535,590,912	”
”	30	”	1,071,181,824	”
”	31	”	2,142,368,648	”
”	32	”	4,284,727,296	”
”	33	”	8,569,454,592	”
”	34	”	17,138,909,184	”
”	35	”	34,277,818,368	”

หรือเท่ากับ 34,277 กิโลเมตรเศษ หรือถ้าใครจะแก้สมการ logarithm $\log_2 x = 35$ ดูก็จะพบว่า x ต้องมีค่ามากมายถึง 34,277,818,368 จริง ๆ

ในวิชาคณิตศาสตร์เราไม่อนุญาตให้ใช้สามัญสำนึกเป็นเครื่องตัดสินสิ่งใดเลย เราอนุญาตให้ใช้นิยาม กติกา และทฤษฎีบทซึ่งได้พิสูจน์แล้วเท่านั้นมาสนับสนุนเป็นเหตุเป็นผลเพื่อแสดงว่าอะไรสักอย่างหนึ่งเป็นจริง ยิ่งในระดับที่เป็นนามธรรมลึกซึ้งมากขึ้นเพียงใดเหตุผลก็ยิ่งมีบทบาทสำคัญมากขึ้นเพียงนั้น ตัวอย่างเช่นในวิชาเรขาคณิตแบบนอน-ยูคลิด (Non-Euclidean geometry) หรือในวิชาโทโปโลยี (Topology) ซึ่งกล่าวได้ว่าเต็มไปด้วยการใช้เหตุผลล้วน ๆ ด้วยไม่สามารถเขียนรูปเป็นสัญลักษณ์แสดงแทนได้นักวัดนักประเมินที่ต้องการเขียนข้อคำถามวิชาคณิตศาสตร์ได้ดีจะต้องระลึกไว้ในใจอยู่เสมอว่าทำไม ๆ ๆ แทนที่จะตั้งคำถามแต่เพียงว่าเท่ากับเท่าไร หรืออย่างไร

5. ความเป็นกรณีทั่วไป (Generalization)

คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มุ่งจะหากรณีทั่วไปของสิ่งต่าง ๆ คือแทนที่เราจะหากรณีเฉพาะเช่น $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$

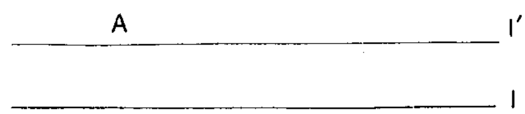
เราถามเลยว่า $1 + 2 + 3 + \ldots + N = ?$ ซึ่งเป็นกรณีทั่วไปถ้าเราตอบได้ว่า $1 + 2 + 3 + \ldots + N = ?$ เราก็ไม่จำเป็นที่จะต้องหากรณีเฉพาะอื่น ๆ อีก

ทฤษฎีบทต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์ทุกสาขา เป็นตัวอย่างอันดีของความเป็นกรณีทั่วไป เมื่อยูคลิดกล่าวว่า เส้นตรงเส้นหนึ่งพบเส้นตรงอีกเส้นหนึ่ง มุมประชิดรวมกันเท่ากับ 2 มุมฉาก ยูคลิด หมายถึงเส้นตรง 2 เส้นใด ๆ ในระนาบยูคลิด (Euclidean plane) ความเป็นกรณีทั่วไปของคณิตศาสตร์นี้มีความเด่นชัดมาก จนถึงกับกล่าวกันว่า คณิตศาสตร์เป็นเรื่องของกระสวน (Pattern) ซึ่งเป็นประดุจโครงใหญ่ ๆ กว้าง ๆ ซึ่งจะทำให้ส่วนเฉพาะปลีกย่อยต่าง ๆ ไร้ความสำคัญไปโดยสิ้นเชิง อาจกล่าวได้ว่าความเป็นกรณีทั่วไปนี้จะก้าวไปไม่มีขอบเขตสิ้นสุด เราจะเห็นได้ชัดในพัฒนาการของเรขาคณิต เดิมเรามีเรขาคณิตของยูคลิด ต่อมาในต้นศตวรรษที่ 19 เราก็พบเรขาคณิตนอนยูคลิด (Non-Euclidean geometry) แล้วในปลายศตวรรษที่ 19 นั่นเอง เราก็มีวิชาโทโปโลยี ซึ่งรวมเรขาคณิตของยูคลิด และเรขาคณิตนอนยูคลิดเข้าด้วยกัน เพื่อที่จะให้เข้าใจได้ชัดเจน จะขอพูดลักษณะบางประการของเรขาคณิตทั้ง 3 รูปแบบ ดังนี้

ในเรขาคณิตของยูคลิด เรามีกติกาซึ่งสำคัญอันหนึ่งว่า "กำหนดเส้นตรงเส้นหนึ่งและจุด ๆ หนึ่งนอกเส้นตรงเส้นนั้น เราจะสามารถลากเส้นตรงให้ผ่านจุดที่กำหนดให้และให้ขนานกับเส้นตรงที่กำหนดให้ได้เพียงเส้นเดียวเท่านั้น"

แน่นอนว่า คำว่าเส้นตรงนั้นย่อมหมายความตามที่ยูคลิดนิยามว่า หมายถึงเส้นซึ่งมีระยะห่างระหว่าง 2 จุดใด ๆ บนเส้นเป็นระยะที่สั้นที่สุด และคำว่าขนานนั้น หมายถึง ไม่พบกัน

โดยสามัญสำนึกและความคุ้นเคย เราย่อมจะยอมรับกติกาข้อนี้ของยูคลิดได้อย่างเต็มใจ เพราะใครก็ตามที่เคยเรียนเรขาคณิตของยูคลิด (หรือไม่เคยได้เรียน) ก็ต้องนึกภาพออกว่าน่าจะมีเส้นเดียวจริง ๆ ดังรูป



l เป็นเส้นที่กำหนดให้ A เป็นจุดที่กำหนดให้ไม่อยู่บน l

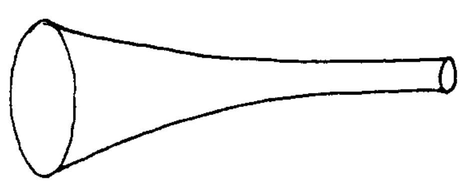
l′ มีเพียงเส้นเดียวที่ไม่พบกับ l

กติกาข้อนี้นำไปสู่ผล คือทฤษฎีหลายสิบทฤษฎี เป็นต้นว่า มุมภายในของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเข้าย่อมเท่ากับสองมุมฉาก เป็นต้น

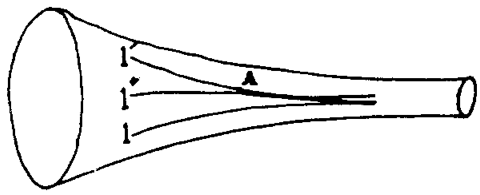
ความมั่นใจในกติกาข้อนี้มีมาเกือบสองพันปี โดยที่ไม่มีผู้ใดนึกเลยว่าการที่ยูคลิดพูดถึงกติกาข้อนี้นั้น ยูคลิดนึกถึงระนาบของยูคลิดซึ่งแบนราบเหมือนแผ่นกระดานดำ ระนาบของยูคลิดนี้เป็นเพียงระนาบชนิดหนึ่งในหลาย ๆ ระนาบเท่านั้น ผลจะเป็นอย่างไรถ้าเรารักษานิยามและกติกาข้ออื่น ๆ ไว้ทั้งหมด แต่เปลี่ยนกติกาข้อนี้เพียงข้อเดียว เก๊าส์ (Gauss) โบลไย (Bolyi) โลบาเชฟสกี้ (Lobacheski) รีมมาน (Riemann) ได้ทดลองดูก็พบว่าทฤษฎีต่าง ๆ เปลี่ยนไปอย่างสิ้นเชิงจากของยูคลิด ตัวอย่างเช่น ผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมก็ไม่เท่ากับสองมุมฉากอีกต่อไป และนี่เองเป็นจุดเริ่มต้นของเรขาคณิตนอนยูคลิด

เรขาคณิตนอนยูคลิด แบ่งได้เป็น 2 สาขาใหญ่ ๆ คือเรขาคณิตไฮเพอโบลิค (Hyperbolic) และเรขาคณิตอีลิปติค (Eliptic) ในเรขาคณิตไฮเพอโบลิคนั้นเขาได้เปลี่ยนกติกาของยูคลิดเป็น "กำหนดเส้นตรงเส้นหนึ่งและจุด ๆ หนึ่งนอกเส้นตรงเส้นนั้น เราสามารถลากเส้นตรงให้ผ่านจุดที่กำหนดให้และให้ขนานกับเส้นที่กำหนดให้ได้หลายเส้น"

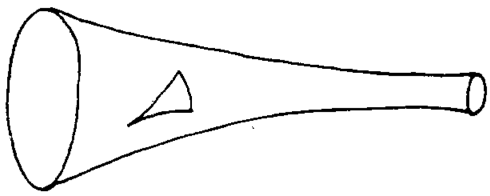
เราลองนึกถึงระนาบคล้าย ๆ กับลำโพงขยายเสียงซึ่งเรียกว่า "ทรงกลมเทียม" (Pseudo Sphere) ดังรูป



ถ้าเราลากเส้นตรง (เส้นซึ่งมีระยะระหว่างจุด 2 จุดบนเส้นเป็นระยะสั้นที่สุด) เส้นตรงนี้ย่อมจะไม่เหมือนกับที่เราเขียนบนกระดานดำ แต่จะโค้งไปตามผิวโค้งของทรงกลมเทียมและเมื่อเรากำหนดจุดนอกเส้นตรงนั้น เราจะพบว่าเราสามารถลากเส้นตรงให้ผ่านจุดนั้น โดยที่ไม่ให้พบกับเส้นที่กำหนดไว้แต่เดิมได้หลายเส้น ไม่ว่าจะต่อให้ยาวออกไปเท่าไหร่ก็ตาม (ดังรูป)

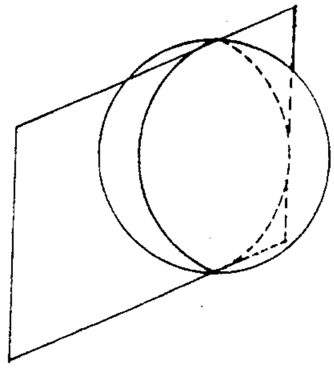


และแน่นอนว่ารูปสามเหลี่ยนบนระนาบทรงกลมเทียมนี้ ย่อมมีผลรวมของมุมภายในน้อยกว่า 2 มุมฉาก (ดังรูป)

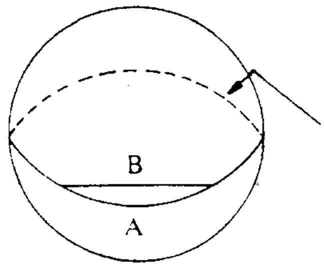


ส่วนในเรขาคณิตอีลิปติค เราได้เปลี่ยนกติกาของยูคลิดเป็น “กำหนดเส้นตรงเส้นหนึ่ง และจุด ๆ หนึ่ง นอกเส้นตรงเส้นนั้น เราไม่สามารถลากเส้นตรงให้ผ่านจุดนั้นและให้ขนานกับเส้นตรงที่กำหนดได้เลย”

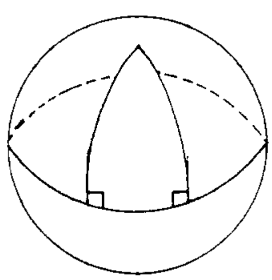
เรขาคณิตอีลิปติคนี้อาจจะมองเห็นได้ในระนาบของทรงกลม เช่น โลก เรานิยามเส้นตรงในที่นี้ว่าเป็นวงกลมใหญ่ คือ วงกลมที่เกิดจากจุดตัดของระนาบยูคลิดกับพื้นผิวทรงกลม โดยผ่านจุดศูนย์กลางของทรงกลม (ดังรูป)



เราจะเห็นว่านิยามนี้ก็สอดคล้องกับนิยามของยูคลิดนั่นเอง ถ้าเราจะลากเส้นให้มีระยะระหว่างจุด 2 จุด บนผิวทรงกลมให้สั้นที่สุด เส้นนั้นก็ต้องเป็นวงกลมใหญ่ (Great circle) นี้ นักบินทุกคนย่อมเข้าใจเรื่องนี้ดีว่าถ้าจะบินให้เร็วที่สุด ก็ต้องบินบนวงกลมใหญ่ดังรูปข้างล่างเราจะเห็นได้ว่าสำหรับทรงกลมอย่างโลก ระยะทาง A ต้องสั้นกว่า B



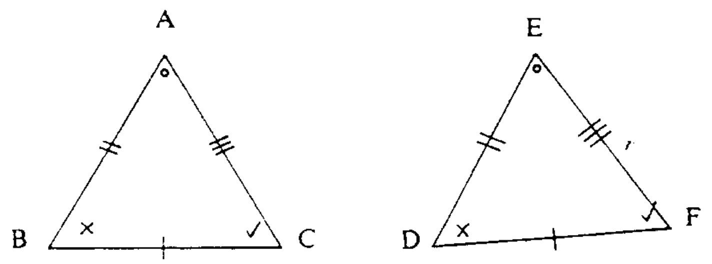
เส้นแวง (Longitude) ทุกเส้นเป็นวงกลมใหญ่ เส้นอิเควเตอร์เป็นวงกลมใหญ่ เราคงพอนึกภาพออกว่าวงกลมใหญ่ทุกวงย่อมตัดกัน นั่นคือในเรขาคณิตอีลิปติคไม่มีเส้นขนาน และนอกจากนี้ มุมภายในของรูปสามเหลี่ยมบนระนาบของทรงกลมเช่นว่านี้ย่อมมีผลบวกมากกว่า 2 มุมฉาก (ดังรูป)



ในเรขาคณิตไม่ว่าจะเป็นเรขาคณิตของยูคลิด หรือเรขาคณิตนอนยูคลิด เมื่อเรากล่าวว่า 2 สิ่งใดเท่ากัน เราย่อมหมายความ 2 สิ่งนั้นเหมือนกันทุกประการ ยกเว้นแต่ตำแหน่ง

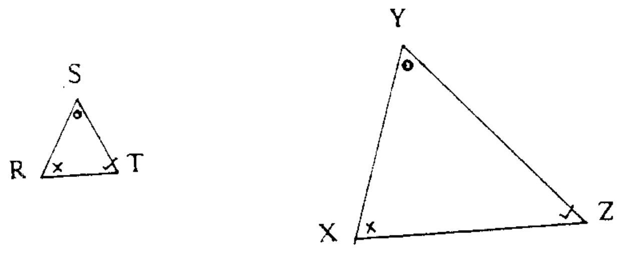
ที่ตั้งอยู่เท่านั้น นั่นคือเรขาคณิตทั้ง 2 แบบนี้ถือว่าอะไร ๆ ก็เปลี่ยนแปลงไม่ได้ ยกเว้นแต่ตำแหน่ง ตำแหน่งเป็นตัวเปลี่ยนแปลง (Variant) นอกนั้นเป็นตัวไม่เปลี่ยนแปลง (Invariant)

แต่ในโลกแห่งความเป็นจริง ถ้าเราพูดว่า 2 สิ่งใดเหมือนกัน บางทีเราอาจจะมีตัวไม่เปลี่ยนแปลงเป็นอย่างอื่นก็เป็นได้ เช่น เราพูดว่า "นาย ก.เหมือนกับ นางสาว ข." เราย่อมไม่ได้หมายถึงเพศ หากแต่อาจจะหมายถึงนิสัยใจคอ, ระดับการศึกษา หรือ ฯลฯ อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้นก็เป็นได้ ข้อสำคัญคือเราอาจกล่าวเช่นนั้นได้ มิฉะนั้นแล้วยูคลิดกล่าวได้อย่างไรว่ารูปสามเหลี่ย, ABC เท่ากับรูปสามเหลี่ยม DEF ในเมื่อ "ตำแหน่งของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองไม่ได้ "เท่ากัน" สักนิดเดียว

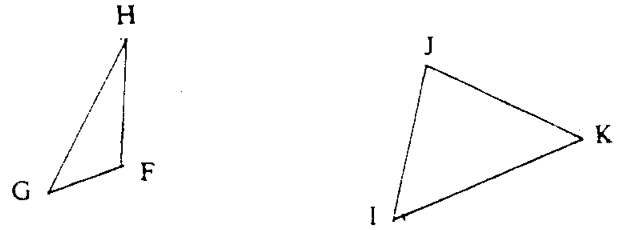


โทโปโลยี เป็นเรขาคณิตที่ว่าด้วยเรื่องเกณฑ์ของความเท่ากันดังกล่าว นักคณิตศาสตร์พยายามลดจำนวนตัวไม่เปลี่ยนแปลงลง และก็ได้พบว่าผลที่ได้ต่างไปจากเรขาคณิตของยูคลิดและเรขาคณิตนอนยูคลิด

ตัวอย่างเช่น ถ้าหากว่าตัดความยาวด้านออกจากความเป็นตัวไม่เปลี่ยนแปลง ดังนั้นรูปสามเหลี่ยม RST กับ XYZ ข้างล่างนี้ ต้อง "เท่ากัน"

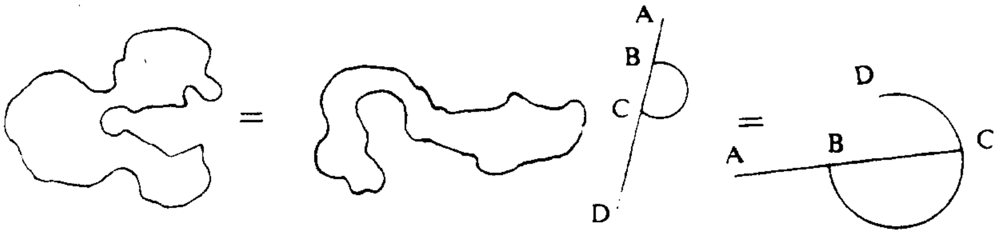


ตัดขนาดของมุมออกจากความเป็นตัวไม่เปลี่ยนแปลงอีก จะได้ว่า △ GHF, IJK ข้างล่างต้องเท่ากัน



และถ้าตัดจำนวนจุดมุมออกจากความเป็นตัวไม่เปลี่ยนแปลงอีก รูป LMN กับ OPQR ข้างล่างต้องเท่ากัน

ดังนั้น เราจึงอาจจะพบในโทโปโลยีว่า



และอื่น ๆ

จากทั้งหมดที่กล่าวมาในตัวอย่างเรขาคณิตแบบต่าง ๆ นี้ เราจะเห็นได้ว่า ความเป็นกรณีทั่วไปจะซึมแทรกอยู่ในทุกขั้นตอน ยูคลิดนึกถึงแต่คุณสมบัติของรูปต่าง ๆ บนระนาบของยูคลิดเท่านั้น นักคณิตศาสตร์รุ่นหลังมาทำให้เป็นกรณีทั่วไป โดยนึกถึงคุณสมบัติของรูปเหล่านั้นบนระนาบอื่น ๆ ด้วย จนกระทั่งเกิดมีวิชาโทโปโลยี ซึ่งทำเรขาคณิตให้เป็นกรณีทั่วไปยิ่งขึ้น โดยการลดข้อจำกัดต่าง ๆ ที่ว่าด้วยตัวไม่เปลี่ยนแปลง ผลก็คือทำให้เรขาคณิตแบบใหม่นี้กว้างที่สุด รูปอย่างไรก็ได้ ตัวไม่เปลี่ยนแปลงอะไรก็ได้ แล้วแต่จะตกลงกัน จนกระทั่ง

มีคำกล่าวตลก ๆ ของนักคณิตศาสตร์ว่า "นักโทโปลีย่อมจะมองเห็นขนมโดนัทกับถ้วยกาแฟเหมือนกัน (เพราะมี 1 เส้น 1 วง เหมือนกัน) เมื่อถ้าไปในร้านกาแฟและสั่งกาแฟ คนขายกลับเอาขนมโดนัทมาให้แทน นักโทโปโลยีนั้นก็พอใจ" นี่เป็นเพียงคำกล่าวตลกแต่ส่วนที่ว่าสำหรับโทโปโลยีแล้ว ถ้วยกาแฟกับขนมโดนัทย่อมเหมือนกันจริง ๆ ในปลายศตวรรษที่ 19 เฟลิกส์ ไคลน์ (Felix Klirn) ยังได้ทำเรขาคณิตให้เป็นกรณีทั่วไปยิ่งขึ้นอีก โดยได้พิสูจน์ว่าเรขาคณิตทุกระบบรวมทั้งโทโปโลยีด้วย ต่างก็เป็นกรุ๊ปทั้งสิ้น

นักวัดประเมินผลวิชาคณิตศาสตร์จะต้องเข้าใจธรรมชาติของคณิตศาสตร์ข้อที่ว่าด้วยความเป็นกรณีทั่วไปนี้อย่างชัดเจน ข้อสอบคณิตศาสตร์ที่ดีย่อมจะถามถึงกรณีทั่วไปมากกว่าถามถึงกรณีเฉพาะ เช่น แทนที่จะถามว่า

(0) มีเงิน 26 บาท ซื้อของไป 4 บาท ที่เหลือให้น้องชาย 8 บาท และน้องสาว 2 คน คนละเท่า ๆ กัน น้องสาวจะได้รับคนละเท่าไร?

ก. 4 บาท

ข. 5 บาท

ค. 6 บาท

ง. 7 บาท

ก็ถามเลยว่า

(00) มีเงิน a บาท ซื้อของไป b บาท ที่เหลือให้น้องชาย c บาท และน้องสาว 2 คน คนละเท่า ๆ กัน น้องสาวจะได้รับคนละกี่บาท?

ก. $\frac{a-(b-c)}{2}$

ข. $\frac{(a-b)-c}{2}$

ค. $(a-b)/2-C$

ง. $a-(b-c)/2$

ธรรมชาติของคณิตศาสตร์ทั้ง 5 ประการ ที่กล่าวมานี้ คงพอจะทำให้เรารู้จักคณิตศาสตร์ได้ดีขึ้นบ้าง เมื่อถึงตอนนี้อาจจะมีคำถามขึ้นมาว่า ถ้าเช่นนั้นคณิตศาสตร์เมื่อกล่าวโดยสรุปแล้วคือวิชาอะไร ก่อนที่จะพิจารณาคำถามนี้ ขอให้เรามาทำความรู้จักคำอีก 2 คำ ซึ่งมีบทบาทสำคัญอย่างยิ่งในคณิตศาสตร์แผนใหม่ ซึ่งใช้กันอยู่ในปัจจุบัน คำสองคำนั้นคือคำว่า ระบบคณิตศาสตร์ กับคำว่า เซ็ต

1. ระบบคณิตศาสตร์

คำว่าระบบ ไม่ว่าจะปรากฏในสาขาวิชาการใด ย่อมมีความหมายเหมือนกัน

กล่าวคือ (ถ้าหากจะใช้การอธิบายทางคณิตศาสตร์) ระบบจะต้องประกอบไปด้วยเซ็ตซึ่งไม่ใช่เซ็ตว่าง (Non-empty set) และกติกาเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างสมาชิกในเซ็ตนั้น

เราลองพิจารณาระบบบางระบบ เช่น

กรุ๊ป เป็นระบบทางคณิตศาสตร์ ซึ่งประกอบขึ้นด้วยเซ็ต ๆ หนึ่ง ซึ่งไม่ใช่เซ็ตว่างอาจจะเป็นเซ็ตของจำนวน หรือเซ็ตของโอเปอเรชั่น เช่น บวก ลบ คูณ หาร อะไรก็ได้ และกติกาอีก 4 ข้อ ว่าด้วยความสัมพันธ์ของสมาชิกในเซ็ต

สมมติว่า G เป็นเซ็ต ถ้า a เป็นสมาชิกของ G เราเขียน $a \in G$ และ o เป็นความสัมพันธ์ ซึ่งมีกติกาอย่างนี้

1) ถ้า $a, b \in G$ จะได้ว่า $a o b \in G$
2) ถ้า $a, b, c \in G$ จะได้ว่า $a o (b o c) = (a o b) o c$
3) จะมี $e \in G$ ซึ่งสำหรับ a ทุกตัวใน G, $a o e = a$
4) สำหรับ a แต่ละตัวใน G จะมี $a^{-1} \in G$ ซึ่ง $a o a^{-1} = e$

เราก็ถือว่า $<G, o>$ เป็นระบบซึ่งเรียกว่ากรุ๊ป (Group) ตัวอย่างของระบบ ซึ่งเป็นกรุ๊ป เช่น $<\{E, O\}>, +>$ โดยที่ E หมายถึงจำนวนคู่, O หมายถึงจำนวนคี่ + หมายถึงการบวกอย่างที่เรารู้จักกัน เรารู้ว่าเป็นกรุ๊ปก็เพราะเซ็ตนี้สอดคล้องกับกติกา 4 ข้อข้างต้น

ระบบการปกครองก็ประกอบไปด้วยเซ็ตของคน (ประชากรในสังคม) และกติกาว่าด้วยความสัมพันธ์ของคนในเซ็ต (คือกฎหมาย ขนบประเพณี)

ระบบสุริยจักรวาล ประกอบไปด้วยเซ็ตของดวงอาทิตย์และดาวเคราะห์ของดวงอาทิตย์ ตลอดถึงเทหวัตถุต่าง ๆ ในแวดวงของดวงอาทิตย์ และกติกาคือความสัมพันธ์ระหว่างดวงอาทิตย์และดาวเคราะห์ ดาวเคราะห์กับดาวเคราะห์ ฯลฯ

ระบบการเคลื่อนไหวของร่างกาย ประกอบไปด้วยเซ็ตของอวัยวะต่าง ๆ เช่น แขน ขา ฯลฯ และกติกา คือความสัมพันธ์ระหว่างอวัยวะเหล่านั้น

ทั้งหมดนี้ย่อมเป็นตัวอย่างระบบ กล่าวเฉพาะในส่วนของคณิตศาสตร์เอง ย่อมมีหลายระบบด้วยกัน เราอาจจะเคยได้ยินชื่อมาบ้างแล้ว เช่น กรุ๊ป (Group) ริง (Ring) ฟิลด์ (Field) ระบบสมการเชิงเส้น (Linear equation system) พีชคณิตแบบของบูล (Boolean algebra) ระบบเรขาคณิตยูคลิด ระบบเรขาคณิตนอนยูคลิด ระบบจำนวนจริง (Real number system) ฯลฯ

เมื่อคณิตศาสตร์ประกอบไปด้วยระบบต่าง ๆ ซึ่งประกอบไปด้วยเซ็ตและกติกาดังนี้ หลายคนจึงเปรียบเทียบคณิตศาสตร์ว่าเป็นคล้าย ๆ กับเกมอันหนึ่งซึ่งมีเซ็ตของสิ่งที่จะเล่นกับกติกาในการเล่น หลายคนที่ว่านี้รวมทั้ง เดวิด ฮิลเบิร์ต (David Hilbert) นักคณิตศาสตร์ที่ยิ่งใหญ่ที่สุดในศตวรรษที่ 20 นี้ด้วย ตัวอย่างการเปรียบระหว่างระบบคณิตศาสตร์

กับการเล่นฟุตบอล เช่น การเล่นฟุตบอลประกอบไปด้วยเซ็ตของผู้เล่นทั้งสองฝ่าย สนาม ลูกบอล ประตู ผู้ตัดสิน ผู้กำกับเส้น และมีกติกา เช่น ผู้เล่นจะเล่นลูกด้วยมือไม่ได้ ยกเว้นผู้รักษาประตูจะวิ่งล้ำหน้าไม่ได้, ฯลฯ ฝีเท้าในการเล่นนั้นอาจจะเปรียบได้กับทฤษฎีบท ซึ่งจะเล่นให้มีลวดลายสวยงามอย่างไรก็ได้ เพียงแต่ไม่ให้ขัดกับกติกาเท่านั้น ทฤษฎีบทนั้นอยู่นอกระบบคณิตศาสตร์

ความเข้าใจเกี่ยวกับระบบคณิตศาสตร์เป็นเรื่องที่สำคัญ เพราะจะนำไปสู่ความเข้าใจ คณิตศาสตร์โดยส่วนรวม เมื่อจะวัด จะประเมินผลวิชาคณิตศาสตร์ เราจะต้องคำนึงว่าในขณะนี้เรากำลังพูดถึงระบบใด นักวัดผลบางคนเขียนข้อสอบคณิตศาสตร์ ดังนี้

(0) A = {1, 3, 5...}

A′ = ?

ก. {7, 9, 11...}

ข. {2, 4, 6...}

ค. {-1, -3, -5...}

ง. {1, 3, 5...}

ซึ่งไม่ใช่ข้อสอบคณิตศาสตร์ที่แท้จริงเลย เพราะนอกจากผู้เขียนข้อสอบจะตกลงไว้อย่างชัดเจนว่ากำลังพูดถึงระบบจำนวนระบบใดอยู่แล้ว ย่อมไม่มีใครสามารถตอบได้ และถ้าใครตอบข้อ ข. โดยทึกทักเอาว่าเราน่าจะกำลังพูดถึงระบบจำนวนเต็มบวกอยู่ ก็ต้องถือว่าผิด โดยทั่วไปคำถามชนิดนี้มักจะต้องกำหนดเซ็ตเอกภพ (Universal set = U) มาให้

นอกจากนี้ ความเข้าใจเกี่ยวกับคำว่าระบบคณิตศาสตร์ยังช่วยให้ทั้งผู้เรียน ผู้สอน ผู้สอบ ไม่ด่วนที่จะตัดสินใจเอาว่าอย่างนั้นผิด อย่างนี้ถูก เช่น ถ้ามีใครมาพูดว่ามุมภายในของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 3 มุมฉาก ต้องถามเสียก่อนว่าเรากำลังพูดถึงเรขาคณิตระบบใด เราจะถือว่าเขาพูดผิดในทันทีย่อมไม่ได้

2. เซ็ต

ทฤษฎีเซ็ตเป็นสาขาของคณิตศาสตร์ที่เพิ่งเริ่มมีขึ้นเมื่อแคนโต (Cantor) ผู้เป็นต้นคิดตีพิมพ์ความคิดของเขาออกมาในปี 1874 วิชานี้ในปัจจุบันถือว่าเป็นรากฐานของคณิตศาสตร์สาขาต่าง ๆ ทุกสาขา มีบทบาทในฐานะเป็นวิชาซึ่งรวมสาขาคณิตศาสตร์ต่าง ๆ ให้เป็นอันหนึ่งอันเดียวกัน (Unifying role) ความสำคัญของเซ็ตมีมากเกินกว่าจะประมวลมาบรรยายในที่นี้ได้ แต่เพียงเท่าที่ได้กล่าวมานี้ก็คงจะพอทำให้เข้าใจได้ว่าทำไมเราจึงต้องพูดถึงเซ็ต เมื่อเราพูดถึงธรรมชาติของคณิตศาสตร์

เราต่างก็เคยได้ยินคำว่าเซ็ตมาแล้ว และบางทีเราอาจเคยได้ยินว่าทฤษฎีเซ็ตเป็นรากฐานของคณิตศาสตร์ทุกสาขา แต่เป็นที่น่าเสียดายว่าการสอนก็ดี ตำราคณิตศาสตร์

ที่ใช้กันในปัจจุบันก็ดี บางทีจะทำให้เข้าใจไขว้เขวและมองไม่เห็นความสัมพันธ์ระหว่างเซ็ต กับคณิตศาสตร์สาขาอื่นเท่าที่ควร

เป็นต้นว่า แท้จริงแล้วในทฤษฎีเซ็ตเรามีคำที่ไม่ให้คำจำกัดความเพียง 2 คำ คือคำว่า "เซ็ต" กับความสัมพันธ์ที่ว่า "เป็นสมาชิกของ" แม้กระนั้นคนโดยทั่วไปก็ยังแยกสัญลักษณ์ออกไปว่า ถ้าเซ็ตมักใช้อักษรตัวใหญ่ (A, B, X, Y,.....) แต่ถ้าเป็นสมาชิกของเซ็ต ก็จะใช้อักษรตัวเล็ก (a, b, x, y,.....) ถ้าหากว่า a เป็นสมาชิกของ A เราก็จะเขียน $a \in A$ การทำเช่นนี้มิได้ผิด แต่อาจจะนำไปสู่ความเข้าใจผิดที่ว่าสมาชิกของเซ็ตมิใช่เซ็ต อันที่จริงสมาชิกของเซ็ตก็เป็นเซ็ตด้วย จึงเป็นไปได้ที่เราจะเขียนว่า $a \in y, x \notin y$, หรือแม้กระทั่ง $A \in x$

ในเรื่องความสัมพันธ์ระหว่างเซ็ตกับคณิตศาสตร์สาขาอื่นก็เช่นกัน มีคนเป็นจำนวนมากที่ยังมองไม่เห็นว่า ที่ว่าเซ็ตเป็นรากฐานนั้นเป็นอย่างไร ความจริงแล้วความเข้าใจข้อนี้เป็นไปได้ง่ายที่สุด ถ้าเราจะพูดว่าทุก ๆ อย่างในคณิตศาสตร์เป็นเซ็ต จำนวน 1, 2, 3..... ต่างก็เป็นเซ็ต + เป็นโอเปอเรชั่น โอเปอเรชั่นเป็นฟังก์ชัน ฟังก์ชันเป็นเซ็ต คู่ลำดับ (a, b) เป็นเซ็ต จุดถือได้ว่าเป็นเซ็ต อนุพันธ์ (Derivative) เป็นเซ็ต Integral เป็นเซ็ต จนกระทั่งเบอเน่ย์ (Bernays) นักคณิตศาสตร์คนหนึ่งกล่าวว่า "คณิตศาสตร์คือทฤษฎีเซ็ต" (Mathematics is set theory) หากยังมองไม่ออกว่าที่ว่า 1 ฯลฯ เป็นเซ็ตนั้น เป็นอย่างไร ขอให้ดูในตำราทฤษฎีเซ็ตที่ได้เขียนไว้ในบรรณานุกรมของหนังสือนี้ ในที่นี้มิได้มุ่งพูดถึงรายละเอียดเกินกว่าจะให้เข้าใจธรรมชาติของคณิตศาสตร์เพียงคร่าว ๆ

ด้วยอิทธิพลของทฤษฎีเซ็ต คณิตศาสตร์สาขาต่าง ๆ ในปัจจุบันจึงนิยมเสนอออกมาในรูปเซ็ต ที่เห็นได้ชัดก็เช่นในพีชคณิตและเรขาคณิต เราอาจจะแปลกใจถ้าหากพบการเสนอ เช่น เส้นอินเตอร์เซ็ค ($\cap$) เส้น ได้ผลลัพธ์เป็นจุด, เส้นยูเนียน ($\cup$) เส้น ได้ผลลัพธ์เป็นมุม ซึ่งแสดงให้เห็นอิทธิพลของเซ็ตนั่นเอง

เมื่อมาถึงตอนนี้ ก็สมควรที่จะได้พิจารณาคำถามที่ว่า คณิตศาสตร์คืออะไร?

นักคณิตศาสตร์คนสำคัญ ๆ ต่างก็ได้พยายามที่จะตอบคำถามนี้ เช่น

เพียร์ซ (Pierce) กล่าวว่า "คณิตศาสตร์หมายถึงวิชาซึ่งนำไปสู่การลงสรุปที่จำเป็น" ซึ่งหมายถึงว่าทฤษฎีบทเป็นขั้นตอนสุดท้ายของโครงสร้างคณิตศาสตร์นั่นเอง ศาสตร์ซึ่งมีนิยาม กติกา อะไรก็ตาม ถ้าหากนำไปสู่ทฤษฎีบท ก็ถือว่าศาสตร์นั้นคือคณิตศาสตร์ ให้สังเกตว่าคำว่า "จำเป็น" ของเพียร์ซนั้น หมายถึง โดยวิธีอนุมาน (Deduction) นั่นเอง

เพลโต (Plato) นิยามคณิตศาสตร์ว่า หมายถึง "วิชาที่ว่าด้วยรูปร่างและขนาด" นิยามของเพลโต้นี้เราทราบแน่ชัดว่าไม่ถูก คณิตศาสตร์เดี๋ยวนี้ก้าวหน้าไปไกลกว่าสมัยของเพลโตมาก และเหมือนกับที่เบล (Bell) นักคณิตศาสตร์คนหนึ่งกล่าวว่า "การที่จะเข้าใจจำนวนซ้อน (Complex number) หรือขวดของไคลน์ (Klein's bottle) นั้น จำเป็นที่จะต้องมีอะไรมาเหนือ

ไปกว่าดวงตาดี ๆ คู่หนึ่ง" เพราะจำนวนซ้อนก็ดี ขวดของไคลน์ก็ดี เราย่อมไม่สามารถที่จะกำหนดขนาดและรูปร่างอย่างที่เรากำหนดด้วยตาของเราได้

รัสเซล (Russell) กล่าวว่า "คณิตศาสตร์หมายถึงวิชาที่อยู่ในรูป ถ้า p แล้ว q โดยที่เราไม่รู้ว่า p จริงหรือเท็จ q จริงหรือเท็จ" นิยามของรัสเซลเคยเป็นที่ยอมรับกันในต้นศตวรรษที่ 20 นี้ ว่าน่าจะเป็นนิยามที่ชัดที่สุดของคณิตศาสตร์สมัยใหม่ กล่าวคือ ในคณิตศาสตร์เราไม่อาจทราบได้ว่า นิยาม กติกาต่าง ๆ นั้นจริงหรือไม่ แต่เราบอกได้ว่า ถ้านิยามและกติกาอย่างนั้น ๆ เป็นจริงแล้ว ทฤษฎีบทจะเป็นจริง หรือถ้าหาก p เกิดขึ้นแล้ว q จะต้องเกิดขึ้นนั่นเอง อย่างไรก็ดี นักคณิตศาสตร์บางท่าน เช่น ฟอน นอยมาน (Von Neuman) ตั้งข้อสังเกตว่า ถ้าเช่นนั้นศาสตร์อื่น ๆ ก็จะไม่เป็นคณิตศาสตร์ไปทั้งหมดหรือ คณิตศาสตร์น่าจะมีอะไรเฉพาะเจาะจงมากกว่านั้น เป็นต้นว่าเนื้อหาที่คณิตศาสตร์กล่าวถึง เช่น จำนวน เป็นต้น ข้อสังเกตของนอยมานนี้อาจจะใช้ได้ดีสำหรับนิยามของฮิลเบิร์ต (Hilbert) ด้วย เพราะฮิลเบิร์ตกล่าวว่า "คณิตศาสตร์หมายถึงวิชาที่มีลักษณะเป็นโซ่ของสิ่งซึ่งไร้ความหมาย (String of meaningless objects) สำหรับใช้เล่นเหมือนเกม ๆ หนึ่ง"

ไม่ว่าใครจะนิยามคณิตศาสตร์ในรูปใดก็ตาม เราต้องยอมรับว่านิยามนั้นจะให้สมบูรณ์ไม่ได้ เพราะคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เจริญเติบโตขึ้นเรื่อย ๆ นิยามซึ่งครั้งหนึ่งเคยยอมรับกันว่าถูก อาจจะเป็นนิยามซึ่งไม่ถูกในวันข้างหน้า แคนโต (Cantor) นักคณิตศาสตร์ผู้คิดทฤษฎีเซ็ต ซึ่งถือกันว่าเป็นสาขาคณิตศาสตร์บริสุทธิ์ที่ใหม่ที่สุดที่เรารู้จักกันในปัจจุบัน ได้กล่าวไว้ว่า "แก่นของคณิตศาสตร์คืออิสรภาพของมัน" (The essence of mathematics is its freedom) และอิสรภาพนั้นย่อมจะนำไปสู่การเปลี่ยนแปลงได้ ดังนั้น ก็เหมือนกับที่คูรันท์ (Courant) กล่าวว่า "เราไม่ควรพยายามที่จะตอบคำถามว่า คณิตศาสตร์คืออะไร ก่อนที่จะได้ศึกษา ทำความรู้จักกับมันให้มากพอเสียก่อน" นั่นเอง