

## บทที่ 10 การเขียนข้อสอบวัดพฤติกรรมทางคณิตศาสตร์

วงการศึกษายุคปัจจุบันได้มีการตื่นตัวในการเขียนข้อสอบให้สอดคล้องกับจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม สิ่งนี้ได้สร้างปัญหาให้กับครูในโรงเรียนต่าง ๆ ทั่วไป โดยเฉพาะเรื่อง การกำหนดจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมในแต่ละวิชา และการเขียนข้อสอบตามจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมนั้นนับว่าเป็นปัญหาหนักอกของครูมาก กล่าวคือ ครูไม่ทราบว่าจะกำหนดจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมอย่างไร เมื่อไม่ทราบว่าจะกำหนดจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมอย่างไร ก็ไม่อาจจะเขียนข้อสอบได้ จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมเท่าที่ครูกำหนดกันอยู่ในปัจจุบันนี้ มักเป็นจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมง่าย ๆ ในระดับต่ำ เป็นจุดมุ่งหมายที่มุ่งวัดความรู้ความจำของนักเรียนเป็นส่วนใหญ่ ซึ่งส่งผลต่อการสอนของครู คือ การสอนในปัจจุบันของครูก็มุ่งเน้นหนักด้านความรู้ความจำตามไปด้วย นับว่าเป็นสิ่งที่ไม่ถูกต้องนัก เพราะจุดมุ่งหมายในการเรียนการสอนนั้นไม่ใช่มีแต่ความจำเพียงอย่างเดียว แต่ยังมีจุดมุ่งหมายอื่น ๆ ที่มีคุณค่ามากกว่า เช่น พฤติกรรมด้านการวิเคราะห์ ด้านความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ด้านความมีเหตุผล ฯลฯ สาเหตุที่เป็นดังนี้เพราะครูทั่ว ๆ ไปขาดความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับพฤติกรรมด้านต่าง ๆ ของแต่ละวิชา ดังนั้น จึงจำเป็นที่ครูจะได้มาทำความเข้าใจเกี่ยวกับพฤติกรรมด้านต่าง ๆ ของแต่ละวิชา ในที่นี้จะขอกล่าวถึงพฤติกรรมด้านต่าง ๆ ของวิชาคณิตศาสตร์เท่านั้น ว่าพฤติกรรมแต่ละด้านนั้นมีจุดมุ่งหมายย่อย ๆ อะไรบ้าง มีพฤติกรรมอะไรบ้าง ทั้งนี้ เพื่อจะช่วยให้การกำหนดจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมของครูครอบคลุมพฤติกรรมแต่ละด้านได้ครบถ้วน มิใช่ครอบคลุมเฉพาะพฤติกรรมด้านความจำเพียงอย่างเดียว ดังที่เคยเป็นอยู่ พร้อมกับจะได้ให้ตัวอย่างข้อสอบที่สอดคล้องกับพฤติกรรมนั้น ๆ อันเป็นแนวทางสำหรับครูในการสร้างข้อสอบวิชาคณิตศาสตร์ต่อไป

ก่อนที่จะไปพิจารณาถึงพฤติกรรมด้านต่าง ๆ นั้น ควรจะได้มีการทำความเข้าใจร่วมกันเสียก่อน เพื่อให้เกิดความเข้าใจตรงกัน คือในการเขียนข้อสอบเพื่อวัดพฤติกรรมด้านต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์นั้นมีสิ่งที่ควรคำนึงถึง คือ ขอบข่ายได้ยึดมั่นถือมั่นมากนัก อย่าคิดว่าคำถามอย่างนี้จะต้องวัดพฤติกรรมนี้ พฤติกรรมนั้นเสมอไป ขอบอกให้ทราบทั่วกันเสียแต่วันนี้ว่าในการพิจารณาว่าข้อสอบข้อนั้นวัดพฤติกรรมด้านใด ไม่มีเกณฑ์มาตรฐานตายตัวที่จะบอกแน่ชัดลงไปได้ ข้อสอบข้อเดียวกันอาจวัดพฤติกรรมอย่างหนึ่งสำหรับนักเรียนคนหนึ่ง แต่อาจวัดพฤติกรรมอีกอย่างหนึ่งสำหรับนักเรียนอีกคนก็ได้ เช่น ครูสร้างข้อสอบมาข้อหนึ่ง

พฤติกรรมด้านการวิเคราะห์คำถามนั้นอาจจะวัดพฤติกรรมด้านความรู้ความจำสำหรับนักเรียนบางคนก็เป็นได้ เพราะนักเรียนบางคนอาจจำคำถามนั้นได้หรือเคยพบเห็นคำถามนั้นมาก่อน

อย่างไรก็ตาม ตัวอย่างการเขียนคำถามในหนังสือเล่มนี้ได้บ่งเฉพาะลงไปว่า คำถามนั้น ๆ วัดพฤติกรรมด้านใด ดังนั้น จึงต้องขอทำความเข้าใจกับผู้อ่านเสียก่อนว่า นักเรียนทุกคนรู้เนื้อหา หรือเคยเห็นตัวอย่าง และเคยทำแบบฝึกหัดในขอบข่ายของแบบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของกระทรวงศึกษาธิการเท่านั้น ส่วนนักเรียนคนใดจะรู้เนื้อหาหรือเคยเห็นตัวอย่างมามากกว่านี้ ให้ถือเป็นข้อยกเว้น

วิลสัน (Wilson, 1971 : 645-694) ได้จำแนกพฤติกรรมทางด้านคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาออกเป็น 2 ด้าน คือ

1. Cognitive Domain

2. Affective Domain

สำหรับพฤติกรรมด้านความรู้และการคิด (Cognitive Domain) นั้น วิลสันได้แบ่งออกเป็น 4 ระดับ คือ

1. การคิดคำนวณ (Computation) เป็นการวัดความสามารถในการระลึกถึงสิ่งที่ได้เรียนมาแล้ว โจทย์แบบฝึกหัดที่เลขทำมาแล้ว ตลอดจนความสามารถในการคิดคำนวณอย่างง่าย ๆ เป็นโจทย์ที่คล้ายกับตัวอย่าง เป็นโจทย์ที่ไม่ยุ่งยากซับซ้อนหรือต้องอาศัยการตัดสินใจ ความสามารถด้านการคิดคำนวณนี้ ถ้านักเรียนสามารถจดจำสิ่งที่ครูสอนได้ ก็สามารถตอบคำถามได้ ความสามารถด้านนี้ถือว่าเป็นความสามารถที่อยู่ในระดับที่ต่ำที่สุดซึ่งอาจแบ่งออกเป็น 3 ขั้นดังนี้

1.1 ความรู้เกี่ยวกับข้อเท็จจริง (Specific facts)

1.2 ความรู้เกี่ยวกับศัพท์และนิยาม (Terminology)

1.3 ทักษะในการใช้กระบวนการคิดคำนวณ (Algorithms)

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2524) ได้ทำการวิเคราะห์และสรุปว่านักเรียนที่มีความสามารถด้านนี้ จะแสดงออกโดย

1. บอกข้อเท็จจริง ความหมายของศัพท์ นิยาม ในรูปแบบเดียวกันกับที่ได้พบในชั้นเรียน การบอกในที่นี้อาจหมายถึงการพูด การเขียน การเลือกคำตอบโดยการทำเครื่องหมาย

2. ปฏิบัติตามคำสั่งที่เกี่ยวข้องกับทักษะทางคณิตศาสตร์ เช่น บวก ลบ คูณ



4. รูปหลายเหลี่ยม หมายถึงข้อใด

ก. มีด้าน 3 ด้านเท่านั้น

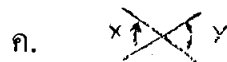
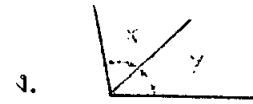
ข. มี 5 ด้านเท่านั้น

ค. มีน้อยกว่า 5 ด้าน

ง. มีมากกว่า 3 ด้าน

จ. มี 3 ด้าน หรือมากกว่า

5. รูปใดที่แสดงมุมประชิดของ  $x$  และ  $y$ ?



1.3 ทักษะในการใช้กระบวนการคิดคำนวณ เป็นความสามารถในการนำข้อ-

เท็จจริงศัพท์และนิยาม ตลอดจนกระบวนการคิดคำนวณตามแบบที่เคยเรียนรู้มาแล้ว มาดำเนินการคิดคำนวณตามคำสั่งที่กำหนดให้ โจทย์ปัญหาที่วัดความสามารถขั้นนี้มักเป็นโจทย์ง่าย ๆ คล้ายคลึงกับตัวอย่าง คำถามจะไม่ยุ่งยากซับซ้อน คำถามมักจะถามด้านใดด้านหนึ่งโดยเฉพาะ คำถามในขั้นนี้จะได้มุ่งให้นักเรียนคิดหากระบวนการคิดคำนวณแบบใหม่แต่อย่างไรก็ตาม ดังตัวอย่างคำถาม

1.  $93.6 \div 3 = ?$

ก. 3.12

ข. 31.2

ค. 312

ง. 280.8

2.  $\frac{1}{20}$  เปลี่ยนเป็นเปอร์เซ็นต์ได้เท่าไร?

ก. 5%

ข. 10%

ค. 20%

ง. 40%

3. จงทำจำนวนต่อไปนี้ให้เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ

ก.  $\frac{3}{15}$

ข.  $\frac{10}{12}$

ค.  $\frac{25}{45}$

ง.  $\frac{24}{39}$

4. ถ้า  $\frac{1}{8}x = 12$  แล้ว  $x$  มีค่าเท่าไร?

ก.  $\frac{2}{3}$

ข.  $\frac{3}{2}$

ค. 96

ง. 20

จ. ไม่มีคำตอบ

5. ใน  $\triangle ABC$ ,  $a = 5$ ,  $b = 7$ , และ  $c = 8$  cosine ของมุม  $C$  มีค่าเท่าใด?

ก.  $\frac{1}{7}$

ข.  $\frac{2}{7}$

ค.  $\frac{1}{10}$

ง.  $\frac{7}{8}$







7. ถ้า  $P = M + N$  แล้ว ข้อใดเป็นจริง?

1.  $N = P - M$

2.  $P - N = M$

3.  $N + M = P$

ก. ข้อ 1 เท่านั้น

ง. ข้อ 2 และ 3 เท่านั้น

ข. ข้อ 3 เท่านั้น

จ. ถูกทั้ง 3 ข้อ

ค. ข้อ 1 และ 2 เท่านั้น

8. ถ้า  $b$  อยู่ระหว่าง  $a$  และ  $c$  แล้ว ข้อสรุปใดถูกต้อง

ก.  $2b$  อยู่ระหว่าง  $2c$  และ  $2a$

ข.  $2c$  อยู่ระหว่าง  $2a$  และ  $2b$

ค.  $2a$  อยู่ระหว่าง  $2b$  และ  $2c$

ง. ถูกทุกข้อ

จ. ไม่มีข้อถูก

9. จำนวนใดที่ใส่ลง  $\square$  แล้วทำให้ประโยคนี้ผิด?

$$25 + \square = \square + 30 - 5$$

ก. 0

ข. 5

ค. 25

ง. ไม่มีข้อใดเลย

จ. ทุกข้อ

#### 2.4 ความเข้าใจในการแปลงโจทย์ปัญหาจากแบบหนึ่งไปเป็นอีกแบบหนึ่ง

เป็นการวัดความสามารถในการแปลข้อความที่กำหนดให้เป็นข้อความใหม่ ซึ่งมีความหมายคงเดิม เช่น แปลจากภาษาพูดให้เป็นรูปสมการ ความสามารถในการแปลความนี้จะไม่รวมถึงทักษะในการใช้กระบวนการคิดคำนวณ (Algorithms) หลังจากการแปลความ นั่นคือจะไม่รวมถึงวิธีการในการหาคำตอบ ทั้งนี้ เพราะการแก้ปัญหาคำตอบจากโจทย์ทางคณิตศาสตร์ หลังจากแปลความแล้วจะเป็นการวัดความสามารถขั้นนำไปใช้ ความสามารถในขั้นนี้อาจกล่าวได้ว่าเป็นความสามารถที่ง่ายที่สุดของการวัดความเข้าใจ ดังตัวอย่าง

1. กำหนดให้  $P$  แทนแดงไม่ไปโรงเรียน  $q$  แทนแดงไม่สบาย  $r$  แทนแดงทำงานหนัก จงเขียนสัญลักษณ์  $P \rightarrow (q \vee r)$  เป็นประโยคโดยใช้ภาษาคำพูด

2. ในระหว่างภาคฤดูร้อน นักเรียนคนหนึ่งทำงาน  $n$  สัปดาห์ ได้รับค่าจ้าง สัปดาห์ละ  $k$  บาท ค่าใช้จ่ายตลอดภาคฤดูร้อน มีค่า  $p$  บาท เขจะมีเงินเก็บกี่บาท?

ก.  $n+k+p$

ง.  $n+k-p$

ข.  $np-k$

จ. ไม่มีข้อถูก

ค.  $np \div k$









2. เปรียบเทียบระหว่างข้อมูลได้ว่า สิ่งใดมากกว่า น้อยกว่า ใหญ่กว่า ฯลฯ ซึ่งต้องอาศัยการแปลความหมายโจทย์ คิดคำนวณ แล้วจึงตัดสินใจ

3. แยกปัญหาออกเป็นส่วนย่อยๆ เพื่อพิจารณาได้ว่าส่วนใดจำเป็น ส่วนใดเหมาะสม

4. หาความสัมพันธ์ระหว่างส่วนย่อยๆ ของปัญหาได้

3.1 ความสามารถในการแก้ปัญหาธรรมดา เป็นความสามารถในการแก้ปัญหา โจทย์ที่คล้ายคลึง (แต่ไม่เหมือน) กับตัวอย่างหรือแบบฝึกหัดที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้วในห้องเรียนนั่นเอง นักเรียนจะต้องอาศัยความเข้าใจเกี่ยวกับหลัก กฎ และรู้จักวิธีการคิดคำนวณที่นักเรียนเรียนมาแล้ว มาใช้ผสมผสานเพื่อที่จะแก้ปัญหาให้ได้คำตอบออกมา ดังตัวอย่าง

1. นายขาวซื้อเสื้อขนสัตว์มา 1 ตัว ราคา 500 บาท ต้องเสียภาษีให้รัฐ 20% และต้องเสียภาษีฟุ่มเฟือย 15% นายขาวจะต้องจ่ายเงินทั้งหมดเท่าไร?

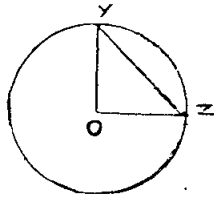
ก. 576.50 บาท

ค. 586.50 บาท

ข. 585 บาท

ง. ไม่มีข้อถูก

2.



จากรูป  $O$  เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม  $OY \perp OZ$  ถ้าพื้นที่ของวงกลม =  $16\pi$  รูป  $\triangle YOZ$  มีพื้นที่เท่าไร?

ก. 8

ข. 9

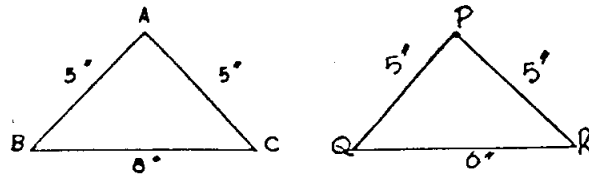
ค. 10

ง. 12

จ. 16

3.2 ความสามารถในการเปรียบเทียบ เป็นการวัดความสามารถในการค้นหาความสัมพันธ์ โดยเปรียบเทียบข้อมูลที่โจทย์ให้มา 2 ชุด แล้วนำมาเปรียบเทียบเพื่อสรุปตัดสินใจ ความสามารถในขั้นนี้อาจต้องใช้วิธีการคิดคำนวณด้วย ดังตัวอย่าง

1.



จงเปรียบเทียบพื้นที่ของ  $\triangle$  2 รูป

ก.  $\triangle ABC$  มีพื้นที่มากกว่า  $\triangle PQR$

ข.  $\triangle PQR$  มีพื้นที่มากกว่า  $\triangle ABC$

ค.  $\triangle$  ทั้งสองมีพื้นที่เท่ากัน

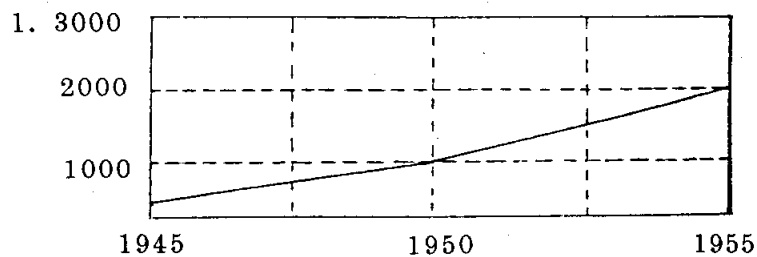
2. ต่อไปนี้เป็นเงินรายได้ตลอดปีของพนักงาน 10 คน (คิดเป็นบาท)

400	600	1,250	500	700
550	450	500	650	600

คนที่มีรายได้สูงกว่าค่าเฉลี่ยมีกี่คน?

- ก. 1 คน      ข. 3 คน      ค. 5 คน      ง. 7 คน

3.3 ความสามารถในการวิเคราะห์ข้อมูล เป็นการวัดความสามารถในการแก้ปัญหาโจทย์ที่ค่อนข้างจะซับซ้อน กล่าวคือ นักเรียนจะต้องตัดสินใจว่าจะทำอะไรก่อนอะไรหลัง แล้วจึงดำเนินการคิดคำนวณเพื่อหาคำตอบ ซึ่งอาจต้องอาศัยการเปรียบเทียบจากที่โจทย์กำหนดมาให้ เพื่อตัดสินใจหรือหาข้อสรุป หรืออาจให้แยกข้อมูลที่เกี่ยวข้องออกจากข้อมูลที่ไม่เกี่ยวข้อง ดังตัวอย่าง



ภาพนี้แสดงถึงประชากรในชนบท จากปี 1945-1955 โดยแบ่งเป็นช่วงละ 5 ปี ประชากรในช่วง 1950-1955 เพิ่มขึ้นมากกว่าการเพิ่มของประชากรในปี 1945-1950 อยู่เท่าไร

- ก. 500      ข. 1,000      ค. 1,500      ง. 2,000

2. ธนาคารคิดดอกเบี้ยทบต้นในทุก ๆ ระยะเวลา 3 เดือน ถ้าฝากเงิน 300 บาท ในเวลาหนึ่งปี จะได้รับดอกเบี้ยเท่าไร?

ท่านจะต้องรู้รายละเอียดอะไรอีกจึงจะแก้ปัญหานี้ได้

- ก. ไม่ต้องมีรายละเอียดเพิ่มอีก      ง. อายุของผู้ฝาก  
 ข. กำหนดวันที่จะถอนเงิน      จ. อัตราดอกเบี้ย  
 ค. จุดมุ่งหมายของการฝากเงิน

3. เด็กชายรามต้องการซื้อถุงเท้า 6 คู่ ร้านศึกษาศาสตร์บอกราคา 2 คู่ ต่อ 12.50 บาท ร้านนิติศาสตร์บอกราคา 3 คู่ ต่อ 19.80 บาท (ถุงเท้าชนิดเดียวกัน) เพื่อความประหยัด เด็กชายรามควรทำอย่างไร?

- ก. ซื้อถุงเท้าจากร้านศึกษาศาสตร์  
 ข. ซื้อถุงเท้าจากร้านนิติศาสตร์

ก. ซ้อลูงเท้าจากร้านใดก็ได้เพราะราคาไม่ต่างกัน

ง. ซ้อเท็จจริงที่กำหนดให้ไม่เพียงพอในการคิด

**3.4 ความสามารถในการมองเห็นแบบ ลักษณะโครงสร้างที่เหมือนกัน และการสมมาตร** การวัดความสามารถในขั้นนี้จะเกี่ยวข้องกับการระลึกถึงความรู้เดิม การแปลง โจทย์ปัญหา การจัดกระทำกับข้อมูล ตลอดจนมองเห็นความสัมพันธ์ของข้อมูล คำถามที่วัดความสามารถในขั้นนี้มักจะถามให้นักเรียนหาสิ่งที่คุ้นเคยในชุดของข้อมูลหรือปัญหาที่กำหนดให้ ดังตัวอย่าง

1. หลักหน่วยของ  $4^{10}$  คือข้อใด?

ก. 0                      ข. 2                      ค. 4                      ง. 6                      จ. 8

2. ถ้า  $x$  และ  $y$  เป็นจำนวนจริงที่มีค่าต่างกัน 2 จำนวน

ถ้า  $xy = yz$  แล้ว  $z$  จะมีค่าตรงกับข้อใด?

ก.  $\frac{1}{x-y}$                       ข.  $x-y$                       ค.  $\frac{x}{y}$                       ง.  $x$                       จ. 0

3. ในการเลือกตั้งครั้งหนึ่ง มีผู้ออกเสียง 356 คน เพื่อเลือกผู้สมัคร 1 คน จาก 5 คน ผู้สมัครที่ได้คะแนนสูงสุดจะเป็นผู้ชนะ ผู้ชนะต้องได้รับคะแนนอย่างน้อยที่สุดเท่าไรจึงจะได้รับเลือกตั้ง?

ก. 179                      ข. 178                      ค. 89                      ง. 72                      จ. 71

**4. การวิเคราะห์ (Analysis)** เป็นการวัดความสามารถในการแก้ปัญหที่แปลกกว่าธรรมดาหรือปัญหาที่นักเรียนไม่เคยเห็นหรือไม่เคยทำแบบฝึกหัดมาก่อน โจทย์ปัญหาในขั้นนี้มักเป็นโจทย์พลิกแพลง แต่ทั้งนี้มิได้หมายความว่าโจทย์ดังกล่าวจะต้องเป็นโจทย์ที่ไม่ได้อยู่ในขอบข่ายของเนื้อหาวิชาที่เรียน การแก้ปัญหาโจทย์ดังกล่าวจะต้องอาศัยประสบการณ์และความรู้ที่เรียนมา รวมกับความคิดสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์มาผสมผสานกันเพื่อแก้ปัญหา ความสามารถในการขั้นนี้ถือว่าเป็นจุดมุ่งหมายสูงสุดของการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ผู้ที่ตอบปัญหาขั้นนี้ได้จะต้องใช้สมรรถภาพทางสมองในระดับสูง การวัดความสามารถในขั้นนี้แบ่งออกเป็น 5 ขั้นดังนี้

4.1 ความสามารถในการแก้ปัญหาโจทย์พลิกแพลง (Non-routine problem)

4.2 ความสามารถในการค้นพบความสัมพันธ์ (Discover relationship)

4.3 ความสามารถในการพิสูจน์ (Construct proof)

4.4 ความสามารถในการวิจารณ์การพิสูจน์ (Criticize proof)

4.5 ความสามารถเกี่ยวกับการสร้างสูตรและทดสอบความถูกต้องของสูตร (Formulate and validate generalization)

สถาบันส่งเสริมการวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2524) ได้ทำการวิเคราะห์ และสรุปว่านักเรียนที่มีความสามารถด้านนี้ จะแสดงออกโดย

1. ทำโจทย์ที่แปลกใหม่ได้
2. ค้นพบความสัมพันธ์ใหม่ๆ ได้
3. สร้างข้อพิสูจน์ใหม่ๆ ได้
4. วิพากษ์วิจารณ์การพิสูจน์ได้
5. โต้แย้งและให้เหตุผลเกี่ยวกับข้อความทางคณิตศาสตร์ได้

**4.1 ความสามารถในการแก้ปัญหาโจทย์พลิกแพลง** คำถามที่วัดความสามารถในขั้นนี้จะเป็คำถามที่ซับซ้อน ไม่ได้อยู่ในแบบฝึกหัด ในตำรา เป็นปัญหาที่นักเรียนส่วนใหญ่ไม่เคยเห็นมาก่อน นั่นคือจะต้องเป็นปัญหาที่นักเรียนไม่เคยได้รับการฝึกหัดมาก่อนนั่นเอง นักเรียนจะแก้ปัญหาลักษณะนี้ได้จะต้องอาศัยประสบการณ์ ความคิดสร้างสรรค์ ทางคณิตศาสตร์ ต้องเข้าใจมโนทัศน์ นิยาม ตลอดจนทฤษฎีต่างๆ ที่ครูเคยสอนมาแล้วเป็นอย่างดี แล้วใช้ความรู้เหล่านั้นมาผสมผสานกันเพื่อแก้ปัญหา การแก้ปัญหาลักษณะนี้ จึงต้องพยายามหาวิธีการใหม่ๆ เช่น อาจสร้างแบบการคิดคำนวณขึ้นมาใหม่เพื่อให้สามารถหาคำตอบได้ ดังตัวอย่าง

1. เรือสองลำแล่นออกจากจุดเริ่มต้นเดียวกันในอ่าวแห่งหนึ่ง ในตอน 12.00 น. ของวันหนึ่ง เรือลำหนึ่งมีความเร็ว  $4\frac{1}{2}$  ไมล์/ชม. อีกลำหนึ่งมีความเร็ว 4 ไมล์/ชม. เรือทั้งสองนี้แล่นไปกลับตลอดเวลา ปรากฏว่าเวลา 12.00 น. ของวันรุ่งขึ้น เรือทั้ง 2 นี้ มาพบกันที่จุดเริ่มต้น อ่าวแห่งนี้กว้างเท่าใด?

- ก. 2 ไมล์   ข. 3 ไมล์   ค. 4 ไมล์   ง. 6 ไมล์   จ. 8 ไมล์

2. ค่าของ  $x$  ในข้อใดที่สอดคล้องกับสมการ  $ax^2 + bx + c = 0$  เมื่อ  $a + b + c = 0$

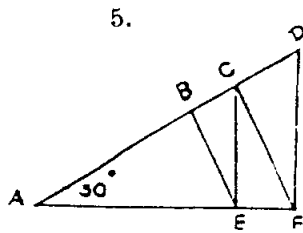
- ก.  $\frac{b}{a}$    ข.  $\frac{c}{a}$    ค.  $\frac{a+c}{b}$    ง.  $-\frac{b}{a}$    จ.  $-\frac{c}{a}$

3. ถ้า  $2a + 2b + 5c = 9$  และถ้า  $c = 1$  แล้ว  $a + b + c$  เท่ากับข้อใด?

- ก. 2   ข. 3   ค.  $4\frac{1}{2}$    ง. 5   จ. 8

4. ถ้า  $a, b, c, d$  เป็นจำนวน 4 จำนวนที่ต่างกัน และถ้า  $d + a = d, a.d = a, b + c = a, a(a + d) = d, b - c = d$  แล้ว  $d$  เท่ากับเท่าใด?

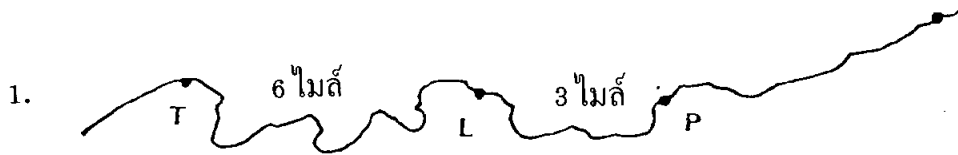
- ก. -1   ข. 0   ค. 1   ง. 2   จ. 3



จากรูป  $CE$  และ  $DF \perp$  กับ  $AF$   $BE$  และ  $CF \perp AD$  ถ้า  $AD = 8$  แล้ว  $AB$  เท่ากับเท่าไร?

- ก. 4      ข. 4.5      ค. 5      ง. 5.5      จ. ไม่มีข้อถูก

**4.2 ความสามารถในการค้นพบความสัมพันธ์** เป็นการวัดความสามารถในการค้นหาความสัมพันธ์โดยนักเรียนจะต้องจัดส่วนต่างๆ ที่โจทย์กำหนดให้ใหม่ แล้วสร้างความสัมพันธ์ขึ้นเพื่อใช้ในการแก้ปัญหาอันจะนำไปสู่คำตอบในที่สุด ความสามารถในการขั้นนี้ต่างไปจากขั้นนำไปใช้ตรงที่นักเรียนจะต้องรวบรวมสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ มาสร้างเป็นความสัมพันธ์ขั้นใหม่ จึงจะหาคำตอบได้ แทนที่จะจำความสัมพันธ์อันเดิมที่เคยพบมาแล้ว มาใช้ในการแก้ปัญหาโจทย์เช่น ขั้นนำไปใช้ ดังตัวอย่าง



จากรูปข้างบน T, L และ P เป็นเมือง 3 เมือง บนถนนแห่งหนึ่ง เมือง L อยู่ห่างจาก T ไกลเป็น 2 เท่าของเมือง L ห่างจาก P มีเมืองอีกเมืองหนึ่ง บนถนนนี้ซึ่งอยู่ห่างจาก T เป็น 2 เท่าของเมืองนี้ ห่างจาก P เมืองใหม่นี้ห่างจากเมือง L กี่ไมล์?

- ก. 3      ข. 9      ค. 12      ง. 15      จ. 18

2. ความยาวของเส้นทแยงมุมของ  $\square$   $= x + y$  จงหา พ.ท. ของ  $\square$  รูปนี้ (โจทย์ข้อนี้เป็นตัวอย่างการแก้ปัญหาโดยการหาความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านและความยาวของเส้นทแยงมุมของ  $\square$ )

3.  $m$  จะต้องมีค่าเท่าใด จึงจะทำให้กราฟของสมการทั้ง 2 ตัดกันที่จุด origin

$$3x - 5y = 2$$

$$6x - my = 0$$



4.3 ความสามารถในการพิสูจน์ เป็นความสามารถในการพิสูจน์โจทย์ปัญหาที่ไม่เคยเห็นมาก่อน นักเรียนจะต้องอาศัยนิยาม ทฤษฎีต่างๆ ที่เรียนมาแล้วมาช่วยในการแก้ปัญหา ความสามารถในขั้นนี้สร้างเป็นข้อสอบแบบเลือกตอบได้ยาก แต่ก็สามารถสร้างได้ดังตัวอย่าง

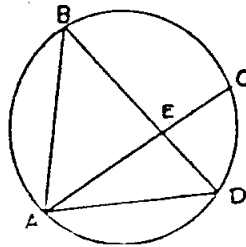
1. จงแสดงว่า  $\square + \square = 2 \square$

2. จงแสดงว่า  $-(-a) = a$

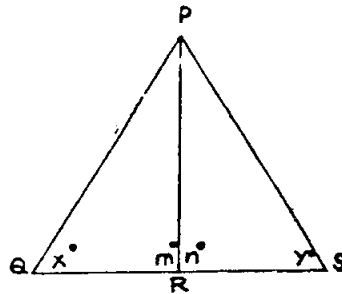
3. จงพิสูจน์ว่า  $a \cdot 0 = 0$

4. จงพิสูจน์ว่า  $\cot \theta \cdot \frac{\cos 2\theta}{\sin \theta \cos \theta} = \tan \theta$

5. จากรูป B เป็นจุดศูนย์กลางของ arc AC คอร์ด BD และ AC ตัดกันที่ E ลากคอร์ด AD และ AB จงพิสูจน์ว่า  $BD \times BE = (AB)^2$



6.



$\triangle PQS$  มี  $QR = RS$  และ  $m = n$

จงพิสูจน์ว่า  $x = y$

ข้อความที่พิสูจน์

1.  $QR = RS$  และ  $PR = PR$

2.  $m = n$

3.  $\triangle PQR \cong \triangle PRS$

4.  $x = y$



2. ต่ไปน้เป็นการพิสูจน์ว่าจำนวนจริง 2 จำนวนใด ๆ ต่างก็เท่ากัน ใน  
ตอนใดที่พิสูจน์ผิด

$$1) \text{ ให้ } c = \frac{a+b}{2} \text{ และ } a \neq b$$

$$2) 2c = a + b$$

$$3) 2c(a - b) = (a + b)(a - b)$$

$$4) 2ac - 2bc = a^2 - b^2$$

$$5) b^2 - 2bc = a^2 - 2ac$$

$$6) b^2 - 2bc + c^2 = a^2 - 2ac + c^2$$

$$7) (b - c)^2 = (a - c)^2$$

$$8) b - c = a - c$$

$$9) b = a$$

ก. จาก 2-3 ข. จาก 4-5 ค. จาก 5-6 ง. จาก 7-8

จ. จาก 8-9

3. ถ้า  $a$  เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง  $a > 3$

ดังนั้น  $3a > 3(3)$

$$3a - a^2 > 9 - a^2$$

$$(3 - a)a > (3 - a)(3 - a)$$

$$a > 3 + a$$

$$0 > 3$$

จงหาว่าการพิสูจน์นี้ผิดตรงไหน

4. ถ้า  $x$  และ  $y$  เป็นจำนวน 2 จำนวนที่เท่ากัน

$$x = y$$

$$x^2 = xy$$

$$x^2 - y^2 = xy - y^2$$

$$(x - y)(x + y) = y(x - y)$$

$$x + y = y$$

$$y + y = y$$

$$2y = y$$

$$2 = 1$$

จงหาว่าการพิสูจน์นี้ผิดตรงไหน

4.5 ความสามารถเกี่ยวกับการสร้างสูตร และทดสอบความถูกต้องของสูตร คล้ายกับ 4.4 แต่อาจจะซับซ้อนกว่านิดหน่อย คือ นักเรียนต้องสามารถสร้างสูตรขึ้นมาใหม่ โดยให้สัมพันธ์กับเรื่องเดิม และต้องสมเหตุสมผลด้วย ก็อาจจะถามให้หาและพิสูจน์ประโยคทางคณิตศาสตร์ หรืออาจถามให้นักเรียนสร้างกระบวนการคิดคำนวณใหม่ พร้อมทั้งแสดงการใช้กระบวนการนั้น ดังตัวอย่าง

1. จงอธิบายขบวนการตามลำดับของการตัดสินใจ โดยไม่ต้องแสดงวิธีทำ
  - 1) 12087 เป็น prime number หรือไม่
  - 2) prime number ที่ใหญ่ที่สุด ที่มีค่าน้อยกว่า 5000
2. สังเกตตารางต่อไปนี้

Row	Item	Sum
1	1	
2	1+3	
3	1+3+5	
4		
5		
.		
.		
.		
n		

- 1) เขียนแถวที่ 4 และ 5
- 2) หาผลบวกของแต่ละแถว
- 3) สรุปแถวที่ n
- 4) พิสูจน์การสรุปของท่าน โดยใช้ mathematical induction