

# บทที่ 1 ความสำคัญของวิชาคณิตศาสตร์

เป็นที่ยอมรับกันทั่วไปว่าคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีความสำคัญ ในกรีกสมัยโบราณถึงกับบังคับไว้เลยว่าเยาวชนทั้งหลายทั้งปวงจะต้องเรียนรู้ 3R's 3R's ที่ว่านี้หมายถึงวิชาการ 3 อย่างคือ อ่าน (Reading) เขียน (Writing) และเลขคณิต (Arithmetic) วิชาเลขคณิตนั้นในสมัยนั้นถือได้ว่าเป็นตัวแทนของคณิตศาสตร์ และเรายังคงสอน 3R's กันมาจนถึงสมัยปัจจุบันนี้

เราคงไม่ต้องยกย่องให้ความสำคัญแก่วิชาคณิตศาสตร์เหมือนศาสตราจารย์ไวท์เฮด (Whitehead) นักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษที่กล่าวว่า “คณิตศาสตร์เป็นผลงานที่เลิศล้ำที่สุดเท่าที่สติปัญญาของมนุษย์จะสามารถสร้างสรรค์คิดค้นขึ้นมาได้” หรือคำชื่นชมของรัสเซลล์ (Russell) เพื่อนของไวท์เฮด ที่ว่า “คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่งดงาม งามลึกซึ้งสง่าเหมือนประติมากรรม ไม่มีส่วนปลีกย่อยส่วนไหนไร้สาระน่าตำหนิเลยแม้แต่น้อย” หากแต่เราจะมาพิจารณากันว่าที่ว่าคณิตศาสตร์มีความสำคัญนั้น สำคัญอย่างไร?

ในที่นี้จะแยกกล่าวถึงความสำคัญของวิชาคณิตศาสตร์เป็น 3 ประการด้วยกันคือ

## 1. ความสำคัญในแง่ชีวิตประจำวัน

ย้อนหลังไปกว่า 7 พันปี สมัยก่อนประวัติศาสตร์ คือก่อนที่จะมีตัวหนังสือใช้วิชาคณิตศาสตร์ก็ได้เข้ามามีบทบาทในชีวิตประจำวันของมนุษย์เสียแล้ว บทบาทนั้นมาในรูปของการจับคู่หนึ่งต่อหนึ่ง (1-1 correspondence) ซึ่งเป็นมโนภาพพื้นฐานอันจะนำไปสู่มโนภาพเรื่องจำนวนหรือการนับ คนโบราณในสมัยนั้นย่อมสามารถบอกได้ว่าสมาชิกของครอบครัวที่ออกไปหาอาหารนั้นกลับมาแล้วกี่คน สัตว์เลี้ยงที่ปล่อยไปนั้นกลับมาแล้วกี่ตัว เมื่อปล่อยสัตว์ออกไป 1 ตัว เขาก็หยิบก้อนหินมาวางไว้ 1 ก้อน เมื่อกลับมาก็หยิบก้อนหินนั้นออก การจับคู่หนึ่งต่อหนึ่งเช่นนี้ ทำให้เขาทราบได้ว่าสัตว์เลี้ยงที่ยังไม่กลับมามีเท่าใด ซึ่งก็ย่อมเท่ากับจำนวนก้อนหินที่ยังคงวางไว้ แม้ว่าเขาจะยังไม่สามารถนับ (Count) ไม่ได้

ต่อมาก็มีการนับ นั่นคือจำนวนได้เกิดขึ้น และมีการคำนวณ บวก ลบ คูณ หาร เกี่ยวกับจำนวนตามมโนเป็นลำดับ อารยธรรมในขั้นนี้ย่อมถือได้ว่าเจริญมากแล้ว ชีวิตประจำวันของคนในยุคนี้ย่อมจะต้องเกี่ยวข้องกับการนับการคำนวณ เขาไม่ต้องจับคู่หนึ่งอีกต่อไป หากแต่จะนับโดยใช้จำนวนว่าเป็นเท่าใด เขาย่อมสามารถบอก (โดยการคำนวณ) ได้ว่าสัตว์ซึ่งเขาปล่อยไปยังไม่กลับมาที่ตัว สมาชิกในครอบครัวตายไปที่คน เหลือกี่คน ฯลฯ

ถัดจากยุคนี้ก็เกิดมีเรขาคณิตขึ้น อันเนื่องมาจากความสงสัยประหลาดใจเกี่ยวกับรูปร่างและขนาดของรูป และคนในสมัยนี้ย่อมต้องใช้ความรู้ทางเรขาคณิตสำหรับตัดแบ่งที่ดินที่จะทำการเกษตรอย่างคร่าว ๆ ตลอดจนก่อสร้างสิ่งต่าง ๆ ซึ่งจะต้องเกี่ยวกับขนาดและรูปทรงต่าง ๆ ในชีวิตประจำวัน และต่อมาเมื่อมีพีชคณิตเกิดขึ้น ก็นับได้ว่าคณิตศาสตร์เจริญขึ้นถึงขนาดประจักษ์พยานในข้อนี้เราอาจจะดูได้จากเรขาคณิตของยุคลิด เฉพาะอย่างยิ่งงานของไพธากอรัส พีระมิด ตลอดจนสิ่งก่อสร้างในสมัยโบราณอื่น ๆ ที่ยังคงเหลือซากมาจนทุกวันนี้ ซึ่งงานทั้งหลายทั้งปวงเหล่านี้ย่อมสะท้อนให้เห็นว่าคณิตศาสตร์ได้เข้ามามีบทบาทในชีวิตประจำวันของคนยุคนั้นเป็นอย่างมาก การค้าขายก็ดี จำเป็นที่จะต้องมีการนับคำนวณ การเกษตรก็จะต้องมีการปักปันพื้นที่ มุมฉากที่ใช้ในสมัยนั้นก็คือเชือกยาว 12 หน่วย ซึ่งแบ่งเป็น 3 ส่วน ยาว 3, 4, 5 หน่วยตามลำดับ การนับวันเวลา คำนวณเวลาพระอาทิตย์ขึ้น-ตก สอให้ทราบได้อย่างชัดเจนว่าเป็นไปได้ด้วยพีชคณิต

อารยธรรมของอียิปต์ กรีก อาหรับ จีน ได้แผ่ขยายออกไปทั่วโลก และพร้อมกับอารยธรรมทั้งหลายทั้งปวงเหล่านี้ คณิตศาสตร์ก็ได้เข้าไปมีบทบาทในชีวิตประจำวันของคนทั้งโลก ไม่มีแง่มุมใดของชีวิตที่จะปราศจากความเกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ แต่แม้กระนั้นก็ดี เราต้องยอมรับว่าชีวิตประจำวันของคนส่วนใหญ่ในสมัยนั้นไม่ได้เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์มากไปกว่าเลขคณิต เรขาคณิต หรืออาจจะมีพีชคณิตอย่างพื้น ๆ อีกเพียงนิดหน่อยเท่านั้น

กล่าวเฉพาะในสมัยนี้ โลกแคบลง ซึ่งหมายถึงว่าความสัมพันธ์ระหว่างคนในถิ่นฐานต่าง ๆ เป็นไปได้อย่างมากและสะดวกรวดเร็วยิ่งขึ้น ไม่ว่าจะเป็นความสัมพันธ์ในด้านเศรษฐกิจ สังคม การเมือง หรือวัฒนธรรมอื่น ๆ สังคมซับซ้อนขึ้น ผู้อยู่ในสังคมก็ต้องมีบทบาทซับซ้อนขึ้น และต้องได้รับอิทธิพลจากวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีต่าง ๆ เพิ่มขึ้นกว่าแต่ก่อนมากมาย คณิตศาสตร์ซึ่งจำเป็นจะต้องใช้ก็ยิ่งซับซ้อนตามไปด้วยเป็นลำดับ เราอาจจำเป็นที่จะต้องเรียนรู้เลขฐานอื่น ๆ นอกจากฐานสิบ เพราะเลขฐานเหล่านั้นเป็นวิธีการของอุปกรณ์เครื่องมือเครื่องมือหลายอย่าง เช่น คอมพิวเตอร์ เป็นต้น เราอาจจะไม่ได้ใช้แต่เพียงพีชคณิตในการคำนวณซื้อขาย แต่อาจจะต้องใช้วิชาความน่าจะเป็นและสถิติ (Probability and statistics) แทน เพราะวิชาเหล่านี้ช่วยในการตัดสินใจได้ดีกว่า หรือเราอาจจะต้องใช้แคลคูลัส (Calculus) คำนวณอัตราการขึ้นลงของราคาสินค้าของเรา จริงอยู่ที่ว่าเราอาจจะเพิกเฉยต่อวิชาเหล่านี้ได้ แต่นั่นย่อมเป็นทางเลือกที่จะอยู่โดดเดี่ยวของเรา ในขณะที่วิชาคณิตศาสตร์ได้เข้ามามีบทบาทในสังคมมากกว่ายุคใดสมัยใด มากับวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีทุกอย่าง ถ้าเราไม่เข้าใจคณิตศาสตร์อันเป็นวิธีการของวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีเหล่านี้ เราย่อมไม่แคล้วที่จะเป็นอย่างที่ศาสตราจารย์เฟห์ (Fehr) กล่าวว่า “อาจเป็นไปได้ที่ต่อไปสมัยหนึ่งอาจเกิดชนชั้นใหม่ขึ้นชั้นหนึ่ง คือชนชั้นที่ไม่รู้คณิตศาสตร์ เขาเหล่านั้นจะต้องอยู่โดดเดี่ยว ไม่สามารถ

เข้าใจอารยธรรม และไม่สามารถที่จะหลีกเลี่ยงการตกเป็นผู้ถูกเอารัดเอาเปรียบจากสังคมได้”

อาชีพทุก ๆ อาชีพในปัจจุบัน เกือบจะกล่าวได้ว่าต้องเกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ ภาษามaths ซึ่งจะต้องรู้เรขาคณิตพรรณนา (Descriptive geometry) หรือแคลคูลัส ภาษามaths นักธุรกิจ บัญชีเขาจะต้องรู้การโปรแกรมเส้นตรง (Linear programming) และสถิติ ภาษามaths นักการทหาร ภาษามaths จิตรกร ฯลฯ แม้ที่สุดตามโหราจารย์ ซึ่งก็จะต้องรู้จักคำนวณวงของดวงดาว คงไม่มีวิชาไหน อีกแล้วกรรมมังที่จะมีบทบาทในชีวิตประจำวันมาเท่าแก่เช่นนี้ และยังมีมาจนเท่าทุกวันนี้ ภาษา บางภาษาอาจจะตาย กฎหมายอาจจะถูกยกเลิกไป วรรณคดีอาจจะล้าสมัย แต่คณิตศาสตร์ ซึ่งอาจกล่าวได้ว่าเป็น “ภาษา” ที่คนพูดกันมากที่สุดในโลกมากยิ่งขึ้นกว่าภาษาอังกฤษ บวกด้วย ภาษาจีน ฝรั่งเศส สเปน รวมกันนั้นจะยังคงมีบทบาทต่อไปอีกนานแสนนาน

ยุคสมัยต่อไป เราอาจจะติดต่อกันด้วยตัวเลขแทนตัวอักษร เราอาจจะต้องพูด ทุก ๆ อย่างออกมาในเชิงคณิตศาสตร์ ดังที่มีคำเกิดขึ้นว่า “ทำให้เป็นคณิตศาสตร์” (Mathematized it) ทั้งนี้ เพราะคณิตศาสตร์เป็นภาษาที่มีความแน่นอนกระชับรัดกุมยิ่งกว่าภาษาอื่นใด ต่อไปเมื่อ เราไปธนาคารเราก็จะมีเลขหมายเฉพาะของเราอย่างหนึ่ง มาเรียนก็อีกหมายเลขหนึ่ง นักศึกษามหาวิทยาลัยรามคำแหงย่อมทราบดีว่าเมื่อไปติดต่อกับทางมหาวิทยาลัย เขาจะถามว่า “รหัสเท่าใด” แทนที่จะเป็น “ชื่ออะไร” อิทธิพลของตัวเลขย่อมมหาศาล เพราะตัวเลขเป็นตัวแทน ของจำนวนซึ่งสามารถคำนวณหรือจัดกระทำได้ ง่ายกว่า

นอกจากนี้จากเนื้อหาของคณิตศาสตร์บางส่วนที่ต้องใช้อย่างปัจจุบันทันด่วนแล้ว คณิตศาสตร์อีกบางส่วนยังจำเป็นที่จะต้องใช้เป็นพื้นฐานของการเรียนหรือการที่จะเข้าใจ วิชาการอื่น ๆ ที่สูงขึ้นไปด้วย ซึ่งก็ต้องถือว่าเป็นประโยชน์ในชีวิตประจำวันเช่นกัน ส่วน เหตุผลที่จำต้องเป็นเช่นนั้นจะได้กล่าวต่อไปในข้อที่ 2 ต่่างหาก

## 2. ความสำคัญในแง่ที่เป็นภาษาของศาสตร์อื่น ๆ

เดิมทีเดียววิชาการทั้งหลายทั้งปวงอยู่ในรูปของการพรรณนาหรือในเชิงคุณภาพ นับตั้งแต่ยังคลุมเครือเป็นเรื่องที่หาคำตอบแท้แน่นอนไม่ได้ อย่างวิชาปรัชญา จนกระทั่งมี คำตอบชัดเจน มีระบบระเบียบเป็นทฤษฎี ก็กลายเป็นศาสตร์สาขาต่าง ๆ เช่น ฟิสิกส์ เคมี รัฐศาสตร์ เศรษฐศาสตร์ สังคมวิทยา เป็นต้น แต่ศาสตร์เหล่านี้ก็ยังอยู่ในรูปของการพรรณนา ในสมัยแรก ๆ

มนุษย์ต้องการความกระจัด ความเที่ยงแท้แน่นอนในทุก ๆ เรื่องที่เขาสนใจ ใฝ่รู้และเป็นที่ยอมรับว่าถ้าหากจะให้เป็นอย่างนั้น ก็จะต้องให้วิชาการต่าง ๆ อยู่ในรูปของ ปริมาณ (Quantitative) การเปลี่ยนจากคุณภาพไปเป็นปริมาณนี้เป็นอารยธรรมที่สำคัญที่สุด พึงสังเกตว่าศาสตร์ใดก็ตามที่อยู่ในรูปเชิงปริมาณ ศาสตร์นั้นจะมีความเจริญก้าวหน้าไป

อย่างรวดเร็ว เช่น ฟิสิกส์ เคมี เป็นต้น ตรงข้าม ถ้าศาสตร์ใดอยู่ในรูปคุณภาพ ศาสตร์นั้นจะเจริญช้า ล้าหลังกว่าศาสตร์ในพวกแรก เช่น ศิลปะ ฯลฯ

ก็เมื่อเป็นเช่นนี้ ย่อมจำเป็นอยู่เองที่คณิตศาสตร์ซึ่งเป็นเรื่องของปริมาณ หรือจำนวนหรือขนาด จะต้องเข้ามามีบทบาทในศาสตร์สาขาต่าง ๆ ที่มุ่งจะพัฒนาไปข้างหน้า

คงไม่ต้องกล่าวถึงฟิสิกส์ เคมี ดาราศาสตร์ ซึ่งเป็นวิทยาศาสตร์กายภาพ (Physical sciences) ซึ่งได้พัฒนาให้มาเป็นเชิงปริมาณเมื่อนานมาแล้วให้มากนัก แต่อย่างไรก็ตาม ควรเน้นไว้ในที่นี้ด้วยว่า ยิ่งคณิตศาสตร์พัฒนาไปมากเพียงใด ศาสตร์เหล่านั้นก็ยิ่งได้ใช้ความเจริญทางคณิตศาสตร์มาเป็นเครื่องมือเพื่อพัฒนาตนเองให้ก้าวหน้าไปมากขึ้นเพียงนั้น เป็นต้นว่า ฟิสิกส์ซึ่งเดิมใช้แต่เพียงพีชคณิต (Algebra) ต่อมาในสมัยของนิวตัน (Newton) ก็ได้ใช้แคลคูลัส ซึ่งตัวนิวตันเองผู้เป็นทั้งนักฟิสิกส์ และนักคณิตศาสตร์ ได้คิดค้นขึ้น และต่อมาก็มีการใช้แคลคูลัสของการแปรผัน (Calculus of variation) เรขาคณิตดีฟเฟอเรนเชียล (Differential geometry) เรขาคณิตนอนยูคลิด (Non-Euclidian geometry) ซึ่งเป็นผลงานของนักคณิตศาสตร์ในศตวรรษที่ 19 เข้ามาเป็นเครื่องมืออธิบายปรากฏการณ์ในทางฟิสิกส์ เมื่อมีกลศาสตร์ควอนตัม (Quantum mechanics) เกิดขึ้น ก็ยังได้ใช้ทฤษฎีแมตริกส์ (Matrices theory) และสถิติ (Statistics) เข้ามาช่วยเป็นรูปแบบ (Model) ในการอธิบาย จนอาจกล่าวได้ว่าวิชาฟิสิกส์กับคณิตศาสตร์ในปัจจุบัน ย่อมไม่สามารถแยกจากกันได้อย่างเด็ดขาด วิชาฟิสิกส์ทฤษฎี (Theoretical physics) ในอดีตก็กลายเป็นฟิสิกส์เชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical physics) ในปัจจุบัน

ในส่วนของเคมีนั้น ปัจจุบันก็ได้ใช้ทฤษฎีกรุป (Group theory) เข้ามาศึกษาโครงสร้างทางเคมีของธาตุต่าง ๆ นอกเหนือไปจากแคลคูลัสซึ่งใช้มานานนับศตวรรษแล้ว

กล่าวเฉพาะในสังคมศาสตร์และพฤติกรรมศาสตร์ วิชาต่าง ๆ ซึ่งเคยศึกษากันในเชิงบรรยาย ปัจจุบันหันมาใช้การศึกษาในเชิงวิเคราะห์เกือบจะเรียกได้ว่า ทั้งหมดทั้งสิ้นแล้ว ไม่ว่าจะเป็นจิตวิทยา, เศรษฐศาสตร์, สังคมวิทยา, รัฐศาสตร์, ประชากรศาสตร์, การศึกษาต่าง เราจะได้เห็นได้จากชื่อศาสตร์เหล่านั้นที่ปรากฏมีคำว่า mathematical หรือเชิงคณิตศาสตร์ประกอบอยู่ด้วย เป็น Mathematical psychology, Mathematical economics, Mathematical sociology, ฯลฯ

สำหรับสาขาของคณิตศาสตร์ซึ่งถูกนำไปใช้เป็นเครื่องมือ หรือ “ภาษา” ของศาสตร์เหล่านั้นก็มีตั้งแต่สาขาที่ผิวเผินที่สุด จนกระทั่งที่ลึกซึ้งที่สุด สาขาเหล่านั้นก็มีสถิติและความน่าจะเป็น ทฤษฎีเกม (Game theory) สมการดีฟเฟอเรนเชียล (Differential equations) พีชคณิตเชิงเส้น (Linear algebra) ทฤษฎีกรุป (Group theory) พีชคณิตของเซต (Set algebra) ฯลฯ เป็นที่ยอมรับกันในปัจจุบันว่าไม่มีคณิตศาสตร์สาขาใดเลยในปัจจุบันซึ่งไม่ได้ถูกนำไปประยุกต์ใช้กับศาสตร์อื่น ๆ แม้กระทั่งทฤษฎีจำนวนซึ่งถือกันว่าเป็นคณิตศาสตร์บริสุทธิ์ที่สุด (The purest

of the pure) ก็ยังได้มีการประยุกต์ใช้ในทางดาราศาสตร์แล้ว ดังนั้น คำกล่าวของฮาร์ดี้ (Hardy) นักคณิตศาสตร์คนสำคัญของอังกฤษผู้หนึ่งที่ว่า “คณิตศาสตร์บริสุทธิ์หมายถึงคณิตศาสตร์ที่ไม่มีประโยชน์” จึงน่าจะไม่จริง

เทคโนโลยีสมัยใหม่ เช่น คอมพิวเตอร์ หรือเครื่องคิดเลข (Calculator) หรือวิทยุ โทรทัศน์ก็เป็นส่วนหนึ่งที่แสดงให้เห็นว่าคณิตศาสตร์มีบทบาทต่อวิชาการเหล่านี้ เพราะมีเบื้องหลังสิ่งประดิษฐ์เหล่านี้ก็คือคณิตศาสตร์สาขาตรรกวิทยาเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical logic) พีชคณิตของบูล (Boolean algebra) ฯลฯ นั่นเอง

ที่กล่าวมาทั้งหมดนี้ย่อมชี้ชัดว่าถ้าหากเรายอมรับว่าวิชาการต่าง ๆ ได้ช่วยพัฒนาชีวิตความเป็นอยู่ของเรา หรือพัฒนาอารยธรรมของโลกแล้ว เราจะต้องยอมรับว่าเป็นผลอันเนื่องมาจากพัฒนาการของคณิตศาสตร์นั่นเอง ดังที่เคยมีผู้ถามไอน์สไตน์ นักวิทยาศาสตร์คนสำคัญของโลกว่า เหตุใดไอน์สไตน์จึงคิดทฤษฎีเอกภาพสนาม (Unified field theory) ไม่สำเร็จ ไอน์สไตน์ตอบว่า อาจเป็นไปได้ว่าเราต้องมีคณิตศาสตร์สาขาใหม่ขึ้นมาเสียก่อนก็เป็นได้

### 3. ความสำคัญในแง่ที่เป็นวิธีการคิด

คณิตศาสตร์มีความสำคัญในแง่ของวิธีการคิดไม่น้อยไปกว่าความสำคัญในแง่อื่น ๆ ทั้งนี้ เป็นเพราะคณิตศาสตร์เป็นเรื่องของเหตุผล และคณิตศาสตร์มีโครงสร้างที่มีลักษณะเฉพาะพิเศษ กล่าวคือ โครงสร้างของคณิตศาสตร์มีลำดับจากอนิยามไปสู่นิยาม กติกา และทฤษฎีบทชัดเจนทุกชั้นทุกตอน ซึ่งถ้าเมื่อเดินตามลำดับนี้ มนุษย์ทุกรูปทุกนามที่สามารถที่จะใช้เหตุผลได้ย่อมเข้าใจและยอมรับว่าวิธีการเช่นนั้นเป็นวิธีการที่ดีเลิศ

เกือบจะไม่มีใครที่ไม่ประทับใจในวิธีการของคณิตศาสตร์ แม้กระทั่งผู้ที่กล่าวว่าคณิตศาสตร์เป็นเรื่องที่ยากต่อการเข้าใจ หรือบางคนอาจจะเลยไปถึงว่าคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่น่าเบื่อหน่าย มีแต่สูตร มีแต่สัญลักษณ์ ฯลฯ คำกล่าวเช่นนี้ไม่ว่าจะถูกหรือผิดเพียงไรก็ตาม แต่ผู้ที่ถูกกล่าวหาพูดเช่นนี้ก็มิได้ปฏิเสธเลยว่าวิธีการของคณิตศาสตร์นั้นเป็นวิธีการที่แน่นอนชัดเจน ถ้าเราจะไม่หาญใช้คำว่า “ถูกต้อง” ยิ่งกว่าวิชาอื่นใด

และอันที่จริงแล้ว สูตรหรือสัญลักษณ์นั้นไม่ใช่แก่นแท้ของคณิตศาสตร์เลย หลักสูตรที่ดี ตำราหรือการสอนคณิตศาสตร์ที่ดี อาจทำให้ผู้เรียนหรือผู้ที่เกี่ยวข้องกับการใช้คณิตศาสตร์เกิดความนึกคิดเช่นนั้น ซึ่งเป็นความคิดที่ผิด

วิชาคณิตศาสตร์สอนให้คนรู้จักใช้เหตุผล คณิตศาสตร์ไม่ต่างอะไรกับตรรกศาสตร์ ซึ่งมีแบบแผนหรือกระบวนของวิธีการให้เหตุผลว่า ถ้าเช่นนั้นแล้ว เช่นนี้, ถ้า A และ B หรือ ถ้ามี A และ B ย่อมสรุปได้ว่ามี A รัสเซล (Russell) ได้แสดงไว้เมื่อปี 1910 ว่าคณิตศาสตร์และตรรกศาสตร์คือสิ่งเดียวกัน เนื่องจากวิธีการให้เหตุผลในเชิงตรรกวิทยาเชิงคณิตศาสตร์

นี่มีความสำคัญมาก จึงจะขอยกวิธีการให้เหตุผลอย่างง่าย ๆ บางข้อมาให้ดูเป็นตัวอย่างในที่นี้ เช่น

1. ถ้า "A" เป็นจริง "ไม่ใช่ A" ต้องเป็นเท็จ
2. ถ้ามี A และ B ย่อมสรุปได้ว่ามี A
3. ถ้ามี A ย่อมสรุปได้ว่า มี A หรือ B
4. ถ้ามี "ถ้า A แล้ว B" และมี A ย่อมสรุปได้ว่ามี B
5. ถ้ามี "ถ้า A แล้ว B" และมี "ถ้า B แล้ว C" ย่อมสรุปได้ว่ามี "ถ้า A แล้ว C"
6. ถ้ามี A, B, C และมี ไม่ใช่ A ไม่ใช่ B ย่อมสรุปได้ว่า มี C ฯลฯ

อันที่จริง วิธีการให้เหตุผลเช่นนี้อาจจะถือได้ว่าเป็นธรรมชาติของมนุษย์ เว้นแต่ในบางเรื่องเราสามารถให้เหตุผลได้รัดกุมกว่าที่ปรากฏในธรรมชาติของมนุษย์ เช่น ในกระสวน "ถ้า.....แล้ว....." ซึ่งในคณิตศาสตร์ถือว่าถ้าหากว่าประโยค "ถ้า P แล้ว Q" จะเป็นเท็จ แล้ว P จะต้องเป็นจริง และ Q จะต้องเป็นเท็จ ข้อนี้ที่จริงก็เป็นธรรมชาติ การให้เหตุผลของมนุษย์อีกนั่นแหละ แต่เนื่องจากว่าภาษาที่เราใช้กันอยู่ไม่มีความชัดเจนรัดกุมพอในบางโอกาส จึงทำให้เราผิดพลาดไปได้ง่าย ๆ ถ้าเพียงแต่เราจะดูตัวอย่างคำพูดของนาย ก. ว่า "ถ้าฉันเป็นมหาเศรษฐี ฉันจะไปเที่ยวรอบโลก" โดยที่แท้จริงแล้ว นาย ก. ไม่ได้เป็นมหาเศรษฐี เราอนุมานไม่ได้ว่า นาย ก. พูดเท็จ เพราะเขาบอกว่า ถ้า เขาเป็นแล้วเขาจะทำอย่างนั้น การที่เขาไม่ได้ทำอย่างนั้น (หรืออาจจะทำ) ก็ไม่ได้แสดงว่าเขาผิดเลยแม้แต่น้อย ตรงข้าม ถ้าหากว่าเขาเป็นมหาเศรษฐีจริง แต่เขาไม่ได้ไปเที่ยวรอบโลก เราต้องถือว่าเขาพูดเท็จ ดังนี้

ความสามารถในการให้เหตุผล (Reasoning) นี้เป็นเครื่องวัดระดับสติปัญญาของมนุษย์ที่สำคัญที่สุด

นอกจากคณิตศาสตร์จะเป็นเรื่องของเหตุผลแล้ว โครงสร้างของคณิตศาสตร์เองยังมีบทบาทต่อการแก้ปัญหาหรือต่อวิธีการคิดของมนุษย์มาก ลักษณะสัจพจน์ศาสตร์ (Axiomatics) ของคณิตศาสตร์ ก็เริ่มต้นด้วยนิยาม แล้วตามด้วยนิยาม กติกา และทฤษฎีบท (ซึ่งจะได้พูดอย่างละเอียดในบทต่อไป) เป็นแบบแผนการคิดที่ชัดเจน ไม่อาจโต้แย้งได้ ถ้าหากว่าใครจะลองศึกษาถึงโครงสร้างของพีชคณิตก็จะมองเห็นได้ชัดเจนว่าการกำหนดสัญลักษณ์ขึ้นมาแทนจำนวนนั้น ช่วยในการแก้ปัญหาต่างๆ มากมายมาก ก็การกำหนดสัญลักษณ์ขึ้นมานั้นก็จะต้องเดินตามโครงสร้างของคณิตศาสตร์นั่นเอง

โดยสรุปแล้วคณิตศาสตร์ช่วยให้เราสามารถคิดได้อย่างมีเหตุผลถูกต้อง คิดอย่างมีระบบระเบียบตามลักษณะโครงสร้างของคณิตศาสตร์ และคิดอย่างละเอียดลออ มีลำดับ มีความถูกต้องชัดเจน ไม่ด่วนที่จะสรุปตามสามัญสำนึก หรือความเคยชิน ไม่วกวน

สับสนระหว่างเหตุและผล ซึ่งคุณสมบัติเหล่านี้สำหรับผู้เรียนคณิตศาสตร์ ย่อมสามารถสร้างและสะสมพร้อมกับสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันหรือในศาสตร์แขนงอื่น ๆ ได้ ดังที่มักจะถามกันอยู่เสมอว่า สอนถอดรากที่ 2 ไปทำไม ในเมื่อจะไม่ได้ใช้ทำมาหากินเลย คำตอบคงชัดเจนในตอนที่กำลังตั้งต้นว่า ก็เพื่อให้รู้จักคิดมีเหตุผล มีลำดับ และมีความละเอียดรอบคอบนั่นเอง และก็คุณสมบัติเช่นนี้มิใช่หรือที่เรามุ่งจะปลูกฝังเพื่อพัฒนาสติปัญญาของคน คุณสมบัติเช่นที่ว่ามีใช้หรือที่ได้มีการวิจัยพบว่ามีมากที่สุดนี้นักคณิตศาสตร์ ไม่ว่าจะนักคณิตศาสตร์จะพูดอะไรย่อมมีความระมัดระวัง คิดตรองด้วยเหตุผลเสียก่อน มีการสังเกตที่รอบคอบ (Careful observation) มีความละเอียดในการทำงานทุกอย่าง ถึงแม้ว่าในบ้านเมืองเราจะไม่มีนักคณิตศาสตร์อยู่เลย มีแต่เพียงผู้เรียนผู้สอนคณิตศาสตร์ แต่ก็เข้าใจว่าคงสามารถสร้างคุณสมบัติเช่นนี้ขึ้นได้บ้างตามส่วน