บทที่ 9
ทฤษฎีการรอคอย
(Queueing Theory)

คิว (Queue) หรือแถวรอคอย (Waiting Line) เกิดขึ้นเมื่อไปรับบริการ แต่ผู้ให้บริการไม่ว่างจึงจำเป็นต้องนั่งรอ ในบางครั้งถ้าไม่มีที่ให้รอเราอาจตัดสินใจไปรับบริการที่อื่น เหตุการณ์เช่นนี้เกิดขึ้นเสมอเป็นประจำ เช่น การออกมาทำงานนอกบ้านจะประสบกับปัญหาจราจรติดขัดรถต้องเข้าคิวคอยกัน การยืนเข้าแถวรอใช้บริการโทรศัพท์สาธารณะ รอคอยรับบริการในร้านตัดผม หรือในธนาคาร หรือที่ทำการไปรษณีย์ การไปซื้อตั๋วเพื่อเข้าดูภาพยนตร์ รอเข้ารับบริการในโรงพยาบาล รอจ่ายเงินตรงช่องจ่ายเงินในซุปเปอร์มาร์เกต เป็นต้น ดังนั้น เราจะมีวิธีการอย่างไรที่จะปรับปรุงหรือแก้ไขปัญหาให้ผู้ที่อยู่ในแถวรอคอยรับบริการเสียเวลาน้อยที่สุด และให้ได้รับบริการที่พึงพอใจมากที่สุด

ในปี ค.ศ.1909 A.K Erlang นักวิทยาศาสตร์ชาวเดนมาร์กได้พยายามที่จะแก้ปัญหาการคับคั่งของชุมสายโทรศัพท์ ในขณะที่มีผู้ใช้โทรศัพท์มากโอเปอร์เรเตอร์ของชุมสายไม่สามารถต่อสายได้ทันทีเมื่อมีโทรศัพท์เข้ามาที่ชุมสาย จึงเกิดการเสียเวลารอ เขาได้พยายามค้นคิดวิธีการแก้ปัญหาจนในที่สุดได้เสนอผลงานตีพิมพ์บทความชื่อ "Solution of Some Problem in The Theory of Probabilities of Significance in Automatic Telephone Exchange" ต่อมาในปี ค.ศ. 1927 Molina และ Fry ได้เสนอผลงานสนับสนุนและพัฒนาทฤษฎีการรอคอยขึ้นมาอีก จนกระทั่งเข้าสู่สมัยสงครามโลกครั้งที่สอง ปัญหาและทฤษฎีของ Erlang จึงกลายมาเป็น "ทฤษฎีการรอคอย" สำหรับปัญหาทั่วไป

<u>วัตถุประสงค์ของการบริหารการรอคอย</u>

การแก้ปัญหาให้ผู้ที่อยู่ในแถวคอยเสียเวลาน้อยที่สุด และได้รับบริการที่พึงพอใจมากที่สุดทำได้โดยการเพิ่มหน่วยบริการหรืออุปกรณ์ให้บริการ แต่การเพิ่มหน่วยบริการแต่ละ

หน่วยย่อมทำให้ค่าใช้จ่ายเพิ่มขึ้น ในขณะเดียวกันเวลาที่ลูกค้าต้องเสียเวลารอคอยจะลดลงไปเรื่อย ๆ การทำให้ลูกค้าเสียเวลารอคอยน้อยที่สุดยังเพิ่มความพอใจให้ลูกค้ามากขึ้น แต่เราไม่สามารถจัดหน่วยบริการมากพอที่จะประกันได้ว่าไม่มีแถวรอคอยเกิดขึ้นเลยเพราะค่าใช้จ่ายจะสูงมาก ฝ่ายบริหารต้องพยายามทำให้อัตราการให้บริการเหมาะสมที่สุด โดยเสียต้นทุนรวมของระบบต่ำที่สุด

ต้นทุนรวมประกอบด้วย

1. ต้นทุนที่เกิดจากการรอคอยรับบริการของลูกค้า
2. ต้นทุนในการจัดอุปกรณ์บริการ เช่น ต้นทุนการว่าจ้างพนักงานให้บริการ เครื่องอำนวยความสะดวกในการให้บริการ เป็นต้น

<u>องค์ประกอบของระบบการรอคอย</u>

องค์ประกอบของระบบการรอคอยประกอบด้วย

1. ลูกค้าที่มารับบริการ
2. แถวคอย (Queue)
3. หน่วยบริการ หรืออุปกรณ์ที่ให้บริการ

ตารางที่ 9 - 1 แสดงองค์ประกอบของระบบการรอคอย

สถานการณ์	ลูกค้าที่มารับบริการ	ความต้องการรับบริการ	หน่วยบริการ
เรือสินค้าไปที่ท่าเรือ	เรือสินค้า	ขนถ่ายสินค้า	ท่าเรือ
การซ่อมแซมเครื่องจักร	เครื่องจักรที่เสีย	ซ่อมแซม	ช่างซ่อม
การประกอบชิ้นส่วนในโรงงาน	ชิ้นส่วนที่จะประกอบ	การประกอบ	คนหรือเครื่อง
คลีนิคแพทย์	คนไข้	ตรวจรักษา	นายแพทย์
รถยนต์ที่ติดไฟแดง	รถยนต์	ผ่านสี่แยก	ตำรวจจราจร
เครื่องบินลงจอด	เครื่องบิน	ลงจอด	ทางวิ่ง(สนามบิน)

ลักษณะที่สำคัญของระบบรอคอย

ระบบรอคอยมีลักษณะสำคัญแยกออกได้ 7 ลักษณะดังต่อไปนี้

1. การแจกแจงการเข้ามา (Arrival distribution)

รูปแบบการมาถึงของผู้มาขอรับบริการแบ่งออกเป็น

1.1 การมาเป็นกลุ่มใหญ่มีช่วงเวลาแน่นอนบ้างไม่แน่นอนบ้าง ดังเช่น กลุ่มผู้โดยสารที่ลงมาจากรถโดยสารประจำทาง

1.2 การมาถึงอย่างสม่ำเสมอ ดังเช่น ในสายการผลิต (Production line) น้ำอัดลม หรืออาหารกระป๋อง องค์ประกอบการผลิตมาถึงหน่วยบริการแต่ละจุดด้วยอัตราที่สม่ำเสมอ การแจกแจงการเข้ามาจะมีลักษณะใกล้เคียงกับการแจกแจงแบบเสมอต้นเสมอปลาย (Uniform distribution)

1.3 การมาถึงอย่างไม่เป็นระเบียบ (Random) ดังเช่น การมาถึงของลูกค้าที่หน่วยบริการของธนาคาร จำนวนรถที่มาถึงด่านเก็บเงินค่าผ่านถนน การมาถึงอย่างไม่เป็นระเบียบเป็นรูปแบบหนึ่งที่พบมากและยุ่งยากมากที่สุด

ช่วงเวลาการมาขอรับบริการของลูกค้า (Interarrival Time) เป็นเวลาไม่แน่นอนและแตกต่างกันออกไป มีลักษณะการแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล(Exponential) เช่น ทุก ๆ 8 นาทีโดยเฉลี่ยจะมีเครื่องจักรถูกส่งมาให้ตรวจสอบชิ้นส่วน 1 เครื่อง เป็นต้น

ส่วนการแจกแจงอัตราการมารับบริการจะมีคุณสมบัติใกล้เคียงกับการแจกแจงแบบพัวซอง (Poisson Distribution) และเออร์แลงก์ (Erlang Distribution)

โดยทั่วไปอัตราการมารับบริการ หมายถึงอัตราถัวเฉลี่ยที่บุคคลหรือสิ่งของมาปรากฏที่หน่วยบริการเพื่อรับบริการมักจะแสดงในรูปอัตราการมารับบริการโดยเฉลี่ยต่อหนึ่งหน่วยเวลา (จำนวนลูกค้าที่มาต่อหนึ่งหน่วยเวลา) เช่น รถมาถึงด่านที่เก็บค่าธรรมเนียมในอัตราเฉลี่ย 50 คันต่อชั่วโมง ลูกค้าที่เข้ามาที่ทำการไปรษณีย์โดยเฉลี่ย 30 คนต่อชั่วโมง เป็นต้น

2. <u>การแจกแจงการให้บริการ</u> (Service distribution)

รูปแบบการให้บริการแก่ผู้มาขอรับบริการแบ่งออกเป็น

2.1 การบริการอย่างสม่ำเสมอ

2.2 การบริการทันทีทันใดและมีช่วงที่ไม่มีการบริการเลย

2.3 การบริการอย่างไม่เป็นระเบียบ เวลาที่ใช้ในการให้บริการแก่ลูกค้าที่เข้ามารับบริการนั้นมีต่าง ๆ กัน

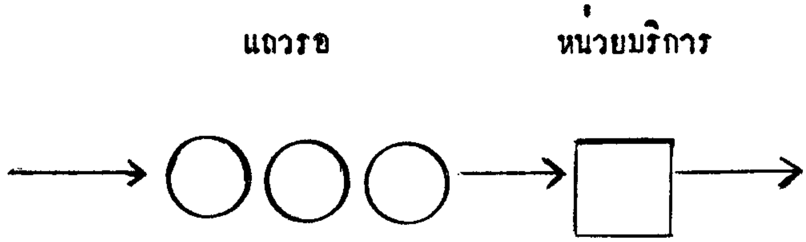
การแจกแจงของเวลาการให้บริการอาจเป็นแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล (Exponential Distribution) เออร์แลงก์ (Erlang Distribution) หรือ เสมอต้นเสมอปลาย (Uniform Distribution) เช่น พนักงานตรวจสอบชิ้นส่วนของเครื่องจักรแต่ละเครื่องใช้เวลาโดยเฉลี่ย 5 นาทีต่อเครื่อง เป็นต้น

อัตราการให้บริการ หมายถึงอัตราที่หน่วยบริการสามารถให้บริการแก่บุคคลหรือสิ่งของที่เข้ามารับบริการ อัตราการให้บริการจะแสดงเป็นอัตราการบริการโดยเฉลี่ยต่อหนึ่งหน่วยเวลา (จำนวนลูกค้าที่ได้รับบริการต่อหนึ่งหน่วยเวลา) เช่น เครื่องถ่ายเอกสารสามารถให้บริการในอัตราเฉลี่ย 500 แผ่นต่อชั่วโมง เป็นต้น

อัตราการให้บริการมีลักษณะการแจกแจงแบบพัวซอง (Poisson)

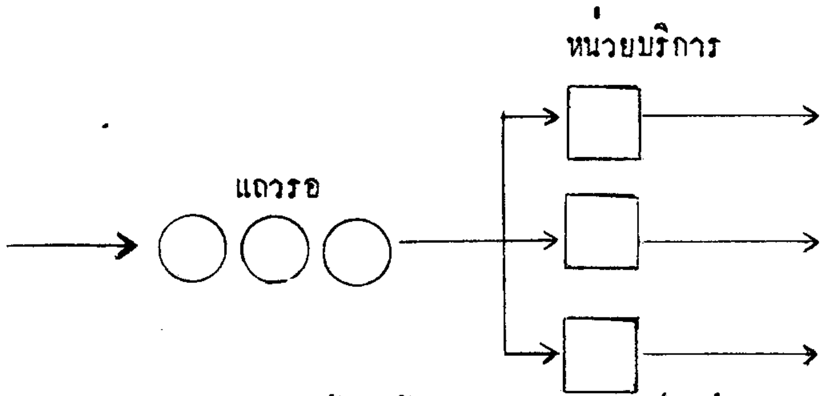
3. <u>จำนวนช่องบริการ</u> (Service Channels) แบ่งออกเป็น 4 แบบ คือ

3.1 ช่องบริการเดียวและบริการชนิดเดียว (Single Channel, single phase)



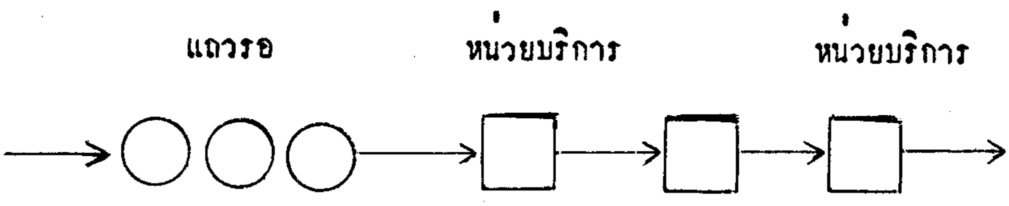
ลักษณะนี้มีหน่วยบริการเพียงหน่วยเดียว ตัวอย่างเช่น ร้านตัดผมที่มีเก้าอี้ตัวเดียว, การจอดรถยนต์รอเติมน้ำมันที่มีที่เติมเครื่องเดียว, ร้านบริการซ่อมวิทยุ, ชิ้นงานรอเครื่องจักรในการผลิต, ช่องฝากหรือถอนเงินในธนาคาร, การซ่อมเครื่องบิน, คนไข้ไปรอรับการรักษาที่คลีนิคแพทย์ เป็นต้น

3.2 ช่องรับบริการ r ช่องทางแบบขนานและบริการอย่างเดียว (Multi - channel, single - phase case)



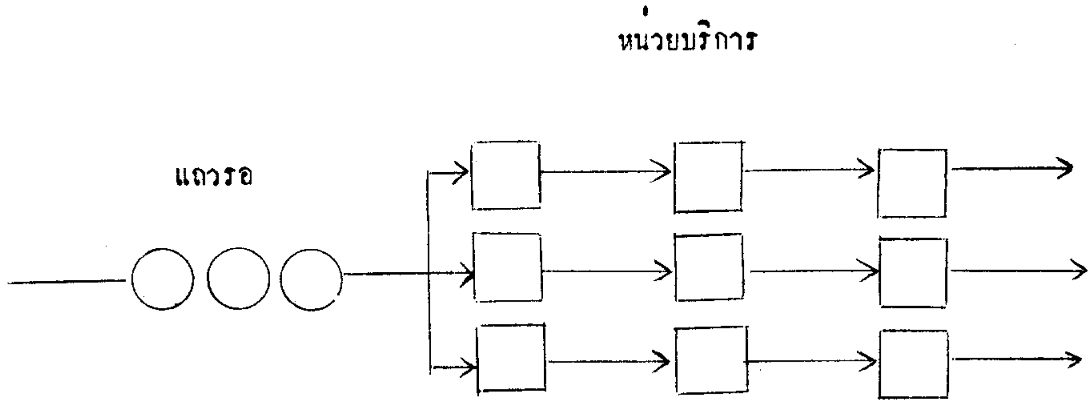
ลักษณะนี้จะคล้าย ๆ กับแบบแรกแต่มีหน่วยบริการเพิ่มขึ้น ตัวอย่างได้แก่ ร้านตัดผมมีโต๊ะบริการหลายตัว, ปั๊มน้ำมัน, ท่าเรือ, โรงพยาบาล, สนามบิน, ลิฟท์ เป็นต้น

3.3 ช่องบริการ ณ ช่องทางแบบอนุกรมและบริการหลายอย่าง (Single - channel, multi - phase case)



ลักษณะการบริการแบบนี้จะได้แก่ การประกอบเป็นสินค้าในโรงงาน, การจราจรในถนนเมื่อติดไฟแดง, การบริการในคาเฟทีเรีย เป็นต้น

3.4 ช่องบริการหลายช่องแบบขนานและอนุกรมและบริการหลายอย่าง (Multi - channel, multi - phase case)



ลักษณะการบริการแบบนี้จะคล้ายกับแบบที่ 3.3 แต่เพิ่มหน่วยบริการขึ้นมาอีก

4. <u>ระเบียบของแถวคอย</u> (Queue discipline)

ระเบียบของแถวคอย หมายถึง ลำดับก่อนหลังที่ลูกค้าซึ่งอยู่ในระบบจะได้รับการบริการจากผู้ให้บริการ ซึ่งอาจเป็นแบบ

4.1 มาก่อนได้รับบริการก่อน (First come/First served: FCFS)

4.2 มาทีหลังได้รับบริการก่อน (Last come/First served:LCFS)

4.3 จัดให้บริการอย่างสุ่ม (Service in random order:SIRO)

4.4 จัดบริการแบบอื่น ๆ

ในบทนี้จะกล่าวถึงเฉพาะระเบียบการรอคอยแบบมาก่อนได้รับบริการก่อนเท่านั้น

5. <u>ลักษณะการให้บริการของหน่วยบริการ</u> อาจมีขีดจำกัด หรือไม่มีขีดจำกัดในการรับลูกค้า เช่น การให้บริการคนไข้ในโรงพยาบาลจะมีขีดจำกัดอยู่ที่จำนวนเตียงคนไข้ในแผนกหนึ่งของโรงพยาบาลมีจำกัด ที่จอดรถที่มีช่องจอดรถจำกัด เป็นต้น

6. <u>จำนวนลูกค้าที่มารับบริการ</u> ก็อาจมีจำนวนจำกัดหรือไม่จำกัด

7. <u>สถานะแปรเปลี่ยน</u> (Transient) <u>และสถานะอยู่ตัว</u> (Steady)

การวิเคราะห์ระบบการรอคอยจะขึ้นอยู่กับพฤติกรรมของระบบในระยะเวลาหนึ่ง ระบบการรอคอยจะอยู่ในสถานะแปรเปลี่ยนถ้าพฤติกรรมของระบบ (ลักษณะการดำเนินงาน) ขึ้นอยู่กับเวลา กรณีนี้มักจะปรากฏในระยะแรกของการดำเนินงานของระบบ ซึ่งพฤติกรรมจะยังขึ้นอยู่กับเงื่อนไขเริ่มแรก แต่เมื่อการดำเนินงานเป็นไปในระยะเวลานานมากพอ พฤติกรรมต่าง ๆ ก็เป็นอิสระจากเวลา นั่นคือระบบการรอคอยเข้าสู่สถานะอยู่ตัว

การที่ระบบจะอยู่ในสถานะอยู่ตัว คือ เวลาทั้งหมดตั้งแต่เริ่มต้นการดำเนินงานจะต้องมากเพียงพอ และอัตราการเข้ามารับบริการต้องน้อยกว่าอัตราการให้บริการ ($\lambda < \mu$)

การศึกษาระบบรอคอยในบทนี้จะศึกษาในกรณีที่ระบบอยู่ในสถานะอยู่ตัว เช่น ในตัวอย่างของแถวคอยที่ช่องขายบัตรภาพยนตร์ นั้น รูปแบบปัญหาเมื่อเริ่มดำเนินงานจะเริ่มต้นด้วยแถวคอยว่างและเจ้าหน้าที่ขายบัตรว่าง ต่อมาลูกค้าเข้ามาด้วยช่วงเวลาห่างกันถ้าหากเจ้าหน้าที่ขายบัตรขายได้ทันกับปริมาณลูกค้าที่เข้ามารับบริการก็จะไม่มีลูกค้ารอคอยการบริการ แต่ถ้าขายไม่ทันก็จะมีลูกค้าที่ต้องรอคอยอยู่ในแถวคอยและสะสมจำนวนมากขึ้นเรื่อย ๆ การที่เราจะทราบว่าเจ้าหน้าที่ขายบัตรทันหรือไม่ทันนั้นเราจะเห็นได้ว่าในระยะเวลาสั้นเราไม่สามารถบอกได้ เพราะสภาวะของระบบยังอยู่ในขั้นสถานะแปรเปลี่ยน กล่าวคือ ระบบงานยังทำงานไม่สมบูรณ์เต็มที่ ดังนั้นจึงต้องใช้เวลาในรูปแบบของปัญหาให้นานพอที่ระบบงานจะสามารถทำงานได้เต็มที่ คือเข้าสู่สถานะอยู่ตัวแล้วจึงนำเอาผลลัพธ์ที่ได้จากรูปแบบปัญหาที่มีสถานะอยู่ตัวมาใช้วิเคราะห์ต่อไป

<u>สัญลักษณ์ที่ใช้ในตัวแบบการรอคอย</u>

สัญลักษณ์ต่าง ๆ ที่อธิบายตัวแบบการรอคอยในตารางที่ 9 - 1 จะใช้หน่วยเวลาเป็นชั่วโมง ซึ่งตามความเป็นจริงแล้วอาจมีหน่วยเป็นนาที, วัน, เดือน หรือปีก็ได้ แต่ขอให้อยู่ในหน่วยเวลาเดียวกันหมดเท่านั้น นอกจากนี้ลูกค้าที่แสดงไว้ในตารางมีความหมายถึงคน ซึ่งแท้จริงอาจเป็นสิ่งของ เครื่องจักร ผลิตภัณฑ์หรือสิ่งอื่น ๆ ได้

ตารางที่ 9 - 1

สัญลักษณ์ที่ใช้ในตัวแบบการรอคอย

สัญลักษณ์	ความหมาย	หน่วยที่วัด
n	จำนวนลูกค้าในระบบ	หน่วย
$P_n(t)$	ความน่าจะเป็นที่มีลูกค้า n หน่วยในระบบที่เวลา t ใด ๆ (โดยสมมติว่าระบบเริ่มต้นที่เวลา $t=0$)	—
P_n	ความน่าจะเป็นที่มีลูกค้า n หน่วยในระบบในสถานะอยู่ตัว	—
λ_n	อัตราการมารับบริการเมื่อระบบมีลูกค้ารออยู่แล้ว n หน่วย	หน่วย/ชั่วโมง
λ	อัตราการมารับบริการโดยเฉลี่ย (จำนวนลูกค้าที่มาต่อหนึ่งหน่วยเวลา)	หน่วย/ชั่วโมง
$\frac{1}{\lambda_n}$	ช่วงเวลาระหว่างการเข้ามาเมื่อมีลูกค้าอยู่ในระบบแล้ว n คน	ชั่วโมง/หน่วย

สัญลักษณ์	ความหมาย	หน่วยที่วัด
$\frac{1}{\lambda}$	ช่วงเวลาระหว่างการเข้ามารับบริการโดยเฉลี่ย	ชั่วโมง/หน่วย
μ_n	อัตราการให้บริการ เมื่อระบบมีลูกค้าอยู่แล้ว n หน่วย	หน่วย/ชั่วโมง
μ	อัตราการให้บริการโดยเฉลี่ย (จำนวนลูกค้าที่ได้รับบริการต่อหนึ่งหน่วยเวลา)	หน่วย/ชั่วโมง
$\frac{1}{\mu_n}$	ช่วงเวลาในการให้บริการลูกค้า 1 ราย เมื่อมีลูกค้าอยู่ในระบบแล้ว n คน	ชั่วโมง/หน่วย
$\frac{1}{\mu}$	ช่วงเวลาในการให้บริการลูกค้าโดยเฉลี่ย	ชั่วโมง/หน่วย
c	จำนวนช่องทางการให้บริการ	ช่อง
W_q	เวลาโดยเฉลี่ยที่ลูกค้ารอในแถวคอยก่อนรับบริการ	ชั่วโมง/หน่วย
W_S	เวลาโดยเฉลี่ยที่ลูกค้าหนึ่งรายอยู่ในระบบการมารับบริการทั้งหมด (เวลารอคอยในแถวคอย + เวลาที่ได้รับบริการ)	ชั่วโมง/หน่วย
L_q	จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยในแถวคอย	หน่วย/ชั่วโมง
L_s	จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยในระบบ (จำนวนลูกค้าในแถวคอย + จำนวนลูกค้าที่กำลังรับบริการ)	หน่วย/ชั่วโมง

สัญลักษณ์	ความหมาย	หน่วยที่วัด
P_o	โอกาสที่หน่วยบริการจะว่าง (โอกาสที่ไม่มีลูกค้าอยู่ในระบบ)	–
$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$	อัตราการใช้งานของหน่วยบริการ (Utilization Factor)	อัตราส่วน

<u>ความสัมพันธ์ระหว่าง</u> W_s, W_q , L_s และ L_q

สมมติให้ λ_n คงที่เท่ากับ λ ทุก ๆ ค่า n ในสถานะอยู่ตัวจะได้ว่า

$$L_s = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n \quad \text{และ} \quad L_q = \sum_{n=c+1}^{\infty} (n-c)P_n$$

$$L_s = \lambda W_s \quad \text{และ} \quad L_q = \lambda W_q$$

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

คูณ λ ทั้งสองข้าง

$$\lambda W_s = \lambda W_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$L_s = L_q + \rho \qquad \text{โดยที่} \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

การวิเคราะห์ระบบรอคอย

1. การแจกแจงการเข้ามาสู่ระบบ (Distribution of Arrivals)

อัตราเข้ามารับบริการส่วนใหญ่ในชีวิตจริงจะมีการแจกแจงแบบพัวซอง (Poisson Distribution) มีนักคณิตศาสตร์หลายคนได้พิสูจน์การมารับบริการของร้านค้า, การมาของรถยนต์ที่จุดใดจุดหนึ่งบนท้องถนน สามารถจัดให้เป็นลักษณะการกระจายแบบพัวซองโดยมีอัตราการมารับบริการโดยเฉลี่ยใช้แทนด้วย λ (แลมด้า) หน่วยเป็นการมาต่อหน่วยเวลา เช่น 3 คน/ชั่วโมง, 10 คน/วัน และค่าความแปรปรวนเท่ากับ λ ด้วย

2. การแจกแจงของช่วงเวลาระหว่างการเข้ามา (Distribution of Interarrival Times)

เราสามารถพิสูจน์ได้อีกเช่นเดียวกันว่าถ้าอัตราการมารับบริการเป็นการกระจายแบบพัวซองด้วยค่าเฉลี่ย λ แล้ว จะได้ว่าช่วงเวลาระหว่างการมาขอรับบริการของลูกค้าจะมีการกระจายแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล (Exponential Distribution) ด้วยเวลาเฉลี่ย $\frac{1}{\lambda}$ มีหน่วยเป็น เวลาต่อหน่วย เช่น 10 นาทีต่อคน, 1 ชั่วโมงต่อคน และค่าความแปรปรวนเท่ากับ $\frac{1}{\lambda^2}$

ความสัมพันธ์อันนี้จะเป็นเฉพาะพัวซองหรือเอ็กซ์โพเนนเชียลเท่านั้น

3. การแจกแจงการออกจากระบบ (Distribution of Departures)

การแจกแจงการออกจากระบบของผู้มารับบริการจะมีการแจกแจงแบบพัวซองชนิด Truncated โดยมีอัตราการให้บริการโดยเฉลี่ย μ หน่วยเป็นจำนวนที่สามารถให้บริการต่อหน่วยเวลา เช่น 5 คน/ชั่วโมง

4. <u>การแจกแจงของเวลาที่ใช้ในการให้บริการ</u>

(Distribution of Service Times)

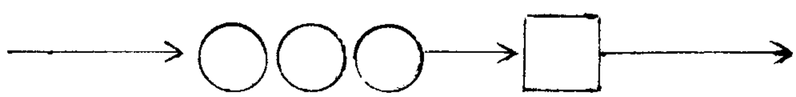
เราสามารถแสดงได้ว่า ถ้าการกระจายของอัตราการให้บริการเป็นแบบพัวซองมีค่าเฉลี่ย μ ต่อหน่วยเวลาแล้วการแจกแจงของเวลาที่ใช้ในการให้บริการจะมีการแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียลมีค่าเฉลี่ย $\frac{1}{\mu}$ และความแปรปรวน $\frac{1}{\mu^2}$ มีหน่วยเป็นเวลาต่อหน่วยที่ได้รับบริการ เช่น 15 นาทีต่อคน เป็นต้น

ในที่นี้จะไม่กล่าวถึงรายละเอียดเกี่ยวกับการพิสูจน์ให้เห็นถึงการแจกแจงของตัวแปรดังกล่าวข้างต้น ถ้าท่านสนใจจะหาอ่านได้ในหนังสือเกี่ยวกับทฤษฎีการรอคอยได้ทุกเล่ม

<u>ตัวแบบการรอคอยชนิดมีช่องทางให้บริการเพียงช่องทางเดียวและหน่วยบริการไม่มีขีดจำกัดในการให้บริการลูกค้า</u> (แถวคอยไม่จำกัด)

ตัวแบบการรอคอยชนิดที่มีช่องทางให้บริการเพียงช่องทางเดียวมีเงื่อนไขดังนี้

1. อัตราการเข้ามาและอัตราการให้บริการมีลักษณะการแจกแจงแบบพัวซอง
2. ช่วงเวลาการเข้ามาของลูกค้าและช่วงเวลาในการให้บริการมีลักษณะการแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล
3. มีช่องทางการให้บริการเพียงช่องทางเดียว



4. ระเบียบของแถวคอยใครมาก่อนได้รับบริการก่อน
5. จำนวนลูกค้าที่มารับบริการและแถวคอยไม่จำกัด และระบบสามารถรองรับลูกค้าได้อย่างเต็มที่และไม่จำกัดเวลา ($\mu > \lambda$)

สูตรที่ใช้ในการคำนวณมีดังนี้

1. จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยในแถวคอย

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$= \frac{\rho^2}{1-\rho} \qquad \text{เมื่อ} \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$= L_s - \rho$$

$$= \lambda W_q$$

2. จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยในระบบ (จำนวนลูกค้าในแถวคอย + จำนวนลูกค้าที่กำลังรับบริการ)

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

$$= \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$= \lambda W_s$$

3. เวลาโดยเฉลี่ยที่ลูกค้ารอในแถวคอยก่อนรับบริการ

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$= \frac{1}{\mu-\lambda} - \frac{1}{\mu}$$

$$= W_s - \frac{1}{\mu}$$

$$= \frac{L_q}{\lambda}$$

4. เวลาโดยเฉลี่ยที่ลูกค้าหนึ่งรายอยู่ในระบบการมารับบริการทั้งหมด (เวลารอคอยในแถวคอย + เวลาที่ได้รับบริการ)

$$W_s = \frac{1}{\mu+\lambda}$$

$$= W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$= \frac{L_s}{\lambda}$$

5. ความน่าจะเป็นที่มีลูกค้า n หน่วยอยู่ในระบบ

$$P_n = (1-\frac{\lambda}{\mu})(\frac{\lambda}{\mu})^n$$

6. ความน่าจะเป็นที่หน่วยบริการจะว่าง (n=0)

$$P_o = 1-\frac{\lambda}{\mu}$$

$$= 1-\rho$$

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> นายเฮงเป็นเจ้าของร้านถ่ายรูปที่ให้บริการล้างอัดรูประบบ **Foto Fast** ในปัจจุบันมีเครื่องบริการล้างอัดรูปอยู่ 1 เครื่อง ในเดือนที่ผ่านมาร้านของเขาได้รับความนิยมอย่างมาก ทำให้ไม่สามารถให้บริการล้างอัดรูปได้อย่างรวดเร็ว ลูกค้าเริ่มบ่นเกี่ยวกับเวลาที่ต้องรอคอย ดังนั้น นายเฮงจึงนำตัวแบบการรอคอยมาวิเคราะห์การให้บริการลูกค้า นายเฮงได้เก็บรวบรวมข้อมูลได้ว่า อัตราการเข้ามาขอรับบริการของลูกค้าโดยเฉลี่ยจะเป็น 40 คนต่อชั่วโมงและมีการแจกแจงแบบพัวซอง เวลาการให้บริการแก่ลูกค้าแต่ละคนโดยเฉลี่ย 1 นาทีและมีการแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล นายเฮง

ต้องการคำนวณหาค่าต่อไปนี้เพื่อนำไปตัดสินใจแก้ไขต่อไป

(ก) อัตราการใช้งานของหน่วยบริการ
(ข) จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยในแถวคอย
(ค) จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยในระบบ
(ง) เวลาโดยเฉลี่ยที่ลูกค้าต้องรอคอยจนกว่าจะได้เข้ารับบริการ
(จ) เวลาโดยเฉลี่ยที่ลูกค้าต้องรอคอยจนกว่าจะได้รับบริการเสร็จเรียบร้อย
(ฉ) ความน่าจะเป็นที่จะมีลูกค้ามากกว่า 1 คน ในระบบ
(ช) ความน่าจะเป็นที่มีลูกค้ารอในแถวคอยมากกว่า 1 คน

<u>วิธีทำ</u> อัตราการมาโดยเฉลี่ย λ = 40 คน/ชั่วโมง
เวลาการให้บริการแก่ลูกค้าโดยเฉลี่ย $\frac{1}{\mu}$ = 1 นาที/คน $= \frac{1}{60}$ ชั่วโมง/คน
อัตราการให้บริการโดยเฉลี่ย μ = 60 คน/ชั่วโมง

(ก) อัตราการใช้งานของหน่วยบริการ คือ

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$= \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$$

(ข) จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยในแถวคอย คือ

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

หรือ
$$= \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{4}{9} \times 3$$

$$= 1\frac{1}{3} \quad \text{คน/ชั่วโมง}$$

(ค) จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยในระบบ คือ

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

หรือ
$$= \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}$$

$$= 2 \quad \text{คน/ชั่วโมง}$$

(ง) เวลาโดยเฉลี่ยที่ลูกค้าต้องรอคอยจนกว่าจะได้เข้ารับบริการคือ

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$= \frac{40}{60(60-40)}$$

$$= \frac{2}{3 \times 20}$$

$$= \frac{1}{30} \quad \text{ชั่วโมง}$$

$$= 2 \quad \text{นาที/คน}$$

(จ) เวลาโดยเฉลี่ยที่ลูกค้าต้องรอคอยจนกว่าจะได้รับบริการเสร็จเรียบร้อย

$$W_s = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

$$= \frac{1}{60-40}$$

$$= \frac{1}{20} \quad \text{ชั่วโมง}$$

$$= 3 \quad \text{นาที/คน}$$

(ฉ) ความน่าจะเป็นที่จะมีลูกค้ามากกว่า 1 คนในระบบ

P (ลูกค้ามากกว่า 1 คนในระบบ) $= P(n > 1)$

$= 1-(P_o+P_1)$

สูตร $P_n = (1-\frac{\lambda}{\mu})\ (\frac{\lambda}{\mu})^n$

$P_o = \left(1-\frac{40}{60}\right)\left(\frac{40}{60}\right)^o$

$= \frac{1}{3}$

$P_1 = \left(1-\frac{40}{60}\right)\left(\frac{40}{60}\right)^1$

$= \left(1-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^1$

$= \frac{2}{9}$

P (ลูกค้ามากกว่า 1 คนในระบบ) $= 1-\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{9}\right)$

$= \frac{4}{9}$

(ข) ความน่าจะเป็นที่มีลูกค้ารอในแถวคอยมากกว่า 1 คน

P (ลูกค้ารอในแถวคอยมากกว่า 1 คน) = P (ลูกค้าอยู่ในระบบมากกว่า 2 คน)

$$= P(n \geqslant 3)$$

$$= P_3 + P_4 + P_5 \ldots\ldots$$

$$= 1-(P_o + P_1 + P_2)$$

$$P_o = \frac{1}{3}$$

$$P_1 = \frac{2}{9}$$

$$P_2 = (1-\frac{40}{60})(\frac{40}{60})^2$$

$$= \left(1-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$= \frac{4}{27}$$

P (ลูกค้ารอในแถวคอยมากกว่า 1 คน) $= 1-\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27}\right)$

$$= \frac{8}{27}$$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> ช่างซ่อมโทรทัศน์คนหนึ่งพบว่า เวลาที่เขาใช้ซ่อมโทรทัศน์มีการแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียลด้วยค่าเฉลี่ย 30 นาที การมาซ่อมโทรทัศน์ของลูกค้ามีการแจกแจงแบบพัวซองเฉลี่ยจำนวน 10 เครื่องต่อวัน (ทำงาน 8 ชั่วโมง/วัน) ช่างซ่อมคนนี้มีเวลาว่างเฉลี่ยต่อวันเท่าไร และมีงานที่เขาจะต้องซ่อมเฉลี่ยกี่เครื่องในเวลาใดเวลาหนึ่ง

เวลาที่ใช้ซ่อมโทรทัศน์เฉลี่ย $= \frac{1}{\mu} =$ 30 นาที/เครื่อง

$= \frac{1}{2}$ ชั่วโมง/เครื่อง

อัตราการให้บริการเฉลี่ย $= \mu =$ 2 เครื่อง/ชั่วโมง

วันหนึ่งช่างซ่อมโทรทัศน์ทำงาน 8 ชั่วโมง/วัน

ดังนั้น อัตราการให้บริการเฉลี่ย $= \mu =$ 16 เครื่อง/วัน

อัตราการมาขอรับบริการ $= \lambda =$ 10 เครื่อง/วัน

ความน่าจะเป็นที่หน่วยบริการจะว่างงาน $= 1 - \rho$

$= 1 - \frac{10}{16}$

$= \frac{6}{16}$

$= \frac{3}{8}$

$\therefore$ ช่างซ่อมโทรทัศน์จะมีเวลาว่างเฉลี่ย $= \frac{3}{8}$ วัน = 3 ชั่วโมง (เพราะทำงาน 8 ชั่วโมงเท่านั้น)

ช่างซ่อมโทรทัศน์มีงานที่เขาจะต้องซ่อมเฉลี่ยกี่เครื่องในเวลาใดเวลาหนึ่ง หมายความว่า มีเครื่องโทรทัศน์กำลังซ่อมและรอซ่อมอยู่กี่เครื่อง

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

$$= \frac{10}{16-10}$$

$$= \frac{10}{6}$$

$$= 1\frac{2}{3} \quad \text{เครื่อง/วัน}$$

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> แผนกกลึงโลหะของบริษัทผลิตเครื่องมือแห่งหนึ่งมีเครื่องกลึงอยู่ 1 เครื่องและมีพนักงานประจำเครื่อง 1 คน ทุก ๆ 10 นาที โดยเฉลี่ยจะมีโลหะถูกส่งมาให้กลึง 1 ชิ้น พนักงานจะทำการกลึงโลหะโดยใช้เวลาเฉลี่ย 5 นาทีต่อชิ้น ค่าใช้จ่ายของเครื่องกลึงคิดเป็น 240 บาทต่อชั่วโมง ค่าแรงงานของพนักงานประจำเครื่องชั่วโมงละ 80 บาท

(ก) จงหาค่าใช้จ่ายเมื่อโลหะอยู่ในระบบเฉลี่ยต่อชั่วโมง

(ข) จงหาความน่าจะเป็นที่พนักงานจะว่างงาน

สมมติว่าโลหะเข้ามาให้กลึงมีการแจกแจงแบบพัวซองและเวลาที่ใช้กลึงมีการแจกแจงแบบเอ็กซโพเนนเชียล

<u>วิธีทำ</u> (ก) ค่าใช้จ่ายเมื่อโลหะอยู่ในระบบประกอบด้วย

1. ค่าใช้จ่ายโดยเฉลี่ยของโลหะในระบบแถวคอย
2. ค่าใช้จ่ายพนักงานประจำเครื่อง

เวลาที่โลหะเข้ามารับบริการเฉลี่ย $= \frac{1}{\lambda} = 10$ นาที/ชิ้น $= \frac{10}{60}$ ชั่วโมง/ชิ้น

อัตราการเข้ามารับบริการเฉลี่ย $= \lambda = \frac{60}{10} = 6$ ชิ้น/ชั่วโมง

เวลาที่ให้บริการกลึงโลหะเฉลี่ย $= \frac{1}{\mu} = 5$ นาที/ชิ้น $= \frac{5}{60}$ ชั่วโมง/ชิ้น

อัตราการให้บริการโดยเฉลี่ย $= \mu = \frac{60}{5} = 12$ ชิ้น/ชั่วโมง

เวลาโดยเฉลี่ยที่โลหะแต่ละชิ้นจะต้องเสียเวลาอยู่ในแผนกนี้ คือ

$$W_s = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

$$= \frac{1}{12-6}$$

$$= \frac{1}{6} \text{ ชั่วโมง/ชิ้น}$$

โจทย์กำหนดว่าค่าใช้จ่ายของเครื่องกลึงคิดเป็น 240 บาทต่อชั่วโมง

$\therefore$ ค่าใช้จ่ายของโลหะแต่ละชิ้นที่ผ่านเครื่องกลึงในระบบ $= \frac{1}{6} \times 240 = 40$ บาท/ชั่วโมง

ใน 1 ชั่วโมงพบว่าอัตราการเข้ามารับบริการเฉลี่ย 6 ชิ้น/ชั่วโมง

ดังนั้น ค่าใช้จ่ายโดยเฉลี่ยของโลหะที่ผ่านเครื่องกลึงในระบบแถวคอย

$$= \lambda W_s\ (240) = L_s(240) = 6 \times 40 = 240 \text{ บาทต่อชั่วโมง}$$

ค่าใช้จ่ายของพนักงานประจำเครื่องชั่วโมงละ 80 บาท

$\therefore$ ค่าใช้จ่ายเมื่อโลหะอยู่ในระบบแถวคอยในแผนกนี้เฉลี่ยต่อชั่วโมง

$$= 240 + 80 = 320 \text{ บาท}$$

(ข) P (พนักงานว่าง) = P (ไม่มี โลหะเข้ามา)

$$= P_o$$

$$= 1-\frac{\lambda}{\mu}$$

$$= 1-\frac{6}{12}$$

$$= \frac{1}{2}$$

ตัวอย่างที่ 4 สำนักงานแห่งหนึ่งมีเครื่องพิมพ์ดีดสำหรับเจ้าหน้าที่ธุรการพิมพ์งานทั้งหมดอยู่ 1 เครื่อง เจ้าหน้าที่ธุรการจะถืองานมาพิมพ์ทีละงานเท่านั้น เครื่องพิมพ์ดีดเครื่องนี้สามารถพิมพ์งานในอัตราเฉลี่ย 15 งานต่อชั่วโมงโดยมีการแจกแจงของเวลาให้บริการแบบเอ็กโพเนนเชียล งานที่เข้ามารับบริการพิมพ์มี 10 งานต่อชั่วโมง และมีการแจกแจงแบบพัวซอง ในบางเวลาเจ้าหน้าที่ธุรการบางคนจะต้องรอเมื่อมีงานพิมพ์เข้ามามากทำให้เกิดการว่างงาน ถ้าเวลาที่เจ้าหน้าที่ธุรการว่างงานแต่ละคนคิดเป็นค่าใช้จ่ายชั่วโมงละ 60 บาท ใน 1 วันทำงาน 8 ชั่วโมง จงหา

(ก) เปอร์เซนต์ของการใช้เครื่องพิมพ์ดีดให้เป็นประโยชน์

(ข) ค่าใช้จ่ายโดยเฉลี่ยต่อวันเนื่องจากเจ้าหน้าที่ธุรการต้องรอพิมพ์ดีด

(ค) ความน่าจะเป็นที่เจ้าหน้าที่คนหนึ่งจะต้องคอย

(ง) จำนวนเจ้าหน้าที่ธุรการอยู่ในระบบ

(จ) เวลาโดยเฉลี่ยที่เจ้าหน้าที่ธุรการอยู่ในระบบ

(ฉ) อัตราการมาจะต้องเพิ่มขึ้นเป็นเท่าไรจึงจะมีการซื้อเครื่องพิมพ์ดีดเครื่องที่ 2 ถ้าการซื้อเครื่องพิมพ์ดีดเครื่องที่ 2 นี้จะมีขึ้นก็ต่อเมื่อมีการรอคอยในแถวคอยโดยเฉลี่ยอย่างน้อย 12 นาที

<u>วิธีทำ</u> อัตราการให้บริการเฉลี่ย $= \mu = 15$ งานต่อชั่วโมง

อัตราการมารับบริการเฉลี่ย $= \lambda = 10$ งานต่อชั่วโมง

(ก) อัตราการใช้เครื่องพิมพ์ดีด $= \rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$

$$= \frac{10}{15}$$

$$= \frac{2}{3} = 0.667$$

$\therefore$ เปอร์เซนต์ของการใช้เครื่องพิมพ์ดีดให้เป็นประโยชน์ = 66.7% ของเวลาทั้งหมด

(ข) เวลาเฉลี่ยที่เจ้าหน้าที่ธุรการจะต้องรอในแถวคอยก่อนพิมพ์

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$= \frac{10}{15(15-10)}$$

$$= \frac{10}{15 \times 5}$$

$$= \frac{2}{15} \text{ ชั่วโมง/งาน}$$

ค่าใช้จ่ายโดยเฉลี่ยที่เจ้าหน้าที่ธุรการจะต้องรอ (ว่างงาน) ต่อหนึ่งงาน

= เวลาเฉลี่ยที่จะต้องรอต่อหนึ่งงาน × ค่าใช้จ่ายที่ว่างงานต่อชั่วโมง

$= \dfrac{2}{15} \times 60 = 8$ บาท

จำนวนงานพิมพ์ที่เข้าสู่ระบบ $= \lambda = 10$ งานต่อชั่วโมง

1 วันทำงาน 8 ชั่วโมง

1 วันจะมีงานเข้ามาสู่ระบบ $= 10 \times 8 = 80$ งาน

นั่นคือค่าใช้จ่ายโดยเฉลี่ยต่อวันเนื่องจากเจ้าหน้าที่ธุรการต้องรอพิมพ์ดีด

= จำนวนงานเข้าสู่ระบบ × ค่าใช้จ่ายโดยเฉลี่ยที่เจ้าหน้าที่ต้องรอต่องาน

= 80×8

= 640 บาท

(ค) ความน่าจะเป็นที่เจ้าหน้าที่คนหนึ่งจะต้องคอยคือ

P (เจ้าหน้าที่ต้องรอคอย) = P (คนในระบบมีตั้งแต่ 1 คนขึ้นไป)

$$= P_1 + P_2 + \ldots\ldots\ldots$$

$$= 1-P_o$$

$$= 1-\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

$$= \frac{\lambda}{\mu}$$

$$= \frac{10}{15}$$

$$= \frac{2}{3}$$

(ง) จำนวนเจ้าหน้าที่ธุรการที่อยู่ในระบบ

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

$$= \frac{10}{15-10}$$

$$= 2$$ คนต่อชั่วโมง

(จ) เวลาโดยเฉลี่ยที่เจ้าหน้าที่ธุรการอยู่ในระบบ คือ

$$W_s = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$= \frac{1}{15-10}$$

$$= \frac{1}{5} \quad \text{ชั่วโมง/คน}$$

$$= 12 \quad \text{นาที/คน}$$

(ฉ) การซื้อเครื่องพิมพ์ดีดเครื่องที่ 2 จะมีขึ้นต่อเมื่อมีการรอคอยในแถวคอยโดยเฉลี่ยอย่างน้อย 12 นาที ดังนั้น W_q = 12 นาที = $\frac{12}{60}$ ชั่วโมง λ จะเป็นเท่าไร

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$\frac{12}{60} = \frac{\lambda}{15(15-10)}$$

$$\lambda = \frac{15 \times 5 \times 12}{60}$$

$$= 15 \quad \text{งานต่อชั่วโมง}$$

∴ การซื้อเครื่องพิมพ์ดีดเครื่องที่ 2 จะมีขึ้นถ้าอัตราการมาขอรับบริการเท่ากับ 15 งานต่อชั่วโมง

ตัวแบบของการรอคอยชนิดที่มีช่องทางให้บริการเพียงช่องทางเดียวและหน่วยบริการมีขีดจำกัดในการให้บริการลูกค้า (แถวคอยจำกัด)

ในกรณีที่มีช่องทางในการให้บริการเพียงช่องทางเดียวและหน่วยบริการมีขีดจำกัดในการรับลูกค้า เมื่อลูกค้าเข้าสู่ระบบเต็มขีดจำกัดที่หน่วยบริการจะรับได้ ลูกค้าอื่น ๆ จะไม่สามารถเข้าสู่ระบบได้อีก

ให้ M = จำนวนสูงสุดที่ระบบจะรับลูกค้าได้

λ_n = อัตราการเข้ามาสู่ระบบขณะที่มีลูกค้าในระบบ n หน่วย

μ_n = อัตราการให้บริการขณะที่ระบบมีลูกค้า n หน่วย

สูตรที่ใช้ในการคำนวณเป็นดังนี้

$$P_o = \frac{1-\rho}{1-\rho^{M+1}}$$

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_o = \rho^n \frac{1-\rho}{1-\rho^{M+1}} \quad , n=0,1,2\ldots\ldots M$$

$$L_s = \sum_{n=0}^{M} n P_n = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(M+1)\rho^{M+1}}{1-\rho^{M+1}}$$

$$L_q = \sum_{n=1}^{M} (n-1)P_n = L_s - (1-P_o)$$

$$W_s = \frac{L_s}{\bar{\lambda}}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}}$$

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \cdot P_n = \sum_{n=0}^{M-1} \lambda P_n$$

$$= \lambda(1-P_M)$$

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> ห้อง I.C.U. ของโรงพยาบาลแห่งหนึ่งสามารถรับคนไข้ได้มากที่สุด 4 คน คนไข้เข้ามาในอัตราเฉลี่ย 1 คนต่อชั่วโมง หมอรักษามี 1 คน และทำการรักษาได้โดยเฉลี่ย 2 คนต่อชั่วโมง เมื่อห้องนี้เต็ม คนไข้รายใหม่จะต้องไปรักษาที่อื่น จงหา

(ก) จำนวนคนไข้ในห้องนี้ ณ เวลาใดเวลาหนึ่ง

(ข) จำนวนคนไข้ที่รอรับการรักษาในห้องนี้ขณะเวลาใดเวลาหนึ่ง

(ค) ความน่าจะเป็นที่คนไข้ใหม่จะได้เข้ารับการรักษาที่ห้อง I.C.U. ในโรงพยาบาลนี้

<u>วิธีทำ</u> M = จำนวนสูงสุดที่ระบบจะรับลูกค้าได้ = 4 คน

λ = 1 คน/ชั่วโมง

μ = 2 คนต่อชั่วโมง

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{2} = 0.5$$

(ก) จำนวนคนไข้ในห้อง I.C.U. ณ เวลาใดเวลาหนึ่ง คือ

$$L_s = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(M+1)\rho^{M+1}}{1-\rho^{M+1}}$$

$$= \frac{0.5}{1-0.5} - \frac{(4+1)0.5^{(4+1)}}{1-0.5^{(4+1)}}$$

$$= 1 - \frac{0.15625}{0.96875}$$

$$= 1 - 0.16$$

$$= 0.84 \quad \text{คน}$$

(ข) จำนวนคนไข้ที่รอรับการรักษาในห้องนี้ที่ขณะใดขณะหนึ่ง คือ

$$L_q = L_s - (1-P_o)$$

$$P_o = \frac{1-\rho}{1-\rho^{M+1}}$$

$$= \frac{1-0.5}{1-0.5^{(4+1)}}$$

$$= 0.516$$

$$Lq = 0.84 - (1-0.516)$$

$$= 0.356 \quad \text{คน}$$

(ค) คนไข้ใหม่จะเข้ารับการรักษาในห้อง I.C.U. นี้ได้ก็ต่อเมื่อมีคนไข้ในห้องนี้ไม่ถึง 4 คน เพราะว่าถ้ามา 4 คนแสดงว่าห้องนี้เต็มรับคนไข้ไม่ได้อีกแล้ว ดังนั้น

P (คนไข้ใหม่จะเข้ารับการรักษาในห้อง I.C.U. ได้) = P (คนไข้ในห้อง I.C.U. < 4)

$$= P_o + P_1 + P_2 + P_3$$

$$= 1-P_4$$

สูตร $P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_o$

$$P_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot 0.516$$

$$= 0.03225$$

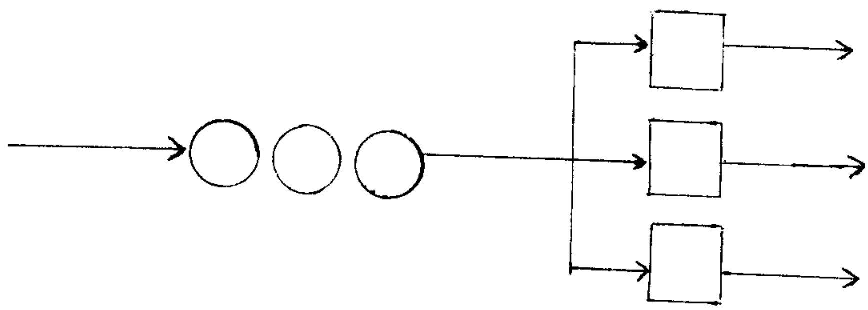
P (คนไข้ใหม่จะเข้ารับการรักษาในห้อง I.C.U. ได้) = 1-0.03225

$$= 0.96775$$

ตัวแบบการรอคอยชนิดที่มีช่องทางให้บริการมากกว่า 1 ช่องทางและความยาวของแถวคอยไม่จำกัด

ตัวแบบการรอคอยชนิดที่มีช่องทางให้บริการมากกว่า 1 ช่องทางมีเงื่อนไขดังนี้

1. อัตราการเข้ามาและอัตราการให้บริการมีลักษณะการแจกแจงแบบพัวซอง
2. ช่วงเวลาการเข้ามาของลูกค้าและช่วงเวลาการให้บริการมีลักษณะการแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล
3. มีช่องทางให้บริการแบบขนานมากกว่า 1 ช่องทาง $(c > 1)$



4. ระเบียบของแถวคอยใครมาก่อนได้รับบริการก่อน
5. จำนวนลูกค้าที่มารับบริการและแถวคอยไม่จำกัดและระบบสามารถรองรับได้เต็มที่และไม่จำกัดเวลา $(c\mu > \lambda)$

สูตรที่ใช้ในการคำนวณมีดังนี้

$$P_o = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^c}{c!}\left[\frac{1}{1-(\lambda/c\mu)}\right]\right]}$$

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_o , & 0 \leqslant n \leqslant C \\ \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{C!C^{n-c}} \cdot P_o , & n > C \end{cases}$$

$$L_q = P_o \cdot \frac{(\lambda/\mu)^c}{C!} \cdot \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \qquad \text{โดยที่} \quad \rho = \frac{\lambda}{c\mu}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$L_s = \lambda(W_q + \frac{1}{\mu})$$

$$= L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

<u>ตัวอย่างที่ 6</u> ธนาคารแห่งหนึ่งมีเคาน์เตอร์สำหรับฝาก-ถอนเงิน 3 ที่ เวลาที่ให้บริการของแต่ละเคาน์เตอร์โดยเฉลี่ย 6 นาทีต่อลูกค้า 1 คน และเวลาที่ให้บริการมีการแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล ลูกค้าเข้ามาแบบพัวซองในอัตราเฉลี่ย 24 คนต่อชั่วโมง จงหา

(ก) อัตราการใช้งานของหน่วยบริการ

(ข) โอกาสที่จะไม่มีลูกค้าเข้ามาในธนาคารเลย

(ค) จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยที่รอรับบริการ

(ง) จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยที่อยู่ในระบบ

(จ) เวลาโดยเฉลี่ยที่ลูกค้าต้องใช้ในระบบ

(ฉ) โอกาสที่ลูกค้าจะต้องคอย

(ช) จำนวนเคาน์เตอร์ว่างโดยเฉลี่ย

(ฃ) จำนวนชั่วโมงต่ออาทิตย์ที่เคาน์เตอร์แต่ละเคาน์เตอร์ใช้ไปในการบริการลูกค้า (1 อาทิตย์ทำงาน 5 วัน และ 1 วัน ทำงาน 8 ชั่วโมง)

<u>**วิธีทำ**</u> $c = 3$

$\frac{1}{\mu} = 6$ นาที/คน

$\mu = 10$ คน/ชั่วโมง

$\lambda = 24$ คน/ชั่วโมง

(ก) อัตราการใช้งานของหน่วยบริการ คือ

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu}$$

$$= \frac{24}{3 \times 10}$$

$$= 0.8$$

(ข) โอกาสที่จะไม่มีลูกค้าเข้ามาในธนาคารเลย

$$P_o = \frac{1}{\left[\sum_{n=o}^{C-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^C}{C!}\left[\frac{1}{1-(\lambda/C\mu)}\right]\right]}$$

$$P_o = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{2} \frac{(24/10)^n}{n!} + \frac{(24/10)^3}{3!}\left[\frac{1}{1-0.8}\right]\right]}$$

$$= \frac{1}{\left[\frac{(2.4)^0}{0!} + \frac{(2.4)^1}{1!} + \frac{(2.4)^2}{2!} + \frac{(2.4)^3}{3!(0.2)}\right]}$$

$$P_o = \frac{1}{(1 + 2.4 + 2.88 + 11.52)}$$

$$= \frac{1}{17.8}$$

$$= 0.056$$

(ค) จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยที่รอรับบริการ

$$L_q = P_o \cdot \frac{(\lambda/\mu)^c}{c!} \quad \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

$$= 0.056 \; \frac{(24/10)^3}{3!} \cdot \frac{0.8}{(1-0.8)^2}$$

$$= 2.58$$ คน

(ง) จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยที่อยู่ในระบบ

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$= 2.58 + \frac{24}{10}$$

$$= 4.98$$

(จ) เวลาโดยเฉลี่ยที่ลูกค้าต้องใช้ในระบบ

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$= \frac{2.58}{24}$$

$$= 0.1075$$

$$W_s = 0.1075 + \frac{1}{10}$$

$= 0.2075$ ชั่วโมง

$= 12.45$ นาที

(ฉ) โอกาสที่ลูกค้าจะต้องคอย

$$P(n \geqslant 3) = P_3 + P_4 + P_5 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= 1-(P_o + P_1 + P_2)$$

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \cdot P_o \text{ , } 0 \leqslant n < C$$

$$P_1 = \frac{(24/10)^1}{1!} \cdot (0.056)$$

$$= 0.1344$$

$$P_2 = \frac{(24/10)^2}{2!} (0.056)$$

$$= 0.16128$$

$$P(n \geqslant 3) = 1 -(0.056 + 0.1344 + 0.16128)$$

โอกาสที่ลูกค้าจะต้องคอย $= 0.648$

(ข) จำนวนเคาน์เตอร์ว่างถ้ามีลูกค้าเข้ามารับบริการไม่ถึง 3 คน
ถ้ามีลูกค้าเข้ารับบริการ 0 คน แสดงว่าเคาน์เตอร์ว่าง 3 เคาน์เตอร์
ถ้ามีลูกค้าเข้ารับบริการ 1 คน แสดงว่าเคาน์เตอร์ว่าง 2 เคาน์เตอร์
ถ้ามีลูกค้าเข้ารับบริการ 2 คน แสดงว่าเคาน์เตอร์ว่าง 1 เคาน์เตอร์

จำนวนเคาน์เตอร์ว่างโดยเฉลี่ย $= \sum_{n=0}^{C-1} (C-n)P_n$

$$= \sum_{n=0}^{2} (3-n)P_n$$

$$= 3P_o + 2P_1 + 1P_2$$

$$= (3 \times 0.056) + (2 \times 0.1344) + (1 \times 0.16128)$$

$= 0.598$ เคาน์เตอร์

(ฃ) ถ้ามีลูกค้าเข้ามารับบริการ 0 คน : P (เคาน์เตอร์ว่าง) = 1
ถ้ามีลูกค้าเข้ามารับบริการ 1 คน : P (เคาน์เตอร์ว่าง) = $\frac{2}{3}$
ถ้ามีลูกค้าเข้ามารับบริการ 2 คน : P (เคาน์เตอร์ว่าง) = 1/3

P (เคาน์เตอร์ว่างแต่ละเคาน์เตอร์) $= 1.P_o + \frac{2}{3} P_1 + \frac{1}{3} P_2$

$$= (1 \times 0.056) + \frac{2}{3}(0.1344) + \frac{1}{3}(0.16128)$$

$$= 0.19936$$

$$\simeq 0.2$$

P (เคาน์เตอร์แต่ละเคาน์เตอร์ไม่ว่าง) $= 1-0.2 = 0.8 = \frac{\lambda}{c\mu}$

ใน 1 อาทิตย์ทำงาน 5 วัน วันละ 8 ชั่วโมง = $8 \times 5 = 40$ ชั่วโมง
ดังนั้น จำนวนชั่วโมงต่ออาทิตย์ที่เคาน์เตอร์แต่ละเคาน์เตอร์จะไม่ว่างใช้ไปในการให้บริการลูกค้าเท่ากับ $0.8 \times 40 = 32$ ชั่วโมง

อัตราการให้บริการ (μ) และจำนวนหน่วยบริการ (c) ที่เหมาะสม

การศึกษาปัญหาการรอคอยเพื่อปรับปรุงการให้การบริการที่เหมาะสมโดยค่าใช้จ่ายในการบริการและการรอคอยจะต้องน้อยที่สุด ค่าใช้จ่ายต่าง ๆ ขึ้นอยู่กับอัตราการให้บริการและจำนวนหน่วยบริการ ดังนั้นจึงต้องตัดสินใจว่าอัตราการให้บริการและจำนวนหน่วยบริการที่เหมาะสมควรเป็นเท่าไร

1. อัตราการให้บริการ (μ) ที่เหมาะสม

ในกรณีที่ตัวแบบแถวคอยมี 1 ช่องทางบริการและอัตราการมาขอรับบริการเท่ากับ λ ต่อหน่วยเวลา อัตราการให้บริการเท่ากับ μ ต่อหน่วยเวลา

ให้ C_s = ค่าใช้จ่ายของการให้บริการ μ ต่อหน่วยเวลา (ค่าใช้จ่ายจากการซื้ออุปกรณ์บริการการว่าจ้างผู้ให้บริการ)

C_w = ค่าใช้จ่ายต่อการรอคอยในระบบของลูกค้าหนึ่งหน่วย (ค่าใช้จ่ายที่ลูกค้าเสียเวลารอคอย การสูญเสียยอดขาย)

$TC(\mu)$ = ค่าใช้จ่ายการรอคอยและการบริการต่อหน่วยเวลาเมื่อกำหนดค่า μ

เนื่องจากระบบรอคอยมีอัตราการให้บริการ μ ต่อหน่วยเวลา และจำนวนลูกค้าในระบบเป็น L_s ดังนั้น

$$TC(\mu) = \mu C_s + L_s C_w$$

ถ้า μ เป็นค่าต่อเนื่อง ค่า μ ที่เหมาะสมคือค่า μ ที่ทำให้ $TC(\mu)$ มีค่าน้อยที่สุด ซึ่งหาได้โดยการหาอนุพันธ์ของ $TC(\mu)$ เทียบกับ μ ให้มีค่าเท่ากับ 0 ดังนี้

$$TC(\mu) = \mu C_s + \frac{\lambda}{\mu+\lambda} C_w$$

$$\frac{dTC(\mu)}{d} = C_s - \frac{\lambda C_w}{(\mu-\lambda)^2} = 0$$

$$C_s(\mu-\lambda)^2 = \lambda C_w$$

$$(\mu-\lambda)^2 = \frac{\lambda C_w}{C_s}$$

$$\mu - \lambda = \sqrt{\frac{\lambda C_w}{C_s}}$$

$$\mu = \lambda + \sqrt{\frac{\lambda C_w}{C_s}}$$

จะเห็นว่า ค่า μ ที่เหมาะสมขึ้นอยู่กับค่า λ คือค่า μ ต้องมากกว่า λ เสมอ หรือ $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ ต้องน้อยกว่า 1 นั่นเอง

สำหรับตัวแบบรอคอยที่มี 1 ช่องทางและจำกัดความยาวของแถวคอย (หน่วยบริการมีขีดจำกัดการให้บริการ) เท่ากับ n หน่วย ค่าใช้จ่ายนอกจากจะขึ้นอยู่กับค่า μ แล้วจะขึ้นอยู่กับค่า n ด้วย เพราะถ้าหน่วยบริการมีขีดจำกัดการให้บริการได้น้อย (n น้อย) เมื่อลูกค้าเข้าสู่ระบบไม่ได้จะทำให้สูญเสียลูกค้าไป จึงต้องหาทั้ง μ และ n ที่เหมาะสม

ให้ C_n = ค่าใช้จ่ายของการจำกัดแถวคอย n ต่อหน่วยเวลา

C_L = ค่าใช้จ่ายต่อหน่วยของลูกค้าที่สูญเสียไป

$TC(\mu, n)$ = ค่าใช้จ่ายทั้งหมด

$$TC(\mu, n) = \mu C_s + L_s C_w + nC_n + \lambda P_n \cdot C_L$$

เมื่อ λP_n คือจำนวนลูกค้าที่สูญเสียไปต่อหน่วยเวลา

การหาค่าของ μ , n ที่เหมาะสมหาได้ทำนองเดียวกัน

<u>ตัวอย่างที่ 7</u> ระบบแถวคอยแบบพัวซองที่มี 1 ช่องทางบริการและความยาวของแถวคอยไม่จำกัด ค่าใช้จ่ายของการให้บริการ μ ต่อหน่วยเวลาเป็น 150 บาท ค่าใช้จ่ายการรอคอยของลูกค้า 1 คนเป็น 20 บาท อัตราการมาของลูกค้าโดยเฉลี่ย 30 คนต่อหน่วยเวลา จงหาอัตราการให้บริการ μ ที่ทำให้ค่าใช้จ่ายทั้งหมดน้อยที่สุด

<u>วิธีทำ</u> <u>สูตร</u> $\mu = \lambda + \sqrt{\frac{\lambda \cdot C_w}{C_s}}$

C_s = 150 บาท , C_w = 20 บาท , λ = 30 คน/หน่วยเวลา

$$\mu = 30 + \sqrt{\frac{30 \times 20}{150}}$$

$$= 30 + 2$$

$$= 32$$ คน/หน่วยเวลา

ดังนั้น อัตราการให้บริการที่เหมาะสมที่ทำให้เสียค่าใช้จ่ายทั้งหมดน้อยที่สุดเท่ากับ 32 คน/หน่วยเวลา

2. <u>จำนวนหน่วยบริการ (C) ที่เหมาะสม</u>

ในกรณีที่แถวคอยมี C หน่วยบริการและแถวคอยไม่จำกัดค่าใช้จ่ายขึ้นอยู่กับจำนวนหน่วยบริการ C

ให้ C_s = ค่าใช้จ่ายในการให้บริการต่อ 1 หน่วยบริการต่อหน่วยเวลา

C_w = ค่าใช้จ่ายในการรอคอยของลูกค้า 1 คน

$L_s(C)$= จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยที่รอคอยอยู่ในระบบเมื่อมี C หน่วยบริการ

ดังนั้น $TC(C) = C_s \cdot C + C_w \cdot L_s(C)$

เนื่องจาก C เป็นจำนวนเต็ม การหาผลลัพธ์เพื่อหา TC(C) น้อยที่สุด จึงใช้หลักการหาอนุพันธ์ไม่ได้ ต้องใช้วิธีลองคำนวณโดยกำหนดค่า C ขึ้นเอง TC(C) ต่ำสุดที่ C มีค่าใด ค่า C นั้นคือคำตอบ

<u>ตัวอย่างที่ 8</u> ซุปเปอร์มาร์เก็ต แห่งหนึ่งพบว่าภายในช่วงเวลา 1 ชั่วโมง ของตอนหยุดพักกลางวันที่เคาน์เตอร์เก็บเงินมีลูกค้าเข้ามาชำระเงินอย่างไม่มีระเบียบมีการแจกแบบพัวซองด้วย อัตราเฉลี่ย 3 คนต่อนาที ในปัจจุบันทางร้านมีพนักงานเก็บเงินอยู่ 2 คน โดยเฉลี่ยพนักงานแต่ละคนสามารถให้บริการลูกค้าได้ 2 คนต่อนาทีและมีการแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล

ผู้จัดการร้านกำลังตัดสินใจว่าจะต้องจ้างเด็กบริการที่เคาน์เตอร์เพิ่มขึ้นอีกในช่วงเวลาดังกล่าวโดยจะต้องจ่ายค่าจ้างเด็กคนละ 70 บาท/ชั่วโมง เด็กบริการแต่ละคนใช้เวลา 1 นาทีสำหรับบริการลูกค้า 2 คน เช่นเดียวกันโดยที่ต้นทุนที่ต้องให้ลูกค้ารอคอยคิดเป็น 20 บาทต่อชั่วโมง

ถามว่าผู้จัดการควรจ้างเด็กบริการไว้ที่เคาน์เตอร์เพิ่มอีกกี่คนในช่วงเวลานี้

<u>วิธีทำ</u> λ = 3 คน/นาที

C = 2

μ = 2 คน/นาที

C_s = 70 บาท/ชั่วโมง

C_w = 20 บาท/ชั่วโมง

จำนวนหน่วยบริการที่เหมาะสมจะต้องทำให้ต้นทุนต่ำสุด

$$TC(C) = C_s \cdot C + C_w L_s(C)$$

C=2

$$\rho = \frac{\lambda}{C\mu} = \frac{3}{2 * 2} = 3/4$$

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$L_q = P_o \frac{(\lambda/\mu)^C}{C!} \cdot \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

$$P_o = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{C-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^C}{C!} \left[\frac{1}{1-(\lambda/C\mu)}\right]\right]}$$

$$P_o = \frac{1}{\left[\frac{(3/2)^0}{0!} + \frac{(3/2)^1}{1!} + \frac{(3/2)^2}{2!} \left|\frac{1}{1-\left(\frac{3}{2 * 2}\right)}\right]\right]}$$

$$P_o = \frac{1}{7}$$

$$L_q = \frac{1}{7} \cdot \frac{(3/2)^2}{2!} \cdot \frac{3/4}{\left(1-\frac{3}{4}\right)^2}$$

$$= 1.9285$$

$$L_s = 1.9285 + \frac{3}{2}$$

$$= 3.43$$

ต้นทุนรวมต่อชั่วโมง (ในกรณีที่มีพนักงานเก็บเงิน 2 คน)

$$TC(2) = 70 \times 2 + 20(3.43)(2)$$

$$= 277.20 \quad \text{บาท}$$

C=3 $$\rho = \frac{\lambda}{c\mu}$$

$$= \frac{3}{3 \times 2} = \frac{3}{6} = 0.5$$

$$P_o = \frac{1}{\left[\frac{(3/2)^0}{0!} + \frac{(3/2)^1}{1!} + \frac{(3/2)^2}{2!} + \frac{(3/2)^3}{3!}\left[\frac{1}{1-\frac{3}{6}}\right]\right]}$$

$$= \frac{1}{4.75}$$

$$= 0.21$$

$$L_q = 0.21 \frac{(3/2)^3}{3!} \times \frac{0.5}{(1-0.5)^2}$$

$$= 0.23625$$

$$L_s = 0.23625 + \frac{3}{2}$$

$$= 1.74$$

ต้นทุนรวมต่อชั่วโมง (ในกรณีที่มีพนักงานเก็บเงิน 3 คน)

$$TC(3) = 70 \times 3 + 20(1.74)(3)$$

$$= 314.40 \quad \text{บาท}$$

จะเห็นว่าการจ้างพนักงานเก็บเงินเพิ่มขึ้นอีก 1 คน ทำให้ค่าใช้จ่ายเพิ่มขึ้น 314.40 - 277.20 = 37.20 บาท จึงไม่ควรจ้างพนักงานเก็บเงินเพิ่ม

สรุป

ในบทนี้ได้กล่าวถึงตัวแบบการรอคอย 3 ตัวแบบอยู่ภายใต้ข้อสมมติว่าอัตราการเข้ามารับบริการและอัตราการให้บริการมีการแจกแจงแบบพัวซอง เวลาที่ลูกค้าเข้ามารับบริการและเวลาที่ให้บริการมีการแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียลโดยความเป็นจริงตัวแบบการรอคอยมีอยู่ด้วยกันหลายรูปแบบ และอัตราการเข้ามารับบริการอาจมีการแจกแจงแบบอื่นไม่ได้กล่าวไว้ในบทนี้ นอกจากนั้นในบางกรณีเราสามารถใช้ทฤษฎีลูกโซ่มาร์คอฟ (Markov Chains) และการจำลองแบบปัญหา (Simulation Technique) มาหาคำตอบเกี่ยวกับการรอคอยได้วิธีการดังกล่าวจะกล่าวถึงในบทต่อไป

แบบฝึกหัดบทที่ 9

ข้อ 1. บริษัทแห่งหนึ่งตัดสินใจว่าจะรับช่างซ่อมแซมเครื่องปรับอากาศคนใดคนหนึ่งใน 2 คน โดยมีข้อมูลดังนี้

ช่างซ่อมคนที่ 1 สามารถซ่อมเครื่องปรับอากาศได้ในอัตราเฉลี่ย 2 เครื่องต่อชั่วโมง ค่าจ้าง 40 บาท/ชั่วโมง

ช่างซ่อมคนที่ 2 ซ่อมได้ในอัตรา 3 เครื่อง/ชั่วโมง ค่าจ้าง 45/ชั่วโมง

การแจกแจงของจำนวนเครื่องปรับอากาศเสียเป็นแบบพัวซอง มีจำนวนเฉลี่ย 1 เครื่อง/ชั่วโมง เมื่อเครื่องปรับอากาศเสียคิดเป็นค่าใช้จ่ายที่สูญเสียไปแต่ละเครื่องประมาณ 100 บาท/ชั่วโมง

จงหาว่าบริษัทควรจะต้องตัดสินใจจ้างช่างซ่อมคนไหนจึงจะเสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด

สมมติว่าใน 1 วันทำงาน 8 ชั่วโมงและเวลาที่ช่างซ่อมแต่ละคนซ่อมแซมเครื่องนั้นมีการแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล

ข้อ 2. ตู้โทรศัพท์สาธารณะแห่งหนึ่งมีคนเข้ามารับบริการแบบพัวซอง ช่วงเวลาโดยเฉลี่ยระหว่างคนที่เข้ามาติด ๆ กันเป็น 5 นาที เวลาที่แต่ละคนโทรศัพท์มีการแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียลมีค่าเฉลี่ย 3 นาทีต่อคน

จงหา

ก. ความน่าจะเป็นที่คน ๆ หนึ่งเข้ามาแล้วต้องคอย

ข. ความยาวแถวคอยโดยเฉลี่ย

ค. อัตราการมาจะต้องเพิ่มเป็นเท่าไรจึงจะมีการติดตั้งโทรศัพท์ตู้ที่ 2 ถ้าการติดตั้งตู้ที่ 2 นี้ จะมีขึ้นก็ต่อเมื่อต้องมีการรอคอยในแถวคอยโดยเฉลี่ยอย่างน้อย 3 นาที

ข้อ 3. รถมาถึงด่านที่เก็บค่าธรรมเนียมแบบพัวซองในอัตราเฉลี่ย 60 คันต่อชั่วโมง รถแต่ละคันเสียเวลาที่ด่านนี้โดยเฉลี่ย 50 วินาที เจ้าหน้าที่มีความตั้งใจว่าจะให้รถแต่ละคันเสียเวลาที่ด่านนี้โดยเฉลี่ย 20 วินาทีโดยจะนำเครื่องมืออัตโนมัติมาใช้ ซึ่งการใช้เครื่องมือนี้จะเหมาะสมก็ต่อเมื่อ

1. ระบบเก่ามีจำนวนรถที่ต้องรอเสียค่าธรรมเนียมที่ขณะเวลาใด ๆ โดยเฉลี่ยมากกว่า 3 คัน และ

2. ในการใช้ระบบใหม่ (เครื่องมืออัตโนมัติ) ความน่าจะเป็นที่ด่านว่างไม่ควรเกิน 0.2

จงพิจารณาว่าขณะนี้ควรนำเครื่องมืออัตโนมัติมาใช้หรือไม่

ข้อ 4. มีสถานีบริการขายน้ำมันเบนซินแห่งหนึ่งมีรถเข้ามาเติมน้ำมันแบบพัวซองในอัตราเฉลี่ย 15 คันต่อชั่วโมง เวลาที่ใช้ในการเติมน้ำมันโดยเฉลี่ย 3 นาทีต่อคัน บริเวณที่ว่างของสถานีบริการสามารถจอดรถได้ 3 คัน (รวมที่ที่จอดรถซึ่งกำลังเติมน้ำมันด้วย) และถ้ารถจอดเต็มสถานีบริการแล้วรถอื่น ๆ ก็สามารถจอดได้บริเวณด้านนอก

จงหา

ก. ความน่าจะเป็นที่รถจะได้จอดบริเวณที่ว่างของสถานีบริการ

ข. ความน่าจะเป็นที่รถต้องจอดข้างนอก

ค. บริเวณที่ว่างของสถานีบริการควรจัดให้จอดรถได้กี่คันจึงจะทำให้รถที่มารับบริการสามารถจอดได้ 80%

ข้อ 5. ร้านตัดผมแห่งหนึ่งมีช่างตัดผมคอยให้บริการเพียงคนเดียว โดยเฉลี่ยแล้วเขาใช้เวลาตัดผมให้ลูกค้าแต่ละคนประมาณ 15 นาที เวลาที่ช่างตัดผมให้บริการลูกค้ามีการแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล ร้านแห่งนี้มีที่นั่งอยู่ 2 ที่นั่ง คือ เก้าอี้ที่นั่งรับบริการ 1 ที่นั่ง และที่นั่งคอยอีก 1 ที่นั่ง ถ้ามีลูกค้าอยู่ในร้าน 2 คน ลูกค้าที่มาใหม่จะจากไปโดยไม่ได้รับบริการ สมมติว่าอัตราการมาขอรับบริการโดยเฉลี่ย

จากลูกค้ามีการแจกแจงแบบพัวซองประมาณ 3 คน ต่อชั่วโมง จงหา

ก. เวลาเฉลี่ยที่ลูกค้าต้องรอคอยจนกว่าจะได้เข้ารับบริการ

ข. เวลาเฉลี่ยที่ลูกค้าต้องรอจนกว่าจะได้รับบริการเสร็จเรียบร้อย

ค. ความน่าจะเป็นที่ช่างตัดผมจะว่างงาน

ง. ความน่าจะเป็นที่ลูกค้าเข้ามาในระบบแล้วเต็มไม่ว่าง

ข้อ 6. ซุปเปอร์มาร์เกตแห่งหนึ่ง จัดให้มีช่องทางให้บริการรับและทอนเงิน 3 ช่องทาง จากการสังเกตการมาของลูกค้าปรากฏว่าเป็นพัวซอง และอัตราการมาโดยเฉลี่ยเป็น 15 คนต่อครึ่งชั่วโมง การให้บริการโดยเฉลี่ยแล้วช่องทางหนึ่งสามารถให้บริการ 8 คนต่อครึ่งชั่วโมง ลักษณะการแจกแจงการให้บริการเป็นเอ็กโพเนนเชียล จงคำนวณ

ก. จำนวนลูกค้าเฉลี่ยในแถวคอย

ข. จำนวนลูกค้าเฉลี่ยในระบบ

ค. เวลาโดยเฉลี่ยที่ลูกค้าคนหนึ่งจะใช้เวลารอคอยในแถวคอย

ง. เวลาโดยเฉลี่ยที่ลูกค้าคนหนึ่งจะอยู่ในระบบ

จ. ความน่าจะเป็นที่จะไม่มีลูกค้าอยู่ในระบบ

ฉ. ควรเพิ่มช่องทางให้บริการรับและทอนเงินจากเดิมเท่าไร ถ้าคาดว่าอัตราการเข้ามาใช้บริการจะเป็น 2 เท่าจากเดิม และต้องการให้เวลารอคอยที่จ่ายเงินเป็นครึ่งหนึ่งของเวลารอคอยเดิม