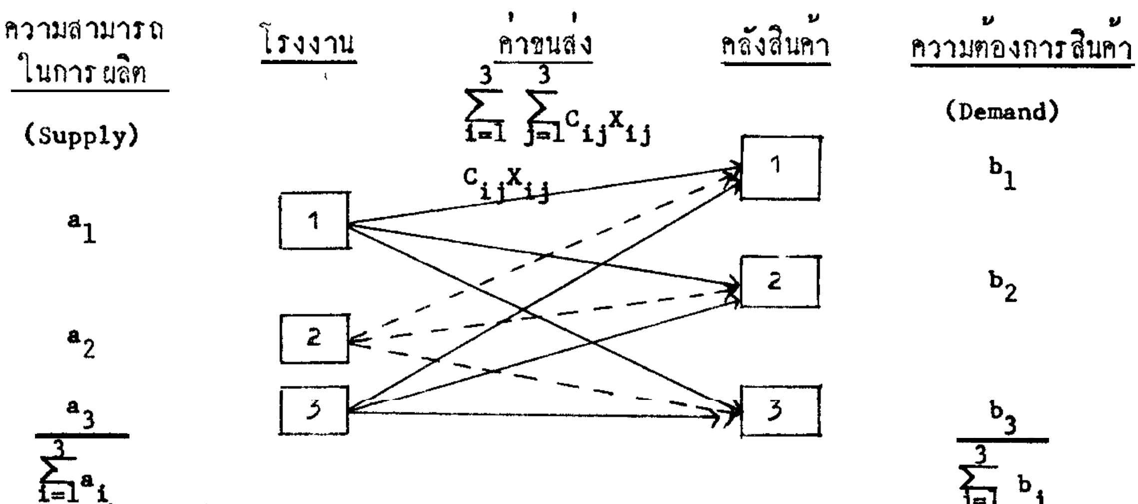
บทที่ 7
ปัญหาการขนส่ง
(Transportation Problem)

ปัญหาการขนส่งเป็นรูปแบบหนึ่งของการนำโปรแกรมเชิงเส้นตรงมาประยุกต์ใช้ โดยมีเป้าหมายเพื่อให้มีค่าใช้จ่ายในการขนส่งน้อยที่สุด ภายใต้ข้อจำกัดเกี่ยวกับความสามารถในการผลิต (Supply) และความต้องการสินค้าของคลังสินค้า (หรือตัวแทนจำหน่าย) (Demand)

<u>ตัวแบบปัญหาการขนส่ง</u> **(Transportation Model)**

ปัญหาการขนส่งเป็นเรื่องของการตัดสินใจกระจายตัวสินค้าจากโรงงานหรือแหล่งผลิตไปยังแหล่งเก็บสินค้าหรือคลังสินค้าเพื่อรอการนำออกจำหน่าย (หรือจากคลังเก็บสินค้าไปยังร้านค้าตัวแทนจำหน่าย) โดยแหล่งผลิตมีอยู่หลายแห่งและอยู่ในที่ต่างกันโดยมีขนาดสมรรถภาพของการผลิตที่แตกต่างกัน นอกจากนี้แหล่งเก็บสินค้าก็มีอยู่หลายแห่งและอยู่ในสถานที่ต่างกันมีขนาดความต้องการหรือจัดจำหน่ายสินค้าได้จำกัดในจำนวนไม่เท่ากัน (ดูรูปภาพที่ 7-1 ประกอบ)



รูปที่ 7-1 แสดงการขนส่งสินค้าจากโรงงานไปคลังสินค้า

กำหนดให้ c_{ij} เป็นค่าขนส่งต่อหน่วยของสินค้าที่ส่งจากโรงงาน i ไปยังคลังสินค้า j

x_{ij} เป็นปริมาณสินค้าที่ส่งจากโรงงาน i ไปยังคลังสินค้า j

a_i เป็นปริมาณสินค้าที่โรงงาน i ผลิตได้ในช่วงระยะเวลาหนึ่ง

b_j เป็นปริมาณความต้องการสินค้าที่คลังสินค้า j จะรับได้ในช่วงระยะเวลาหนึ่ง

$i = 1, 2, 3$

$j = 1, 2, 3$

ดังนั้นสมการเป้าหมายเพื่อค่าขนส่งต่ำที่สุดจะเขียนได้ดังนี้

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij} = c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+c_{13}x_{13}+c_{21}x_{21}+c_{22}x_{22}+c_{23}x_{23}$$
$$+c_{31}x_{31}+c_{32}x_{32}+c_{33}x_{33}$$

อสมการข้อจำกัดขอบข่ายของปัญหา

1. ขนาดสมรรถภาพการผลิตของโรงงานแต่ละแห่ง

โรงงานที่ 1 : $\sum_{j=1}^{3} x_{1j} = x_{11}+x_{12}+x_{13} \leqslant a_1$

โรงงานที่ 2 : $\sum_{j=1}^{3} x_{2j} = x_{21}+x_{22}+x_{23} \leqslant a_2$

โรงงานที่ 3 : $\sum_{j=1}^{3} x_{3j} = x_{31}+x_{32}+x_{33} \leqslant a_3$

2. ขนาดความต้องการสินค้าของคลังสินค้าแต่ละแห่ง

คลังสินค้าที่ 1 : $\sum_{i=1}^{3} x_{i1} = x_{11}+x_{21}+x_{31} \leqslant b_1$

คลังสินค้าที่ 2 : $\sum_{i=1}^{3} x_{i2} = x_{12}+x_{22}+x_{32} \leqslant b_2$

คลังสินค้าที่ 3 : $\sum_{i=1}^{3} x_{i3} = x_{13}+x_{23}+x_{33} \leqslant b_3$

และ $x_{ij} \geqslant 0$

ถ้าจะเขียนเป็นตัวแบบปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรงโดยทั่วไปจะได้ดังนี้

สมการเป้าหมาย $\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$

อสมการข้อจำกัดขอบข่าย $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i \quad i = 1,2 \ldots\ldots m$

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leqslant b_j \quad j = 1,2 \bullet oo \ldots n$

$x_{ij} \geqslant 0$

โดยที่ m = จำนวนโรงงาน (ต้นทาง)

n = จำนวนคลังสินค้า (ปลายทาง)

ตัวแบบปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรงของปัญหาการขนส่งดังกล่าวเรียกว่า ปัญหาการขนส่งแบบทั่วไป **(Generalized Transportation Problem)** สามารถใช้คอมพิวเตอร์มาแก้ปัญหาด้วยวิธีซิมเพล็กซ์ได้ แต่ก็ยังไม่คุ้มค่าในการแก้ปัญหาเพราะตัวแปรตัดสินใจมาก ทำให้เสียเวลา จึงมีผู้คิดค้นวิธีการแก้ปัญหาการขนส่งให้ง่ายขึ้น เรียกว่า ปัญหาการขนส่งแบบมาตรฐาน **(Standard Transportation Problem)**

โดยมีข้อสมมติฐานว่าอุปทาน **(Supply)** เท่ากับอุปสงค์ **(Demand)**

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$$

จากสมมติฐานอันนี้ นำไปสู่ตัวแบบปัญหาการขนส่งแบบมาตรฐานดังนี้

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

ภายใต้ข้อจำกัด $$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$$

และ $x_{ij} \geqslant 0$

ตัวแบบปัญหาการขนส่งแบบมาตรฐานจะมีข้อแตกต่างจากปัญหาเดิมดังนี้

1. สัมประสิทธิ์ของ x_{ij} ในทุก ๆ สมการข้อจำกัดขอบข่ายเท่ากับ 1
2. อสมการข้อจำกัดขอบข่ายทั้งหมดจะอยู่ในรูปสมการ

การแก้ปัญหาการขนส่งแบบมาตรฐานจะทำได้ง่ายขึ้นโดยใช้ตารางจัดตัวแบบปัญหาการขนส่งดังแสดงในตารางที่ 7-3 ดังนี้

ตารางที่ 7-1 ค่าขนส่ง

คลังสินค้า / โรงงาน	1	2	3
1	c_{11}	c_{12}	c_{13}
2	c_{21}	"22	c_{23}
3	c_{31}	c_{32}	c_{33}

ตารางที่ 7-2 ความสามารถในการผลิตและการเก็บ

คลังสินค้า / โรงงาน	1	2	3	ความสามารถในการผลิต
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	a_1
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	a_2
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	a_3
ปริมาณความต้องการ	b_1	b_2	b_3	$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{3} b_j$

ตารางที่ 7-3 ตัวแบบปัญหาการขนส่งแบบมาตรฐาน

คลังสินค้า / โรงงาน	1	2	3	ความสามารถในการผลิต
1	x_{11} $\boxed{c_{11}}$	x_{12} $\boxed{c_{12}}$	x_{13} $\boxed{c_{13}}$	a_1
2	x_{21} $\boxed{c_{21}}$	x_{22} $\boxed{c_{22}}$	x_{23} $\boxed{c_{23}}$	a_2
3	x_{31} $\boxed{c_{31}}$	x_{32} $\boxed{c_{32}}$	x_{33} $\boxed{c_{33}}$	a_3
ปริมาณความต้องการ	b_1	b_2	b_3	$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{3} b_j$

ตัวแบบปัญหาการขนส่งแบบมาตรฐานตามตารางที่ 7-3 จะต้องไม่ลืมสมมติฐาน

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

ในกรณีที่ผลรวมของสมรรถภาพในการผลิตของโรงงานทั้งหมดไม่เท่ากับผลรวมของปริมาณความต้องการสินค้าของคลังสินค้าทั้งหมด นั่นคือจำนวนที่ผลิตกับจำนวนที่ต้องการไม่เท่ากัน เราจะต้องหาทางทำให้เท่ากันโดยการเพิ่มโรงงานสมมติขึ้น (Dummy Plant) หรือคลังสินค้าสมมติขึ้น (Dummy Warehouse) โดยมีสมรรถภาพหรือปริมาณความต้องการสินค้าเท่ากับส่วนที่ขาดไป ส่วนค่าขนส่งต่อหน่วยของโรงงานสมมติหรือคลังสินค้าสมมติจะเป็นศูนย์ ทั้งนี้เพื่อให้ปัญหาการขนส่งเดิมสามารถเปลี่ยนเป็นแบบมาตรฐานเพื่อง่ายแก่การคำนวณ

ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงถึงการแปลงปัญหาเดิมไปเป็นแบบมาตรฐาน

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> กรณีที่ $\sum b_j > \sum a_i$

ในกรณีที่ปริมาณความต้องการมากกว่าความสามารถในการผลิต กรณีนี้เราจะเพิ่มโรงงานสมมติขึ้น (Dummy Plant) โดยมีค่าขนส่งต้องกำหนดให้มีค่าเท่ากับศูนย์ เนื่องจากเป็นโรงงานสมมติผลผลิตเป็นเพียงสิ่งสมมติประกอบในการหาผลลัพธ์ต่อไปเท่านั้น จึงไม่มีค่าขนส่งเข้ามาเกี่ยวข้อง

สมมติให้ผู้ผลิตรายหนึ่งมีโรงงานผลิตสินค้าอยู่ในเขตกรุงเทพมหานครแห่งหนึ่ง อยู่ในจังหวัดนครราชสีมาแห่งหนึ่ง อยู่ในจังหวัดลำปางแห่งหนึ่ง และอยู่ในจังหวัดสงขลาอีกแห่งหนึ่ง สมรรถภาพในการผลิตคิดเป็นจำนวนน้ำหนักของผลิตภัณฑ์ในแต่ละโรงงานเป็นดังนี้ 120,90,100,70 ตันต่อเดือนตามลำดับ บริษัทมีตัวแทนจำหน่ายในจังหวัดต่าง ๆ อยู่ 5 จังหวัด คือ กรุงเทพฯ อุบลราชธานี เชียงใหม่ หาดใหญ่ ราชบุรี ซึ่งแต่ละแห่งสามารถจัดจำหน่ายได้ 150, 40, 120, 70 และ 50 ตันต่อเดือนตามลำดับ ถ้าค่าขนส่งจากโรงงาน i ไปยังตัวแทนจำหน่าย j คือ c_{ij} และจำนวนผลิตภัณฑ์ที่จัดส่งเป็น x_{ij} จะตั้งรูปแบบปัญหาทางการขนส่งแบบมาตรฐานอย่างไร

<u>**วิธีทำ**</u> ผลรวมของสมรรถภาพการผลิต $= \sum_{i=1}^{4} a_i$

$= 120 + 90 + 100 + 70$

$= 380$ ตันต่อเดือน

ผลรวมของความสามารถในการจัดจำหน่าย $= \sum_{j=1}^{5} b_j$

$= 150 + 40 + 120 + 70 + 50$

$= 430$ ตันต่อเดือน

ดังนั้นจะต้องตั้งโรงงานสมมติมีสมรรถภาพ $= 430 - 380 = 50$ ตันต่อเดือน เพื่อจัดเข้าเป็นตัวแบบปัญหาการขนส่งแบบมาตรฐานดังนี้

ตารางที่ 7-4 ตัวแบบปัญหาการขนส่งแบบมาตรฐานกรณี $\sum b_j > \sum a_i$

ตัวแทนจำหน่าย / โรงงาน	กรุงเทพฯ	อุบลราชธานี	เชียงใหม่	หาดใหญ่	ราชบุรี	สมรรถภาพในการผลิต (a_i)
กรุงเทพฯ	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	x_{13} c_{13}	x_{14} c_{14}	x_{15} c_{15}	120
นครราชสีมา	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	x_{23} c_{23}	0 M	x_{25} c_{25}	90
ลำปาง	x_{31} c_{31}	x_{32} c_{32}	x_{33} c_{33}	0 M	x_{35} c_{35}	100
สงขลา	x_{41} c_{41}	0 M	0 M	x_{44} c_{44}	x_{45} c_{45}	70
โรงงานสมมติ	x_{51} 0	x_{52} 0	x_{53} 0	x_{54} 0	x_{55} 0	50
ความสามารถในการจัดจำหน่าย (b_j)	150	40	120	70	50	430

ข้อมูลจากตารางที่ 7-4 จะเห็นว่าค่าขนส่งจากนครราชสีมาไปหาดใหญ่หรือจาก สงขลาไปอุบลราชธานี หรือจากสงขลาไปเชียงใหม่ หรือจากลำปางไปหาดใหญ่ จะมีค่า M แทนความหมายของค่าขนส่งซึ่งสูงมาก จึงไม่ควรที่จะจัดส่งสินค้าจากโรงงานดังกล่าวไปยังตัวแทนจำหน่ายดังกล่าวจำนวนที่จะทำการจัดส่งจึงกำหนดให้เป็นศูนย์ไป

จะเห็นว่าโรงงานสมมติที่เติมเข้าไปจัดว่าเป็นตัวแปรหุ่นประเภทตัวแปรผันส่วนขาด (Slack variable) ในปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรงนั่นเอง เรานำเอาตัวแปรชนิดนี้เพิ่มเข้ามาเพื่อแปรรูปอสมการข้อจำกัดขอบข่ายมาเป็นสมการข้อจำกัดขอบข่ายนั่นเอง

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> กรณีที่ $\sum_{j=1}^{n} b_j < \sum_{i=1}^{m} a_i$

ในกรณีที่ปริมาณความต้องการน้อยกว่าความสามารถในการผลิตกรณีนี้เราจะเพิ่มคลังสินค้าสมมติ (Dummy Warehouse) โดยที่ค่าขนส่งต้องกำหนดให้มีค่าเท่ากับศูนย์เช่นเดียวกัน ตัวอย่างเช่น

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 40+70+50 = 160 \qquad \sum_{j=1}^{3} b_j = 30+50+20 = 100$$

ดังนั้นเราจะต้องตั้งคลังสินค้าสมมติมีความต้องการ = 160 - 100 = 60 หน่วย เพื่อจัดเข้าเป็นตัวแบบปัญหาการขนส่งแบบมาตรฐานดังนี้

ตารางที่ 7-5 ตัวแบบปัญหาการขนส่งแบบมาตรฐานกรณี $\sum b_j < \sum a_i$

คลังสินค้า / โรงงาน	1	2	3	คลังสินค้าสมมติ	สมรรถภาพการผลิต (a_i)
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	0 x_{14}	40
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	0 x_{24}	70
3	c_{31} x_{31}	c_{32} x_{32}	c_{33} x_{33}	0 x_{34}	50
ปริมาณความต้องการ (b_j)	30	50	20	60	160

<u>การหาผลลัพธ์ของตัวแบบปัญหาการขนส่ง</u>

ในการหาผลลัพธ์ตามเป้าหมายของปัญหาการขนส่งเราแบ่งออกเป็น 2 ขั้นตอนคือ

1. ขั้นตอนแรกหาผลลัพธ์เบื้องต้น
2. ขั้นตอนเพื่อหาผลลัพธ์ตามเป้าหมายหรือผลลัพธ์ที่ดีที่สุดของปัญหา (ต้นทุนค่าขนส่งรวมต่ำที่สุด)

1. <u>การหาผลลัพธ์เบื้องต้น</u>

กาหาผลลัพธ์เบื้องต้นจะเริ่มจากการพิจารณาจุดยอดหรือจุดตัดของพื้นที่ที่เป็นไปได้ ทำนองเดียวกับวิธีซิมเพล็กซ์คำเฉลยที่ได้รับจะต้องไม่ฝืนข้อจำกัดของโรงงานและคลังสินค้าและจำนวนสินค้าที่จะขนส่งจะต้องไม่เป็นค่าติดลบ

หลักเกณฑ์ในการหาผลลัพธ์เบื้องต้นของปัญหาการขนส่ง มีอยู่หลายวิธีด้วยกัน แต่วิธีที่ใช้กันอยู่แพร่หลายมีอยู่ 3 วิธีคือ

1.1 Northwest Corner rule

1.2 North to South row rule

1.3 Vogel's Approximation Method : VAM

1.1 <u>Northwest Corner rule</u>

วิธีนี้เป็นวิธีหาคำเฉลยเบื้องต้นที่ง่ายที่สุด วิธีการคือเริ่มจากช่องมุมบนซ้ายมือสุดของตาราง จัดสรรปริมาณสินค้าที่มีอยู่ในแต่ละแถวนอนให้หมดก่อนที่จะย้ายการจัดสรรไปยังแถวนอนข้างล่างถัดไป และจะต้องจัดสรรให้กับปริมาณความต้องการตามแถวตั้งแรกให้ครบเสียก่อนที่จะย้ายไปสู่แถวตั้งถัดไป ทำอย่างนี้เรื่อยไปจนกระทั่งครบตามเงื่อนไขของทุกแถวนอนและแถวตั้ง

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> บริษัทผู้ผลิตสินค้าชนิดหนึ่งมีโรงงานที่ผลิตสินค้าอยู่ 3 โรงงานตั้งอยู่ในสถานที่ต่างกันและมีตัวแทนจำหน่ายอยู่ 4 แห่งอยู่ในสถานที่ต่างกัน ปัญหาเรื่องการขนส่งซึ่งมีรายละเอียดดังตารางแสดงค่าขนส่ง และปริมาณความต้องการและอัตราการผลิตเป็นดังนี้

ตัวแทนจำหน่าย / โรงงาน	1	2	3	4	อัตราการผลิต/เดือน
1	3 x_{11}	2 x_{12}	3 x_{13}	7 x_{14}	150
2	1 x_{21}	5 x_{22}	4 x_{23}	3 x_{24}	40
3	3 x_{31}	5 x_{32}	4 x_{33}	6 x_{34}	80
ความต้องการสินค้า/เดือน	90	70	50	60	270

ปัญหาคือจะจัดส่งสินค้าที่ผลิตได้จากสามโรงงานไปยังตัวแทนจำหน่ายทั้งสี่แห่งอย่างไร จึงจะเสียค่าใช้จ่ายต่ำที่สุด

<u>วิธีทำ</u> เราจะเริ่มจัดสรร x_{11} ก่อนโดยจัดสรรปริมาณสินค้าลงที่ช่อง (1,1) ให้มากที่สุดแต่จะต้องไม่เกินปริมาณความต้องการของตัวแทนจำหน่าย และปริมาณความสามารถในการผลิต จากตัวอย่างเราจะเริ่มจัดสรรสินค้าจากโรงงานที่ 1 ไปยังตัวแทนจำหน่ายที่ 1 ก่อน โรงงานที่ 1 มีอัตราการผลิตเท่ากับ 150 หน่วย/เดือน แต่ตัวแทนจำหน่ายที่ 1 มีปริมาณความต้องการสินค้า 90 หน่วย ดังนั้น โรงงานที่ 1 จะส่งสินค้าไปให้ตัวแทนจำหน่ายที่ 1 (x_{11}) 90 หน่วยเท่ากับปริมาณความต้องการพอดี โรงงานที่ 1 ยังเหลือสินค้าอยู่อีก 150-90 = 60 หน่วย เราจึงสามารถจัดสรรสินค้าส่วนที่เหลือไปยังตัวแทนจำหน่ายที่ 2 (x_{12}) เท่ากับ 60 หน่วยหมดพอดี

ขั้นต่อไปจะเริ่มจัดสรรสินค้าจากโรงงานที่ 2 จะเห็นว่าตัวแทนจำหน่ายที่ 2 มีความต้องการสินค้า 70 หน่วยยังขาดอยู่อีก 70-60 = 10 หน่วย เราจึงจัดสรรจากโรงงานที่ 2 ให้ตัวแทนจำหน่ายที่ 2 (x_{22}) อีก 10 หน่วย ครบตามที่ตัวแทนจำหน่ายที่ 2 ต้องการต่อไปเราจะจัดสรรสินค้าจากโรงงานที่ 2 ซึ่งยังมีสินค้าเหลืออยู่ 40-10 = 30 หน่วย ไปให้แก่ตัวแทนจำหน่ายที่ 3 (x_{23}) เท่ากับ 30 หน่วยที่เหลืออยู่ ตัวแทนจำหน่ายที่ 3 ยังได้สินค้าไม่ครบยังขาดอยู่ 50-30 = 20 หน่วย จึงต้องได้รับการจัดสรรสินค้าจากโรงงานที่ 3 (x_{33}) อีก 20 หน่วย จึงครบตามต้องการ โรงงานที่ 3 ยังเหลือสินค้าอยู่ 80-20 = 60 หน่วย จึงจัดสรรส่วนที่เหลือให้แก่ตัวแทนจำหน่ายที่ 4 (x_{34}) 60 หน่วยเท่ากับปริมาณความต้องการพอดี ดังแสดงไว้ในตารางที่ 7-6

ตารางที่ 7-6 ผลลัพธ์เบื้องต้นโดยวิธี **Northwest Corner rule**

ตัวแทนจำหน่าย / โรงงาน	1	2	3	4	อัตราการผลิตต่อเดือน
1	3 90	2 60	3	7	150
2	1	5 10	4 30	3	40
3	3	5	4 20	6 60	80
ความต้องการสินค้า/เดือน	90	70	50	60	270

สรุปขั้นตอนการคำนวณตามตารางที่ 7-6 ได้ดังนี้

<u>ขั้นที่ 1</u> ทำให้ x_{11} มีค่าเท่ากับค่าต่ำระหว่าง a_1 และ b_1

$$x_{11} = \text{Min}\ (a_1,b_1) = \text{Min}\ (150,90) = 90$$

<u>ขั้นที่ 2</u> เนื่องจาก x_{11} = bl = 9 0 แถวตั้งแรกจะใส่ค่าอะไรอีกไม่ได้เหลือแถวนอนที่ 1 a_1 = 150 จัดสรรไปเพียง 90 ยังเหลืออีก 60 ให้เป็นค่า x_{12}

$$x_{12} = \text{Min}\ (a_1-x_{11},b_2) = \text{Min}\ (150-90,70) = 60$$

<u>ขั้นที่ 3</u> เนื่องจาก $x_{11} = b_1 = 90$ และ $x_{11} + x_{12} = a_1 = 150$ แถวตั้งแรกและแถวนอนที่ 1 จะใส่ค่าอื่นอีกมิได้ จึงพิจารณาแถวนอนที่ 2 และแถวตั้งที่ 2 ต่อไปเพื่อใส่ค่าของ x_{22}

$$x_{22} = \text{Min}\ (a_2,b_2- x_{12}) = \text{Min}\ (40,70-60) = 10$$

<u>ขั้นที่ 4</u> เนื่องจาก $x_{12} = 60$, $x_{22} = 10$, $x_{12} + x_{22} = b_2 = 70$ ดังนั้นแถวตั้งที่ 2 จึงใส่ค่าอื่นอีกมิได้ พิจารณาแถวนอนที่ 2 $a_2 = 40$ จัดสรรไปเพียง 10 ยังเหลืออีก 30 ให้เป็นค่า x_{23}

$x_{23} = \text{Min}\ (a_2 - x_{22}, b_3) = \text{Min}\ (40-10, 50) = 30$

<u>ขั้นที่ 5</u> เนื่องจาก $x_{22} + x_{23} = a_2 = 40$ ดังนั้น แถวนอนที่ 2 จึงใส่ค่าอื่นอีกไม่ได้ พิจารณาแถวตั้งที่ 3 $x_{23} = 30$ ยังขาดอีก 20 จึงจะได้ครบ $b_3 = 50$ จึงพิจารณาแถวนอนที่ 3 ต่อไปเพื่อใส่ค่า x_{33}

$x_{33} = \text{Min}\ (a_3, b_3 - x_{23}) = \text{Min}\ (80, 50-30) = 20$

<u>ขั้นที่ 6</u> เนื่องจาก $x_{23} + x_{33} = b_3 = 50$ ดังนั้น แถวตั้งที่ 3 จึงใส่ค่าอื่นอีกมิได้ พิจารณาแถวตั้งที่ 4 x_{34} ยังขาดอยู่อีก 60 ก็จะได้ครบ a_3 และ b_4 ดังนั้น $x_{34} = 60$

$x_{34} = \text{Min}\ (a_3 - x_{33}, b_4) = \text{Min}\ (80-20, 60) = 60$

จากตารางที่ 7-6 จะเห็นว่าค่าเฉลยมีลักษณะขั้นบันได และค่าเฉลยเบื้องต้นคือ

$x_{11} = 90$ หน่วย

$x_{12} = 60$

$x_{22} = 10$

$x_{23} = 30$

$x_{33} = 20$

$x_{34} = 60$

ต้นทุนของค่าขนส่งเบื้องต้น $= (90 \times 3) + (60 \times 2) + (10 \times 5) + (30 \times 4) + (20 \times 4) + (60 \times 6)$

$= 1000$ บาท

ตัวแปรที่ได้รับตามค่าเฉลยเบื้องต้นเหล่านี้คือตัวแปรที่อยู่ใน basis เรียกว่า basic variable และเป็นค่าเฉลยที่เป็นไปได้ เราให้ชื่อ ช่องในส่วนที่มีค่าผลลัพธ์เบื้องต้นของ x_{ij} ว่า basic cells หรือ circle cells และจะใส่วงกลมล้อมรอบตัวเลขที่เป็นค่าผลลัพธ์เบื้องต้นไว้ ส่วนตัวแปรที่เหลือคือ non-basic variable และมีค่าเท่ากับศูนย์ จะเห็นว่า

จำนวน basic variable มีจำนวน = จำนวนแถวนอน + จำนวนแถวตั้ง-1

$$= m + n - 1$$

ในที่นี้ $= 3 + 4 - 1$

$$= 6 \text{ ตัว}$$

ดังนั้นจำนวนตัวแปรที่เป็นค่าเฉลยเบื้องต้นจะมีจำนวนเท่ากับ m+n-1 เสมอไป ถ้าเมื่อใดก็ตามที่จำนวนตัวแปรที่เป็นค่าเฉลยไม่เท่ากับ m+n-1 แล้วแสดงว่าเกิดความแย้งกัน หรือการดำเนินงานย้อนซ้ำขั้นตอนเดิม (degeneracy) และวิธีการหาค่าเฉลยเมื่อเกิดความแย้งกันจะได้กล่าวถึงในตอนต่อไป

สรุปขั้นตอนการดำเนินงานโดยวิธี Northwest corner rule ได้ดังนี้

1. เริ่มต้นที่มุมบนซ้ายมือ ช่อง (1,1) เสมอ

2. จัดสรรค่า x_{ij} ให้มากที่สุดเท่าที่จะมากได้โดยเปรียบเทียบระหว่างปริมาณที่สามารถผลิต (a_i) กับปริมาณความต้องการ (b_j) ค่าใดน้อยกว่าค่านั้นคือค่า x_{ij}

3. เลื่อนไปทางขวามือหนึ่งช่องในกรณีที่ยังมีปริมาณสินค้าที่สามารถผลิตได้ (อุปทาน) เหลือ หรือเลื่อนลงมาข้างล่างหนึ่งช่องในกรณีที่ความต้องการสินค้า (อุปสงค์) ยังขาดอยู่ โดยให้ x_{ij} มีค่ามากที่สุดเท่าที่จะมากได้โดยเปรียบเทียบระหว่างปริมาณสินค้าที่ผลิตได้ที่เหลืออยู่กับปริมาณความต้องการ หรือเปรียบเทียบระหว่างปริมาณความต้องการที่ยังขาดอยู่กับปริมาณสินค้าที่ผลิตได้ ค่าใดน้อยกว่าค่านั้นคือค่า x_{ij}

4. ทำไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งครบตามเงื่อนไขของทั้งปริมาณที่สามารถผลิตและปริมาณความต้องการ

1.2 North to South row rule

North to South row rule เป็นวิธีหาผลลัพธ์เบื้องต้นอีกวิธีหนึ่งคล้ายกับ Northwest Corner rule ต่างกันที่ North to South row rule จะต้องนำค่าใช้จ่าย c_{ij} มาพิจารณาด้วย

จากโจทย์ตัวอย่างที่ 3 ผลลัพธ์เบื้องต้นโดยวิธี North to South row rule ดังแสดงไว้ในตารางที่ 7-7

ตารางที่ 7-7 ผลลัพธ์เบื้องต้นโดยวิธี North to South row rule

ตัวแทนจำหน่าย / โรงงาน	1	2	3	4	อัตราการผลิต / เดือน
1	3 80	2 70	3	7	150
2	1 10 10	1 5	4 30	3 3 0 30 3	40
3	3	5	4 50	6 30	80
ความต้องการสินค้า/เดือน	90	70	50	60	270

ขั้นตอนการคำนวณโดยวิธี North to South row rule ตามตารางที่ 7-7 เป็นดังนี้

<u>ขั้นที่ 1</u> พิจารณาแถวนอนที่ 1 c_{ij} ต่ำสุดได้แก่ $c_{12} = 2$ ต่อจากนั้นจึงพิจารณา

$$x_{12} = \text{Min } (a_1, b_2) = \text{Min } (150, 70) = 70$$

<u>ขั้นที่ 2</u> ในแถวนอนที่ 1 ค่าใช้จ่ายรองลงมาได้แก่ $c_{11} = 3$ และ $c_{13} = 3$

$$x_{11} = \text{Min}(a_1 - x_{12}, b_1) = \text{Min}(150-70, 90) = 80$$

<u>ขั้นที่ 3</u> พิจารณาแถวนอนที่ 2 c_{ij} ต่ำสุดได้แก่ $c_{21} = 1$ พิจารณา x_{21}

$$x_{21} = \text{Min}(a_2, b_1 - x_{11}) = \text{Min}(40, 90-80) = 10$$

<u>ขั้นที่ 4</u> ในแถวนอนที่ 2 ค่าใช้จ่ายรองลงมาได้แก่ $c_{24} = 3$

$$x_{24} = \text{Min}(a_2 - x_{21}, b_4) = \text{Min}(40-10, 60) = 30$$

<u>ขั้นที่ 5</u> พิจารณาแถวนอนที่ 3 c_{ij} ต่ำสุดได้ $c_{31} = 3$ แต่เนื่องจาก b_1 ได้รับการจัดสรรครบแล้ว จึงพิจารณาค่าใช้จ่ายรองลงมาได้แก่ $c_{33} = 4$

$$x_{33} = \text{Min}(a_3, b_3) = \text{Min}(80, 50) = 50$$

<u>ขั้นที่ 6</u> ในแถวนอนที่ 3 ค่าใช้จ่ายรองลงมาได้แก่ $c_{32} = 5$ แต่เนื่องจาก b_2 ได้รับการจัดสรรครบแล้วจึงพิจารณาค่าใช้จ่ายรองลงไปอีกได้แก่ $c_{34} = 6$

$$x_{34} = \text{Min}(a, - x_{33}, b_4 - x_{24}) = \text{Min}(80-50, 60-30) = 30$$

ต้นทุนค่าขนส่งเบื้องต้น $= (80\times3) + (70\times2) + (10\times1) + (30\times3) + (50\times4) + (30\times6)$

$= 860$ บาท

จะเห็นว่าต้นทุนค่าขนส่งเบื้องต้นด้วยวิธี North to South row rule ต่ำกว่า Northwest corner rule ทั้งนี้เพราะเรานำค่าใช้จ่ายมาพิจารณาด้วย

1.3 <u>Vogel's Approximation Method : VAM</u>

Vogel's Approximation Method หรือ VAM เป็นวิธีการสร้างผลลัพธ์เบื้องต้นอีกวิธีหนึ่งที่พิจารณาค่าใช้จ่ายทั้งแถวนอนและแถวตั้งร่วมกัน

ลำดับขั้นตอนการคำนวณโดยวิธีของ VAM มีดังนี้

1. หาค่าผลต่างระหว่างค่าขนส่งต่ำสุดกับต่ำรองลงมาของแต่ละแถวนอนและแต่ละแถวตั้ง แล้วพิจารณาค่าที่ให้ผลต่างสูงสุดเป็นจุดเริ่มต้นของการจัดสรร x_{ij} ตัวแรก

2. จัดสรร x_{ij} ให้มากที่สุดลงในช่องที่มีค่าขนส่งต่ำสุดของแถวนอนหรือแถวตั้งที่มีผลต่างสูงสุดที่เราเลือกแล้วตามข้อ 1 ค่า x_{ij} ซึ่งจะจัดสรรได้มากที่สุดจะต้องไม่มากไปกว่าค่าของ a_i และ b_j ที่เหลือจากการจัดสรร x_{ij} อื่น ๆ แล้วเช่นเดียวกันกับวิธี **Northwest corner rule** ที่กล่าวมาแล้ว

ในกรณีที่มีผลต่างในแถวนอนและแถวตั้งมากที่สุดเท่ากันก็ให้จัดสรร x_{ij} ลงในช่องที่มีต้นทุนค่าขนส่งต่ำสุดในแถวนอนหรือแถวตั้งที่เท่ากัน ไม่นับแถวนอนหรือแถวตั้งที่ตัดออก

3. เมื่อจัดสรร x_{ij} ในแถวนอนหรือแถวตั้งใดครบตามปริมาณความต้องการหรือปริมาณการผลิตแล้วให้ตัดแถวนั้นทิ้งไป (ไม่ต้องพิจารณาอีก)

4. ย้อนกลับไปทำตามขั้นตอนที่ 1, 2, 3 จนกระทั่งไม่มีการจัดสรรได้อีก

จากโจทย์ตัวอย่างที่ 3 ผลลัพธ์เบื้องต้นโดยวิธี VAM ดังแสดงไว้ในตารางดังต่อไปนี้

ตารางที่ 7-8

ตัวแทนจำหน่าย / โรงงาน	1	2	3	4	อัตราการผลิต / เดือน	ผลต่างของแถวนอน
1	3	2	3	7	150	1 → 3 - 2
2	1	5	4	3	40	2 → 3 - 1
3	3	5	4	6	80	1 → 4 - 3
ปริมาณความต้องการ/ เดือน	90	70	50	60	270	
ผลต่างของแถวตั้ง	2 ↓ 3-1	3* ↓ 5-2	1 ↓ 4-3	3 ↓ 6-3		

ขั้นตอนการคำนวณโดยวิธี VAM เป็นดังนี้

<u>ขั้นที่ 1</u> คำนวณผลต่างระหว่างค่าขนส่งที่ต่ำสุดกับต่ำรองลงมาของทุกแถวนอนและแถวตั้ง ดูตารางที่ 7-8 ค่าแตกต่างมากที่สุดคือ 3 อยู่แถวตั้งที่ 2 และแถวตั้งที่ 4 ทั้งสองแถวดังกล่าวมี x_{12} มีต้นทุนต่ำสุดคือ 2 เราจะเลือกช่อง x_{12} เป็นจุดเริ่มแรกของการจัดสรร

<u>ขั้นที่ 2</u> จัดสรร x_{12} ได้มากที่สุดเท่ากับ 70 หน่วย ซึ่งเท่ากับปริมาณความต้องการของตัวแทนจำหน่ายพอดี

x_{12} = Min (a_1, b_2) = Min (150,70) = 70 **(ดูตารางที่ 7-9)**

<u>ขั้นที่ 3</u> กำจัดแถวตั้งที่ 2 ทิ้งไปไม่ต้องพิจารณาอีกในขั้นต่อไป

<u>ขั้นที่ 4</u> ย้อนกลับไปทำตามขั้นตอนที่ 1, 2, 3 ใหม่

ตารางที่ 7-9

ตัวแทนจำหน่าย / โรงงาน	1	2	3	4	อัตราการผลิต/เดือน	ผลต่างของแถวนอน
1	3	2 70	3	7	150	4* → 7-3
2	1	5 –	4	3	40	2 → 3-1
3	3	5 –	4	6	80	1 → 4-3
ปริมาณความต้องการ/เดือน	90	70	50	60	270	
ผลต่างของแถวตั้ง	2 ↓ 3-1	-	1 ↓ 4-3	3 ↓ 6-3		

<u>ขั้นที่ 1</u> คำนวณผลต่างระหว่างค่าขนส่งต่ำสุดกับต่ำรองลงมาของทุกแถวนอนและแถวตั้งที่เหลือ ดูตารางที่ 7-9 ค่าแตกต่างที่มากที่สุดคือ 4 อยู่แถวนอนที่ 1 ดูต่อไปว่าในแถวนอนที่ 1 มีช่องไหนที่มีค่าขนส่งต่ำที่สุด ปรากฏว่า x_{11} และ x_{13} มีต้นทุนค่าขนส่งต่ำสุดคือ 3 เราจะเลือกจัดสรรไปยัง x_{11} หรือ x_{13} ก็ได้

<u>ขั้นที่ 2</u> เลือกจัดสรรไปยัง x_{13} ได้มากที่สุดเท่ากับ 50 หน่วย ซึ่งเท่ากับปริมาณความต้องการพอดี

$$x_{13} = \text{Min}\ (a_1 - x_{12},\ b_3) = \text{Min}\ (150-70, 50) = 50$$ (ดูตารางที่ 7-10)

<u>ขั้นที่ 3</u> กำจัดแถวตั้งที่ 3 ทิ้งไปไม่ต้องพิจารณาอีกในขั้นต่อไป

<u>ขั้นที่ 4</u> ย้อนกลับไปทำตามขั้นตอนที่ 1, 2, 3 ใหม่

ตารางที่ 7-10

ตัวแทนจำหน่าย / โรงงาน	1	2	3	4	อัตราการผลิตต่อเดือน	ผลแตกต่างของแถวนอน
1	3	2 (70)	3 (50)	7	150	4* → 7-3
2	1	5 —	4 —	3	40	2 → 3-1
3	3	5 —	4 —	6	80	3 → 6-3
ปริมาณความต้องการ/เดือน	90	70	50	60	270	
ผลแตกต่างของแถวตั้ง	2 ↓ 3-1	-	-	3 ↓ 6-3		

<u>ขั้นที่ 1</u> คำนวณค่าแตกต่างระหว่างค่าขนส่งต่ำสุดกับค่ารองลงมาของทุกแถวนอนและแถวตั้งที่เหลือ ดูตารางที่ 7-10 ค่าแตกต่างมากที่สุดคือ 4 อยู่แถวนอนที่ 1 แถวนอนที่ 1 มีต้นทุนต่ำสุดคือ 3 ที่ช่อง x_{11}

<u>ขั้นที่ 2</u> จัดสรรไปยัง x_{11} (ดูตารางที่ 7-11)

$$x_{11} = \text{Min}\,(a_1 - x_{12} - x_{13},\ b_1) = \text{Min}\,(150-70-50, 90) = 30$$

<u>ขั้นที่ 3</u> อัตราการผลิตของโรงงานที่ 1 a_1 หมดพอดี กำจัดแถวนอนที่ 1 ทิ้งไปไม่ต้องพิจารณาอีกในขั้นต่อไป

<u>ขั้นที่ 4</u> ย้อนกลับไปทำตามขั้นตอนที่ 1, 2, 3 ใหม่

ตารางที่ 7-11

ตัวแทนจำหน่าย / โรงงาน	1	2	3	4	อัตราการผลิตต่อเดือน	ผลแตกต่างของแถวนอน
1	- 30	- 70	- 50	-	150	-
2	1	5	4	3	40	2 → 3-1
3	3	5	4	6	80	3 → 6-3
ต้องการต่อเดือน	90	70	50	60	270	
ผลแตกต่างของแถวตั้ง	2 ↓ 3-1	-	-	3* ↓ 6-3		

<u>ขั้นที่ 1</u> คำนวณค่าแตกต่างระหว่างค่าขนส่งต่ำสุดกับต่ำรองลงมาของทุกแถวนอนและแถวตั้งที่เหลือ ดูตารางที่ 7-11 ค่าแตกต่างมากที่สุดคือ 3 อยู่แถวนอนที่ 3 และแถวตั้งที่ 4 ทั้งสองแถวดังกล่าวมี x_{24} และ x_{31} มีต้นทุนต่ำสุดคือ 3 เท่ากัน เลือกจักสรรไปยัง x_{24} หรือ x_{31} ก็ได้

<u>ขั้นที่ 2</u> เลือกจัดสรรไปยัง x_{24} ได้มากที่สุดเท่ากับ 40 หน่วย ซึ่งเท่ากับปริมาณการผลิตพอดี (ดูตารางที่ 7-12)

$$x_{24} = \text{Min}\,(a_2, b_4) = \text{Min}\,(40, 60) = 40$$

<u>ขั้นที่ 3</u> กำจัดแถวนอนที่ 2 ทิ้งไปไม่ต้องพิจารณาอีกในขั้นต่อไป

<u>ขั้นที่ 4</u> ย้อนกลับไปทำตามขั้นตอนที่ 1, 2, 3 ใหม่

ตารางที่ 7-12

ตัวแทนจำหน่าย / โรงงาน	1	2	3	4	อัตราการผลิตต่อเดือน	ผลแตกต่างของแถวนอน
1	3 30	2 70	3 50	7	150	-
2	1	5	4	3 40	40	-
3	13	15	4	6	80	3 →6-3
ปริมาณความต้องการ/เดือน	90	70	50	60	270	
ผลแตกต่างของแถวตั้ง	3 ↓ 3	-	-	6* ↓ 6		

<u>ขั้นที่ 1</u> คำนวณค่าแตกต่างระหว่างค่าขนส่งต่ำสุดกับต่ำรองลงมาของทุกแถวนอนและแถวตั้งที่เหลือ ดูตารางที่ 7-12 ค่าแตกต่างมากที่สุดคือ 6 อยู่แถวตั้งที่ 4 แถวตั้งที่ 4 มีต้นทุนต่ำสุดคือ 6 ที่ช่อง x_{34}

<u>ขั้นที่ 2</u> จัดสรรไปยัง x_{34} ได้มากที่สุดเท่ากับ 20 หน่วยครบตามความต้องการพอดี

$$x_{34} = \text{Min}\ (a_3,\ b_4 - x_{24}) = \text{Min}\ (80, 60-40) = 20 \quad \text{(ดูตารางที่ 7-13)}$$

<u>ขั้นที่ 3</u> กำจัดแถวตั้งที่ 4 ทิ้งไปไม่ต้องพิจารณาอีกในขั้นต่อไป

<u>ขั้นที่ 4</u> ย้อนกลับไปทำตามขั้นตอนที่ 1, 2, 3 ใหม่

ตารางที่ 7-13

โรงงาน \ ตัวแทนจำหน่าย	1	2	3	4	อัตราการผลิตต่อเดือน	ผลแตกต่างของแถวนอน
1	3 (30)	2 (70)	3 (50)	7	150	-
2	1	5	4	3 (40)	40	-
3	3	5	4	6 (20)	80	3*
ปริมาณความต้องการ/เดือน	90	70	50	60	270	
ผลแตกต่างของแถวตั้ง	3	-	-	-		

<u>ขั้นที่ 1</u> คำนวณค่าแตกต่างระหว่างค่าขนส่งต่ำสุดและต่ำรองลงมาของทุกแถวนอน และแถวตั้งที่เหลือ ดูตารางที่ 7-13 ค่าแตกต่างมากที่สุดคือ 3 อยู่แถวนอนที่ 3 และแถวตั้งที่ 1 อยู่ที่ x_{31} ซึ่งมีต้นทุนต่ำสุดคือ 3

<u>ขั้นที่ 2</u> จัดสรรไปยัง x_{31} ได้มากที่สุดเท่ากับ 60 หน่วยที่โรงงานสามเหลืออยู่ และเท่ากับปริมาณความต้องการของตัวแทนจำหน่ายที่ 1 ที่ยังขาดอยู่พอดี **(ดูตารางที่ 7-14)**

$$x_{31} = \text{Min}\,(a_3 - x_{34},\ b_1 - x_{11}) = \text{Min}\,(80-20,\ 90-30) = 60$$

<u>ขั้นที่ 3</u> กำจัดแถวนอนที่ 3 และแถวตั้งที่ 1 ทิ้งไปไม่ต้องพิจารณาอีกในขั้นต่อไป

<u>ขั้นที่ 4</u> จะเห็นว่าตารางที่ 7-14 ไม่มีปริมาณสินค้าจากโรงงานเหลืออยู่อีกและปริมาณความต้องการของตัวแทนจำหน่ายได้รับการตอบสนองหมดแล้ว แสดงว่าตารางดังกล่าวข้างต้นเป็นตารางแสดงผลลัพธ์เบื้องต้นโดยวิธี VAM แล้ว

ตารางที่ 7-14 ผลลัพธ์เบื้องต้นโดยวิธี **VAM**

ตัวแทนจำหน่าย / โรงงาน	1	2	3	4	อัตราการผลิตต่อเดือน
1	3 (30)	2 (70)	3 (50)	7 /	150
2	1 /	5 /	4 /	3 (40)	40
3	3 (60)	5 /	4 /	6 (20)	80
ปริมาณความต้องการต่อเดือน	90	70	50	60	270

ดังนั้นการใช้วิธี VAM หาผลลัพธ์เบื้องต้นของปัญหาการขนส่ง ถ้าได้ทำโดยความเคยชินแล้ว อาจไม่จำเป็นต้องใช้ตารางตัดครั้งละแถวตามรายละเอียดดังกล่าวข้างต้น สามารถใช้เพียงตารางรูปแบบปัญหาอันเดิมอันเดียวก็สามารถหาผลลัพธ์เบื้องต้นได้โดยไม่ยาก ดังนี้

ตารางที่ 7-14 ผลลัพธ์เบื้องต้นโดยวิธี VAM

ตัวแทนจำหน่าย / โรงงาน	1	2	3	4	อัตราการผลิตต่อเดือน	ผลแตกต่างของแถวนอน
1	$\boxed{3}$ 30	$\boxed{2}$ 70	$\boxed{3}$ 50	$\boxed{7}$ /	150	1 4* 4* - - -
2	$\boxed{1}$ /	$\boxed{5}$ /	$\boxed{4}$ /	$\boxed{3}$ 40	40	2 2 2 2 - -
3	$\boxed{3}$ 60	$\boxed{5}$ /	$\boxed{4}$ /	$\boxed{6}$ 20	80	1 1 3 3 3 3*
ปริมาณความต้องการต่อเดือน	90	70	50	60	270	

ผลแตกต่างของแถวตั้ง	1	2	3	4
	2	3*	1	3
	2	-	1	3
	2	-	-	3
	2	-	-	3*
	3	-	-	6*
	3	-	-	-

ผลลัพธ์เบื้องต้นจะได้

$x_{11} = 30$

$x_{12} = 70$

$x_{13} = 50$

$x_{24} = 40$

$x_{31} = 60$

$x_{34} = 20$

ต้นทุนค่าขนส่งเบื้องต้น = (30x3)+(70x2)+(50x3)+(40x3)+(60x3)+(20x6)

= 800 บาท

การหาผลลัพธ์เบื้องต้นจากวิธี **VAM** มีหลักเกณฑ์ในการจัดสรร x_{ij} โดยพิจารณาค่าขนส่ง c_{ij} ด้วย จึงสรุปได้ไม่ยากว่าผลลัพธ์เบื้องต้นจากวิธีนี้จะมีค่าใกล้เคียงผลลัพธ์ตามเป้าหมายอย่างไม่มีปัญหา และมีอยู่บ่อยครั้งที่ผลลัพธ์เบื้องต้นจากวิธีนี้ได้ผลลัพธ์ตามเป้าหมายโดยทันที วิธีการหาผลลัพธ์เบื้องต้นจากวิธี **VAM** จึงได้รับความนิยมแม้ว่าจะมีขั้นตอนยุ่งยากอยู่บ้างแต่ก็คุ้มกว่ามาก เพราะสามารถลดเวลาการคำนวณในขั้นตอนการหาผลลัพธ์ตามเป้าหมายลงไปได้มาก

2. <u>การหาผลลัพธ์ตามเป้าหมาย</u>

ขั้นตอนนี้เป็นขั้นการพัฒนาคำเฉลยเพื่อให้ได้คำเฉลยที่ดีที่สุด (ต้นทุนค่าขนส่งรวมต่ำที่สุด) จากผลลัพธ์เบื้องต้นที่หามาได้ยังไม่ใช่ผลลัพธ์ที่ดีที่สุดเพราะถ้าเราพิจารณาต่อไปโดยการทดลองนำ **non-basic variables** เปลี่ยนให้เป็น **basic variable** แล้วมีผลให้ต้นทุนค่าขนส่งลดลงได้อีก แสดงว่าผลลัพธ์เบื้องต้นยังไม่ใช่คำเฉลยที่ดีที่สุด

วิธีการที่นำมาใช้ช่วยหาผลลัพธ์ตามเป้าหมายเพื่อให้ได้ต้นทุนค่าขนส่งรวมต่ำที่สุดมีอยู่ 2 วิธีคือ

2.1 **Stepping Stone Method**

2.2 **MODI Method (Modified Distribution Method)**

ก่อนที่จะพัฒนาคำเฉลยเพื่อหาผลลัพธ์ตามเป้าหมายต้นทุนค่าขนส่งรวมต่ำที่สุดขอให้ระลึกถึงเงื่อนไขที่จำเป็นคือ

จำนวน **basic Cell** หรือ x_{ij} ที่เราจัดสรรให้ในผลลัพธ์เบื้องต้นจะต้องมีจำนวนเท่ากับ **m+n-1** เสมอโดยที่

m = จำนวนแถวนอน

n = จำนวนแถวตั้ง

ถ้าไม่เป็นไปตามนั้น จะเกิดปัญหาความแย้งกัน (degeneracy) จนไม่สามารถหาผลลัพธ์ตามเป้าหมายได้

2.1 Stepping Stone Method

วิธี Stepping Stone เป็นวิธีที่ง่ายแก่การทำความเข้าใจและเป็นพื้นฐานช่วยให้เกิดความเข้าใจวิธี MODI ซึ่งวิธี MODI เป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพที่สุดและง่ายแก่การคำนวณ

ขั้นตอนการคำนวณหาผลลัพธ์ตามเป้าหมายที่ดีที่สุดด้วยวิธี Stepping Stone มีดังนี้

ขั้นที่ 1 ประเมินตัวแปรที่ไม่เป็นผลลัพธ์เบื้องต้น ซึ่งจะต้องปฏิบัติดังนี้

(1) เลือกตัวแปรที่ไม่เป็นผลลัพธ์เบื้องต้น (non-basic variable) หรือช่องสี่เหลี่ยมที่ยังไม่มีค่าตัวเลข (nonbasic cell) ทีละตัวทุกตัว เพื่อนำมาประเมินค่าขนส่ง

(2) กำหนดทางเดิน (Path)

ทางเดิน (Path) คือการเชื่อมจากจุดยอดหนึ่งไปสู่อีกจุดยอดหนึ่ง (การเชื่อมจะต้องเป็นไปในแนวดิ่งและแนวนอนเท่านั้น) แล้วให้ย้อนกลับสู่จุดเดิม โดยพยายามให้การเชื่อมเป็นเส้นทางที่ตรงที่สุด ซึ่งจะมีอยู่เส้นทางเดียวเท่านั้น และอาจข้ามตัวแปรบางตัวได้

จุดยอด (Vertex) คือ basic Cells ซึ่งจะเปลี่ยนมุมไปยังจุดยอดต่อไป basic cells ซึ่งไม่ได้เปลี่ยนมุมจะเป็นเพียงตัวผ่านไม่ใช่จุดยอด

(3) กำหนดเครื่องหมายบวก (+) และลบ (-) สลับกันไปที่แต่ละจุดยอดของทางเดินตามข้อ (2) โดยเริ่มจากเครื่องหมายบวกตรง nonbasic cell ที่เปลี่ยนให้เป็น basic cell และกำหนดเครื่องหมายลบให้แก่ basic cell ที่เปลี่ยนมุมจุดแรกและจุดต่อมาเป็นบวกสลับเครื่องหมายไปจนกว่าจะครบรอบ ซึ่งเครื่องหมายบวกแสดงถึงเพิ่มการขนส่งสินค้าที่จุดนั้น 1 หน่วย และเครื่องหมายลบแสดงถึงลดการขนส่งสินค้าที่จุดนั้น 1 หน่วย

(4) หาค่าการเปลี่ยนแปลงสุทธิของต้นทุนค่าขนส่ง คำนวณจากการบวกต้นทุนค่าขนส่งต่อหน่วยตามช่องที่ได้กำหนดเครื่องหมายบวกและหักต้นทุนค่าขนส่งต่อหน่วยจากช่องที่ได้กำหนดเครื่องหมายลบตามข้อ (3)

(5) ตัวแปรใดที่ทำให้การเปลี่ยนแปลงสุทธิของต้นทุนค่าขนส่งต่อหน่วยลดลงมากที่สุด เราจะเลือกตัวแปรนั้นเป็นตัวแปรที่จะเข้าไปใน **Basis** โดยเพิ่มการขนส่งสินค้าเข้าไปที่ตัวแปรนั้น ขอให้ดูตัวอย่างที่ 4 ประกอบดังนี้

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> จากโจทย์ตัวอย่างที่ 3 สมมติว่าผลลัพธ์เบื้องต้นเราใช้วิธี **Nothwest Corner rule** ปรากฏตามตารางที่ 7-6 ดังนี้

ตารางที่ 7-6 ผลลัพธ์เบื้องต้นโดยวิธี **Northwest Corner rule**

ตัวแทนจำหน่าย / โรงงาน	1	2	3	4	อัตราการผลิตต่อเดือน
1	3 90	2 60	3	7	150
2	1	5 10	4 30	3	40
3	3	5	4 20	6 60	80
ความต้องการสินค้าต่อเดือน	90	70	50	60	270

ขั้นตอนการคำนวณหาผลลัพธ์ตามเป้าหมายที่ดีที่สุดโดยวิธี **Stepping Stone** มีดังนี้

ตัวแปรที่เป็นผลลัพธ์เบื้องต้น (basic variables) เท่ากับ $m+n-1 =$ $3+4-1 = 6$ จำนวนที่อยู่ใน basic cells ได้แก่

$$x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{23}, x_{33}, x_{34}$$

ส่วนตัวแปรที่ไม่ได้เป็นผลลัพธ์เบื้องต้น (non basic variables) $x_{ij} =$ 0 อยู่ใน nonbasic cells ได้แก่

$$x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{24}, x_{31}, x_{32}$$

กำหนดทางเดิน (Path) และคำนวณค่าการเปลี่ยนแปลงสุทธิของต้นทุนให้แก่ตัวแปรที่ไม่ได้เป็นผลลัพธ์เบื้องต้นที่ละตัวทุกตัวดังนี้

สำหรับแต่ละทางเดินของตัวแปรที่ไม่ได้เป็นผลลัพธ์เบื้องต้น เราเริ่มด้วยการเพิ่ม x_{13} 1 หน่วย จะต้องลด x_{12} 1 หน่วย เพราะว่าอัตราการผลิตของโรงงานที่ 1 มีเพียง 150 หน่วย จากนั้นเราจะเพิ่ม x_{22} 1 หน่วย เพราะว่าความต้องการของตัวแทนจำหน่าย 2 เท่ากับ 70 หน่วย และลด x_{23} 1 หน่วย เพราะอัตราการผลิตของโรงงาน 2 มีเพียง 40 หน่วย และปริมาณความต้องการของตัวแทนจำหน่ายที่ 3 มีเพียง 50 หน่วย

การเปลี่ยนแปลงจำนวนหน่วยสินค้าที่เคลื่อนย้ายสุทธิจะเท่ากับศูนย์ เนื่องจากถ้าเราเพิ่มจำนวนสินค้าที่จุดใด 1 หน่วย เราจะลดจำนวนสินค้าที่จุดอื่นด้วยปริมาณเท่ากัน การที่เราเพิ่มจำนวนสินค้าเข้าไปในตัวแปรที่ไม่ได้เป็นผลลัพธ์เบื้องต้น 1 หน่วยก็เพื่อดูว่าการเปลี่ยนแปลงสุทธิของต้นทุนค่าขนส่งจะเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างไร

ตารางที่ 7-15

ตัวแทนจำหน่าย / โรงงาน	1	2	3	4	อัตราการผลิตต่อเดือน
1	3 90	2 60 −	3 +	7	150
2	1	5 10 +	4 30 −	3	40
3	3	5	4 20	6 60	80
ความต้องการสินค้าต่อเดือน	90	70	50	60	270

<u>ทางเดินของ</u> x_{13} คือ $(+)x_{13} \rightarrow (-)x_{12} \rightarrow (+)\ x_{22} \rightarrow (-)\ x_{23}$ แสดงไว้ในตารางที่ 7-15

การเปลี่ยนแปลงจำนวนหน่วยสินค้าที่เคลื่อนย้ายสุทธิ $= x_{13}(\uparrow 1) - x_{12}(\downarrow 1) + x_{22}(\uparrow 1) - x_{23}(\downarrow 1)$

$= 0$

การเปลี่ยนแปลงสุทธิของต้นทุนค่าขนส่ง $= +c_{13} - c_{12} + c_{22} - c_{23}$

$= 3 - 2 + 5 - 4$

$= +2$

การเคลื่อนย้ายสินค้าจากโรงงานที่ 1 ไปยังตัวแทนจำหน่ายที่ 3 จำนวน 1 หน่วยทำให้ต้นทุนค่าขนส่งเพิ่มขึ้นหน่วยละ 2 บาท

ต่อไปดำเนินการหาทางเดินของ x_{14} และคำนวณการเปลี่ยนแปลงสุทธิของต้นทุน ได้ดังนี้

ตารางที่ 7-16

โรงงาน \ ตัวแทนจำหน่าย	1	2	3	4	อัตราการผลิตต่อเดือน
1	[3] 90	[2] 60 -	[3]	[7] +	150
2	[1]	[5] 10 +	[4] 30 -	[3]	40
3	[3]	[5]	[4] 20 +	[6] 60 -	50
ความต้องการสินค้าต่อเดือน	90	70	50	60	270

<u>ทางเดินของ</u> x_{14} คือ $(+)\ x_{14} \rightarrow (-)x_{12} \rightarrow (+)x_{22} \rightarrow (-)x_{23} \rightarrow (+)x_{33} \rightarrow (-)x_{34}$

การเปลี่ยนแปลงจำนวนหน่วยสินค้าที่เคลื่อนย้ายสุทธิ $= x_{14}(\uparrow 1) - x_{12}(\downarrow 1) + x_{22}(\uparrow 1) - x_{23}(\downarrow 1) + x_{33}(\uparrow 1) - x_{34}(\downarrow 1)$

$= 0$

การเปลี่ยนแปลงสุทธิของต้นทุนค่าขนส่ง $= c_{14} - c_{12} + c_{22} - c_{23} + c_{33} - c_{34}$

$= 7 - 2 + 5 - 4 + 4 - 6$

$= +4$

การเคลื่อนย้ายสินค้าจากโรงงานที่ 1 ไปยังตัวแทนจำหน่ายที่ 4 จำนวน 1 หน่วยทำให้ต้นทุนค่าขนส่งเพิ่มขึ้นหน่วยละ 4 บาท

การดำเนินการหาทางเดินของ x_{21}, x_{24}, x_{31} และ x_{32} และคำนวณการเปลี่ยนแปลงสุทธิของต้นทุนได้ดังนี้

<u>ทางเดินของ</u> x_{21} คือ $(+)x_{21} \rightarrow (-)x_{22} \rightarrow (+)x_{12} \rightarrow (-)x_{11}$

การเปลี่ยนแปลงสุทธิของต้นทุนค่าขนส่ง $= c_{21} - c_{22} + c_{12} - c_{11}$

$= +1 - 5 + 2 - 3$

$= -5$

<u>ทางเดินของ</u> x_{24} คือ $(+)x_{24} \rightarrow (-)x_{23} \rightarrow (+)x_{33} \rightarrow (-)x_{34}$

การเปลี่ยนแปลงสุทธิของต้นทุนค่าขนส่ง $= c_{24} - c_{23} + c_{33} - c_{34}$

$= +3 - 4 + 4 - 6$

$= -3$

<u>ทางเดินของ</u> x_{31} คือ $(+)x_{31} \rightarrow (-)x_{33} \rightarrow (+)x_{23} \rightarrow (-)x_{22} \rightarrow$

$\rightarrow (+)x_{12} \rightarrow (-)x_{11}$

การเปลี่ยนแปลงสุทธิของต้นทุนค่าขนส่ง $= c_{31} - c_{33} + c_{23} - c_{22} + c_{12} - c_{11}$

$= 3 - 4 + 4 - 5 + 2 - 3$

$= -3$

<u>ทางเดินของ</u> x_{32} คือ $(+)x_{32} \rightarrow (-)x_{33} \rightarrow (+)x_{23} \rightarrow (-)x_{22}$

การเปลี่ยนแปลงสุทธิของต้นทุนค่าขนส่ง $= c_{32} - c_{33} + c_{23} - c_{22}$

$= +5 - 4 + 4 - 5$

$= 0$

จากการคำนวณค่าการเปลี่ยนแปลงสุทธิของต้นทุนค่าขนส่งจะเห็นว่า x_{21} ให้การเปลี่ยนแปลงสุทธิมากที่สุด (ค่าทางตัวเลขที่ติดลบมากที่สุด) หมายความว่าการขนส่งสินค้าจากโรงงานที่ 2 ไปยังตัวแทนจำหน่ายที่ 1 จำนวน 1 หน่วยจะทำให้ต้นทุนค่าขนส่งลดลงหน่วยละ 5 บาท x_{21} จึงเป็นตัวแปรที่จะเข้าไปใน **Basis** เป็น **basic variable** ตัวต่อไป ปัญหาต่อมาคือเราควรเพิ่มจำนวนสินค้าลงไปที่จุด x_{21} กี่หน่วย

<u>ขั้นที่ 2 คำนวณหาผลลัพธ์ (คำเฉลย) ใหม่</u>

จากการคำนวณค่าการเปลี่ยนแปลงสุทธิของต้นทุนค่าขนส่งทำให้ทราบว่าตัวแปรที่ไม่เป็นผลลัพธ์เบื้องต้น **(non-basic variable)** ใดจะถูกจัดเข้าไปเป็นตัวแปรที่อยู่ใน **basis (basic variable)** บ้าง

ในที่นี้เราทราบว่า x_{21} คือตัวแปรที่จะเข้าไปอยู่ใน **Basis** ควรมีค่าเท่าใด และเมื่อเราเพิ่มการขนส่งสินค้าไปยัง x_{21} ก็จะต้องลดการขนส่งสินค้าที่จุดอื่นลงในปริมาณที่เท่ากัน เราจะคำนวณได้อย่างไร

หลักเกณฑ์ในการกำหนดจำนวนสินค้าที่จะจัดสรรให้แก่ **basic variable** ใหม่ (x^*_{ij}) มีดังนี้ ค่า x^*_{ij} จะมีค่าได้มากที่สุดเท่ากับปริมาณของตัวแปรภายในทางเดิน ที่อยู่ในตำแหน่งเครื่องหมายลบที่มีค่าทางตัวเลขต่ำที่สุด และเมื่อเราเพิ่มการขนส่งสินค้าไปยัง x^*_{ij} ก็ต้องลดการขนส่งสินค้าที่จุดอื่นลงในปริมาณที่เท่ากัน โดยใช้วิธีเพิ่มจำนวน x^*_{ij} สำหรับจุดยอดที่เป็นบวกและลดจำนวน x^*_{ij} สำหรับจุดยอดที่เป็นลบเสร็จแล้วคำนวณหาต้นทุนค่าขนส่งจากผลลัพธ์ใหม่เราได้ต้นทุนรวมลดลงจากคำเฉลยที่มาจากผลลัพธ์เบื้องต้น

เพื่อตอบปัญหาข้างต้น เราจะเขียนทางเดินของ x_{21} เพื่อแสดงค่าการเปลี่ยนแปลงสุทธิตามตารางที่ 7-17 ดังนี้

ตารางที่ 7-17

	1	2
1	[3] 90 (−)	[2] 60 (+)
2	[1] (+)	[5] 10 (−)

ค่าของ x_{21} จะมีค่าได้มากที่สุดเท่าไร คำนวณได้โดยดูจากตัวแปรภายในทางเดินที่มีค่าทางตัวเลขลบน้อยที่สุด จะเห็นว่าตัวแปรภายในทางเดินที่อยู่ในตำแหน่งค่าลบมี 2 ตัว คือ x_{11} และ x_{22} , x_{22} ให้ค่าทางตัวเลขติดลบน้อยกว่าคือ 10 หน่วย ผลลัพธ์ใหม่หาได้โดยนำ 10 บวกเพิ่มเข้าไปในจุดยอดที่มีเครื่องหมายบวก (x_{21} และ x_{12}) และนำ 10 ลบออกจากจุดยอดที่มีเครื่องหมายลบ (x_{11} และ x_{22}) ภายในทางเดินดังตารางที่ 7-18 ดังนี้

ตารางที่ 7-18

	1	2
1	$x_{11}(-)$ [3] 90-10 = 80	$x_{12}(+)$ [2] 60+10 = 70
2	$x_{21}(+)$ [1] 0 + 10 = 10	$x_{22}(-)$ [5] IO-IO = 0

ผลลัพธ์ใหม่ดังแสดงไว้ในตารางที่ 7-19 ดังนี้

ตารางที่ 7-19

ตัวแทนจำหน่าย / โรงงาน	1	2	3	4	อัตราการผลิตต่อเดือน
1	3 (80)	2 (70)	3	7	150
2	1 (10)	5	4 (30)	3	40
3	3	5	4 (20)	6 (60)	80
ความต้องการสินค้าต่อเดือน	90	70	50	60	270

ผลลัพธ์ใหม่คือ $x_{11} = 80$, $x_{12} = 70$, $x_{21} = 10$, $x_{23} = 30$

$x_{33} = 20$, $x_{34} = 60$

ต้นทุนค่าขนส่งรวม $= (80x3) + (70x2) + (10x1) + (30x4)$

$+(20x4) + (60x6)$

$= 950$ บาท

เมื่อเปรียบเทียบต้นทุนค่าขนส่งรวมจากผลลัพธ์เบื้องต้นตามวิธี **Northwest corner rule** ตามตารางที่ 7-6 เราจะได้ต้นทุนรวมตามผลลัพธ์เบื้องต้นเท่ากับ 1,000 บาท จะเห็นว่าต้นทุนรวมลดลง (เท่ากับ $10 \times 5 = 50$ บาท)

บางท่านอาจมีคำถามว่าทำไมจึงเลือกตัวเลขที่อยู่ในทางเดินที่มีเครื่องหมายลบที่มีค่าทางตัวเลขน้อยที่สุด (ในที่นี้คือ 10) เหตุผลก็คือการเลือกค่าทางตัวเลขที่มีค่าลบน้อย

ที่สุดจะประกันได้ว่าผลลัพธ์ใหม่ที่ได้รับจะเป็นผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ไม่ฝืนข้อจำกัดที่กำหนดไว้และไม่เป็นค่าเฉลยที่มีค่าติดลบ ($x_{ij} \geqslant 0$) ถ้าเราเลือก 90 เป็นค่าบวกและลบเข้าไปในทางเดินผลลัพธ์จะเป็นดังนี้คือ

$$x_{21} = 0 + 90 = 90$$

$$x_{22} = 10 - 90 = -80$$

$$x_{12} = 60 + 90 = 150$$

$$x_{11} = 90 - 90 = 0$$

จะเห็นว่า x_{22} ให้ค่าเฉลยที่มีค่าติดลบ ซึ่งฝืนข้อจำกัดหรือเงื่อนไขที่กำหนดไว้คือตัวแปรทุกตัวจะต้องมีค่ามากกว่า หรือเท่ากับศูนย์

เมื่อได้ผลลัพธ์ใหม่และคำนวณต้นทุนค่าขนส่งรวมจะได้ต้นทุนค่าขนส่งลดลงเหลือ 950 บาท เรายังไม่อาจทราบได้ว่าผลลัพธ์ใหม่จะเป็นผลลัพธ์ตามเป้าหมายที่ดีที่สุดหรือยัง จึงต้องย้อนกลับไปทำตามขั้นที่ 1 ใหม่คือประเมินค่าการเปลี่ยนแปลงสุทธิของค่าขนส่งของตัวแปรที่ไม่ได้อยู่ใน Basis ทุกตัว ดูว่าตัวแปรใดที่ให้ค่าการเปลี่ยนแปลงสุทธิของค่าขนส่งเป็นลบหรือไม่ ถ้ายังมีแสดงว่าผลลัพธ์ใหม่ที่ได้รับยังไม่ใช่ผลลัพธ์ตามเป้าหมายที่ดีที่สุดให้ดำเนินการขั้นตอนที่ 2 ต่อไป ถ้าไม่มีค่าใดติดลบแล้วก็แสดงว่าผลลัพธ์ใหม่นั้นเป็นผลลัพธ์ตามเป้าหมายที่ดีที่สุดแล้ว

จากตัวเลขในตารางที่ 7-19 ตัวแปรที่ไม่ได้อยู่ใน Basis ประกอบด้วย $x_{13}, x_{14}, x_{22}, x_{24}, x_{31}, x_{32}$ ประเมินค่าการเปลี่ยนแปลงสุทธิของต้นทุนค่าขนส่งของตัวแปรเหล่านี้ได้ตามตารางที่ 7-20 ดังนี้

ตารางที่ 7-20

ตัวแปรที่ไม่ได้อยู่ใน Basis	ทางเดิน	การเปลี่ยนแปลงสุทธิของค่าขนส่ง
x_{13}	$+x_{13}-x_{11}+x_{21}-x_{23}$	+3-3+1-4 = -3
x_{14}	$+x_{14}-x_{11}+x_{21}-x_{23}+x_{33}-x_{34}$	+7-3+1-4+4-6 = -1
x_{22}	$+x_{22}-x_{12}+x_{11}-x_{21}$	+5-2+3-1 = +5
x_{24}	$+x_{24}-x_{23}+x_{33}-x_{34}$	+3-4+4-6 = -3
x_{31}	$+x_{31}-x_{33}+x_{23}-x_{21}$	+3-4+4-1 = +2
x_{32}	$+x_{32}-x_{33}+x_{23}-x_{21}+x_{11}-x_{12}$	+5-4+4-1+3-2 = +5

x_{13} และ x_{24} ให้ค่าการเปลี่ยนแปลงสุทธิของค่าขนส่งติดลบเป็นตัวเลขมากสุดเท่ากับ -3 เท่ากัน แสดงว่าการขนส่งสินค้าจากโรงงานที่ 1 มายังตัวแทนจำหน่ายที่ 3 จำนวน 1 หน่วย ทำให้ต้นทุนค่าขนส่งลดลงหน่วยละ 3 บาท เท่ากับการขนส่งสินค้าจากโรงงานที่ 2 มายังตัวแทนจำหน่ายที่ 4

จะเลือก x_{13} หรือ x_{24} เป็นตัวแปรเข้าไปใน Basis ก็ได้ ในที่นี้จะเลือก x_{13}

x_{13} จะเข้าไปใน Basis ได้ปริมาณเท่าใด และตัวแปรผันตัวใดจะต้องออกไปจาก Basis ดูได้จากทางเดิน x_{13} ตามตารางที่ 7-21 แล้วเลือกค่าตัวแปรที่อยู่ในตำแหน่งลบและมีค่าทางตัวเลขต่ำสุด นั่นคือค่า $x_{23} = 30$ หน่วย เป็นตัวบวกและลบตัวแปรภายในทางเดินดังนี้

ตารางที่ 7-21

	1	3
1	$x_{11}(-)$ [3] 80-30 = 50	$x_{13}(+)$ [3] 0+30 = 30
2	$x_{21}(+)$ [1] 10+30 = 40	$x_{23}(-)$ [4] 30-30 = 0

ผลลัพธ์ใหม่ดังแสดงไว้ในตารางที่ 7-22 ดังนี้

ตารางที่ 7-22

ตัวแทนจำหน่าย / โรงงาน	1	2	3	4	อัตราการผลิตต่อเดือน
1	[3] 50	[2] 70	[3] 30	[7]	150
2	[1] 40	[5]	[4]	[3]	40
3	[3]	[5]	[4] 20	[6] 60	80
ความต้องการสินค้าต่อเดือน	90	70	50	60	270

ผลลัพธ์ใหม่ คือ $x_{11} = 50, \; x_{12} = 70, \; x_{13} = 30$

$x_{21} = 40, \; x_{33} = 20, \; x_{34} = 60$

ต้นทุนค่าขนส่งรวม $= (50x3) + (70x2) + (30x3) + (40x1)$

$+ (20x4) + (60x6)$

$= 860$

จากนั้นทำขั้นตอนที่ 1 ใหม่ เพื่อประเมินค่าตัวแปรที่ไม่ได้อยู่ใน **Basis** ดังแสดงตามตารางที่ 7-23 ดังนี้

ตารางที่ 7-23

ตัวแปรที่ไม่ได้อยู่ใน **Basis**	ทางเดิน	การเปลี่ยนแปลสุทธิของค่าขนส่ง
x_{14}	$+x_{14}-x_{13}+x_{33}-x_{34}$	+7-3+4-6 = +2
x_{22}	$+x_{22}-x_{12}+x_{11}-x_{21}$	+5-2+3-1 = +5
x_{23}	$+x_{23}-x_{13}+x_{11}+x_{21}$	+4-3+3-1 = +3
x_{24}	$+x_{24}-x_{21}+x_{11}-x_{13}+x_{33}-x_{34}$	+3-1+3-3+4-6 = 0
x_{31}	$+x_{31}-x_{33}+x_{13}-x_{11}$	+3-4+3-3 = -1
x_{32}	$+x_{32}-x_{33}+x_{13}-x_{12}$	+5-4+3-2 = 2

จะเห็นว่า x_{31} ให้ค่าการเปลี่ยนแปลงสุทธิของค่าขนส่งเท่ากับ -1 แสดงว่าการเพิ่มการขนส่งจากโรงงานที่ 3 ไปยังตัวแทนจำหน่ายที่ 1 จำนวน 1 หน่วยจะทำให้ต้นทุนค่าขนส่งลดลงหน่วยละ 1 บาท จากนั้นก็หาตัวแปรที่จะต้องออกไปจาก **Basis** ตามตารางที่ 7-24 ดังนี้

ตารางที่ 7-24

	1	3
1	$x_{11}(-)$ [3] 50 - 20 = 30	$x_{13}(+)$ [3] 30 + 20 = 50
3	$x_{31}(+)$ [3] 0 + 20 = 20	$x_{33}(-)$ [4] 20-20 = 0

ผลลัพธ์ใหม่แสดงไว้ในตารางที่ 7-25 ดังนี้

ตารางที่ 7-25

ตัวแทนจำหน่าย / โรงงาน	1	2	3	4	อัตราการผลิตต่อเดือน
1	[3] 30	[2] 70	[3] 50	[7]	150
2	[1] 40	[5]	[4]	[3]	40
3	[3] 20	[5]	[4]	[6] 60	80
ความต้องการสินค้าต่อเดือน	90	70	50	60	270

ผลลัพธ์ใหม่คือ $x_{11} = 30,\ x_{12} = 70,\ x_{13} = 50$

$x_{21} = 40,\ x_{31} = 20,\ x_{34} = 60$

ต้นทุนค่าขนส่งรวม $= (30 \times 3) + (70 \times 2) + (50 \times 3) + (40 \times 1)$

$+ (20 \times 3) + (60 \times 6)$

$= 840$ บาท

จากนั้นทำขั้นตอนที่ 1 ใหม่ เพื่อประเมินค่าตัวแปรที่ไม่ได้อยู่ใน **Basis** ดังแสดงตามตารางที่ 7-26 ดังนี้

ตารางที่ 7-26

ตัวแปรที่ไม่ได้อยู่ใน **Basis**	ทางเดิน	การเปลี่ยนแปลงสุทธิของค่าขนส่ง
x_{14}	$+x_{14}-x_{11}+x_{31}-x_{34}$	$+7-3+3-6 = +1$
x_{22}	$+x_{22}-x_{12}+x_{11}-x_{21}$	$+5-2+3-1 = +5$
x_{23}	$+x_{23}-x_{13}+x_{11}-x_{21}$	$+4-3+3-1 = +3$
x_{24}	$+x_{24}-x_{21}+x_{31}-x_{34}$	$+3-1+3-6 = -1$
x_{32}	$+x_{32}-x_{12}+x_{11}-x_{31}$	$+5-2+3-3 = +3$
x_{33}	$+x_{33}-x_{13}+x_{11}-x_{31}$	$+4-3+3-3 = +1$

จะเห็นว่า x_{24} ให้ค่าการเปลี่ยนแปลงสุทธิของค่าขนส่งเท่ากับ -1 แสดงว่า การเพิ่มการขนส่งจากโรงงานที่ 2 ไปยังตัวแทนจำหน่ายที่ 4 จำนวน 1 หน่วยจะทำให้ต้นทุนค่าขนส่งลดลงหน่วยละ 1 บาท จากนั้น ก็หาตัวแปรที่จะต้องออกไปจาก **Basis** ตามตารางที่ 7-27 ดังนี้