บทที่ 6
ปัญหาคู่ของการโปรแกรมเชิงเส้นตรง
(Duality)

เท่าที่เราได้วิเคราะห์ปัญหาว่าด้วยการโปรแกรมเชิงเส้นตรงมาแล้ว เราได้พิจารณาโปรแกรมเชิงเส้นตรงที่จะทำให้ถึงจุดสูงสุดและต่ำสุดโดยแยกปัญหาออกจากกันตามความเป็นจริง การวางโปรแกรมเชิงเส้นตรงในปัญหาที่จะทำให้ถึงจุดสูงสุดทุกปัญหา (mixinize ๗) ก็จะมีปัญหาที่จะทำให้ถึงจุดต่ำสุด (minimize ๗*) เป็นของคู่กันไปเสมอโดยมีคุณสมบัติว่าตรงค่าเฉลยที่เหมาะสมที่สุด (optimal solution) นั้น $\bar{๗} = \bar{๗}^*$ 1/ ในทำนองเดียวกันสำหรับโปรแกรมที่เป็นปัญหาที่จะทำให้ถึงจุดต่ำสุด (minimize C) ทุกปัญหาก็จะมีปัญหาที่จะทำให้ถึงจุดสูงสุด (maximize C*) เป็นของคู่กันเสมอโดยมีคุณสมบัติว่า $\bar{C} = \bar{C}^*$. โปรแกรมเส้นตรงอันเดิมนั้นเราจะเรียกว่าเป็นปัญหาเดิม (primal problem หรือ primal เฉย ๆ ก็ได้) ส่วนโปรแกรมที่เป็นคู่กันนั้นเราจะเรียกว่าปัญหาคู่ (dual problem หรือ dual เฉย ๆ ก็ได้) ความสำคัญทางคณิตศาสตร์ของปัญหาคู่เช่นนี้จะมีประโยชน์อย่างมากในทางเศรษฐศาสตร์และทางการตลาด

ความเป็นคู่กันเกี่ยวข้องกับผลิตผลที่จะผลิตขึ้นนั้นจะต้องไม่มากไปกว่าทรัพยากรที่มีอยู่ และเกี่ยวข้องกับต้นทุนทางบัญชี (accounting cost)ในการประเมินมูลค่าหรือต้นทุนค่าเสียโอกาสของการใช้ทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัด

1/ ต่อไปนี้เราจะใช้สัญลักษณ์ของตัวผันแปรตรงค่าเฉลยที่เหมาะสมที่สุด (optimal solution) นั้นโดยใส่เครื่องหมาย (–) บนตัวผันแปร พูดง่าย ๆ ก็คือค่าคำตอบของตัวผันแปรต่าง ๆ นั้นเองอย่างเช่น $\bar{๗}$, $\bar{C}$, $\bar{๗}^*$, $\bar{X}_j$, $\bar{Y}_i$, $\bar{S}_i$, $\bar{W}_j$, ฯลฯ และเครื่องหมาย (*) จะแสดงถึงปัญหาคู่ของมัน เช่น ถ้า Maximize ๗ ปัญหาคู่ของมันก็คือ Minimize ๗* ฯลฯ

ปัญหาคู่ (duality) นั้นมีความสำคัญในปัญหาใหญ่ 2 ประการคือ

1) นำไปใช้ในทฤษฎีว่าด้วยเกมส์ (theory of games) เกมส์ที่ว่าด้วยผลรวมเป็นศูนย์ของสองบุคคล (two-person,zero-sum games) (ซึ่งเราจะได้ศึกษากันต่อไป) อาจจะแก้ปัญหาได้โดยใช้วิธีการของโปรแกรมเชิงเส้นตรง (linear programming) ในการหากลยุทธ (strategy) ที่ดีที่สุดสำหรับผู้เล่นฝ่ายที่หนึ่ง และสามารถหากลยุทธที่ดีที่สุดของอีกฝ่ายหนึ่งได้โดยอาศัยปัญหาคู่ของปัญหาเดิม

2) การโปรแกรมเชิงเส้นตรงจะถูกใช้เพื่อหาการจัดสรรทรัพยากรที่ขาดแคลนอย่างเหมาะสมที่สุด (optimal allocation of scarce resources)ส่วนปัญหาคู่ (dual) ของปัญหาว่าด้วยการจัดสรรทรัพยากร (allocation problem) ก็คือการประเมินมูลค่าของทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัดนั้น

ลักษณะสำคัญของความสัมพันธ์ระหว่างปัญหาเดิมของโปรแกรมเชิงเส้นตรงกับปัญหาคู่ (dual problem) ของมันสามารถจะสรุปได้ดังนี้ คือ

1) ถ้าปัญหาเดิมว่าด้วยการโปรแกรมเชิงเส้นตรงสามารถมีค่าเฉลยหรือคำตอบดังนั้นปัญหาคู่ของมันก็จะมีค่าเฉลยหรือคำตอบด้วย

2) มูลค่าสูงสุดของ $\bar{\pi}$ ในปัญหาเดิมจะต้องเท่ากับมูลค่าต่ำสุดของ $\bar{\pi}^*$ ในปัญหาคู่ ในทำนองเดียวกันมูลค่าต่ำสุดของ $\bar{C}$ ในปัญหาเดิมก็จะต้องเท่ากับมูลค่าสูงสุดของ $\bar{C}^*$ ในปัญหาคู่

3) ถ้าปัญหาเดิมได้ถูกแก้ปัญหาแล้ว ดังนั้นค่าเฉลยหรือคำตอบของปัญหาคู่ก็สามารถจะพิจารณาได้จากปัญหาเดิมในทางกลับกันถ้าปัญหาคู่ได้ถูกแก้ไขปัญหาแล้ว ดังนั้นปัญหาเดิมก็สามารถจะพิจารณาได้จากปัญหาคู่

ด้วยเหตุผลนี้เองความเป็นของคู่กันจึงนำมาใช้กันบ่อย ๆ ในการคำนวณโปรแกรมเชิงเส้นตรง ค่าเฉลยหรือคำตอบของปัญหาเดิมสามารถจะให้ค่าเฉลยแก่ปัญหาคู่โดยอัตโนมัติ นี้ก็เพราะว่ามันมีความเท่ากันในปัญหาทั้งสองซึ่งหมายความว่าปัญหาทั้งสองนี้จะมีซิมเพล็กซ์แมทหริกซ์ (Simplex Matrices) เช่นเดียวกัน ยกเว้นแถวนอน(row) และแถวตั้ง (columns)

เปลี่ยนที่กันเท่านั้น ดังเราจะได้เห็นกันต่อไป

<u>รูปแบบปัญหาคู่เปรียบเทียบกับปัญหาเดิม</u>

เราจะกำหนดให้ X_j แทนตัวแปรตัดสินใจ (**decision variables**) ของปัญหาเดิม

Y_i แทนตัวแปรตัดสินใจของปัญหาคู่โดยที่จำนวนของ Y_i จะเท่ากับจำนวนสมการหรืออสมการข้อจำกัดขอบข่ายของปัญหาในปัญหาเดิม

และ S_i แทน **dummy variables** ของปัญหาเดิม

W_j แทน **dummy** variable6 ของปัญหาคู่

จงพิจารณาปัญหาคู่เปรียบเทียบกับปัญหาเดิม ดังนี้

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จากตัวอย่างที่ 11 และ 16 ในบทที่ 5 ปัญหาคู่ได้ดังนี้

<u>ปัญหาเดิม (**Primal**)</u>

Maximize $\pi = 6X_1 + 9X_2$

ภายใต้ข้อจำกัด $\begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 10 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} 120 \\ 120 \end{bmatrix}$

และ $X_1, X_2, \geqslant 0$

<u>ปัญหาคู่ (**Dual**)</u>

Minimize $\pi^* = 120Y_1 + 120Y_2$

ภายใต้ข้อจำกัด $\begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 12 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$

$Y_1, Y_2 \geqslant 0$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จากโจทย์ตัวอย่างที่ 2 และ 18 ในบทที่ 5 แต่เปลี่ยน q_1 และ q_2 เป็น X_1 และ X_2 ในปัญหาเดิม เราสามารถเขียนปัญหาคู่ได้ดังนี้

<u>ปัญหาเดิม (Primal)</u>

$$\text{Minimize } C = 10X_1 + 20X_2$$

$$\text{ภายใต้ข้อจำกัด} \quad \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 4 & 6 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} 18 \\ 12 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{and} \quad X_1, X_2, \geqslant 0$$

<u>ปัญหาคู่ (Dual)</u>

$$\text{Maximize } C^* = 18Y_1 + 12Y_2 + 8Y_3$$

$$\text{ภายใต้ข้อจำกัด} \quad \begin{bmatrix} 9 & 4 & 2 \\ 6 & 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\text{and} \quad Y_1, Y_2, Y_3 \geqslant 0$$

<u>หลักเกณฑ์ในการแปลงปัญหาเดิมเป็นปัญหาคู่</u>

หลักเกณฑ์ในการแปลงปัญหาเดิมเป็นปัญหาคู่สามารถสรุปได้ดังนี้ คือ

1) ถ้าปัญหาเดิมมีเป้าหมายสูงสุด (**maximize**) ปัญหาคู่จะมีเป้าหมายต่ำสุด (**minimize**) หรือถ้าปัญหาเดิมมีเป้าหมายต่ำสุด ปัญหาคู่จะต้องมีเป้าหมายสูงสุด

2) จำนวนตัวแปรตัดสินใจของปัญหาคู่จะเท่ากับจำนวนสมการหรืออสมการข้อจำกัดขอบข่ายของปัญหาเดิม

3) **Row vector** ของสัมประสิทธิ์ในสมการเป้าหมายของปัญหาเดิมภายหลังการสับเปลี่ยนที่ (**transpose**) แล้วก็จะกลายมาเป็น **column vector** ของค่าคงที่ของอสมการข้อจำกัดขอบข่ายของปัญหาคู่ ในทำนองเดียวกัน **column vector** ของค่าคงที่ของอสมการข้อจำกัดขอบข่ายปัญหาเดิม ภายหลังการสับเปลี่ยนที่ (**transpose**) แล้วก็จะกลายเป็น **row vector** ของสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัดสินใจในสมการเป้าหมายของปัญหาคู่

4) จำนวนอสมการข้อจำกัดของขอบข่ายปัญหาคู่จะเท่ากับจำนวนตัวแปรตัดสินใจในปัญหาเดิม

5) สัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัดสินใจของปัญหาคู่ในอสมการข้อจำกัดขอบข่ายของปัญหาคู่หาได้โดยการสับเปลี่ยนที่ (transpose) แมทหริกซ์ของสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัดสินใจในอสมการข้อจำกัดขอบข่ายปัญหาเดิม (เปลี่ยนสัมประสิทธิ์ในแถวนอนของปัญหาเดิมให้เป็นแถวตั้งของปัญหาคู่หรือเปลี่ยนสัมประสิทธิ์ในแถวตั้งของของปัญหาเดิมให้เป็นแถวนอนของปัญหาคู่ดังตัวอย่างที่ 1 และ 2)

6) เครื่องหมายอสมการข้อจำกัดขอบข่ายของปัญหาคู่ จะต้องกลับกันกับเครื่องหมายอสมการของข้อจำกัดของปัญหาเดิม

7) ส่วนเงื่อนไขตัวแปรตัดสินใจทุกตัวต้องไม่เป็นลบ จะคงไว้ดังเดิม

สรุปหลักเกณฑ์การแปลงปัญหาเดิมให้เป็นปัญหาคู่ ดังนี้

<u>ปัญหาเดิม</u> (Primal)	<u>ปัญหาคู่</u>(Dual)
1. เป้าหมาย (Max หรือ Min)	1. เป้าหมายตรงข้าม (Min หรือ Max)
2. จำนวนอสมการข้อจำกัด	2. จำนวนตัวแปรตัดสินใจ
3. ค่าคงที่ของอสมการข้อจำกัด	3. สัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัดสินใจในสมการเป้าหมาย
-สัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัดสินใจในสมการเป้าหมาย	-ค่าคงที่ของอสมการข้อจำกัด
4. จำนวนตัวแปรตัดสินใจ	4. จำนวนอสมการข้อจำกัด
5. แมทหริกซ์ของสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัดสินใจ ในอสมการข้อจำกัด	5. สับเปลี่ยนที่ (transpose) เป็นแมทหริกซ์ของสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัดสินใจในอสมการข้อจำกัดของปัญหาคู่
6. เครื่องหมายอสมการข้อจำกัด	6. เครื่องหมายอสมการขอจำกัดเปลี่ยนเป็นตรงข้าม
7. ตัวแปรตัดสินใจทุกตัวไม่เป็นลบ	7. ตัวแปรตัดสินใจทุกตัวไม่เป็นลบ

อย่างไรก็ตามเรา สามารถจะวางแบบฟอร์มทั่ว ๆ ไป ของตัวอย่างข้างบนในรูปของ **matrix notation** ได้ดังนี้

Primal

Maximize $\P = c'X$

Subjeat to $AX \leqslant b$

and $X \geqslant 0$

Dual

Minimize $\P^* = b'Y$

Subjeet to $A'Y \geqslant c$

and $Y \geqslant 0$

และ

Minimize $C = c'X$

Subject to $AX \geqslant b$

and $X \geqslant 0$

Maximize $C^* = b'Y$

Subject to $A'Y \leqslant c$

and $Y \geqslant 0$

ในกรณีที่ข้อจำกัดขอบข่ายของปัญหาเดิมเป็นสมการ (มีเครื่องหมายเท่ากับแทนที่จะมีเครื่องหมายมากกว่า หรือน้อยกว่า) เราจะต้องเปลี่ยนสมการข้อจำกัดขอบข่ายของปัญหาเดิมให้เป็นอสมการข้อจำกัดขอบข่ายสองอัน โดยมีเครื่องหมายตรงกันข้าม ดังนี้

สมการข้อจำกัดขอบข่ายของปัญหาเดิมเป็นดังนี้

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 = b_1$$

จะเปลี่ยนเป็น $a_{11}X_1 + a_{12}X_2 \leqslant b_1$

และ $-a_{11}X_1 - a_{12}X_2 \leqslant -b_1$

กรณีนี้ตัวแปรตัดสินใจของปัญหาคู่จะมีค่าบวกหรือลบก็ได้ ดังนี้

$$Y = Y_1^+ - Y_1^-$$

ค่าของ y_1 จะไม่มีขอบเขตมีค่าบวกหรือลบก็ได้

ตัวอย่างตัวแบบปัญหาคู่ กรณีที่ข้อจำกัดของข่ายของปัญหาเดิมเป็นสมการ ดังนี้

<u>ปัญหาเดิม</u>

Max $Z = c_1x_1 + c_2x_2$

ภายใต้ข้อจำกัด $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leqslant b_2$

$x_i \geqslant 0 \quad i = 1, 2$

<u>ปัญหาคู่</u>

Min $Z^* = b_1(y_1^+ - y_1^-) + b_2y_2$

ภายใต้ข้อจำกัด $a_{11}(y_1^+ - y_1^-) + a_{21}y_2 \geqslant c_1$

$a_{12}(y_1^+ - y_1^-) + a_{22}y_2 \geqslant c_2$

y_1 ไม่มีขอบเขต $y_2 \geqslant 0$

เขียนใหม่ได้ดังนี้

Max $Z = c_1x_1 + c_2x_2$

ภายใต้ข้อจำกัด $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leqslant b_1$

$-a_{11}x_1 - a_{12}x_2 \leqslant -b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leqslant b_2$

$x_1, x_2 \geqslant 0$

Min $Z^* = b_1y_1^+ - b_1y_1^- + b_2y_2$

ภายใต้ข้อจำกัด $a_{11}y_1^+$ - ● 11J1 + ● 21Jr2 $\geqslant c_1$

"1291$^+$ $-a_{12}y_1$ $+a_{22}y_2 \geqslant c_2$

y_1 ไม่มีขอบเขต, $y_2 \geqslant 0$

ขอให้ดูตัวอย่างประกอบ

<u>ปัญหาเดิม</u>

Max $Z = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$

ภายใต้ข้อจำกัด $8x_1 + 2x_2 + 7x_3 \leqslant 10$

$2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 6$

$x_i \geqslant 0 \quad i = 1,2,3$

<u>ปัญหาคู่</u>

Min $Z^* = 10y_1 + 6y_2^+ - 6y_2^-$

ภายใต้ข้อจำกัด $8y_1 + 2y_2^+ - 2y_2^- \geqslant 3$

$2y_1 + 5y_2^+ - 5y_2^- \geqslant 4$

$7y_1 + 4y_2^+ - 4y_2^- \geqslant 5$

$y_1 \geqslant 0$, y_2 ไม่มีขอบเขต

จากข้อเท็จจริงดังเราจะได้เห็นกันต่อไปก็คือว่า ค่าที่เหมาะสมที่สุดของสมการเป้าหมายในปัญหาเดิม (Π) และในปัญหาคู่ (Π^*) จะต้องเท่ากันเสมอ ดังนั้นเราจึงมีทางเลือกที่จะแก้ปัญหาว่าอันไหนจะง่ายที่สุดในระหว่าง 2 ปัญหานั้น ยิ่งกว่านั้นยังเป็นไปได้เสมอที่เราจะแปลงค่าคำเฉลยที่ดีที่สุดของปัญหาเดิมไปเป็นค่าคำเฉลยที่ดีที่สุดของปัญหาคู่ได้ และโดยกลับกันเราก็สามารถแปลงค่าคำเฉลยที่ดีที่สุดของปัญหาคู่ไปเป็นค่าคำเฉลยที่ดีที่สุดของปัญหาเดิมได้

ปัญหาเดิมบางอย่างยากที่จะแก้ด้วยวิธีกราฟ เพราะมีตัวแปรตัดสินใจมากกว่า 2 ตัวขึ้นไป ดังนั้นหากเราสามารถแปลงเป็นปัญหาคู่แล้วมันเกิดมีตัวแปรตัดสินใจ 2 ตัว เราก็สามารถจะแก้ปัญหาอันนี้ได้โดยวิธีกราฟได้ ในทางกลับกันปัญหาคู่ของปัญหาเดิมอาจมีตัวแปรตัดสินใจมากกว่า 2 ตัว ซึ่งแน่ละยากแก่การแก้ปัญหา ดังนั้น ถ้าเราแปลงปัญหาคู่มาเป็นปัญหาเดิมแล้วเกิดมีตัวแปรตัดสินใจ 2 ตัว เราก็จะสามารถแก้ปัญหานี้ได้ง่าย ๆ โดยวิธีกราฟ ตัวอย่างเช่น ปัญหาคู่ในตัวอย่างที่ 2 ของเรามีตัวแปรตัดสินใจ 3 ตัว พอแปลงมาเป็นปัญหาเดิมแล้วมีตัวแปรตัดสินใจเพียง 2 ตัวเท่านั้น ในกรณีนี้ควรหาคำเฉลยที่ดีที่สุดโดยวิธีกราฟจากปัญหาเดิมก่อนต่อจากนั้นจึงหาคำเฉลยที่ดีที่สุดของปัญหาคู่จากคำเฉลยที่ดีที่สุดของปัญหาเดิม อย่างไรก็ดีในกรณีที่ทั้งปัญหาเดิมและปัญหาคู่เกิดไม่สามารถจะแก้ปัญหาได้ด้วยวิธีกราฟ เราก็ยังมีวิธีซิมเพล็กซ์ช่วยให้คำเฉลยที่ดีที่สุดได้ ในกรณีนี้หลักเกณฑ์ในการเลือกว่าจะแก้ปัญหาจากปัญหาเดิม หรือปัญหาคู่ดีให้ดูที่จำนวนอสมการข้อจำกัดของมันตามปกติปัญหาใดที่มีจำนวนอสมการข้อจำกัดน้อยที่สุดเราก็ควรจะเลือกปัญหานั้น ทั้งนี้ ก็เพราะว่าการมีอสมการข้อจำกัดจำนวนน้อยนั้นหมายความว่าเราจะมีตัว **dummy variables** น้อยตัวด้วย ซึ่งง่ายแก่การแก้ปัญหาเพื่อหาคำตอบต่อไป ข้อที่น่าสังเกตอีกประการหนึ่งก็คือในกรณีที่ทั้งปัญหาเดิม และปัญหาคู่มีจำนวนอสมการข้อจำกัดเท่ากันหรือเกือบเท่ากันแล้ว เราก็ควรจะหาคำเฉลยที่ดีที่สุดจากปัญหาที่มี

สมการเป้าหมายสูงสุด (**Maximization Problem**)จะง่ายกว่าที่จะใช้ปัญหาที่มีสมการเป้าหมายต่ำสุด (**Minimization Problem**)เพราะเหตุว่าการแก้โดยใช้ปัญหาที่มีสมการเป้าหมายต่ำสุดนั้น เราจะต้องเกี่ยวข้องกับตัว (**Artificial variable**) **อีกต่อหนึ่ง**

<u>การแก้ปัญหาเดิมโดยผ่านทางปัญหาคู่ด้วยวิธีซิมเพล็กซ์</u>

เพื่อให้ผู้อ่านได้เข้าใจแจ่มแจ้งยิ่งขึ้น **เราจะได้ลองแก้ปัญหา**เดิมโดยผ่านทางปัญหาคู่ ดูจากตัวอย่างที่ 1 ดังนี้

<u>ปัญหาเดิม</u> (**Primal**)	<u>ปัญหาคู่</u> (**Dual**)
Max $\pi = 6X_1 + 9X_2$	**Minimize** $\pi^* = 120Y_1 + 120Y_2$
ภายใต้ข้อจำกัด	ภายใต้ข้อจำกัด
$7X_1 + 12X_2 \leqslant 120$	$7Y_1 + 10Y_2 \geqslant 6$
$10X_1 + 8X_2 \leqslant 120$	$12Y_1 + 8Y_2 \geqslant 9$
และ $X_1 , X_2 \geqslant 0$	และ $Y_1, Y_2 \geqslant 0$

ในตัวอย่างนี้เราจะเห็นได้ว่ามีจำนวนอสมการข้อจำกัดอยู่ 2 อสมการ ดังนั้นจะต้องมีตัวแปรผันส่วนเกิน (**Surplus variables**) 2 ตัว คือ W_1 และ W_2 และมีตัวแปรเทียม (**artificial variable**)**อีก** 2 ตัว คือ A_1 , A_2 ดังนั้นเราจึงสามารถเขียนเป็นระบบสมการเสียใหม่ได้ดังนี้

$$\text{Minimize } q^* = 120Y_1 + 120Y_2 + 0W_1 + 0W_2 + MA_1 + MA_2$$

ภายใต้ข้อจำกัด $7Y_1 + 10Y_2 - W_1 + A_1 = 6$

$$12Y_1 + 8Y_2 - W_2 + A_2 = 9$$

และ $Y_1 , Y_2 , W_1 . W_2 , A_1 , A_2 \geqslant 0$

จากอสมการข้อจำกัดขอบข่ายของปัญหาจะได้

$$A_1 = 6 - 7Y_1 - 10Y_2 + W_1$$

$$A_2 = 9 - 12Y_1 - 8Y_2 + W_2$$

แทนลงในสมการเป้าหมาย

$$q^* = 120Y_1 + 120Y_2 + 0W_1 + 0W_2 + M(6 - 7Y_1 - 10Y_2 + W_1) + M(9 - 12Y_1 - 8Y_2 + W_2)$$

$$= -(19M - 120)Y_1 - (18M - 120)Y_2 + MW_1 + MW_2 + 15M$$

สมการข้อจำกัดและสมการเป้าหมายให้ตัวคงที่อยู่ทางขวามือ

$$q^* + (19M - 120)Y_1 + (18M - 120)Y_2 - MW_1 - MW_2 = 15M$$

$$7Y_1 + 10Y_2 - W_1 + A_1 = 6$$

$$12Y_1 + 8Y_2 - W_2 + A_2 = 9$$

$$Y_1, Y_2, W_1 , W_2, A_1 . A_2 \geqslant 0$$

นำข้อมูลต่าง ๆ เหล่านี้ ลงในตารางซิมเพล็กซ์ ขั้นตอนต่าง ๆ ในการแก้ปัญหาที่ใช้แบบเดิม ของกรณีปัญหาทำให้ถึงจุดต่ำสุด (Minimization Problem)

ตาราง		Basis	π^*	Y_1	Y_2	W_1	W_2	A_1	A_2	Constant	test ratio
I	row 0	π^*	1	$(19M-120)$	$(18M-120)$	$-M$	$-M$	0	0	$15M$	
	row 1	A_1	3	7	10	-1	0	1	0	6	$\frac{6}{7}=.8$
	row 2	$\leftarrow A_2$	0	12	8	0	1	0	1	9	$\frac{9}{12}=.7^*$
II	row 0	π^*	1	0	$(\frac{16}{3}M-40)$	$-M$	$(\frac{7}{12}M-10)$	0	$-(\frac{19}{12}M-10)$	$\frac{3}{4}M+90$	
	row 1	$\leftarrow A_1$	0	0	$\frac{16}{3}$	-1	$\frac{7}{12}$	1	$\frac{-7}{12}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}\div\frac{16}{3}=\frac{9}{64}^*$
	row 2	Y_1	0	1	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}\div\frac{2}{3}=\frac{9}{8}$
III	row 0	π^*	1	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{-7\frac{1}{2}}$	$\boxed{-5\frac{5}{8}}$	$-(M-\frac{15}{2})$	$-(M-\frac{45}{8})$	$\boxed{95\frac{5}{8}}$	
	row 1	Y_2	0	0	1	$\frac{-3}{16}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{-7}{64}$	$\boxed{\frac{9}{64}}$	
	row 2	Y_1	0	1	0	3	$\frac{-5}{32}$	$\frac{-1}{8}$	$\frac{5}{32}$	$\boxed{\frac{21}{32}}$	

จากการแก้ปัญหาคู่ (dual problem) โดยใช้วิธีซิมเพล็กซ์ (Simplex Method) ทำให้ได้ค่าเฉลยที่เหมาะสม คือ

$$\bar{\pi}^* = 95\frac{5}{8}$$

$$\bar{Y}_1 = \frac{21}{32}$$

$$\bar{Y}_2 = \frac{9}{64}$$

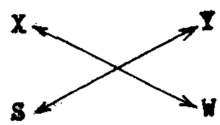
$$\bar{W}_1 = 0,\ \bar{W}_2 = 0,\ \bar{A}_1 = 0,\ \bar{A}_2 = 0$$

จากตารางที่ III ซึ่งเป็นตารางที่ให้ค่าเฉลยที่เหมาะสมที่สุดของปัญหาคู่ ถ้าต้องการหาค่าเฉลยที่ดีที่สุดของปัญหาเดิมก็สามารถหาได้ ดังนี้

<u>ปัญหาเดิม</u>   <u>ปัญหาคู่</u>

ตัวแปรตัดสินใจ

ตัวแปรหุ่น



$\bar{q} \quad = \quad \bar{q}^* \quad = \quad 95\frac{5}{8}$

$\bar{X}_j \quad =$ | สัมประสิทธิ์ของตัวแปรผันส่วนเกิน (Surplus variable : W_i) หรือตัวแปรเทียม (Artificial variables : A_i) ที่ subscript เหมือนกัน ($i = j$) ในสมการเป้าหมายของ ผลลัพธ์จากปัญหาคู่ โดยไม่รวมค่า M ใด ๆ |

$\bar{X}_1 \quad =$ | สัมประสิทธิ์ของ W_1 หรือ A_1 โดยไม่รวมค่า M ใน row 0 ของตารางผลลัพธ์ของปัญหาคู่ |

$= \quad 7\frac{1}{2} \quad = \quad \frac{15}{2}$

$\bar{X}_2 \quad =$ | สัมประสิทธิ์ของ W_2 หรือ A_2 โดยไม่รวมค่า M ใน row 0 ของตารางผลลัพธ์ของปัญหาคู่ |

$= \quad 5\frac{5}{8}$ หรือ $\frac{45}{8}$

$\bar{S}_1 \quad =$ | สัมประสิทธิ์ของ Y_1 ใน row 0 ของตารางผลลัพธ์ของปัญหาคู่ | $= \quad 0$

$\bar{S}_2 \quad =$ | สัมประสิทธิ์ของ Y_2 ใน row 0 ของตารางผลลัพธ์ของปัญหาคู่ | $= \quad 0$

ในทางตรงข้ามถ้าเราหาค่าเฉลยที่ดีที่สุดโดยวิธีซิมเพล็กซ์ของปัญหาเดิมของตัวอย่างนี้เราได้ตารางซิมเพล็กซ์ของค่าเฉลยที่ดีที่สุดของปัญหาเดิม ดังนี้

ตาราง III	Basis	q	X_1	X_2	S_1	S_2	Constant
row 0	q	1	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{\frac{21}{32}}$	$\boxed{\frac{9}{64}}$	$\boxed{95\frac{5}{8}}$
row 1	X_2	0	0	1	$\frac{5}{32}$	$\frac{-7}{64}$	$\boxed{5\frac{5}{8}}$
row 2	X_1	0	1	0	$\frac{-1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\boxed{7\frac{1}{2}}$

ค่าเฉลยที่เหมาะสมของปัญหาเดิม คือ

$$\bar{q} = 95\frac{5}{8}$$

$$\bar{X}_1 = 7\frac{1}{2}$$

$$\bar{X}_2 = 5\frac{5}{8}$$

$$\bar{S}_1 = 0$$

$$S_2 = 0$$

ในทำนองเดียวกัน จากตาราง Simplex ของผลลัพธ์ในปัญหาเดิม (primal problem) ถ้าต้องการหาค่าเฉลยของปัญหาคู่ (dual problem) ก็สามารถหาได้ ดังนี้

	<u>ปัญหาเดิม</u>	<u>ปัญหาคู่</u>
ตัวแปรตัดสินใจ	X	Y
ตัวแปรหุ่น	S	W

$\bar{q}^* = \bar{q} \quad = \quad 95\frac{5}{8}$

Y_i = | สัมประสิทธิ์ของตัวแปรหุ่น (Dummy Variables) ที่ subscript เหมือนกัน ($i = j$) ในสมการเป้าหมายของตารางผลลัพธ์จากปัญหาเดิม โดยไม่รวมค่า M ใด ๆ |

$\bar{Y}_1$ = | สัมประสิทธิ์ของ S_1 ใน row 0 ของตารางผลลัพธ์ของปัญหาเดิม| $= \frac{21}{32}$

$\bar{Y}_2$ = สัมประสิทธิ์ของ S_2 ใน row 0 ของตารางผลลัพธ์ของปัญหาเดิม | $= \frac{9}{64}$

W_1 = | สัมประสิทธิ์ของ X_1 ใน row 0 ของตารางผลลัพธ์ของปัญหาเดิม | $= 0$

W_2 = | สัมประสิทธิ์ของ X_2 ใน row 0 ของตารางผลลัพธ์ของปัญหาเดิม | $= 0$

จะเห็นได้ว่าจากตารางผลลัพธ์ที่เหมาะสมของปัญหาใดปัญหาหนึ่งสามารถที่จะหาค่าเฉลย หรือผลลัพธ์ของอีกปัญหาหนึ่งได้โดยอัตโนมัติ โดยค่าที่หาได้จะเท่ากัน

จากตัวอย่างที่ 2 ปัญหาคู่ มีดังนี้

Maximize $C^* = 18Y_1 + 12Y_2 + 8Y_3$

ภายใต้ข้อจำกัด $\begin{bmatrix} 9 & 4 & 2 \\ 6 & 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} 10' \\ 20 \end{bmatrix}$

และ $Y_1 , Y_2 , Y_3 \geqslant 0$

เนื่องจากปัญหาข้อนี้มีจำนวนอสมการข้อจำกัด 2 ชุด ดังนั้นจึงต้องมีตัวแปรผันส่วนขาด (**slack variables**) 2 ตัว คือ W_1, W_2 แต่กรณีนี้ไม่ต้องใช้ตัวแปรเทียม (**artificial variables**) เพราะอสมการข้อจำกัดขอบข่ายของปัญหามีเครื่องหมาย "น้อยกว่าหรือเท่ากับ" เราสามารถจะแปลงเป็นระบบสมการได้ดังนี้

Maximize $C^* = 18Y_1 + 12Y_2 + 8Y_3 + 0W_1 + 0W_2$

$$9Y_1 + 4Y_2 + 2Y_3 + W_1 = 1$$

$$6Y_1 + 6Y_2 + 8Y_3 + W_2 = 2$$

และ $Y_1, Y_2, Y_3, W_1, W2 \geqslant 0$

จากระบบสมการข้างบนนี้เราก็สามารถนำไปใส่ลงในตารางซิมเพล็กซ์ (**simplex tableau**) อย่างเช่นที่เราเคยทำกันมาแล้ว เราจะไม่แสดงวิธีทำแต่เราจะแสดงเป็นตารางให้ดู ชั้นต่าง ๆ ในการแก้ปัญหาว่าด้วยจุดสูงสุด (**Maximization**) ที่เคยใช้มาแล้วก็จะนำมาใช้ในตัวอย่างนี้ทุกประการ ดังได้แสดงไว้ในตารางข้างล่างนี้

	row	Basis	C*	Y_1	Y_2	Y_3	W_1	W_2	constant	test ratio
I	0	C^*	1	-18	-12	-8	0	0	0	
	1	$\leftarrow W_1$	0	9	4	2	1	0	10	$\frac{10}{9} = 1.1^*$
	2	W_2	0	6	6	8	0	1	20	$\frac{20}{6} = 3.3$
II	0	C^*	1	0	-4	-4	2	0	20	
	1	$\leftarrow Y_1$	0	1	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{10}{9}$	$\frac{10}{9} \div \frac{4}{9} = \frac{5}{2}^*$
	2	W_2	0	0	$\frac{10}{3}$	$\frac{20}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{40}{3}$	$\frac{40}{3} \div \frac{10}{3} = 4$
III	0	C^*	1	9	0	-2	3	0	30	
	1	Y_2	0	$\frac{9}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2} \div \frac{1}{2} = 5$
	2	$\leftarrow W_2$	0	$-\frac{15}{2}$	0	5	$-\frac{3}{2}$	1	5	$5 \div 5 = 1^*$
IV	0	C^*	1	$\boxed{6}$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{\frac{12}{5}}$	$\boxed{\frac{2}{5}}$	$\boxed{32}$	
	1	Y_2	0	3	1	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{10}$	$\boxed{2}$	
	2	Y_3	0	$-\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{-3}{18}$	$\frac{1}{5}$	$\boxed{1}$	

ตารางที่ IV เป็นตารางที่แสดงผลลัพธ์ที่ดีที่สุดของปัญหาคู่ เราสามารถเขียนค่าเฉลยที่ดีที่สุดได้ดังนี้

$$\bar{C}^* = 32$$

$$\bar{Y}_1 = 0$$

$$\bar{Y}_2 = 2$$

$$\bar{Y}_3 = 1$$

$$\bar{W}_1 = 0$$

$$\bar{W}_2 = 0$$

จากตาราง Simplex ของผลลัพธ์ในปัญหาคู่ (dual problem) ถ้าต้องการหาค่าเฉลยของปัญหาเดิม (primal problem) ก็สามารถหาได้โดยใช้หลักเดียวกับตัวอย่างที่ 1 คือ

$\bar{C} = \bar{C}^* = 32$

$\bar{X}_1$ = | สัมประสิทธิ์ของ W_1 หรือ A_1 โดยไม่รวมค่า M ใน row 0 ของผลลัพธ์ของปัญหาคู่ |

$= \frac{12}{5}$

$\bar{X}_2$ = | สัมประสิทธิ์ของ W_2 หรือ A_2 โดยไม่รวมค่า M ใน row 0 ของผลลัพธ์ของปัญหาคู่ |

$= \frac{2}{5}$

$\bar{S}_1$ = | สัมประสิทธิ์ของ Y_1 ใน row 0 ของตารางผลลัพธ์ของปัญหาคู่ |

$= 6$

$\bar{S}_2$ = | สัมประสิทธิ์ของ Y_2 ใน row 0 ของตารางผลลัพธ์ของปัญหาคู่ |

= 0

$\bar{S}_3$ = | สัมประสิทธิ์ของ Y_3 ใน row 0 ของตารางผลลัพธ์ของปัญหาคู่ |

= 0

ในทางตรงข้ามลองเปรียบเทียบค่าเฉลยที่ดีที่สุดนี้กับตัวอย่างที่ 18 ในบทที่ 5 ซึ่งเป็นปัญหาเดิมของตัวอย่างนี้ ขอนำตารางที่ Y ซึ่งเป็นตารางที่แสดงค่าค่าเฉลยที่ดีที่สุดของปัญหาเดิมมาเปรียบเทียบผลลัพธ์ให้ดูว่าค่าเฉลยที่ดีที่สุดของปัญหาเดิมที่ได้จากการแก้ปัญหาคู่จะเท่ากับค่าเฉลยที่ดีที่สุดที่ได้จากการแก้ปัญหาเดิมโดยตรง

ตาราง Y	Basis	c	$q_1=X_1$	$q_2=X_2$	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	Constant
row 0	c	1	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{-2}$	$\boxed{-1}$	-M	-(M-2)	-(M-1)	$\boxed{32}$
row 1	X_1	0	1	0	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	0	5	$-\frac{3}{10}$	$\boxed{\frac{12}{5}}$
row 2	S_1	0	0	0	1	-3	$\frac{3}{2}$	-1	3	$-\frac{3}{2}$	$\boxed{6}$
row 3	X_2	0	0	1	0	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{5}$	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\boxed{\frac{2}{2}}$

ค่าเฉลยที่เหมาะสมที่สุดของปัญหาเดิม คือ

$$\bar{C} = 32$$

$$\bar{X}_1 = \frac{12}{5}$$

$$\bar{X}_2 = \frac{2}{5}$$

$$\bar{S}_1 = 6$$

$$\bar{S}_2 = 0$$

$$\bar{S}_3 = 0$$

$$\bar{A}_1 = 0, \quad \bar{A}_2 = 0, \quad \bar{A}_3 = 0$$

ในทำนองเดียวกัน จากตาราง Simplex ของผลลัพธ์ในปัญหาเดิม ถ้าต้องการหาค่าเฉลยที่เหมาะสมที่สุดของปัญหาคู่ ก็สามารถหาได้ โดยใช้หลักเดียวกันกับตัวอย่างที่ 1 คือ

$\bar{C}^* = \bar{C} = 32$

$\bar{Y}_1 =$ | สัมประสิทธิ์ของ S_1 หรือ A_1 โดยไม่รวมค่า M ใน row o ของตารางผลลัพธ์ของ primal |

$= 0$

$\bar{Y}_2 =$ | สัมประสิทธิ์ของ S_2 หรือ A_2 โดยไม่รวมค่า M ใน row o ของตารางผลลัพธ์ของปัญหาเดิม |

$= 2$

$\bar{Y}_3 =$ | สัมประสิทธิ์ของ S_3 หรือ A_3 โดยไม่รวมค่า M ใน row 0 ของตารางผลลัพธ์ของปัญหาเดิม |

$= 1$

$\bar{W}_1 =$ | สัมประสิทธิ์ของ X_1 ใน row 0 ของตารางผลลัพธ์ของปัญหาเดิม |

$= 0$

$\bar{w}_2$ = |สัมประสิทธิ์ของ x_2 ใน row 0 ของตารางผลลัพธ์ของปัญหาเดิม|

= 0

จะเห็นว่าจากตารางซิมเพล็กซ์ของผลลัพธ์ในปัญหาคู่ นอกจากอ่านค่าคำตอบที่เหมาะสมของปัญหาคู่ได้แล้ว ยังอ่านค่าคำตอบที่เหมาะสมของปัญหาเดิมได้ด้วย และในทางตรงข้าม จากตารางซิมเพล็กซ์ของผลลัพธ์ในปัญหาเดิม นอกจากอ่านค่าคำตอบที่เหมาะสมของปัญหาเดิมได้แล้ว ยังอ่านค่าคำตอบที่เหมาะสมของปัญหาคู่ได้ด้วยเช่นกัน ในทางปฏิบัติจึงแก้ปัญหาเพียงปัญหาเดียว ก็จะได้ค่าเฉลยที่ดีที่สุดของทั้งสองปัญหาพร้อมกันทีเดียว

<u>การแก้ปัญหาเดิมโดยผ่านทางปัญหาคู่ด้วยทฤษฎีบทว่าด้วยความเป็นคู่กัน</u>

จากตัวอย่างที่ 1 และ 2 จะเห็นได้ว่าเรามีโอกาสที่จะเลือกหาค่าเฉลยที่ดีที่สุดของสมการเป้าหมายได้จากปัญหาเดิมหรือปัญหาคู่ก็ตาม แต่การเลือกเช่นว่านี้อาจทำให้เกิดปัญหาขึ้นมา กล่าวคือ ถ้าเราตัดสินใจที่จะใช้ปัญหาคู่คำตอบจะประกอบด้วยค่าต่าง ๆ ของ $\bar{Y}_i$ (และ $\bar{\pi}^*$ หรือ $\bar{C}^*$) แต่ถ้าสิ่งที่เราสนใจจริง ๆ นั้นเกี่ยวข้องกับค่าเฉลยที่ดีที่สุดของปัญหาเดิม $\bar{X}_j$ (และ $\bar{\pi}$ หรือ $\bar{C}$) ปัญหาก็คือว่าเราจะอนุมานค่าเฉลยที่ดีที่สุดของปัญหาเดิมจากค่าเฉลยที่ดีที่สุดของปัญหาคู่ได้อย่างไร เราอาจหาคำตอบต่อปัญหานี้ได้อีกวิธีหนึ่งโดยใช้ทฤษฎีบทว่าด้วยความเป็นคู่กัน (duality theorems)

<u>ทฤษฎีบทว่าด้วยความเป็นคู่กัน</u> (Duality theorems) มีดังนี้

<u>ทฤษฎีบทที่ 1</u> ค่าที่เหมาะสมที่สุด (optimal values)ของสมการเป้าหมายในปัญหาเดิมและปัญหาคู่จะต้องเท่ากันเสมอ โดยมีเงื่อนไขว่าค่าเฉลยที่ดีที่สุดจะต้องเกิดขึ้นและหาค่าได้ (optimal feasible solution) นั่นคือ $\bar{\pi} = \bar{\pi}^*$ และ $\bar{C} = \bar{C}^*$ [1/]

1/ ดูคำตอบในตัวอย่างที่ 1 และ 2 ในบทนี้กับคำตอบในตัวอย่างที่ 16 และ 18 ของการหาคำตอบโดยวิธี Simplex ในบทที่ 5 ซึ่งแสดงว่าทฤษฎีบทนี้เป็นความจริง

<u>ทฤษฎีบทที่ 2</u> (1) ถ้าตัวแปรตัดสินใจของปัญหาคู่ ตัวที่ i มีค่าเหมาะสมที่สุดมากกว่าศูนย์ ($\bar{Y}_i > 0$) แล้วตัวแปรหุ่นในปัญหาเดิมที่สอดคล้องกันจะต้องเท่ากับศูนย์ ($\bar{S}_i = 0$) นั่นคือ ข้อจำกัดของปัญหาเดิมที่ i จะต้องเป็นแบบความเท่ากันอย่างแท้จริง (strict equality) ในคำเฉลยที่ดีที่สุด 1/

(2) ถ้าตัวแปรหุ่นของปัญหาคู่ที่ j มีค่าที่เหมาะสมที่สุดมากกว่าศูนย์ ($\bar{W}_j > 0$) นั่นคือ ถ้าข้อจำกัดของปัญหาคู่ที่ j เป็นแบบความไม่เท่ากันอย่างแท้จริง (strict inequality) ในคำเฉลยที่ดีที่สุดแล้วตัวแปรตัดสินใจของปัญหาเดิมที่ j จะต้องมีค่าเท่ากับศูนย์ ($\bar{X}_j = 0$) 2/

ตามทฤษฎีบทที่ 1 นั้น จะเห็นได้ว่าตราบเท่าที่เราเกี่ยวข้องกับค่าที่เหมาะสมที่สุดของสมการเป้าหมายแล้วการเลือกหาคำเฉลยจากปัญหาเดิม หรือปัญหาคู่ก็มิใช่สิ่งสำคัญแต่ประการใด เพราะ $\bar{q} = \bar{q}^*$ หรือ $\bar{C} = \bar{C}^*$

ตามทฤษฎีบทที่ 2 นั้น คำตอบที่เหมาะสมที่สุดที่ได้มาจากปัญหาคู่นั้นจะให้ข้อมูลที่เพียงพอสำหรับเราที่จะหาค่าของ $\bar{X}_j$ ในปัญหาเดิม ถ้าหากเราต้องการจะทราบมัน

ขอให้สังเกตด้วยว่า เนื่องจากตามข้อเท็จจริงนั้นปัญหาเดิมก็คือปัญหาคู่ของปัญหาคู่

1/ ดูตัวอย่างที่ 1 จะเห็นได้ว่าเมื่อ $\bar{Y}_1$, $\bar{Y}_2$, > 0 ดังนั้น $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$ ในปัญหาเดิมจะเท่ากับศูนย์

ในทางตรงกันข้ามทฤษฎีอันนี้ก็สามารถใช้กลับกันได้ กล่าวคือ

ถ้า $\bar{S}_i > 0$ แล้ว $\bar{Y}_i = 0$ โปรดพลิกกลับไปดูตัวอย่างที่ 2

$\bar{S}_1 = 6 > 0$ ดังนั้น $\bar{Y}_1 = 0$

2/ ในทำนองเดียวกัน ถ้า $\bar{X}_j > 0$ แล้ว $\bar{W}_j = 0$ โปรดดูได้จากตัวอย่างที่ 1 และ 2 ประกอบด้วย

ดังนั้นทฤษฎีบทที่ 2 (ทั้งสองส่วน) จะเป็นไปได้เมื่อบทบาทของปัญหาเดิมและปัญหาคู่สามารถจะกลับกันได้อย่างสอดคล้องต้องกัน ตัวอย่างเช่น ในทัศนะที่กลับกันของส่วนที่ (1) สามารถอ่านได้ดังนี้ "ถ้า $\bar{X}_j > 0$ สำหรับค่าบางค่าของ j แล้ว $\bar{W}_j = 0$" ในทำนองเดียวกันในทัศนะกลับกันของส่วนที่ (2) สามารถอ่านได้ดังนี้ "ถ้า $\bar{S}_i > 0$ สำหรับค่าบางค่าของ i แล้ว $\bar{Y}_j = 0$" เพราะฉะนั้นโดยสรุปแล้วเราจะเห็นว่า ณ. ค่าเฉลยที่ดีที่สุดนั้น ถ้าตัวแปรตัดสินใจมีค่าไม่ใช่ศูนย์ (nonzero) ในโปรแกรมหนึ่งแล้วก็หมายความว่าตัวแปรหุ่นที่สอดคล้องกันจะต้องมีค่าเป็นศูนย์ (zero) สำหรับอีกโปรแกรมหนึ่งเสมอ และในทัศนะเดียวกันนี้ ถ้าตัวแปรหุ่นในโปรแกรมหนึ่งมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ (nonzero) ก็หมายความว่าตัวแปรตัดสินใจในอีกโปรแกรมหนึ่งจะต้องมีค่าเป็นศูนย์ (zero) เสมอ เพื่อให้จดจำได้ง่ายขึ้น เราจะสรุปผลทฤษฎีบทท้งสองไว้ดังนี้

I. $\bar{q}^* = \bar{q}$ $\qquad \bar{C}^* = \bar{C}$

II. (1) ถ้า $\bar{Y}_i > 0$, แล้ว $\bar{S}_i = 0$ และในทางกลับกัน

ถ้า $\bar{X}_j > 0$, แล้ว $\bar{W}_j = 0$

(2) ถ้า $\bar{W}_j > 0$, แล้ว $\bar{X}_j = 0$ และในทางกลับกัน

ถ้า $\bar{S}_i > 0$, แล้ว $\bar{Y}_i = 0$

จากทฤษฎีบทท้งสองที่กล่าวแล้วนี้ เราก็สามารถจะหาค่าเฉลยที่ดีที่สุดจากโปรแกรมหนึ่งได้ ถ้าหากอีกโปรแกรมหนึ่งสามารถได้ค่าเฉลยที่ดีที่สุดแล้วดังตัวอย่างต่อไป

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> การหาค่าเฉลยที่ดีที่สุดของโปรแกรมหนึ่งจากอีกโปรแกรมหนึ่ง

การคำนวณหาค่าเฉลยที่ดีที่สุดของโปรแกรมหนึ่งจากอีกโปรแกรมหนึ่งโดยไม่ต้องใช้วิธีซิมเพล็กซ์อีกครั้งหนึ่งนั้น เราสามารถจะทำได้โดยไม่ยากนัก โดยการใช้ทฤษฎีบทที่ว่าด้วยความเป็นคู่กันดังกล่าวแล้วนั้น ในที่นี้จะขอยกตัวอย่างดังต่อไปนี้

สมมติว่าปัญหาคู่มีข้อมูลดังนี้

Maximize $C^* = 2Y_1 + 5Y_2$

ภายใต้ข้อจำกัด $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$

และ $Y_1, Y_2 \geqslant 0$

และตารางที่เหมาะสมที่สุดสำหรับปัญหาคู่ข้างบนมีดังนี้

row	Basis	C^*	Y_1	Y_2	W_1	W_2	W_3	constant
0	C^*	1	0	0	0	1	2	$\boxed{19}$
1	W_1	0	0	0	1	2	-1	2
2	Y_2	0	0	1	0	-1	0	3
3	Y_1	0	1	0	0	-2	1	2

ปัญหาของเราก็คือต้องการจะหาค่าเฉลยที่ดีที่สุดของปัญหาเดิม

ก่อนอื่นเราควรเขียนตัวแบบมาตรฐานของโปรแกรมเชิงเส้นตรงของปัญหาเดิมจากปัญหาคู่เสียก่อน โดยอาศัยหลักเกณฑ์ที่อธิบายไว้แล้ว เราสามารถเขียนตัวแบบมาตรฐานของปัญหาเดิมในรูปสมการได้ ดังนี้

$$\text{Minimize } C = 4X_1 + 3x2 + 8X_3 + OS_1 + OS_2 + MA_1 + MA^*$$

ภายใต้ข้อจำกัด $X_1 + X_3 - S_1 + A_1 = 2$

$$X_2 + 2X_3 - S_2 + A_2 = 5$$

และ $X_1, X_2, S_1, S_2, A_1, A_2 \geqslant 0$

จากตารางที่เหมาะสมที่สุดสำหรับปัญหาคู่นั้น เราสามารถเขียนค่าเฉลยที่ดีที่สุดของปัญหาคู่ได้ดังนี้

$$(\bar{C}^*, \bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \bar{W}_1, \bar{W}_2, \bar{W}_3) = (19, 2, 3, 2, 0, 0)$$

จากทฤษฎีบทที่ 1 เราทราบได้ทันทีว่าค่าเฉลยที่ดีที่สุดของสมการเป้าหมายของปัญหาเดิม $\bar{C} = 19$ (เพราะว่า $\bar{C}^* = \bar{C}$)

ขั้นต่อไปนั้นเราทราบจากค่าเฉลยที่ดีที่สุดของปัญหาคู่แล้วว่าตัวแปรตัดสินใจของปัญหาคู่ $\bar{Y}_1$ และ $\bar{Y}_2 > 0$ ดังนั้นตัวแปรหุ่นของปัญหาเดิม คือ $\bar{S}_1, \bar{S}_2 = 0$ (จากส่วนที่ 1 ของทฤษฎีบทที่ 2) และยิ่งกว่านั้น เรายังเห็นอีกว่าตัวแปรหุ่นในปัญหาคู่ dual $\bar{W}_1 > 0$ ดังนั้นตัวแปรตัดสินใจของปัญหาเดิม $\bar{X}_1 = 0$ (จากส่วนที่ 2 ของทฤษฎีบทที่ 2)

นั่นคือ

$$\begin{aligned} \bar{Y}_1 > 0 &\Rightarrow \bar{S}_1 = 0 \\ \bar{Y}_2 > 0 &\quad\; \bar{S}_2 = 0 \\ \bar{W}_1 > 0 &\quad\; \bar{X}_1 = 0 \end{aligned}$$

สิ่งที่น่าสังเกตอีกประการหนึ่งก็คือ จะเห็นว่าในระบบสมการของปัญหาเดิมมีตัวแปรเทียม (**artificial variables**) A_1 และ A_2 ด้วยในค่าเฉลยที่ดีที่สุดนั้นค่าของ $A_1 = A_2 = 0$ ดังนั้นเราจึงสามารถตัด A_1 และ A_2 ออกเสียได้ รวมทั้ง MA_1, MA_2 ในสมการเป้าหมายก็สามารถตัดทิ้งได้เช่นกัน ดังนั้นสมการข้อจำกัดของปัญหาเดิมจะมีสมการดังนี้

$$X_1 + X_3 - S_1 = 2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$X_2 + 2X_3 - S_2 = 5 \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

แทนค่า $\bar{S}_1 = \bar{S}_2 = 0$ และ $\bar{X}_1 = 0$ ลงในสมการข้างต้นจะเหลือ

$$X_3 = 2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$X_2 + 2x_3 = 5 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

แทนค่า $X_3 = 2$ ลงใน (4)

ดังนั้น $X_2 + 2(2) = 5$

$X_2 = 1$

เอาค่าต่าง ๆ ของ X_j ไปแทนในสมการเป้าหมายก็จะได้ 1/

$$c = 3(1) + 8(2) = 19$$

ดังนั้นคำเฉลยที่เหมาะสมที่สุดของปัญหาเดิม จะปรากฏดังนี้

$$(\bar{C}, \bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3, \bar{S}_1, \bar{S}_2) = (19, 0, 1, 2, 0, 0)$$

1/ ความจริงเราไม่ต้องหาค่าของ $\bar{C}$ อีกก็ได้เพราะตามทฤษฎีบทที่ 1 กล่าวไว้แล้วว่า

$$\bar{C} = \bar{C}^*$$

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> สมมติว่าข้อมูลต่าง ๆ ของปัญหาเดิมมีดังต่อไปนี้

Maximize $ฆ = 2X_1 + X_2 + 5X_3$

ภายใต้ข้อจำกัด $\begin{bmatrix} & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} 22 \\ 16 \end{bmatrix}$

และ $X_1, X_2, X_3 \geqslant 0$

และค่าเฉลยที่ดีที่สุดที่เกี่ยวข้องก็คือ $\bar{X}_2 = 5$, $\bar{X}_3 = 3$ และ $\bar{ฆ} = 30$

โปรดหา

ก) ตัวแปรตัดสินใจของปัญหาเดิมที่เหลือ

ข) ตัวแปรหุ่นของปัญหาเดิม

ค) ตัวแปรตัดสินใจของปัญหาคู่

ง) ตัวแปรหุ่นของปัญหาคู่

จ) เอาค่าตัวแปรตัดสินใจของปัญหาคู่ไปแทนในสมการเป้าหมายของปัญหาคู่แล้วตรวจสอบว่าค่าเฉลยที่ดีที่สุดของสมการเป้าหมายของปัญหาคู่จะเท่ากับของปัญหาเดิมหรือไม่

<u>วิธีทำ</u>

(ก) เมื่อโจทย์กำหนดให้ค่าเฉลยที่ดีที่สุดที่เกี่ยวข้องคือ $\bar{X}_2 = 5$, $\bar{X}_3 = 3$ และ $\bar{\text{ฐ}} = 30$ นั้นก็หมายความว่าตัวแปรตัดสินใจที่เหลือ $\bar{X}_1$ ซึ่งจะต้องเท่ากับศูนย์ เพราะเหตุว่าถ้า $\bar{X}_1 > 0$ แล้วค่าเฉลยที่ดีที่สุดของสมการเป้าหมาย ($\bar{\text{ฐ}}$) จะไม่เท่ากับ 30

$$\bar{\text{ฐ}} = 2(0) + 3(5) + 5(3) = 30$$

เพราะฉะนั้น $\bar{X}_1 = 0$

(ข) ในกรณีนี้เรามีสมการข้อจำกัด 2 ชุด ดังนั้นจึงต้องมีตัวแปรหุ่น 2 ตัวด้วย ซึ่งก็คือ S_1 และ S_2 ดังนั้นเราต้องหาค่าของ S_1 และ S_2 ต่อไป นั่นคือ จะต้องสร้างระบบสมการขึ้นมาจากปัญหาเดิมดังกล่าวได้ ดังนี้

$$\text{Maximize } \text{ฐ} = 2X_1 + 3X_2 + 5X_3 + 0S_1 + 0S_2$$

ภายใต้ข้อจำกัด

$$X_1 + 2X_2 + 4X_3 + S_1 = 22$$

$$4X_1 + 2X_2 + 2X_3 + S_2 = 16$$

และ

$$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2 \geqslant 0$$

จากสมการข้อจำกัดขอบข่ายทั้งสองนั้น เราสามารถหาค่าของ $\bar{S}_1$ และ $\bar{S}_2$ ได้ เราทราบแล้วว่า $\bar{X}_1 = 0$, $\bar{X}_2 = 5$ และ $\bar{X}_3 = 3$ เอาค่าเหล่านี้ไปแทนค่าในสมการข้อจำกัดดังกล่าว เราจะได้

$$0 + 2(5) + 4(3) + S_1 = 22$$

$$4(0) + 2(5) + 2(3) + S_2 = 16$$

ดังนั้น $S_1 = 0$ $\quad S_2 = 0$

(ค) เนื่องจากปัญหาเดิมมีตัวแปรตัดสินใจ 3 ตัว และชุดของอสมการข้อจำกัด 2 ชุด ดังนั้นปัญหาคู่ก็จะต้องมีตัวแปรตัดสินใจ 2 ตัว (Y_1 และ Y_2) และชุดของอสมการข้อจำกัด 3 ชุด ดังนั้นจึงต้องมีตัวแปรหุ่น 3 ตัวด้วยกัน (W_1, W_2, W_3) หน้าที่ของเราในตอนนี้ก็คือต้องการหาค่าของตัวแปรตัดสินใจของปัญหาคู่ Y_1 และ Y_2 เท่านั้น ในการหา Y_1 และ Y_2 เราจะต้องแปลงตัวแบบปัญหาเดิมให้เป็นตัวแบบปัญหาคู่ก่อนดังนี้

Minimize $g^* = 22Y_1 + 16Y_2 + M(A_1 + A_2 + A_3)$

ภายใต้ข้อจำกัด

$$Y_1 + 4Y_2 - W_1 + A_1 = 2$$

$$2Y_1 + 2Y_2 - W_2 + A_2 = 3$$

$$4Y_1 + 2Y_2 + W_3 + A_3 = 5$$

และ $Y_1, Y_2, W_1, W_2, W_3, A_1, A_2, A_3 \geq 0$

เราทราบมาแล้วว่า $\bar{X}_2, \bar{X}_3 > 0$ ดังนั้น $\bar{W}_2 = \bar{W}_3 = 0$ เอาค่า $\bar{W}_2 = \bar{W}_3 = 0$ ไปแทนในสมการข้อจำกัดทั้งสาม และยิ่งกว่านั้นเรายังทราบอีกว่าตรงค่าเฉลยที่ดีที่สุดนั้นตัวแปรเทียมจะต้องเท่ากับศูนย์ ดังนั้นสมการข้อจำกัดขอบข่ายของปัญหาจึงเหลือเพียง

$$Y_1 + 4Y_2 - W_1 = 2$$

$$2Y_1 + 2Y_2 = 3$$

$$4Y_1 + 2Y_2 = 5$$

จาก 2 สมการหลัง เราสามารถหาค่า Y_1 และ Y_2 โดยวิธีแก้สมการตามหลักพีชคณิต ได้ผลลัพธ์ออกมาเป็น ดังนี้

$$\bar{Y}_1 = 1 \qquad \bar{Y}_2 = \frac{1}{2}$$

เสร็จแล้วเอา $\bar{Y}_1$ และ $\bar{Y}_2$ ไปแทนค่าในสมการแรก เราก็จะได้

$$\bar{W}_1 = 1$$

(ง) ผลลัพธ์จากข้อ ค. ประจักษ์ชัดแล้วว่า $\bar{W}_1 = 1, \bar{W}_2 = \bar{W}_3 = 0$

(จ) ถ้าเราเอาค่าของ $\bar{Y}_1 = 1$ และ $\bar{Y}_2 = \frac{1}{2}$ ไปแทนลงในสมการเป้าหมายของปัญหาคู่ เราก็จะได้ $\bar{\pi}^* = 30$ ซึ่งก็คงที่เท่ากับ $\bar{\pi}$ ในปัญหาเดิมนั่นเอง

$$\bar{\pi}^* = 22Y_1 + 16Y_2$$

$$= 22(1) + 16(½) = 30$$

<u>การแปลความหมายทางการตลาดของปัญหาคู่</u> (Marketing Interpretation of a Dual)

นอกจากปัญหาคู่ของโปรแกรมเชิงเส้นตรงจะสามารถเป็นแนวทางให้มีการคิดคำนวณหาคำเฉลยที่ดีที่สุดของปัญหาเดิมแล้วปัญหาคู่ยังให้ความหมายอย่างสำคัญทางการตลาดโดยตัวของมันเองอีกด้วย

1.1 <u>ปัญหาว่าด้วยการทำให้ถึงจุดสูงสุด</u> (Maximization) ต่อไปนี้จะแปลความหมายของปัญหาคู่ในปัญหาว่าด้วยการทำให้ถึงจุดสูงสุด จะขอยกตัวอย่างเกี่ยวกับผู้ผลิตประสงค์จะทำการผลิตสินค้า 2 ชนิด โดยใช้ปัจจัยการผลิต 3 ชนิด ปัจจัยทั้งสามชนิดนี้จะกำหนดว่ามันมีอยู่อย่างจำกัด ฉะนั้นการผลิตสินค้าทั้งสองจะต้องไม่เกินสมรรถภาพ(capacity) ของปัจจัยการผลิตที่มีอยู่ ปัญหามีดังนี้

$$\text{Maximize } \pi = c_1X_1 + c_2X_2$$

ภายใต้ข้อจำกัด

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 \leqslant b_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 \leqslant b_2$$

$$a_{31}X_1 + a_{32}X_2 \leqslant b_3$$

และ

$$X_1,\ X_2 \geqslant 0$$

ดังนั้นปัญหาคู่ของโปรแกรมเชิงเส้นตรงข้างบนจะเป็นดังนี้

$$\text{Minimize } \pi^* = b_1Y_1 + b_2Y_2 + b_3Y_3$$

ภายใต้ข้อจำกัด

$$a_{11}Y_1 + a_{21}Y_2 + a_{31}Y_3 \geqslant c_1$$

$$a_{12}Y_1 + a_{22}Y_2 + a_{32}Y_3 \geqslant c_2$$

และ

$$Y_1,\ Y_2,\ Y_3 \geqslant 0$$

ก่อนที่เราจะแปลความหมายทางการตลาดของปัญหาคู่ เราควรทราบถึงลักษณะทั่วไปของตัวแปรตัดสินใจของปัญหาคู่และหน่วยในการวัดของมันเสียก่อน ในปัญหาเดิมจะแสดงถึงกำไรทั้งหมด (total profit) เป็นเงินตรา (บาท, สตางค์) และตามทฤษฎีบทที่ 1 ของความเป็นคู่กันนั้น เราทราบแล้วว่า $\bar{q}^* = \bar{q}$ เมื่อเป็นเช่นนี้ $\bar{q}^*$ ในปัญหาคู่ก็คงจะต้องมีหน่วยเป็นเงินตรา (บาท,สตางค์)ด้วย อันนี้ก็คงหมายรวมถึงว่า $b_1Y_1 + b_2Y_2 + b_3Y_3$ ก็จะต้องมีหน่วยเป็นเงินด้วย เนื่องจากว่า b_i หมายถึงปริมาณของทรัพยากรหรือปัจจัยการผลิตที่ i[1] ดังนั้นสัญญลักษณ์ Y_i แน่นอนว่าจะต้องแสดงออกมาในหน่วยเงินตราต่อหน่วยของปัจจัยที่ i ด้วย มิฉะนั้นแล้ว b_iY_i จะไม่ออกมาในรูปของหน่วยเงินตราดังกล่าว นี่ก็หมายความว่า Y_i จะต้องแสดงถึงประเภทบางประเภทของ<u>การประเมินมูลค่า</u> (valuation) ของปัจจัยในปัญหาคู่

อย่างไรก็ตามมูลค่าอันนี้จะไม่ใช่<u>ราคาตลาด</u> (market price) หากมันน่าจะเป็น<u>มูลค่าที่ประเมิน</u> (inputed) ให้แก่ปัจจัย ด้วยเหตุผลนี้เองมูลค่าของ Y_i ในเรื่องนี้จึงหมายถึง <u>ราคาทางบัญชี</u> (accounting price) หรือ<u>ราคาเงา</u> (shadow price) ของปัจจัยที่ i เราอาจจะเรียกราคานี้อีกอย่างหนึ่งก็ได้ว่าเป็น<u>ค่าเสียโอกาส</u> (opportunity cost) ของการใช้ปัจจัยที่ i

ต่อไปนี้ขอให้ลองพิจารณาส่วนประกอบทั้งสามของปัญหาคู่

ประการแรก ตัวแปรตัดสินใจต้องไม่เป็นลบ (nonnegative restriction) $Y_i \geq 0$ อันนี้หมายความว่าเราถูกห้ามมิให้ประเมิน (inpute) ปัจจัยใด ๆ ให้มีมูลค่า (ค่าเสียโอกาส) น้อยไปกว่าศูนย์ ตามข้อเท็จจริงนั้นเราจะต้องประเมินมูลค่าที่เป็นบวก ให้แก่ปัจจัยอันหนึ่งเสมอ นอกเสียจากว่าปัจจัยอันนั้นมิได้ถูกใช้ให้เต็มที่ ยังมีทรัพยากร

1/ อาจหมายถึงประสิทธิภาพหรือสมรรถภาพของปัจจัยการผลิตที่มีอยู่ก็ได้ เช่น เราอาจมีที่ดินอยู่ 3 ไร่ มีโรงงานอยู่ 4 โรงงาน และมีแรงงานอยู่ 100 คนต่อปี เป็นต้น ฯลฯ

เหลือใช้มิได้ถูกนำไปใช้ในการผลิต ($\bar{S}_i > 0$) ดังนั้นค่าเสียโอกาสของการใช้ปัจจัยจะเป็นศูนย์ ($\bar{Y}_i$ = 0 = Zero opportunity cost) และในกรณีที่ทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัดถูกใช้อย่างเต็มที่ (full utilization) แล้ว ($\bar{S}_i = 0$) ถ้าไม่นำไปผลิตสินค้าอื่น นำมาผลิตสินค้านี้เพียงอย่างเดียวจะทำให้เกิดต้นทุนค่าเสียโอกาสเกิดขึ้น ทำให้ค่าเสียโอกาสเป็นบวก ($\bar{Y}_i > 0$) แง่คิดที่ว่านั้นมาจากทฤษฎีบทที่ 2 ของทฤษฎีบทว่าด้วยความเป็นคู่กันนั่นเอง

ถ้าเราหันมาพิจารณาถึงอสมการข้อจำกัดของปัญหาคู่บ้าง ซึ่งในที่นี้จะยกตัวอย่างอสมการข้อจำกัดชุดแรก

$$a_{11}Y_1 + a_{21}Y_2 + a_{31}Y_3 \geqslant c_1 \quad \ldots\ldots^{*}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$a_{11}Y_1 + a_{21}Y_2 + a_{31}Y_3 - W_1 = c_1$$

$$W_1 = (a_{11}Y_1 + a_{21}Y_2 + a_{31}Y_3) - c_1 \ldots\ldots(2)$$

$$W_1 > 0 \qquad \bar{X}_1 = 0$$

$$W_1 = 0 \qquad I, > 0$$

ในที่นี้ a_{ij} หมายถึงปริมาณของปัจจัย i ที่ใช้ในการผลิตต่อหนึ่งหน่วยของผลิตผล $j(X_j)$ ดังนั้นทางซ้ายมือของ (1) จึงแสดงถึงค่าเสียโอกาสของปัจจัยการผลิตทั้งหมดที่ใช้ในการผลิต ผลิตผลประเภทแรก (X_1) 1 หน่วย ทางด้านขวามือของ (1) เทอม c_1 แสดงถึงกำไรต่อหน่วย (per unit profit) ของผลิตผลประเภทแรก (X_1) ดังนั้นสิ่งที่อสมการข้อจำกัดอันนี้ต้องการก็คือว่าค่าเสียโอกาสของการใช้ปัจจัยการผลิตทั้งหมดในการผลิตจะถูกประเมิน ณ ระดับอย่างน้อยที่สุดจะต้องเท่ากับกำไรจากผลิตผลอันนั้น

เมื่อมาถึงตอนนี้จะเห็นได้ชัดว่าถ้าค่าเสียโอกาสของการผลิตเกิดมีมากกว่ากำไรแล้ว ($\bar{W}_1 > 0$) คู่สมการ (2) การจัดสรรทรัพยากร (การจัดสรรปัจจัยในการผลิต)

จะต้องไม่เหมาะสมที่สุดอย่างแน่นอน เพราะว่าถ้าเลิกผลิตผลประเภทแรก ปัจจัยจะถูกเคลื่อนย้ายออกไป เพื่อนำไปทำการผลิตผลิตผลอื่นจะให้ผลตอบแทนดีกว่า ในทางคณิตศาสตร์ถ้าเครื่องหมาย $>$ ซึ่งเป็นส่วนของ $\geqslant$ ใน (1) เป็นจริงในคำเฉลยที่ดีที่สุดแล้วผลิตผลประเภทแรกก็ไม่ควรจะผลิตขึ้นมา ($\bar{X}_1 = 0$) นั่นเอง

ในทางตรงกันข้าม ถ้าผลิตผลประเภทแรกถูกผลิตขึ้นมา กล่าวคือ $\bar{X}_1 > 0$ แล้ว ค่าเสียโอกาสของการผลิตจะต้องเท่ากับกำไรพอดี 1/ และเครื่องหมาย = ซึ่งเป็นส่วนของเครื่องหมาย $\geqslant$ ใน (1) ก็จะต้องเป็นจริงในคำเฉลยที่ดีที่สุด โดยสรุปก็คือ ถ้า $\bar{W}_1 > 0$ แล้ว $\bar{X}_1 = 0$ และ $\bar{X}_1 > 0$ $\bar{W}_1 = 0$ สำหรับอสมการข้อจำกัดที่สองและที่สามก็ตีความหมายได้เช่นเดียวกัน

ประการสุดท้าย ขอให้เราพิจารณาสมการเป้าหมายของปัญหาคู่ โปรดจำไว้ว่า b_i นั้นเป็นปริมาณของปัจจัยที่ i ที่มีอยู่ทั้งหมด ดังนั้น

$$\text{Minimize } \pi^* = b_1Y_1 + b_2Y_2 + b_3Y_3$$

จึงแสดงถึงมูลค่าทั้งหมดที่ประเมินให้แก่ปัจจัยที่มีอยู่ของธุรกิจ นี่ก็เป็นแนวคิดของปัญหาคู่ที่จะทำให้มูลค่าทั้งหมดนี้ต่ำสุด ในขณะเดียวกันก็ทำให้อสมการข้อจำกัดที่เราแปลความหมายมาแล้วข้างต้นเป็นไปด้วย ดังนั้น ความสอดคล้องต้องกันระหว่างปัญหาเดิมและปัญหาคู่ จึงให้ข้อแนะนำว่าในการทำ<u>กำไรให้สูงสุด</u> โดยการหาระดับผลิตผลที่เหมาะสมที่สุด (ในปัญหาเดิม) <u>ก็คือการทำให้มูลค่าที่ประเมินหรือค่าเสียโอกาสของปัจจัยของธุรกิจต่ำสุด</u> โดยมีเงื่อนไขว่าค่าเสียโอกาสของการผลิตผลิตผลแต่ละประเภทจะต้องไม่น้อยไปกว่ากำไรที่ได้มาจากผลิตผลนั้น

เหตุผลของการตีความหมายของปัญหาคู่เช่นนี้ก็สามารถจะใช้กับกรณีของตัวแปรตัดสินใจ n ตัว และตัวปัจจัย m ตัวได้ด้วย (สำหรับในกรณีตัวอย่างของเรา เรามี

1/ นั่นคือ ถ้า $\bar{X}_1 > 0$ ดังนั้น $\bar{W}_1 = 0$, นั่นคือ $\sum_{i=1}^{3} a_{i1}Y_i = c_1$

ตัวแปรตัดสินใจ หรือผลิตผลที่จะผลิต $n = 2$ และปัจจัย $m = 3$)

1.2 <u>ปัญหาว่าด้วยการทำให้ถึงจุดต่ำสุด</u> (Minimization) โดยเหตุผลเช่นเดียวกัน ตัวแปรตัดสินใจ (decision variables) ของปัญหาคู่ ในปัญหาว่าด้วยการทำให้ถึงจุดต่ำสุด ก็สามารถตีความหมายเช่นเดียวกัน

ในกรณีนี้เราอาจจะยกตัวอย่างในปัญหาเรื่องการบำรุงร่างกายของบุคคลหนึ่ง (diet problem) นั้นจะประกอบไปด้วยอาหาร 2 ชนิด อาหารแต่ละชนิดนั้นก็จะประกอบไปด้วยธาตุต่าง ๆ ที่กำหนดให้ 3 ชนิด (อาจเป็นแคลอรี่ วิตามิน แป้ง เป็นต้น) โดยกำหนดว่าอาหารแต่ละชนิดจะต้องมีส่วนผสมของธาตุเหล่านี้บรรจุอยู่ในอาหารนั้นไม่น้อยกว่าเท่านั้นเท่านี้ และยิ่งกว่านั้นเราจะต้องสมมติว่าอาหารแต่ละชนิดนี้มีราคาต่อหน่วยเท่าใด เสร็จแล้วเราต้องการที่จะทำต้นทุนในการผลิตอาหารเหล่านี้ให้ต่ำสุด ปัญหาเดิมของเราก็คือ

$$\text{Minimize } C = c_1X_1 + c_2X_2$$

ภายใต้ข้อจำกัด

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 \geqslant b_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 \geqslant b_2$$

$$a_{31}X_1 + a_{32}X_2 \geqslant b_3$$

และ

$$X_1, X_2 \geqslant 0$$

ดังนั้นตัวแบบปัญหาคู่จะมีรูปดังนี้

$$\text{Maximize } C^* = b_1Y_1 + b_2Y_2 + b_3Y_3$$

ภายใต้ข้อจำกัด

$$a_{11}Y_1 + a_{21}Y_2 + a_{31}Y_3 \leqslant c_1$$

$$a_{12}Y_1 + a_{22}Y_2 + a_{32}Y_3 \leqslant c_2$$

และ

$$Y_1, Y_2, Y_3 \geqslant 0$$

ในตัวแบบโปรแกรมเชิงเส้นตรงของปัญหาเดิม C คือต้นทุนทั้งหมด (total cost) ของอาหารที่จะนำมาเลี้ยงร่างกาย

c_j ก็คือราคาหรือต้นทุนต่อหน่วยของอาหารที่ j (X_j)

ส่วน X_j คือปริมาณของอาหารประเภทที่ j

สำหรับ a_{ij} หมายถึงธาตุหรือส่วนประกอบที่ i ในการผลิตต่อหน่วยของอาหารที่ j

และ b_i หมายถึงความต้องการขั้นต่ำสุดของธาตุหรือส่วนประกอบที่ i ที่จะบรรจุในอาหาร (เป็นปริมาณขั้นต่ำสุดของธาตุแต่ละชนิดนั่นเอง)

สำหรับตัวแบบโปรแกรมเชิงเส้นตรงของปัญหาคู่นั้น Y_i หมายถึงตัวแปรตัดสินใจของปัญหาคู่ที่ i

ทราบเท่าที่ C ในปัญหาเดิมมีหน่วยเป็นเงินตรา (บาท, สตางค์) ดังนั้น C^* ก็จะต้องมีหน่วยเป็นเงินตรา (บาท, สตางค์) ด้วย เราทราบแล้วว่า b_i มีหน่วยเป็นปริมาณ (กรัม, ชั่ง ฯลฯ) ของส่วนประกอบหรือธาตุของอาหาร ดังนั้น Y_i จึงควรจะต้องมีหน่วยเป็นเงินตราต่อหน่วยของธาตุหรือส่วนประกอบของอาหารนั้น พูดอีกนัยหนึ่งก็คือตัวแปรตัดสินใจของปัญหาคู่จะต้องมีลักษณะของประเภทบางประเภทของการประเมินมูลค่า (valuation) ในที่นี้มันแสดงถึงมูลค่าที่ประเมิน (inputed values) ของธาตุหรือส่วนประกอบของอาหารดังกล่าว ดังนั้นมันจึงต้องไม่มีค่าเป็นลบ

ด้วยเหตุผลนี้อสมการข้อจำกัดของปัญหาคู่ แต่ละอันจึงหมายถึงมูลค่าที่ประเมินทั้งหมดของธาตุหรือส่วนประกอบของอาหารที่จะบรรจุอยู่ในหนึ่งหน่วยของอาหารแต่ละชนิด

$$a_{11}Y_1 + a_{21}Y_2 + a_{31}Y_3 \leqslant c_1$$

$$a_{11}Y_1 + a_{21}Y_2 + a_{31}Y_3 + W_1 = c_1$$

$$W_1 = c_1 - (a_{11}Y_1 + a_{21}Y_2 + a_{31}Y_3)$$

$$\bar{X}_1 = 0 \qquad \bar{W}_1 > 0$$

$$\bar{X}_1 > 0 \qquad \bar{W}_1 = 0$$

อสมการข้อจำกัดชุดแรกของปัญหาคู่ทางซ้ายมือหมายถึงในการผลิตอาหารประเภทที่ 1 นั้นต้องใช้ธาตุที่ 1 เท่ากับ a_{11} ธาตุที่ 2 เท่ากับ a_{21} และธาตุที่ 3 เท่ากับ a_{31} ผลรวมของมูลค่าที่ประเมิน ($\sum_{i=1}^{3} a_{i1}Y_i$) ทั้งหมดนี้จะต้องไม่มากไปกว่าราคาหรือต้นทุนของอาหารประเภทที่ 1 หรือ c_1 แน่นอนว่าสามัญสำนึกจะบอกให้เราทราบว่าเราจะไม่ซื้ออาหารประเภทแรกเลย ($\bar{X}_1 = 0$) ถ้าหากราคาของมัน (c_1) เกิดมากไปกว่ามูลค่าที่ประเมินของธาตุหรือส่วนประกอบของอาหาร ($\bar{W}_1 > 0$) เพราะว่าจะเป็นการสูญเสียเงินที่เราจ่ายไปเปล่า ๆ 1/ ดังนั้นในคำเฉลยที่ดีที่สุดนั้นเราจะซื้ออาหารประเภทแรก ($\bar{X}_1 > 0$) ก็ต่อเมื่อมูลค่าที่ประเมินของส่วนประกอบของอาหารเท่ากับราคาของอาหารประเภทแรกพอดี ($\sum_{i=1}^{3} a_{i1}Y_i = c_1$) $\bar{W}_1 = 0$ ในอสมการข้อจำกัดที่สองจะแปลความหมายได้เช่นเดียวกัน

สำหรับสมการเป้าหมายของปัญหาคู่นั้นเราประสงค์ที่จะทำให้มูลค่าที่ประเมินของความต้องการขั้นต่ำของส่วนประกอบของอาหาร<u>สูงที่สุด</u> โดยกำหนดเงื่อนไขของอสมการข้อจำกัดให้เมื่อมูลค่าที่ประเมินนี้สูงสุดแล้ว เราจะได้ต้นทุนของอาหารที่บำรุงเลี้ยงร่างกายต่ำสุดไปด้วย ในขณะเดียวกันนั้นก็ทำให้ความต้องการส่วนประกอบของอาหารขั้นต่ำเป็นไปด้วย

<u>1/</u> โปรดสังเกตว่าเรามองในฐานะผู้ซื้อ ถ้ามองในแง่ของการผลิต อาจกล่าวได้ว่าผู้ผลิตจะไม่ทำการผลิตอาหารประเภทแรกเลย ถ้าหากว่าต้นทุนของมัน (c_1) เกิดมากกว่ามูลค่าที่ประเมินของราคาหรือส่วนประกอบของอาหารนั้นกล่าวคือ $\bar{W}_1 > 0$ แล้ว $\bar{X}_1 = 0$ นี่ก็คือกรณีของทฤษฎีบทที่ 2 ของทฤษฎีบทว่าด้วยความเป็นคู่กันนั่นเอง

แบบฝึกหัดบทที่ 6

ข้อ 1. บริษัทแห่งหนึ่งผลิตสินค้า 3 ชนิด ชนิดที่ 1 ได้กำไรอันละ 5 บาท ชนิดที่ 2 ได้กำไรอันละ 7 บาท ชนิดที่ 3 ได้กำไรอันละ 8 บาท สินค้าแต่ละชนิดต้องผ่านกรรมวิธีการผลิต 3 ขั้นตอน ดังนี้

		กรรมวิธีการผลิต		
		ขั้นตอนที่ 1	ขั้นตอนที่ 2	ขั้นตอนที่ 3
สินค้า	ชนิดที่ 1 : x_1	4 นาที	5 นาที	6 นาที
	ชนิดที่ 2 : x_2	5 นาที	7 นาที	9 นาที
	ชนิดที่ 3 : x_3	6 นาที	7 นาที	7 นาที
จำนวนเวลาทั้งหมดที่แต่ละขั้นตอนกำหนดให้ใช้ได้		80 นาที	100 นาที	120 นาที

กำหนดให้ค่าเฉลยที่ดีที่สุดของปัญหาเดิมมีดังนี้

$$(\bar{\pi}, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3) = \left(\frac{760}{7}, 0, 40, 60, 0, 0, \frac{60}{7}\right)$$

- 7 - s

<u>คำสั่ง</u> ก. จงเขียนสมการเป้าหมาย และอสมการข้อจำกัดของปัญหาคู่ (dual problem)

ข. จงหาค่าตัวแปรตัดสินใจของปัญหาคู่

ค. จงหาค่าตัวแปรหุ่น (dummy variable) ของปัญหาคู่

ง. จงพิสูจน์ว่า $\bar{\pi}^* = \bar{\pi}$

ข้อ 2. ตัวแบบโปรแกรมเชิงเส้นตรงชุดนี้เป็นการแก้ปัญหา **Minimize C** ของปัญหาเดิมดังนี้

Minimize $C = 0.6X_1 + X_2$

ภายใต้ข้อจำกัด

$$\begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 5 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 12 \end{bmatrix}$$

และ $X_1, X_2 \geqslant 0$

ภายหลังจากการใช้ **Simplex method** หลายครั้งแล้ว ตารางแสดงผลลัพธ์ของตัวแบบมีดังนี้

row	Basis	C	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	Constan
0	C	1	0	0	$\frac{1}{15}$	$\frac{-19}{75}$	0	$-(M+1/_{15})$	$-(M-\frac{19}{75})$	-M	$\frac{56}{15}$
1	X_1	0	1	0	$-1/_6$	$2/_{15}$	0	$1/_6$	$\frac{-2}{15}$	0	$\frac{26}{39}$
2	S_3	0	0	0	$2/_3$	$-26/_{15}$	1	$-2/_3$	$\frac{26}{15}$	-1	$\frac{28}{3}$
3	X_2	0	0	1	$1/_6$	$-1/_3$	0	$-1/_6$	$1/_3$	0	$\frac{10}{3}$

จงตอบคำถามต่อไปนี้

ก.) ตารางที่กำหนดให้นี้เป็นตารางที่แสดงผลลัพธ์ที่ดีที่สุดหรือไม่ เพราะเหตุใด

ข.) ถ้าเป็น(หรือถ้าไม่เป็นให้หาตารางแสดงผลลัพธ์ที่ดีที่สุด) แล้วให้หาค่าของ $\bar{C}$, $\bar{X}_1$, และ $\bar{X}_2$

ค.) ปัญหาคู่มีตัวแปรตัดสินใจกี่ตัว จงหาค่าค่าเฉลยที่ดีที่สุดของตัวแปรตัดสินใจของปัญหาคู่

ง.) จงหาค่าตัวแปรหุ่นของปัญหาคู่

จ.) ให้แทนค่า $\bar{Y}_i$ ลงไปในสมการเป้าหมายของปัญหาคู่ เพื่อแสดงว่า $\bar{C}^* = \bar{C}$

ข้อ 3. บริษัทผลิตเข็มขัดหนังทำการผลิตเข็มขัดสองชนิดคือ ชนิดคุณภาพสูงและชนิดคุณภาพต่ำ ชนิดคุณภาพสูงจะขายได้กำไร 40 บาทต่อเส้น แต่ต้องใช้เวลาในการทำเป็นสองเท่าของเข็มขัดชนิดคุณภาพต่ำ ซึ่งได้กำไรเพียงเส้นละ 30 บาท ถ้าบริษัททำการผลิตเข็มขัดทั้งสองชนิดผลิตได้วันหนึ่ง ๆ เพียง 1,000 เส้น และจะมีหนังทำเข็มขัดได้เพียงวันละ 800 เส้นเท่านั้น นอกจากนี้หัวเข็มขัดชนิดคุณภาพดีทำได้วันละ 400 อัน และสำหรับชนิดคุณภาพต่ำทำได้เพียงวันละ 700 อัน บริษัทจะต้องผลิตเข็มขัดทั้งสองชนิดอย่างละเท่าใดจึงจะได้กำไรสูงสุด

สมมติให้ Z = จำนวนเงินกำไร

X_i = จำนวนผลิตของเข็มขัดชนิด

i = 1 (ชนิดคุณภาพสูง), 2 (ชนิดคุณภาพต่ำ)

สมการเป้าหมายเพื่อกำไรสูงสุดจะเป็น

$$\text{Max. } Z = 40X_1 + 30X_2$$

อสมการของขอบข่ายปัญหา :

1. สำหรับหัวเข็มขัดที่มีจำกัด ชนิดคุณภาพสูง $X_1 \leq 400$ อัน

   ชนิดคุณภาพต่ำ $X_2 \leq 700$ อัน

2. สำหรับอัตราการผลิต $X_1 + 2X_2 \leq 1{,}000$ เส้น

3. จำนวนหนังที่ใช้ทำเข็มขัด $X_1 + X_2 \leq 800$ เส้น

และ $x_i \geqslant 0, \; i = 1, 2$

และค่าเฉลยที่ดีที่สุดของปัญหาเดิม ที่เกี่ยวข้องคือ $\bar{x}_1 = 400$ และ $Z =$ 25,000 บาท

โปรดหา

ก.) ตัวแปรตัดสินใจของปัญหาเดิมที่เหลือ

ข.) ตัวแปรหุ่นของปัญหาเดิม

ค.) ตัวแปรตัดสินใจของปัญหาคู่

ง.) ตัวแปรหุ่นของปัญหาคู่

จ.) นำค่าของตัวแปรตัดสินใจของปัญหาคู่แทนลงในสมการเป้าหมายของปัญหาคู่ จะเท่ากับของปัญหาเดิมหรือไม่

ข้อ 4. บริษัท คารินจำกัด ประกอบทีวีสีและขาวดำจำหน่าย โดยมีแผนกประกอบ 2 แผนก แผนกที่ 1 ประกอบทีวีขาวดำ แผนกที่ 2 ประกอบทีวีสี แต่ละแผนกสามารถประกอบได้จำกัด คือ

แผนกที่ 1 ประกอบได้ไม่เกิน 80 เครื่องต่อวัน

แผนกที่ 2 ประกอบได้ไม่เกิน 60 เครื่องต่อวัน

ทีวีทั้งสองชนิดต้องใช้หลอดภาพแบบเดียวกันซึ่งหลอดภาพนี้ ผู้ผลิตจะจัดส่งมาให้วันละไม่เกิน 600 หลอด ทีวีขาวดำและทีวีสีจะต้องใช้หลอดภาพจำนวน 5 และ 6 หลอดต่อเครื่องตามลำดับ และมีช่างประกอบทีวีทั้งสองแผนกรวม 160 แรงงานต่อวัน การประกอบทีวีขาวดำต้องใช้ 1 แรงงานและทีวีสี 2 แรงงานต่อเครื่อง

<u>คำถาม</u>

ก. บริษัทควรประกอบทีวีขาวดำและทีวีสีเป็นจำนวนเท่าไรต่อวันเพื่อจะได้รับกำไรสูงสุด ถ้าทีวีขาวดำมีกำไรเครื่องละ 1,100 บาท และทีวีสีมีกำไรเครื่องละ 2,000 บาท

ข. จงสร้างรูปแบบทางคณิตศาสตร์ของปัญหาคู่ (dual problem) ของข้อ ก. และหาค่าของตัวแปรตัดสินใจ (decision variable) ของปัญหาคู่นี้

ค. จงหาค่าตัวแปรหุ่น (dummy variables) ของปัญหาคู่

ง. จงนำค่าตัวแปรตัดสินใจของปัญหาคู่แทนลงในสมการเป้าหมายของปัญหาคู่ แล้วตรวจสอบว่าค่าที่เหมาะสมที่สุดของสมการเป้าหมายของปัญหาคู่จะเท่ากับของปัญหาเดิม (primal problem) หรือไม่

ข้อ 5. ข้อมูลต่าง ๆ ของปัญหาเดิม (primal problem) มีดังนี้

$$\text{Max} \quad \pi = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

ภายใต้ข้อจำกัด

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 430$$

$$3x_1 + 2x_3 \leqslant 460$$

$$x_1 + 4x_2 \leqslant 420$$

$$x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$$

<u>กำหนดให้</u> ค่าเฉลยที่ดีที่สุดที่เกี่ยวข้องคือ

$$\bar{\pi} = 1350 , \quad \bar{x}_1 = 0 , \quad \bar{x}_3 = 230$$

<u>จงหา</u>

1. ตัวแปรตัดสินใจของปัญหาเดิมที่เหลือ
2. ตัวแปรหุ่นของปัญหาเดิม
3. ตัวแปรตัดสินใจของปัญหาคู่
4. ตัวแปรหุ่นของปัญหาคู่

5. นำค่าตัวแปรตัดสินใจของปัญหาคู่ไปแทนในสมการเป้าหมายของปัญหาคู่ แล้วตรวจสอบว่าค่าเฉลยที่ดีที่สุดของสมการเป้าหมายของปัญหาคู่จะเท่ากับของปัญหาเดิมหรือไม่