บทที่ 5
การโปรแกรมเชิงเส้นตรง
(Linear Programming)

การโปรแกรมเชิงเส้นตรงเป็นเทคนิคทางคณิตศาสตร์อย่างหนึ่งที่รู้จักและนำมาใช้อย่างแพร่หลายในวงการธุรกิจ ในฐานะเป็นเครื่องมือของฝ่ายบริหารสำหรับประกอบการตัดสินใจเกี่ยวกับการจัดสรรการใช้ทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัดให้เกิดประโยชน์มากที่สุดและสอดคล้องกับเป้าหมายของธุรกิจโดยส่วนรวม

วัตถุประสงค์ที่ธุรกิจนำการโปรแกรมเชิงเส้นตรงมาใช้กับปัญหาทางธุรกิจก็เพื่อที่จะสร้างตัวแบบ (Model) ทางคณิตศาสตร์ขึ้นมาเป็นเครื่องมือช่วยฝ่ายบริหารในการกำหนดแนวทางดำเนินงานที่ดีที่สุด ปัญหาที่เผชิญหน้ากับธุรกิจในปัจจุบันนี้ก็คือ การใช้ปัจจัยที่มีอยู่อย่างจำกัดให้มีประสิทธิภาพมากที่สุด ปัจจัยดังกล่าวรวมถึง เงิน วัสดุ เครื่องจักร เวลา และแรงงาน จะทำอย่างไรให้การจัดสรรทรัพยากรการผลิตต่าง ๆ ที่มีอยู่ไปในการผลิตผลิตภัณฑ์ของธุรกิจเพื่อให้ได้กำไรมากที่สุดหรือเพื่อให้เกิดต้นทุนการผลิตต่ำที่สุด

ความหมายของการโปรแกรมเชิงเส้นตรง

การโปรแกรมเชิงเส้นตรง ถูกค้นคิดโดยนักคณิตศาสตร์และนักเศรษฐศาสตร์ในปี ค.ศ. 1920 ชื่อ Wassily W. Leontief (นักเศรษฐศาสตร์) และ George B. Dantzig (นักคณิตศาสตร์) และแปลงทฤษฎีและเนื้อหามาใช้วิธี Simplex Linear Programming ในปี 1924 ใช้มาจนถึงทุกวันนี้

คำจำกัดความของ "การโปรแกรมเชิงเส้นตรง" (Linear programming) คำว่า "เส้นตรง" (Linear) หมายถึง ความสัมพันธ์ของตัวแปรผันตั้งแต่สองตัวขึ้นไปสัมพันธ์กันโดยตรง และอัตราส่วนที่แน่นอน นั่นคือกำลังของตัวแปรผันเท่ากับหนึ่ง "การโปรแกรม" (Programming) หมายถึง การใช้วิธีทางคณิตศาสตร์ที่กำหนดขั้นตอนลำดับการคำนวณต่าง ๆ อย่างเป็นระบบเพื่อให้ได้ค่าเฉลยที่ดีที่สุด (Optimal Solutinn) ของปัญหาที่เกี่ยวข้องกับ

ปัจจัยที่มีอยู่อย่างจำนวนจำกัด สำหรับเป็นแนวทางการดำเนินงานตามเป้าหมายเมื่อรวมความหมายของคำทั้งสองเข้าด้วยกัน เราสามารถให้คำจำกัดความได้ว่า

"การโปรแกรมเชิงเส้นตรงก็คือเทคนิคทางคณิตศาสตร์อย่างหนึ่ง สำหรับคำนวณหาวิธีการจัดสรรทรัพยากรการผลิตที่มีจำกัดให้เกิดประโยชน์มากที่สุด"

ปัจจัยสองประการที่ทำให้เกิดปัญหาการปันส่วนทรัพยากรการผลิต ได้แก่

1. ทรัพยากรการผลิตต่าง ๆ ที่ธุรกิจมีอยู่นั้นมีต้นทุนและมีปริมาณจำกัด ดังนั้นฝ่ายบริหาร จึงต้องหาวิธีกำหนดว่าจะใช้ทรัพยากรเหล่านี้อย่างไร

2. การจัดสรรทรัพยากรการผลิตจะต้องสอดคล้องกับเป้าหมายโดยส่วนรวมของธุรกิจ ซึ่งเป้าหมายของธุรกิจโดยทั่วไปก็คือ ได้รับกำไรสูงสุด (Maximization Profit) หรือต้นทุนต่ำสุด (Minimization Cost)

ดังนั้นนักธุรกิจจึงนำการโปรแกรมเชิงเส้นตรงมาเป็นเครื่องมืออย่างหนึ่งสำหรับการแก้ปัญหาเชิงปริมาณ ทางด้านการผลิต การจัดซื้อ การขนส่ง การมอบหมายงานและเกมส์การแข่งขันทางการตลาด

<u>โครงสร้างของตัวแบบคณิตศาสตร์</u> (The Structure of Mathematical Model)

ลักษณะของตัวแบบทางคณิตศาสตร์ของการโปรแกรมเชิงเส้นตรง ประกอบด้วย 3 ส่วน คือ

1. <u>ตัวแปรที่ตัดสินใจ</u> (Decision variables) หมายถึง ขนาด ระดับหรือจำนวนกิจกรรมต่าง ๆ ที่เป็นทางเลือกของปัญหาที่จะตัดสินใจ เช่น จำนวนสินค้าแต่ละชนิดที่จะผลิต, จำนวนวันที่ดำเนินการผลิต, จำนวนวัตถุดิบแต่ละชนิดที่จัดซื้อ ฯลฯ <u>ตัวแปรเหล่านี้ต้องไม่เป็นลบ</u> (Non - negative Condition) จะต้องมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0 จะเป็นเลขจำนวนเต็มหรือเศษส่วนก็ได้ขึ้นอยู่กับลักษณะของปัญหาค่าของตัวแปรเป็นลบไม่ได้ เพื่อให้ตรงกับความเป็นจริงของปัญหาทางธุรกิจ เช่น ถ้าให้ x เป็นจำนวนสินค้าชนิดหนึ่งที่จะผลิต ถ้าไม่ผลิตสินค้าชนิดนั้น x จะมีค่า $= 0$

2. <u>สมการเป้าหมาย</u> (Objective Function) เป็นสมการทางคณิตศาสตร์ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่าง ๆ และผลจากการตัดสินใจ ค่าของ**สมการเป้าหมาย** จะแสดงในรูปของตัวเงิน สิ่งของหรือหน่วยนับต่าง ๆ ฯลฯ จุดมุ่งหมายของผู้บริหารก็คือ เลือกตัวแปรที่ทำให้ค่าสมการเป้าหมายดีที่สุด (Optimize the value of objective function) ขณะเดียวกันก็ไม่ขัดกับข้อจำกัดต่าง ๆ ด้วย

โดยทั่วไปธุรกิจมีเป้าหมายเพื่อแสวงหากำไรสูงสุด หรือต้นทุนที่ต่ำที่สุด

3. <u>ข้อจำกัดหรือข้อกำหนดต่าง ๆ</u> (Constraint or Restriction) เป็นข้อกำหนดที่ตั้งขึ้น ซึ่งการตัดสินใจที่เหมาะสมที่สุดจะต้องไม่เป็นการละเมิดหรือฝ่าฝืนต่อข้อจำกัดที่กำหนดไว้นั้น ได้แก่ หรัพยากรหรือปัจจัยการผลิตต่าง ๆ ที่จำเป็นซึ่งเป็นสิ่งที่หาได้ยากและมีปริมาณจำกัด จะแสดงในรูปฟังชั่นของข้อจำกัด (Contraint Function)ซึ่งอาจจะเป็นอสมการหรือสมการและมีลักษณะเป็นเส้นตรง กำหนดขอบเขตการใช้หรัพยากรอย่างมากหรืออย่างน้อยกว่าหรือเท่ากับที่กำหนดไว้

เราสามารถเขียนตัวแบบโปรแกรมทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

<u>ลักษณะของตัวแบบปัญหาการโปรแกรเชิงเส้นตรง</u>

1. <u>การเขียนแบบธรรมดายาว ๆ</u> การเขียนตัวแบบโปรแกรมเชิงเส้นตรงที่มีตัวผันแปร n ตัว และมีขีดจำกัด m ชุด เราสามารถเขียนได้ดังนี้

สมการเป้าหมายกำไรสูงสุดจะเป็น

Maximize $\pi = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$

ภายใต้ข้อจำกัด

Subject to
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant b_2$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant b_m$$

and $x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$

$x_j \geqslant 0 \; ; (j = 1, 2, \ldots n)$

ในทำนองเดียวกันปัญหาที่ว่าด้วยการทำให้ถึงจุดต่ำสุด เราก็อาจจะเขียนได้ดังนี้

สมการเป้าหมายต้นทุนต่ำสุดจะเป็น

Minimize $C = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$

ภายใต้ข้อจำกัด

Subject to
$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n \geqslant b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n \geqslant b_2$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$
$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n \geqslant b_m$$

and $x_j \geqslant 0 \; ; (j = 1, 2, \ldots n)$

โดยที่ ¶ , C = มูลค่าของ สมการเป้าหมายที่ใช้วัดประสิทธิภาพของการตัดสินใจ

x_j = ตัวแปรที่ตัดสินใจที่อยู่ภายใต้การควบคุมของผู้ตัดสินใจ

c_j = กำไรส่วนเกินต่อหน่วย หรือต้นทุนต่อหน่วยของ x_j ที่ทราบได้

a_{ij}= สัมประสิทธิ์การใช้ปัจจัยการผลิตในการผลิตสินค้า 1 หน่วย จะเป็นจำนวนคงที่ไม่ว่าจะผลิตหน่วยที่เท่าไรภายในช่วงการผลิตหนึ่ง

b_i = ปัจจัยการผลิตต่าง ๆ ที่มีอยู่ในปริมาณจำกัด

จากตัวแบบดังกล่าวข้างต้นจะเห็นได้ว่าความแตกต่างพื้นฐานของปัญหากำไรสูงสุดและต้นทุนต่ำสุดอยู่ที่เครื่องหมายของสมการข้อจำกัดเท่านั้น โดยที่ปัญหากำไรสูงสุดเครื่องหมายข้อจำกัดอยู่ในรูป "น้อยกว่าหรือเท่ากับ" ($\leqslant$) แต่ปัญหาของต้นทุนต่ำสุดเครื่องหมายข้อจำกัดจะอยู่ในรูป "มากกว่าหรือเท่ากับ" ($\geqslant$) <u>แต่ในทางปฏิบัติแล้วเครื่องหมายของข้อจำกัดอาจจะคละกันได้ (และอาจใช้เครื่องหมาย = ร่วมด้วยก็ได้)แล้วแต่ข้อจำกัดการใช้ทรัพยากรกำหนดไว้เป็นอย่างไร ไม่ว่าสมการเป้าหมายจะเป็นเช่นไร</u>

2. <u>การใช้เครื่องหมาย Σ</u> การใช้ Σ (Summation) จะช่วยย่อได้มาก ดังนั้นตัวแบบโปรแกรมเชิงเส้นตรงสามารถเขียนได้ดังนี้

สมการเป้าหมาย : Maximize $\pi = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j$

ภายใต้ข้อจำกัด : Subject To $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \leqslant b_i (i = 1, 2, \ldots m)$

and $x_j \geqslant 0$; $(j = 1, 2, \ldots n)$

ในทำนองเดียวกัน

สมการเป้าหมาย : Minimize $c = \sum_{j=1}^{n} c_j\ x_j$

ภายใต้ข้อจำกัด : Subject to $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \geqslant b_i$ $(i = 1, 2, \ldots m)$

and $x_j \geqslant 0$; $(j = 1, 2, \ldots n)$

ถึงแม้การเขียนแบบ $\sum$ นี้จะให้รูปกระทัดรัดดีก็จริงอยู่ แต่ว่ามันไม่สะดวกในการคำนวณทางคณิตศาสตร์ ดังนั้นจึงไม่ค่อยได้ใช้แบบนี้กัน

3. <u>การใช้เครื่องหมาย Matrix</u> ก่อนที่จะเขียนแบบ Matrix Notation ควรสมมติสิ่งต่าง ๆ ต่อไปนี้

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} ; \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} ; \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots & a_{2n} \\ & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

เราจะเห็นได้ว่ามี Vector อยู่ 3 ชุด คือ c, x และ b ซึ่งมีมิติ $(n \times 1)$, $(n \times 1)$ และ $(m \times 1)$ ตามลำดับ และ Matrix 1 ชุด คือ Matrix A ซึ่งมีมิติ $(m \times n)$

จากความหมายต่าง ๆ เหล่านี้ เราสามารถเขียนตัวแบบปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นตรงได้ดังนี้

สมการเป้าหมาย : Maximize $q = c'x$

ภายใต้ข้อจำกัด : Subject to $Ax \leq b$

and $x \geq 0$

และในทำนองเดียวกันจะได้

สมการเป้าหมาย : Minimize $C = c'x$

ภายใต้ข้อจำกัด : Subject to $Ax \geqslant b$

and $x \geqslant 0$

<u>ตัวอย่างการเขียนตัวแบบปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นตรง</u>

ในการนำข้อมูลปัญหาที่กำหนดให้มาเขียนเป็นตัวแบบคณิตศาสตร์นั้น สิ่งที่เราต้องค้นจากข้อมูลก็คือ

1. เป็นปัญหาเกี่ยวกับอะไร กำหนดตัวแปรที่ตัดสินใจของปัญหาพร้อมทั้งหน่วยของตัวแปรที่ตัดสินใจนั้น ๆ

2. กำหนดสมการเป้าหมาย เป้าหมายของปัญหาต้องการกำไรสูงสุดหรือต้นทุนต่ำสุด

3. กำหนดข้อจำกัดต่าง ๆ ของปัญหา

4. กำหนดลักษณะของตัวแปรที่ตัดสินใจทุกตัวจะต้องมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ (ถ้าไม่ได้กำหนดไว้เป็นอย่างอื่น)

ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นตัวอย่างบางปัญหาที่สามารถนำวิธีการโปรแกรมเชิงเส้นตรงไปใช้เป็นเครื่องมือช่วยในการตัดสินใจ

<u>ตัวอย่างที่ 1 - 5</u> : ส่วนประสมของผลิตภัณฑ์

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> ผู้ผลิตคนหนึ่งประสงค์ที่จะทำการผลิตสินค้า 2 ประเภท คือ x_1 (น้ำอัดลม) และ x_2 (น้ำดื่มบริสุทธิ์บรรจุขวด) สมมติว่าแต่ละหน่วยของ x_1 จะให้กำไร 2 บาท และแต่ละหน่วยของ x_2 จะให้กำไร 1 บาท ในการผลิต x_1 จำนวน 1 หน่วยนั้นต้องการใช้เครื่องจักรเครื่องที่หนึ่ง 4 นาที และเครื่องจักรเครื่องที่สอง 3 นาที ในการผลิต x_2 จำนวน 1 หน่วยนั้นต้องการใช้เครื่องจักรเครื่องที่หนึ่ง 2 นาที และเครื่องจักรเครื่องที่สอง

3 นาที และกำหนดให้ว่าเครื่องจักรทั้งสองเครื่องนี้จะถูกใช้อย่างมากไม่เกิน 8 ชั่วโมง (480 นาที)

คำถามก็คือว่า จะทำการผลิตน้ำอัดลม และน้ำดื่มบริสุทธิ์บรรจุขวดเป็นจำนวนเท่าใด เพื่อจะให้ได้กำไรสูงสุด เพื่อจะดูปัญหาให้ชัดเจน เราอาจจัดเรียงข้อมูลดังกล่าวข้างต้นเป็นตารางดังนี้

	จำนวนนาทีในการทำงานของเครื่องจักรในการผลิตสินค้า 1 หน่วย		สมรรถภาพในการผลิต (เวลาที่มีอยู่ทั้งสิ้นของเครื่องจักร) (นาที)
	x_1 (น้ำอัดลม)	x_2 (น้ำดื่มบริสุทธิ์) บรรจุขวด	
เครื่องจักรที่ 1	4 นาที	2 นาที	480
เครื่องจักรที่ 2	3	3	480
กำไรต่อหน่วย	2 บาท	1 บาท	

<u>วิธีทำ</u> ให้ x_1 ; x_2 เป็นจำนวนขวดของการผลิตน้ำอัดลมและน้ำดื่มบริสุทธิ์บรรจุขวดตามลำดับ

ᆏ แทนจำนวนเงินกำไร

สมการเป้าหมายเพื่อกำไรสูงสุดจะเป็น

$$\text{Max } \pi = 2x_1 + 1x2 \quad \text{บาท}$$

อสมการข้อจำกัดขอบข่ายของปัญหา

I . กำลังการผลิต : เครื่องจักรที่ 1 $4x_1 + 2x_2 \leqslant 480$ นาที

: เครื่องจักรที่ 2 $3x_1 + 3x_2 \leqslant 480$ นาที

และ $x_1, x_2 \geqslant 0$ } Non-negative condition

<u>อธิบาย</u>

ปัญหาตัวอย่างนี้ เป้าหมายที่สำคัญของผู้ผลิตก็คือต้องการให้ได้กำไรที่เป็นตัวเงินอยู่ในระดับสูงสุด เพื่อเป็นการบรรลุเป้าหมายดังกล่าว ผู้ผลิตจะต้องคำนวณหาจำนวนที่ดีที่สุดที่จะผลิต x_1 และ x_2 โดยที่ x_1 และ x_2 เรียกว่าตัวแปรที่ตัดสินใจ

สมการ $q = 2x_1 + 1x_2$ เป็นสมการเป้าหมายของตัวแบบโดยมีเป้าหมายกำไรสูงสุด โดยที่สัมประสิทธิ์ของตัวแปรได้มาจากแถวที่ 3 ของตาราง กำไรที่ได้รับจะมากน้อยแค่ไหนขึ้นอยู่กับข้อจำกัด คือเวลาที่มีอยู่ทั้งสิ้นของเครื่องจักรทั้งสองที่ใช้ในการผลิต x_1 และ x_2 รวมกันเครื่องละไม่เกิน 8 ชั่วโมง

สมการ $4x_1 + 2x_2 \leqslant 480$ และ $3x_1 + 3x_2 \leqslant 480$ สัมประสิทธิ์ของตัวแปรได้มาจาก แถวที่ 1 และ 2 ของตาราง อสมการ 2 ชุดเป็นข้อจำกัดเกี่ยวกับสมรรถภาพในการผลิต ข้อสังเกตแม้ว่าจะมีข้อห้ามมิให้ผลิตเกินกำลังการผลิตของเครื่องจักร (Capacity) แต่ผู้ทำกำไรสามารถผลิตต่ำกว่ากำลังการผลิตได้ (นั่นคือเราใช้เครื่องหมายของอสมการข้อจำกัดเป็น $\leqslant$)

สุดท้ายก็คือ $x_1 , x_2 \geqslant 0$ ซึ่งเป็นข้อจำกัดที่มิให้ค่าตัวแปรเป็นลบ (non-negatively restrictions)

เราจะเห็นได้ว่าสมการเส้นตรงจะเกิดขึ้นตลอดระบบ เพราะว่าไม่มีตัวผันแปรใด ๆ ที่มีกำลังเกินไปกว่าหนึ่ง นี่แหละจึงเป็นเหตุผลว่าทำไมเราจึงเรียกว่าเป็นตัวแบบปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรง (Linear programming)

เท่าที่พิจารณามานั้นเป็นปัญหาทางด้านการทำให้ถึงจุดสูงสุด (เช่นการทำให้กำไรสูงสุด รายได้สูงสุด เป็นต้น) ต่อไปนี้จะได้พิจารณาปัญหาทางด้านการทำให้ถึงจุดต่ำสุด (ชน ทำให้ต้นทุนต่ำสุด เป็นต้น) ดูตัวอย่าง

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> สมมติว่าแม่ค้าคนหนึ่งต้องการผลิตขนม 2 ชนิดคือ q_1 และ q_2 ขนม q_1 หนึ่งหน่วยจะต้องใช้แป้ง 9 ขีด ใช้ถั่ว 4 ขีด และใช้น้ำตาล 2 ขีด ขนม q_2 หนึ่งหน่วยจะต้องใช้แป้ง 6 ขีด ใช้ถั่ว 6 ขีด และใช้น้ำตาล 8 ขีด ถ้าแม่ค้าประสงค์ที่จะทำให้ขนมถุงหนึ่งนั้นต้องประกอบไปด้วยแป้งอย่างน้อยที่สุด 18 ขีด ถั่วอย่างน้อยที่สุด 12 ขีด และน้ำตาลอย่างน้อยที่สุด 8 ขีด ถ้าหากว่าขนม q_1 ต้องเสียต้นทุนต่อหน่วย 10 บาท และ q_2 ต้องเสียต้นทุนต่อหน่วย 20 บาท

ปัญหาของเราก็คือว่าแม่ค้าควรจะผลิตขนม q_1 และ q_2 เป็นจำนวนเท่าใดจึงจะเป็นการทำให้ต้นทุนต่ำสุด

เพื่อให้ง่ายเราจะเรียงข้อมูลลงไปในตาราง เสร็จแล้วค่อยแปลงให้เป็นปัญหาของตัวแบบโปรแกรมเชิงเส้นตรง

	จำนวนปัจจัยการผลิตที่ใช้ในการผลิตขนม 1 ถุง		ความต้องการขั้นต่ำของปัจจัยการผลิตต่อขนมหนึ่งถุง (กรัม)
	q_1	q_2	
แป้ง (กรัม)	9	6	18
ถั่ว (กรัม)	4	6	12
น้ำตาล (กรัม)	2	8	8
ต้นทุนต่อหน่วย	10 บาท	20 บาท	

เพราะฉะนั้นปัญหานี้ก็สามารถจะเขียนออกมาในรูปคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

<u>วิธีทำ</u> ให้ q_1, q_2 แทนจำนวนหน่วย (ถุง) ของขนมชนิดที่ 1 และชนิดที่ 2 ตามลำดับ

C แทนต้นทุนทั้งหมด (บาท)

สมการเป้าหมายเพื่อต้นทุนต่ำสุดจะเป็น

$$\text{Min } C = 10q_1 + 20q_2 \quad \text{บาท}$$

อสมการข้อจำกัดขอบข่ายของปัญหา

1. ส่วนผสมของขนม : แป้ง $9q_1 + 6q_2 \geqslant 18$ กรัม

ถั่ว $4q_1 + 6q_2 \geqslant 12$ กรัม

น้ำตาล $2q_1 + 8q_2 \geqslant 8$ กรัม

และ $q_1 , q_2 \geqslant 0$

<u>อธิบาย</u>

สมการ $C = 10q_1 + 20q_2$ เป็นสมการเป้าหมายเพื่อต้นทุนต่ำสุด

และ อสมการ 3 ชุด ก็คือ ข้อจำกัด (Constraints) ซึ่งเป็นความต้องการขั้นต่ำสุดของปัจจัยการผลิตในการผลิตขนมหนึ่งถุง และที่ใช้เครื่องหมาย อสมการ $\geqslant$ นี้ก็หมายความว่า แม่ค้ามีเสรีที่จะใส่ปัจจัยการผลิตขนมให้มากกว่าความต้องการขั้นต่ำสุดที่กำหนดไว้ได้

และสุดท้ายในรูปของ $q_1, q_2 \geqslant 0$ ก็หมายความถึงความต้องการที่มิให้ตัวผันแปร (ขนม) ติดลบ (non-negative requirements)

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> บริษัทภาพชัด จำกัด ประกอบทีวีสีและขาวดำจำหน่าย โดยมีแผนกประกอบ 2 แผนก แผนกที่ 1 ประกอบทีวีขาวดำ แผนกที่ 2 ประกอบทีวีสี แต่ละแผนกสามารถประกอบได้จำกัดคือ แผนกที่ 1 ประกอบได้ไม่เกิน 80 เครื่องต่อวัน แผนกที่ 2 ไม่เกิน 60 เครื่องต่อวัน ทีวีทั้งสองชนิดต้องใช้หลอดภาพแบบเดียวกัน ซึ่งหลอดภาพนี้ผู้ผลิตจะจัดส่งมาให้วันละไม่เกิน 600 หลอด ทีวีขาวดำและทีวีสีจะต้องใช้หลอดภาพจำนวน 5 และ 6 หลอดต่อเครื่อง ตามลำดับ และมีช่างประกอบทีวีทั้งสองแผนกรวม 160 แรงงานต่อวัน การประกอบทีวีขาวดำต้องใช้ 1 แรงงาน และทีวีสี 2 แรงงานต่อเครื่อง

บริษัทควรจะประกอบทีวีขาวดำและทีวีสีเป็นจำนวนเท่าไรต่อวัน เพื่อจะได้รับกำไรสูงสุด ถ้าทีวีขาวดำมีกำไรเครื่องละ 1,100 บาท และทีวีสีมีกำไรเครื่องละ 2,000 บาท

<u>วิธีทำ</u> สมมติให้ q = จำนวนเงินกำไร

x_1 = จำนวนเครื่องของทีวีขาวดำที่ประกอบต่อวัน

x_2 = จำนวนเครื่องของทีวีสีที่ประกอบต่อวัน

สมการเป้าหมายเพื่อกำไรสูงสุดจะเป็น

$$\text{Max } q = 1100x_1 + 2000x_2 \text{ บาท}$$

อสมการข้อจำกัดขอบข่ายปัญหา

1. กำลังการผลิต แผนกที่ 1 $x_1 \leqslant 80$ เครื่องต่อวัน

   แผนกที่ 2 $x_2 \leqslant 60$ เครื่องต่อวัน

2. หลอดภาพ $5x_1 + 6x_2 \leqslant 600$ หลอดต่อวัน

3. ช่างประกอบทีวี $x_1 + 2x_2 \leqslant 160$ แรงงานต่อวัน

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0$$

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> บริษัทผลิตกระเป๋าหนังทำการผลิตกระเป๋าสองชนิดคือ ชนิดหนังแท้และชนิดหนังเทียม ชนิดหนังแท้จะขายได้กำไร 150 บาทต่อใบ แต่ต้องใช้เวลาในการทำเป็นสองเท่าของกระเป๋าหนังเทียมซึ่งได้กำไรเพียงใบละ 60 บาท ถ้าบริษัททำการผลิตกระเป๋าทั้งสองชนิดผลิตได้วันหนึ่ง ๆ เพียง 500 ใบ และจะมีหนังแท้ทำกระเป๋าได้เพียงวันละ 300 ใบ มีหนังเทียมทำกระเป๋าได้เพียงวันละ 250 ใบ นอกจากนี้โลหะปิดเปิดกระเป๋าหนังแท้มีส่งมาให้วันละ 300 อัน และสำหรับโลหะปิดเปิดกระเป๋าหนังเทียมมีส่งมาให้วันละ 200 อัน บริษัทจะต้องผลิตกระเป๋าทั้งสองชนิดอย่างละเท่าใดจึงจะได้กำไรสูงสุด ให้ตั้งรูปแบบแทนปัญหา

<u>วิธีทำ</u> สมมติให้ z = จำนวนเงินกำไร

x_i = จำนวนผลิตของกระเป๋า

i = 1 (ชนิดหนังแท้), 2 (ชนิดหนังเทียม)

สมการเป้าหมายเพื่อกำไรสูงสุดจะเป็น

$$\text{Max } Z = 150x_1 + 60x_2 \quad \text{บาท}$$

อสมการข้อจำกัดของขอบข่ายปัญหา

1. สำหรับโลหะปิดเปิดกระเป๋าที่มีจำกัด : ของหนังแท้ $x_1 \leqslant 300$ อัน

   : ของหนังเทียม $x_2 \leqslant 200$ อัน

2. สำหรับอัตราการผลิต $x_1 + 2x_2 \leqslant 500$ ใบ

3. จำนวนหนังที่ใช้ทำกระเป๋า : หนังแท้ $x_1 \leqslant 300$ ใบ

   : หนังเทียม $x_2 \leqslant 250$ ใบ

และ $x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2$

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> บริษัท ก. ผลิตสินค้า 2 ชนิด คือ X และ Y จำหน่าย การผลิตสินค้าทั้งสองต้องผ่านกระบวนการผลิต 2 กระบวนการ กระบวนการที่ 1 มีเครื่องจักรอยู่ 1 เครื่อง คือเครื่องจักร A สำหรับกระบวนการผลิตที่ 2 มีเครื่องจักรอยู่ 2 เครื่อง คือ B และ C สินค้าที่ผ่านกระบวนการผลิตที่ 2 นี้ อาจจะผลิตโดยเครื่องจักร B หรือ C ก็ได้

สินค้า	เวลาที่เครื่องจักรแต่ละเครื่องใช้ในการผลิต X,Y		
	A	B	C
	ช.ม./หน่วย	ช.ม./หน่วย	ช.ม./หน่วย
X	0.02	0.10	0.06
Y	0.03	0.08	0.06

เครื่องจักร A, B และ C มีกำลังการผลิตปกติสัปดาห์ละ 80 ชม. สำหรับเครื่องจักร C นั้นเนื่องจากอยู่ในสภาพที่ดี ดังนั้นจึงสามารถทำการผลิตล่วงเวลาได้อีกสัปดาห์ละ 40 ชม. ค่าใช้จ่ายในการเดินเครื่องจักร A, B และ C ในเวลาปกติชั่วโมงละ 200, 200 และ 250 บาท ตามลำดับ และการเดินเครื่องจักร C ล่วงเวลาจะเสียค่าใช้จ่ายชั่วโมงละ 300 บาท

สินค้า X และ Y มีราคาจำหน่ายต่อหน่วย 30 บาท และ 28 บาท ตามลำดับ และสามารถจำหน่ายได้หมดไม่ว่าจะผลิตจำนวนเท่าใด และบริษัทได้มีข้อตกลงกับลูกค้าประจำรายหนึ่งที่จะต้องส่งสินค้า Y ให้จำนวนไม่น้อยกว่า 1,100 หน่วยต่อสัปดาห์

อยากทราบว่าบริษัท ก. ควรจะผลิตสินค้า X และ Y สัปดาห์ละกี่หน่วยเพื่อให้ได้กำไรสูงสุด

<u>วิธีทำ</u>

กำหนดให้ π = จำนวนเงินกำไร (บาท)

X_{AB} = จำนวนหน่วยของสินค้า X ที่ผลิตผ่านเครื่องจักร A และ B

X_{AC} = จำนวนหน่วยของสินค้า X ที่ผลิตผ่านเครื่องจักร A และ C

$X_{AC'}$ จำนวนหน่วยของสินค้า X ที่ผลิตผ่านเครื่องจักร A และ C ล่วงเวลา

Y_{AB} = จำนวนหน่วยของสินค้า Y ที่ผลิตผ่านเครื่องจักร A และ B

Y_{AC} = จำนวนหน่วยของสินค้า Y ที่ผลิตผ่านเครื่องจักร A และ C

$Y_{AC'}$ = จำนวนหน่วยของสินค้า Y ที่ผลิตผ่านเครื่องจักร A และ C ล่วงเวลา

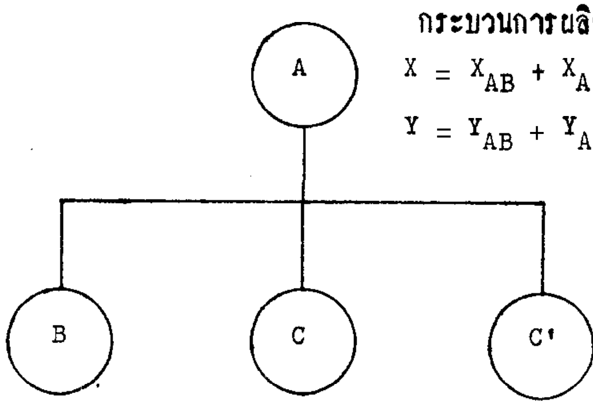
ดังนั้น $X = X_{AB} + X_{AC} + X_{AC'}$

$Y = Y_{AB} + Y_{AC} + Y_{AC'}$

กระบวนการผลิตที่ 1

$X = X_{AB} + X_{AC} + X_{AC'}$

$Y = Y_{AB} + Y_{AC} + Y_{AC'}$



กระบวนการผลิตที่ 2

X_{AB}	X_{AC}	$X_{AC'}$
Y_{AB}	Y_{AC}	$Y_{AC'}$

ผลิตภัณฑ์	X_{AB}	X_{AC}	$X_{AC'}$	Y_{AB}	Y_{AC}	$Y_{AC'}$
ราคาจำหน่ายต่อหน่วย	30	30	30	28	28	28
ต้นทุน: กระบวนการผลิตที่ 1	.02(200) 4	.02(200) 4	.02(200) 4	.03(200) 6	.03(200) 6	.03(200) 6
กระบวนการผลิตที่ 2	.1(200) 20	.06(250) 15	.06(300) 18	.08(200) 16	.06(250) 15	.06(300) 18
กำไร	6	11	8	6	7	4

สมการเป้าหมายเมื่อกำไรสูงสุดจะเป็น :

$$\text{Max. } \pi = 6X_{AB} + 11X_{AC} + 8X_{AC'} + 6Y_{AB} + 7Y_{AC} + 4Y_{AC'} \text{ บาท}$$

อสมการข้อจำกัดของขอบข่ายปัญหา :

1. กำลังการผลิต :

เครื่องจักร A $.02(X_{AB} + X_{AC} + X_{AC'}) + .03(Y_{AB} + Y_{AC} + Y_{AC'}) \leqslant 80$ ชม/สัปดาห์

เครื่องจักร B $.10X_{AB} + .08Y_{AB} \leqslant 80$ ชม/สัปดาห์

เครื่องจักร C $.06X_{AC} + .06Y_{AC} \leqslant 80$ ชม/สัปดาห์

เครื่องจักร C $.06X_{AC'} + .06Y_{AC'} \leqslant 40$ ชม/สัปดาห์

(ทำงานล่วงเวลา)

2. ความต้องการของสินค้า Y : $Y_{AB} + Y_{AC} + Y_{AC'} \geqslant 1{,}100$ หน่วย/สัปดาห์

$$X_{AB}, X_{AC}, X_{AC'}, Y_{AB}, Y_{AC}, Y_{AC'} \geqslant 0$$

ตัวอย่างที่ 6 - 7 การกระจายสินค้า

ตัวอย่างที่ 6 บริษัทแห่งหนึ่งมีโรงงาน 2 แห่ง อยู่ที่เมือง Y และเมือง Z โดยบริษัทมีคลังสินค้าอยู่ 3 แห่ง คือที่เมือง A, B และ C หน้าที่ของบริษัทคือส่งสินค้าจากโรงงานไปให้คลังสินค้าต่าง ๆ เท่าที่ทางโรงงานจะส่งไปได้ ถ้าข้อมูลเกี่ยวกับปริมาณความต้องการ และความสามารถในการผลิตของแต่ละโรงงาน ปรากฏดังตารางข้างล่างนี้

คลังสินค้า	ต้องการสินค้า (หน่วย/สัปดาห์)
A	800
B	200
C	600

โรงงาน	ความสามารถในการผลิต (หน่วย/สัปดาห์)
Y	1,200
Z	1,600

และค่าใช้จ่ายในการขนส่งจากโรงงาน Y และ Z ไปยังคลังสินค้าที่เมือง A, B และ C แสดงไว้ในตารางต่อไปนี้

ตารางค่าขนส่งจากโรงงานไปคลังสินค้า

บาท/หน่วย

โรงงาน	คลังสินค้าเมือง		
	A	B	C
Y	1.50	0.75	2.00
Z	2.50	1.80	0.60

ปัญหาของการวางแผนคือ โรงงานแต่ละโรงงานจะส่งสินค้าไปให้แต่ละคลังสินค้าเป็นจำนวนเท่าไร จึงทำให้ค่าใช้จ่ายในการขนส่งถูกที่สุด

กำหนดให้

X_{YA} = จำนวนสินค้าที่ส่งจากโรงงาน Y ไปคลังสินค้าที่เมือง A

X_{YB} = จำนวนสินค้าที่ส่งจากโรงงาน Y ไปคลังสินค้าที่เมือง B

X_{YC} = จำนวนสินค้าที่ส่งจากโรงงาน Y ไปคลังสินค้าที่เมือง C

X_{ZA} = จำนวนสินค้าที่ส่งจากโรงงาน Z ไปคลังสินค้าที่เมือง A

X_{ZB} = จำนวนสินค้าที่ส่งจากโรงงาน Z ไปคลังสินค้าที่เมือง B

X_{ZC} = จำนวนสินค้าที่ส่งจากโรงงาน Z ไปคลังสินค้าที่เมือง C

สมการเป้าหมายเพื่อต้นทุนต่ำสุดจะเป็น

$$\text{Min } C = 1.50X_{YA} + 0.75X_{YB} + 2.0X_{YC} + 2.5X_{ZA} + 1.8X_{ZB} + 0.60X_{ZC}$$

สมการและอสมการข้อจำกัดของข่ายปัญหา

1. ความต้องการของคลังสินค้า (หน่วย/สัปดาห์)

$$X_{YA} + X_{ZA} = 800$$

$$X_{YB} + X_{ZB} = 200$$

$$X_{YC} + X_{ZC} = 600$$

2. ความสามารถในการผลิตของโรงงาน

$$X_{YA} + X_{YB} + X_{YC} \leqslant 1,200$$

$$X_{ZA} + X_{ZB} + X_{ZC} \leqslant 1,600$$

$$X_{YA} \geqslant 0,\ X_{YB} \geqslant 0,\ X_{YC} \geqslant 0,\ X_{ZA} \geqslant 0,\ X_{ZB} \geqslant 0, X_{ZC} \geqslant 0$$

<u>ตัวอย่างที่ 7</u> บริษัทผู้ผลิตสินค้าชนิดหนึ่งมีโรงงานที่ผลิตสินค้าอยู่สองโรงงาน ตั้งอยู่ในสถานที่ต่างกัน และมีตัวแทนจำหน่ายในเขตภาคเหนือและภาคตะวันออกเฉียงเหนือ ปัญหาเป็นเรื่องการขนส่งซึ่งมีรายละเอียดดังตารางแสดงค่าขนส่ง และปริมาณความต้องการและอัตราการผลิตดังตารางต่อไปนี้

ตัวแทนจำหน่าย / โรงงาน	ภาคเหนือ A	ภาคตะวันออกเฉียงเหนือ B	อัตราการผลิต/เดือน
1	10 บาท/กล่อง	7 บาท/กล่อง	2,500 กล่อง
2	14 บาท/กล่อง	5 บาท/กล่อง	1,200 กล่อง
ความต้องการสินค้า/เดือน	1500 กล่อง	800 กล่อง	

ปัญหาคือจะจัดส่งสินค้าที่ผลิตได้จากสองโรงงานไปยังตัวแทนจำหน่ายทั้งสองแห่งอย่างไร จึงจะเสียค่าใช้จ่ายต่ำที่สุด ให้ตั้งรูปของปัญหา

<u>วิธีทำ</u> ให้ x_0 = ค่าขนส่งทั้งสิ้น

x_{ij} = จำนวนสินค้าที่จัดการส่งจากโรงงาน i ไปยังตัวแทนจำหน่าย j (กล่อง)

$i = 1, 2; \; j = a, b$

สมการเป้าหมายค่าขนส่งต่ำสุดจะเป็น :

$$\text{Min. } x_0 = 10x_{1a} + 7x_{1b} + 14x_{2a} + 5x_{2b}$$

อสมการข้อจำกัดขอบข่ายปัญหา

1. อัตราการผลิต - ของโรงงานที่ 1 $x_{1a} + x_{1b} \leqslant 2500$ กล่อง/เดือน

- ของโรงงานที่ 2 $x_{2a} + x_{2b} \leqslant 1200$ กล่อง/เดือน

2. ความต้องการสินค้า

ภาคเหนือ : A $x_{1a} + x_{2a} = 1500$ กล่อง/เดือน

ภาคตะวันออกเฉียงเหนือ : B $x_{1b} + x_{2b} = 800$ กล่อง/เดือน

และ $x_{ij} \geqslant 0, \; i = 1, 2; \; j = a, b$

ตัวอย่างที่ 8 การวางแผนเกี่ยวกับช่องทางการจัดจำหน่าย

บริษัทอ้อยใจ จำกัด เป็นบริษัทตัวแทนจำหน่ายเตาไมโครเวฟของอิตาลีหลายรูปแบบ ยี่ห้อ "ฮอทควิกซ์" ผู้จัดการฝ่ายการตลาดตัดสินใจจะใช้โปรแกรมเชิงเส้นตรงมาช่วยตัดสินใจกำหนดโควต้าการขายให้กับช่องทางการจัดจำหน่าย 2 ประเภท คือ ห้างสรรพสินค้าและงานแสดงสินค้า

ข้อมูลที่เป็นประโยชน์ในการช่วยตัดสินใจปรากฏดังนี้

(1) กำไรต่อหน่วยที่ บริษัทจะได้รับจากการขายผ่านห้างสรรพสินค้า และงานแสดงสินค้าจะเป็น 1,200 บาท และ 1,800 บาท โดยลำดับ สาเหตุของความแตกต่างคือจะต้องให้ค่านายหน้าขาย และค่าเช่าสถานที่แก่ห้างสรรพสินค้าแพงกว่างานแสดงสินค้า

(2) ในปัจจุบันบริษัทมีพนักงานขาย 30 คน สามารถติดต่อกับลูกค้าได้ 7,240 ชั่วโมง ในการขายเตาไมโครเวฟหนึ่งเครื่องในห้างสรรพสินค้า ต้องใช้เวลาของพนักงานขาย 1 ชั่วโมง ในขณะเดียวกันขายในงานแสดงสินค้าต้องใช้เวลา 1 ชั่วโมง 20 นาที

(3) บริษัทประมาณว่าจะใช้งบส่งเสริมการตลาด 4,000,000บาท โดยเฉลี่ยงบประมาณให้แก่ช่องทางการจัดจำหน่ายทั้งสองประเภทไม่เท่ากัน ต้นทุนในการส่งเสริมการตลาดเตาไมโครเวฟที่จำหน่ายในห้างสรรพสินค้าและงานแสดงสินค้าเฉลี่ยเครื่องละ 650 และ 500 บาท ตามลำดับ

(4) บริษัทอ้อยใจ จำกัด มีความจำเป็นที่จะต้องขายเตาไมโครเวฟในแต่ละช่องทางการจัดจำหน่ายให้ได้อย่างน้อยที่สุดช่องทางละ 3,000 เครื่อง

ข้อมูลทั้งหมดข้างต้นผู้จัดการฝ่ายการตลาดจะนำมาใช้ในการตัดสินใจว่า ควรจะขายเตาไมโครเวฟผ่านช่องทางการจัดจำหน่ายห้างสรรพสินค้า และงานแสดงสินค้าเป็นจำนวนเท่าใดดี จึงจะทำให้เกิดกำไรสูงสุด

ให้ x_1 = จำนวนโควต้าขายที่จะขายผ่านห้างสรรพสินค้า

x_2 = จำนวนโควต้าขายที่จะขายผ่านงานแสดงสินค้า

Z = กำไรรวม

ตัวแบบปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรงควรเป็นดังนี้

สมการเป้าหมายกำไรสูงสุด

$$Z = 1200\,x_1 + 1800\,x_2$$

อสมการข้อจำกัดขอบข่ายของปัญหา

1. เวลาทำงานของพนักงานขาย : $1x_1 + 1\frac{1}{3}x_2 \leqslant 7,240$ ชั่วโมง

2. งบประมาณส่งเสริมการตลาด $650x_1 + 500x_2 \leqslant 4,000,000$ บาท

3. จำนวนขาย $x_1 \geqslant 3,000$ เครื่อง

$x_2 \geqslant 3,000$ เครื่อง

โดยที่ $x_1, x_2 \geqslant 0$

<u>ตัวอย่างที่ 9</u> ส่วนประสมของการส่งเสริมการตลาด

สมมติว่า บริษัทมาตรา จำกัด ขายสินค้าสองชนิด สินค้าที่ 1 และสินค้าที่ 2 บริษัทตัดสินใจทำการส่งเสริมการตลาด 2 รูปแบบ คือ การโฆษณา (A) และ การขายโดยบุคคล (P) บริษัทมาตรา จำกัด กำลังตัดสินใจว่าจะจัดสรรงบประมาณการส่งเสริมการตลาดให้สินค้าทั้ง 2 ชนิดอย่างไรจึงจะได้กำไรสูงสุด บริษัทมีงบประมาณเพื่อการโฆษณา (A) เท่ากับ 5,000,000 บาทและชั่วโมงการทำงานของพนักงานขายเท่ากับ 8,000 ชั่วโมง โดยที่งบประมาณเพื่อการโฆษณา 1 บาทที่ลงทุนไปใช้โฆษณาสินค้าที่ 1 และสินค้าที่ 2 จะก่อ

ให้เกิดกำไร 4 บาทและ 7 บาท โดยลำดับ ส่วนทางด้านการทำงานของพนักงานขายนั้น กำไรที่จะได้รับขึ้นอยู่กับชั่วโมงการทำงาน จะปรากฏในตารางดังต่อไปนี้

	สินค้าที่ 1	
	จำนวนชั่วโมงในการขาย	กำไรที่ได้ต่อการขายหนึ่งชั่วโมง
$P_{11} \rightarrow$	0 - 3000	30 บาท
$P_{12} \rightarrow$	3000-8000	25 บาท

	สินค้าที่ 2	
	จำนวนชั่วโมงในการขาย	กำไรที่ได้ต่อการขายหนึ่งชั่วโมง
$P_{21} \rightarrow$	0 - 2000	35 บาท
$P_{22} \rightarrow$	2000-8000	20 บาท

ให้ A_1 เป็นจำนวนเงินงบประมาณเพื่อการโฆษณาสินค้าที่ 1

A_2 เป็นจำนวนเงินงบประมาณเพื่อการโฆษณาสินค้าที่ 2

P_{11} เป็นจำนวนชั่วโมงการทำงานของพนักงานขายในการขายสินค้าที่ 1 ในช่วงชั่วโมงการทำงาน 0 - 3000 ชั่วโมง

P_{12} เป็นจำนวนชั่วโมงการทำงานของพนักงานขายในการขายสินค้าที่ 1 ในช่วงชั่วโมงการทำงาน 3000 - 8000 ชั่วโมง

P_{21} เป็นจำนวนชั่วโมงการทำงานของพนักงานขายในการขายสินค้าที่ 2 ในช่วงชั่วโมงการทำงาน 0 - 2000 ชั่วโมง

P_{22} เป็นจำนวนชั่วโมงการทำงานของพนักงานขายในการขายสินค้าที่ 2 ในช่วงชั่วโมงการทำงาน 2000 - 8000 ชั่วโมง

จากตาราง ที่กำหนดให้จึงมีข้อจำกัดเพิ่มขึ้นอีก คือ

$$0 \leqslant P_{11} \leqslant 3,000$$
$$0 \leqslant P_{12} \leqslant 5,000$$
$$0 \leqslant P_{21} \leqslant 2,000$$
$$0 \leqslant P_{22} \leqslant 6,000$$

ข้อมูลเพิ่มเติมเกี่ยวกับข้อจำกัดในการขายโดยบุคคลก็คือ พนักงานขายจะต้องใช้ชั่วโมงการทำงานขายสินค้าที่ 1 อย่างน้อยที่สุด 3500 ชั่วโมง และอย่างมากที่สุด 7,500 ชั่วโมง สำหรับสินค้าที่ 2 ทำนองเดียวกัน งบประมาณการโฆษณาสำหรับสินค้าที่ 1 จะต้องใช้อย่างน้อยที่สุด 1,500,000 บาทและอย่างมากที่สุดไม่เกิน 3,000,000 บาท สำหรับสินค้าที่ 2 ทำนองเดียวกัน

ตัวแบบปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรง ปรากฏดังนี้

สมการเป้าหมายเพื่อกำไรสูงสุด

$$Z = 4A_1 + 7A_2 + 30P_{11} + 25P_{12} + 35P_{21} + 20P_{22}$$

อสมการข้อจำกัดขอบข่ายของปัญหา

1. งบประมาณโฆษณา

สินค้าทั้ง 2 ชนิด $A_1 + A_2 \leqslant 5{,}000{,}000$

สินค้าที่ 1 : $A_1 \geqslant 1{,}500{,}000$

$A_1 \leqslant 3{,}000{,}000$

สินค้าที่ 2 $A_2 \geqslant 1{,}500{,}000$

$A_2 \leqslant 3{,}000{,}000$

2. จำนวนชั่วโมงการทำงานของพนักงานขาย

สินค้าทั้งสองชนิด :	$P_{11}+ P_{12}+ P_{21}+ P_{22}$	$\leqslant$	a.000
สินค้าที่ 1 :	P_{11}	$\leqslant$	3,000
	P_{12}	$\leqslant$	5,000
สินค้าที่ 2 :	P_{21}	$\leqslant$	2,000
	P_{22}	$\leqslant$	6,000
สินค้าที่ 1 :	$P_{11}+ P_{12}$	$\geqslant$	3,500
	$P_{11}+ P_{12}$	$\leqslant$	7,500
สินค้าที่ 2:	$P_{21}+ P_{22}$	$\geqslant$	3,500
	$P_{21}+ P_{22}$	$\leqslant$	7,500
โดยที่	$A_1, A_2, P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}$	$\geqslant$	0

<u>ตัวอย่างที่ 10</u> การวางแผนสื่อโฆษณา

บริษัทตัวแทนจำหน่ายผลิตภัณฑ์โทรศัพท์เคลื่อนที่ "พีคอล" กำลังวางแผนเลือกใช้สื่อโฆษณา 3 ประเภท คือ

1. โทรทัศน์ช่อง 7 สี โดยสปอตโฆษณาทางโทรทัศน์จะต้องใช้เวลา 30 วินาที ต่อครั้ง
2. หนังสือพิมพ์ จะลงเต็มหน้าในหนังสือพิมพ์ฐานเศรษฐกิจ
3. นิตยสาร จะลงเต็มหน้าในนิตยสารการเงินการธนาคาร ออกวางตลาดเดือนละหน

ผู้จัดการฝ่ายการตลาดต้องการจะโฆษณาสินค้าของตนผ่านสื่อที่เข้าถึงตลาดเป้าหมายที่เป็นนักธุรกิจ และผู้มีรายได้สูงทั่ว ๆ ไป โดยใช้งบประมาณสื่อโฆษณาทั้งสิ้น 2,000,000 บาทต่อเดือน ข้อมูลแสดงถึงจำนวนและต้นทุนการใช้สื่อโฆษณาต่าง ๆ ปรากฏ ดังนี้

สื่อโฆษณา	ต้นทุนในการใช้สื่อ (ต่อครั้ง)	เปอร์เซ็นต์ของนักธุรกิจที่ต้องการเข้าถึง (Reach)	เปอร์เซ็นต์ของผู้มีรายได้สูงทั่ว ๆ ไปที่ต้องการเข้าถึง (Reach)
โทรทัศน์	45,800	50%	60%
หนังสือพิมพ์	104,200	40%	70%
นิตยสาร	23,000	20%	50%

ข้อจำกัดในการตัดสินใจมีดังต่อไปนี้

1. ต้องโฆษณาทางโทรทัศน์ตั้งแต่ 20 ครั้งขึ้นไป และโฆษณาทางนิตยสารไม่เกิน 1 ครั้ง

2. งบโฆษณาในหนังสือพิมพ์และนิตยสารไม่ควรเกิน 60% ของงบโฆษณาทั้งหมด

3. ผลรวมของเปอร์เซนต์ที่นักธุรกิจที่ต้องการเข้าถึงมีโอกาสได้เห็นโฆษณาทั้งหมด (Gross Rating Point : GRP) อย่างน้อย 1,400%

4. ผลรวมของเปอร์เซนต์ที่ผู้มีรายได้สูงทั่ว ๆ ไปที่ต้องการเข้าถึงมีโอกาสได้เห็นโฆษณาทั้งหมด (GRP) อย่างน้อย 1,800%

ผู้จัดการจะตัดสินใจวางแผนการโฆษณาต่างสื่อโฆษณาต่าง ๆ อย่างไร จึงจะเข้าถึงกลุ่มที่ต้องการมากที่สุด

<u>หมายเหตุ</u> GRP = Reach x Frequency.

กำหนดให้ X_1 = จำนวนครั้งของการโฆษณาทางสื่อโทรทัศน์ที่ควรซื้อ

X_2 = จำนวนครั้งของการโฆษณาของสื่อหนังสือพิมพ์ที่ควรซื้อ

X_3 = จำนวนครั้งของการโฆษณาของสื่อนิตยสารที่ควรซื้อ

GRP = ผลรวมของเปอร์เซนต์ของกลุ่มเป้าหมายที่ต้องการเข้าถึง มีโอกาสได้เห็นโฆษณาทั้งหมด

สมการเป้าหมายต้องการ GRP สูงสุด

$$GRP = 50x_1 + 40x2 + 20x_3 + 60x_1 + 70x_2 + 50x3$$
$$= 110x_1 + 110x_2 + 70x_3$$

อสมการข้อจำกัดขอบข่ายของปัญหา

1. งบประมาณสื่อโฆษณาทั้งหมด

$$45,800x_1 + 104,200x_2 + 23,000x_3 \leqslant 2,000,000$$

2. จำนวนครั้งของการโฆษณาทางโทรทัศน์และนิตยสาร

$$x_1 \geqslant 20$$

$$x_3 \leqslant 1$$

3. งบโฆษณาทางหนังสือพิมพ์และนิตยสารจะต้องไม่เกิน 60% ของงบโฆษณาทั้งหมด

$$104,200x_2 + 23,000x_3 \leqslant 1,200,000$$

4. GRP

นักธุรกิจ : $50x_1 + 40x_2 + 20x_3 \geqslant 7,400$

ผู้มีรายได้สูงทั่ว ๆ ไป : $60x_1 + 70x_2 + 50x_3 \geqslant 1,800$

โดยที่ $x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$

<u>การแก้ปัญหาหรือการหาค่าเฉลยที่ดีที่สุดของโปรแกรมเชิงเส้นตรง</u>

ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรมเชิงเส้นตรงนั้น สามารถจะหาคำตอบได้หลายวิธี ซึ่งแต่ละวิธีก็จะให้คำตอบที่ถูกต้องเช่นเดียวกัน ในที่นี้จะพิจารณาเฉพาะการหาคำตอบโดยวิธีกราฟ และวิธีซิมเพล็กซ์ (Simplex method) เท่านั้น

1. <u>การแก้ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรงด้วยวิธีกราฟ</u>

เนื่องจากลักษณะของโปรแกรมเชิงเส้นตรงที่ว่าด้วยตัวแปรตัดสินใจต้องไม่เป็นลบ (non-negative condition) จึงทำให้สามารถวาดรูปอยู่ใน Quadrant ที่หนึ่งได้ การหาค่าเฉลยที่ดีที่สุดโดยวิธีนี้จะใช้ได้เมื่อมีตัวแปรตัดสินใจเพียง 2 ตัวเท่านั้น เนื่องจากการเขียนกราฟที่มากกว่า 2 มิติเขียนได้ยากหรือไม่อาจเขียนได้

ขั้นตอนของการหาค่าเฉลยด้วยวิธีกราฟมีดังนี้คือ

1. เปลี่ยนแปลงเครื่องหมายของอสมการข้อจำกัด ($\leqslant$ หรือ $\geqslant$)ให้เป็นเครื่องหมายเท่ากับ (=) จากนั้นก็เขียนกราฟของสมการข้อจำกัดทั้งหมด

2. ระบุขอบเขตที่เป็นไปได้ของค่าตัวแปรตัดสินใจเพื่อการพิจารณา (Feasible region)

3. เขียนกราฟสมการเป้าหมาย (Objective function) โดยสมมติค่าของสมการเป้าหมายขึ้นจำนวนหนึ่ง

4. ลากเส้นตรง เส้นหนึ่งให้ขนานกับเส้นของสมการเป้าหมายให้สัมผัสกับขอบเขตที่เป็นไปได้เพื่อการพิจารณา

5. จุดสัมผัสนั้นก็คือ คำตอบที่ต้องการหาได้โดยนำสมการข้อจำกัดขอบข่ายปัญหาที่ตัดกันที่จุดสัมผัสไปแก้สมการโดยวิธีพีชคณิตหาค่าของตัวแปรตัดสินใจได้

วิธีนี้เรียกว่า วิธี Trial and Error เพื่อให้เข้าใจมากยิ่งขึ้นขอให้ดูตัวอย่าง

<u>ในกรณีการหาค่าสูงสุด</u>

<u>ตัวอย่างที่ 11</u> จงหาค่าของ x_1 , x_2 ด้วยวิธีกราฟจากโปรแกรมเชิงเส้นตรงต่อไปนี้

สมการเป้าหมายกำไรสูงสุด : $\pi = 6x_1 + 9x_2$

อสมการข้อจำกัดขอบข่ายของปัญหา: $7x_1 + 12x_2 \leqslant 120$

$10x_1 + 8x_2 \leqslant 120$

และ $x_1 , x_2 \geqslant 0$

ขั้นตอนการคำนวณเป็นดังนี้

1. เปลี่ยนแปลงเครื่องหมายของอสมการข้อจำกัดให้เป็นเครื่องหมายเท่ากับ (=)

$$7x_1 + 12x_2 = 120 \qquad (1)$$

$$10x_1 + 8x_2 = 120 \qquad (2)$$

ต่อจากนั้น นำเอาสมการข้อจำกัดทุกสมการมาเขียนกราฟ เส้นกราฟตามแนวนอนคือ x_1 และแนวตั้งคือ x_2

นำเอาสมการข้อจำกัดแรก $7x_1 + 12x_2 = 120$ ไปเขียนกราฟ
โดยสมมติว่าถ้าไม่ผลิต x_1 เลย ($x_1 = 0$) จะผลิต x_2 ได้กี่หน่วย

$$x_1 = 0 \Rightarrow 7 \times 0 + 12x_2 = 120$$

$$x_2 = 10$$

จุดแรก $x_1 = 0, \quad x_2 = 10$

ต่อไปสมมติถ้าไม่ผลิต x_2 เลย ($x_2 = 0$) จะผลิต x_1 ได้กี่หน่วย

$$x_2 = 0 \Rightarrow 7x_1 + 12 \times 0 = 120$$

$$x_1 = 17\tfrac{1}{7}$$

จุดที่สอง $x_2 = 0, \quad x_1 = 17\tfrac{1}{7}$

จากนั้นนำเอาค่าที่ได้ 2 จุดไปเขียนกราฟจะได้เส้นตรงข้อจำกัดที่หนึ่งและแสดง หรือเขียนลูกศรแสดงขอบเขตที่เป็นไปได้ของอสมการข้อจำกัดที่ 1 (ดูรูปกราฟในหน้า 225 ประกอบ)

ในทำนองเดียวกันนำเอาสมการข้อจำกัดที่สอง $10x_1 + 8x_2 = 120$ ไปเขียนกราฟด้วยวิธีการอย่างเดิม คือ

$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 15$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 12$$

จากนั้นนำค่าที่ได้ไปเขียนกราฟ พร้อมทั้งเขียนลูกศรแสดงขอบเขตที่เป็นไปได้ของอสมการข้อจำกัดที่สอง

2. ระบุขอบเขตที่เป็นไปได้ของค่าตัวแปรตัดสินใจ (Feasible Region) คือพื้นที่ร่วมของอสมการข้อจำกัดทั้งหมด (ได้แก่พื้นที่ส่วนที่แลเงา) ภายในขอบเขตที่เป็นไปได้จะประกอบด้วยค่า x_1, x_2 เป็นจำนวนมาก แต่ค่าของ x_1 และ x_2 ที่จุดใดที่จะให้ค่าเฉลยที่ดีที่สุด (Optimal Solution) ซึ่งแน่นอนย่อมจะไม่ใช่ทุกจุดภายในพื้นที่ที่เป็นไปได้ แต่จะมีบางจุดเท่านั้น

3. เราจะทราบได้อย่างไรว่าจุดที่ให้ค่าเฉลยที่ดีที่สุดหรือจุดที่จะให้กำไรสูงสุดภายใต้ข้อจำกัดที่มีอยู่นั้นอยู่ที่จุดใด จะพบว่าในกรณีที่ต้องการให้กำไรสูงสุด ค่าเฉลยที่ดีที่สุดจะอยู่ที่จุดยอดที่สูงที่สุดของพื้นที่ขอบเขตที่เป็นไปได้เสมอ เราลองเขียนเส้นตรงของสมการเป้าหมาย โดยสมมติให้กำไรเท่ากับ 54 บาท เส้นกำไรเส้นนี้จะประกอบด้วยค่าของ x_1 และ x_2 หลายจุด ซึ่งทุกจุดบนเส้นกำไรเส้นนี้คือส่วนประสมของการผลิตสินค้า x_1 และ x_2 ต่าง ๆ ที่ให้กำไรเท่ากัน คือ 54 บาท จะเห็นว่าเส้นกำไร 54 บาทนี้ยังอยู่ในพื้นที่ขอบเขตที่เป็นไปได้แต่ยังไม่เป็นกำไรที่ดีที่สุด

ลองเส้นกำไรที่สูงกว่านี้ จุดทุกจุดบนเส้นกำไรที่สูงกว่านี้จะให้ผลลัพธ์ที่ดีกว่าเส้นกำไรเท่ากับ 54 บาท แน่นอนเราย่อมไม่หยุดการพิจารณาหาส่วนประสมของ x_1 และ x_2 ที่เป็นไปได้ที่เส้นกำไรเท่ากับ 54 บาท

4. เราจะพิจารณาเส้นกำไรที่สูงขึ้นห่างจากจุด origin ออกไปในลักษณะขนานกับเส้นเก่าเสมอ เส้นตรงที่ขนานกับเส้นกำไรเดิมแต่อยู่ในระดับที่สูงขึ้นจะให้กำไรมากกว่า 54 บาท จนกระทั่งมาถึงจุดของเส้นกำไรเท่ากับ $95\frac{5}{8}$ บาท จะเห็นว่าเส้นกำไรเท่ากับ $95\frac{5}{8}$ บาท จะสัมผัสกับพื้นที่ขอบเขตที่เป็นไปได้เพื่อการพิจารณา ABCO ที่จุด B

5. ณ จุดสัมผัส B จะเป็นจุดตัดของสมการข้อจำกัดของขายปัญหา $10x_1 + 8x_2 = 120$ และ $7x_1 + 12x_2 = 120$ นำสมการทั้งสองมาแก้สมการ เพื่อหาค่า x_1, x_2 ได้ดังนี้

$$7x_1 + 12x_2 = 120 \quad (1)$$

$$10x_1 + 8x_2 = 120 \quad (2)$$

(1) x 10 $$70x_1 + 120x_2 = 1200 \quad (3)$$

(2) x 7 $$70x_1 + 56x_2 = 840 \quad (4)$$

(3) - (4) $$64x_2 = 360$$

$$x_2 = \frac{360}{64}$$

$$= \frac{45}{8}$$

$$= 5\frac{5}{8}$$

แทนค่า x_2 ลงใน(2) $$10x_1 + 8\left(\frac{45}{8}\right) = 120$$

$$10x_1 = 120 - 45$$

$$x_1 = \frac{75}{10}$$

$$= 7\frac{1}{2}$$

แทนค่า x_1 , x_2 **ลงในสมการเป้าหมาย**

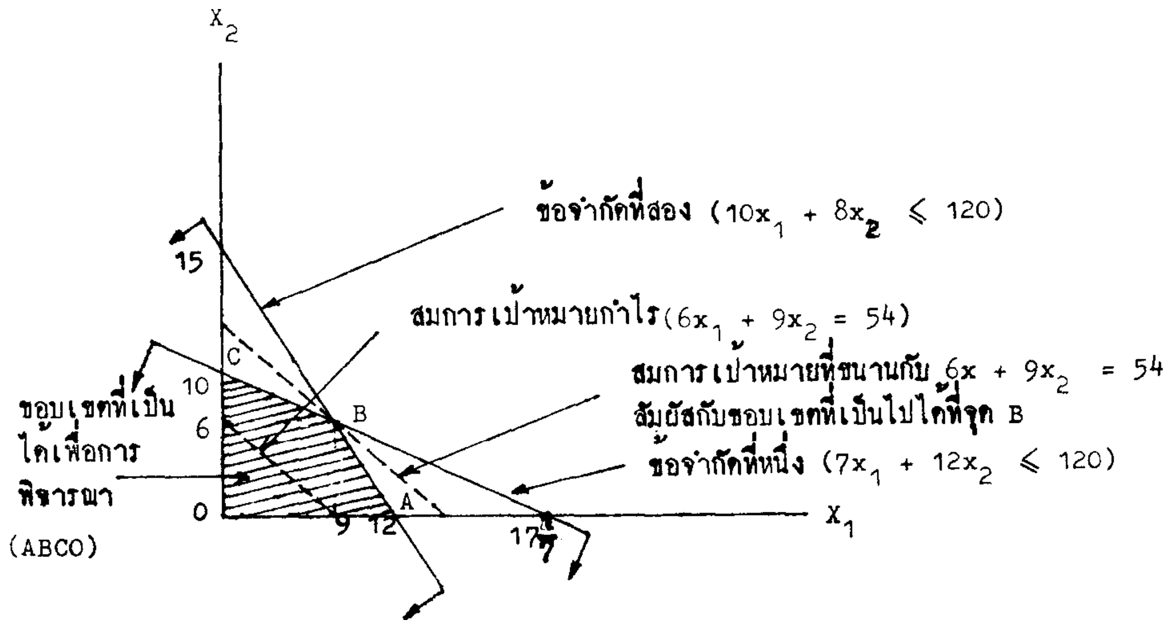
$$ฯ = 6x_1 + 9x_2$$

$$= 6\left(\frac{15}{2}\right) + 9\left(\frac{45}{8}\right)$$

$$= 95\frac{5}{8}$$

นั่นคือค่าเฉลยที่ดีที่สุด $x_1 = 7\frac{1}{2}$ $x_2 = 5\frac{5}{8}$ **และกำไร** $= 95\frac{5}{8}$

ขอให้พิจารณารูปภาพประกอบดังนี้



จะเห็นว่า เราไม่สามารถขยับเส้นกำไรออกไปได้อีกแล้ว เพราะว่าเกินจากพื้นที่ขอบเขตที่เป็นไปได้ ผลลัพธ์ที่ไม่ได้อยู่ภายในขอบเขตที่เป็นไปได้ ถือว่าเป็นค่าเฉลยที่เป็นไปไม่ได้ เพราะไม่สอดคล้องกับสมการข้อจำกัดทุกข้อจำกัดที่มีอยู่

วิธีการคำนวนหาค่าเฉลยที่ดีที่สุดอีกวิธีหนึ่ง ทำได้โดยการทดสอบจุดยอดทุกจุดของพื้นที่ขอบเขตที่เป็นไปได้ แล้วตรวจสอบดูว่า จุดใดให้กำไรสูงสุด ที่จุดนั้นก็คือ จุดที่ให้ค่าเฉลยที่ดีที่สุดตามต้องการ

จุดยอด	(x_1, x_2)	ฐ	$= 6x_1 + 9x_2$
A	$(12, 0)$	ฐ	$= 6(12) + 9(0) = 72$
B	$(7\frac{1}{2}, 5\frac{5}{8})$	ฐ	$= 6(7\frac{1}{2}) + 9(5\frac{5}{8}) = 95\frac{5}{8}$.
C	$(0, 10)$	ฐ	$= 6(0) + 9(10) = 90$
0	$(0, 0)$	ฐ	$= 6(0) + 9(0) = 0$

∴ จุดยอด B จะเป็นค่าเฉลยที่ดีที่สุด นั่นคือผลิต $x_1 = 7\frac{1}{2}$, $x_2 = 5\frac{5}{8}$ กำไรสูงสุด $95\frac{5}{8}$ บาท

<u>ตัวอย่างที่ 12</u> จงหาค่าของ x_1 , x_2 ด้วยวิธีกราฟจากโปรแกรมเชิงเส้นตรงต่อไปนี้

สมการเป้าหมายกำไรสูงสุด ; $Z = 4x_1 + 3x_2$

อสมการข้อจำกัดขอบเขตปัญหา :

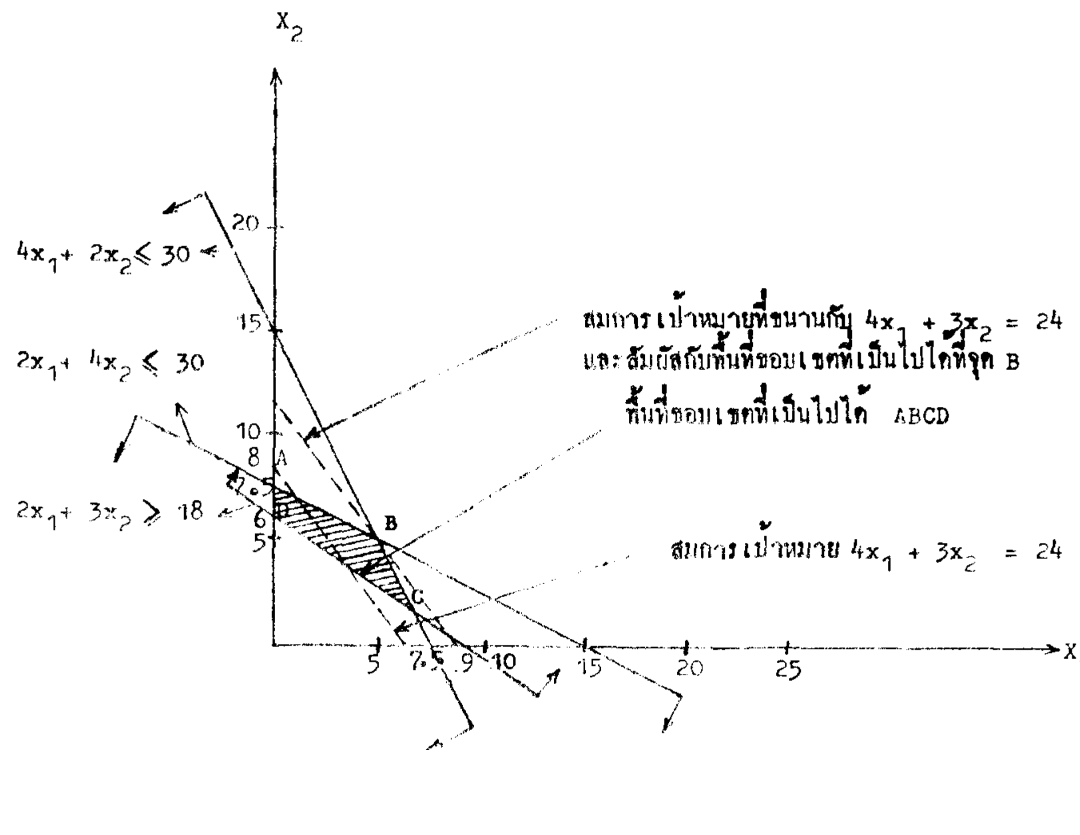
$$2x_1 + 4x_2 \leqslant 30$$

$$4x_1 + 2x_2 \leqslant 30$$

$$2x_1 + 3x_2 \geqslant 18$$

$$x_1, \; x_2 \geqslant 0$$

ทำตามขั้นตอนจะได้เป็นรูปดังนี้



<u>การหาค่าเฉลย</u> **โดยวิธี** Trial and Error

สมมติกำไร 24 บาท ดังนั้น $Z = 4x_1 + 3x_2 = 24$ เขียนเส้นตรงกำไร $4x_1 + 3x_2 = 24$ Trial and Error ไปเรื่อย ๆ เพื่อหากำไรสูงสุด โดยลากเส้นขนานกับ $4x_1 + 3x_2 = 24$ ห่างจากจุด origin มากที่สุดและสัมผัสกับพื้นที่ขอบเขตที่เป็นไปได้ จุดนั้นคือ จุด B จะทำให้ได้รับกำไรสูงสุด 35 บาท จุด B เป็นจุดตัดของสมการ $4x_1 + 2x_2 = 30$ และ $2x_1 + 4x_2 = 30$ หาค่า x_1 , x_2 ได้โดยการแก้สมการทั้งสอง นั่นคือค่าเฉลยที่ดีที่สุด $x_1 = 5$, $x_2 = 5$ และกำไรสูงสุดเท่ากับ 35 บาท

<u>หรือ</u> <u>การหาค่าเฉลย</u> โดยพิจารณาจากจุดยอด

จุดยอดของพื้นที่ขอบเขตที่เป็นไปได้ ABCD คือ (0, 7.5), (5, 5), (6.75, 1.5), (0, 6)

จุดยอด	(x_1, x_2)	$Z = 4x_1 + 3x_2$
A	(0, 7.5)	$Z = 4(0) + 3(7.5) = 22.5$
B	(5, 5)	$Z = 4(5) + 3(5) = 35^*$
C	(6.75, 1.5)	$Z = 4(6.75) + 3(1.5) = 31.5$
D	(0, 6)	$Z = 4(0) + 3(6) = 18$

$\therefore$ จุดยอด B จะเป็นค่าเฉลยที่ดีที่สุด นั่นคือ $x_1 = 5$, $x_2 = 5$ กำไรสูงสุด = 35 บาท

<u>ในกรณีการหาค่าต่ำสุด</u>

กรณีที่สมการเป้าหมายของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นตรงเป็นปัญหาต้นทุนต่ำสุด เทคนิคการหาค่าเฉลยด้วยกราฟก็ยังดำเนินการเหมือนสมการเป้าหมายกำไรสูงสุด แต่มีข้อแตกต่างกันในขั้นสุดท้ายของการเลือกค่าเฉลยที่ดีที่สุด แทนที่จะเลือกจุดยอดที่ทำให้สมการเป้าหมายมีค่าสูงสุด แต่จะเลือกจุดยอดที่ต่ำที่สุดของพื้นที่ขอบเขตที่เป็นไปได้ ซึ่งจะเป็นจุดที่ทำให้สมการเป้าหมายมีค่าต่ำสุด

<u>ตัวอย่างที่ 13</u> จากตัวอย่างที่ 2 เราจะได้

สมการเป้าหมายเพื่อต้นทุนต่ำสุด

$$\text{Min } C = 10q_1 + 20q_2$$

อสมการข้อจำกัดขอบข่ายของปัญหา

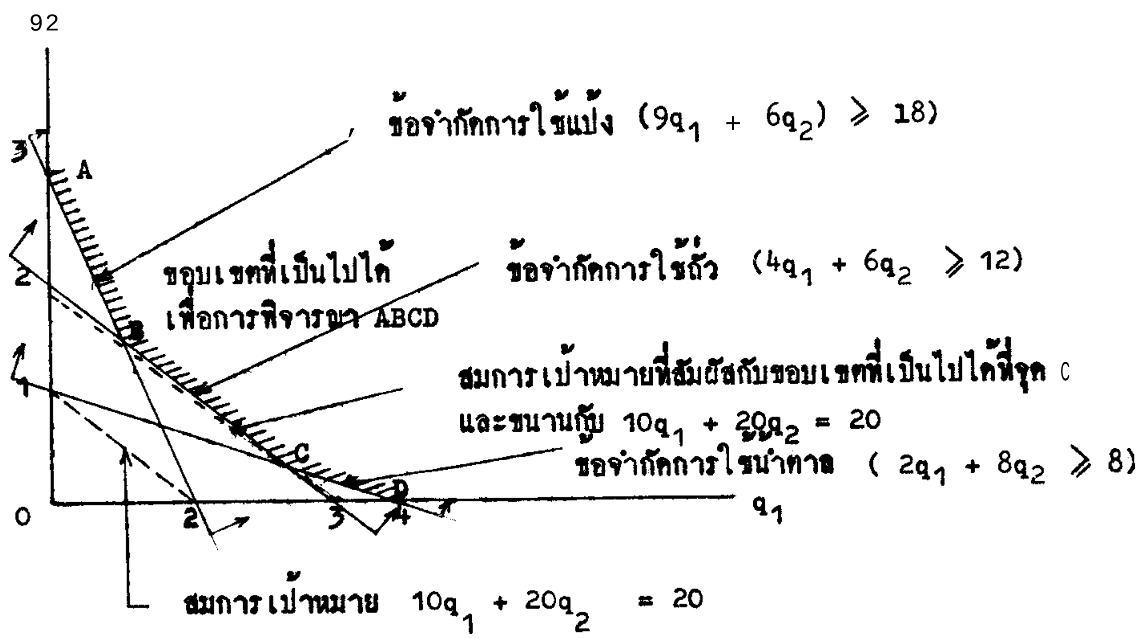
$$9q_1 + 6q_2 \geqslant 18$$

$$4q_1 + 6q_2 \geqslant 12$$

$$2q_1 + 8q_2 \geqslant 8$$

$$\text{and} \quad q_1, \; q_2 \geqslant 0$$

ทำตามขั้นตอนจะได้เป็นรูปดังนี้



<u>การหาค่าเฉลยโดยใช้วิธี</u> Trial and Error

สมมติต้นทุน 20 บาท ดังนั้น $C = 10q_1 + 20q_2 = 20$ เขียนเส้นตรงต้นทุนและ Trial and Error ไปเรื่อย ๆ เพื่อหาต้นทุนต่ำสุด โดยลากเส้นขนานกับเส้น $10q_1 + 20q_2 = 20$ ให้ห่างจากจุด origin น้อยที่สุดและสัมผัสกับพื้นที่ขอบเขตที่เป็นไปได้ต่ำที่สุดที่จุดนั้นคือจุด C ซึ่งต้นทุนต่ำที่สุดเท่ากับ 32 บาท จุด C เป็นจุดตัดของสมการ $4q_1 + 6q_2 = 12$ และ $2q_1 + 8q_2 = 8$ แก้สมการทั้งสองหาค่า q_1, q_2 ได้นั่นคือ ค่าเฉลยที่ดีที่สุด $q_1 = 2.4$, $q_2 = 0.4$ และต้นทุนต่ำสุดเท่ากับ 32 บาท

หรือการหาค่าเฉลย โดยพิจารณาจากจุดยอด

ใช้วิธีหาจุดยอดของพื้นที่ขอบเขตที่เป็นไปได้ ส่วนที่อยู่เหนือเส้น ABCD คือพื้นที่ขอบเขตที่เป็นไปได้เพื่อการพิจารณา (Feasible region)

จุดยอดของพื้นที่เป็นไปได้ ABCD คือ (0, 3), (1.2, 7.2), (2.4, 0.4) และ (4, 0)

จุดยอด	(q_1, q_2)	$c = 10q_1 + 20q_2$
A	(0, 3)	$C = 10(0) + 20(3) = 60$
B	(1.2, 1.2)	$C = 10(1.2) + 20(1.2) = 36$
C	(2.4, 0.4)	$C = 10(2.4) + 20(0.4) = 32^*$
D	(4, 0)	$C = 10(4) + 20(0) = 40$

∴ จุดยอด C จะเป็นค่าเฉลยที่ดีที่สุด นั่นคือ $q_1 = 2.4$ ถุง, $q_2 = 0.4$ ถุง และต้นทุนต่ำสุด = 32 บาท

<u>ตัวอย่างที่ 14</u> จงหาค่า x_1 , x_2 จากโปรแกรมเชิงเส้นตรงต่อไปนี้

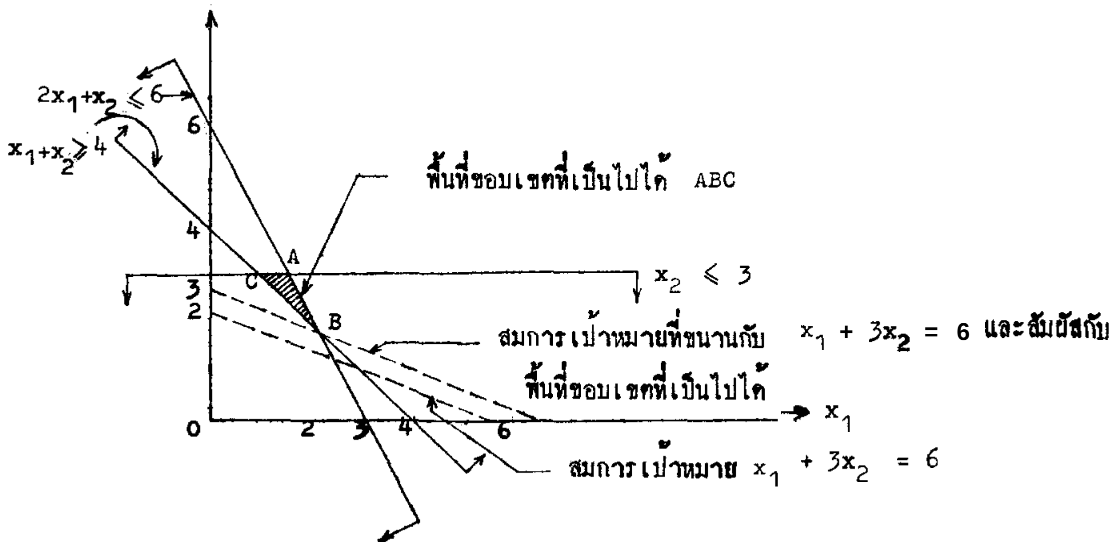
สมการเป้าหมายต้องการต่ำสุด

$$\text{Min } Z = x_1 + 3x_2$$

อสมการข้อจำกัดขอบข่ายของปัญหา

$$x_1 + x_2 \geqslant 4$$
$$2x_1 + x_2 \leqslant 6$$
$$x_2 \leqslant 3$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

ทำตามขั้นตอนจะได้รูปดังนี้



<u>การหาคำเฉลยโดยใช้วิธี Trial and Error</u>

สมมติต้นทุน = 6 บาท ดังนั้น $Z = x_1 + 3x_2 = 6$ เขียนกราฟสมการเป้าหมาย $x_1 + 3x_2 = 6$ ต่อจากนั้น Trial and Error ไปเรื่อย ๆ โดยขยับเส้นสมการเป้าหมายขึ้นไปเรื่อย ๆ ให้ห่างจุด origin น้อยที่สุดและสัมผัสกับพื้นที่ขอบเขตที่เป็นไปได้ต่ำที่สุดจุดนั้นคือจุด B จุด B เป็นจุดตัดของสมการ $x_1 + x_2 = 4$ และ $2x_1 + x_2 = 6$ แก้สมการทั้งสองหาค่า x_1, x_2 ได้ นั่นคือคำเฉลยที่ดีที่สุด $x_1 = 2, x_2 = 2$ และต้นทุน

ต่ำสุดเท่ากับ 8 บาท

<u>หรือ</u> จุดยอดของพื้นที่ขอบเขตที่เป็นไปได้ ABC คือ (1.5, 3), (2, 2) และ (1, 3)

จุดยอด	(x_1, x_2)	$Z = x_1 + 3x_2$
A	(1.5, 3)	$Z = 1.5 + 3(3) = 10.5$
B	(2, 2)	$Z = 2 + 3(2) = 8^*$
C	(1, 3)	$Z = 1 + 3(3) = 10$

$\therefore$ จุดยอด B จะเป็นค่าเฉลยที่ดีที่สุด นั่นคือ $x_1 = 2, x_2 = 2$ และต้นทุนต่ำสุดเท่ากับ 8 บาท

2. <u>การแก้ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรงด้วยวิธีซิมเพล็กซ์</u> (Simplex Method)

การหาค่าเฉลยของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นตรงด้วยวิธีกราฟเป็นวิธีที่ง่ายและใช้ได้ดีในกรณีเป็นปัญหาที่มีตัวแปรที่ตัดสินใจเพียง 2 ตัวเท่านั้น แต่โดยทั่วไปตัวแปรตัดสินใจอาจจะมีมากกว่า 2 ตัวได้ ด้วยเหตุนี้กระบวนการคำนวณจึงพัฒนาวิธีซิมเพล็กซ์ขึ้นมาใช้ โดย **George B. Dantzig** เป็นผู้คิดค้นขึ้น

วิธีซิมเพล็กซ์ (Simplex method) คือกระบวนการคำนวณที่ทำซ้ำหรือหวนใหม่หลาย ๆ ครั้งตามขั้นตอนมาตรฐานที่วางไว้เพื่อเป็นการพัฒนาค่าเฉลยที่ต่อเนื่องกันอย่างเป็นระบบจนกว่าจะได้ค่าเฉลยที่ดีที่สุด

<u>การเปลี่ยนอสมการเป็นสมการ</u>

ขั้นแรกของวิธีซิมเพล็กซ์ก็คือเปลี่ยนอสมการข้อจำกัดให้เป็นสมการ (ยกเว้นอสมการข้อจำกัด ซึ่งกำหนดลักษณะตัวแปรที่ตัดสินใจ $x_j \geq 0$) โดยการเพิ่มตัวแปรเข้าไป

ตัวแปรที่เพิ่มเข้าไปแยกได้ดังนี้

1. ในกรณีที่เครื่องหมายอสมการข้อจำกัดขอบข่ายของปัญหาอยู่ในรูปน้อยกว่าหรือเท่ากับ ($\leqslant$) เราเพิ่มค่าตัวแปรผันส่วนขาด (**Slack Variable**) เข้าทางด้านซ้าย ตัวแปรผันส่วนขาดนี้เราถือว่าเป็นค่าของส่วนของทรัพยากรที่เหลือใช้จากการผลิต

เช่น $3x_1 + 5x_2 \leqslant 6$ .... (1)

เปลี่ยนเป็น $3x_1 + 5x_2 + S_1 = 6$

ใช้ S แทนตัวแปรผันส่วนขาด S_1 จะเท่ากับผลต่างระหว่าง $3x_1 + 5x_2$ กับ 6 ค่าของตัวแปรผันส่วนขาดเป็นบวกเสมอ

2. ในกรณีที่เครื่องหมายอสมการข้อจำกัดขอบข่ายของปัญหาอยู่ในรูปมากกว่าหรือเท่ากับ ($\geqslant$) เราลบค่าตัวแปรผันส่วนเกิน (**Surplus Variable**) ซึ่งคิดเป็นค่าทรัพยากรส่วนเกินที่ใช้มากกว่าความต้องการขั้นต่ำ ตัวแปรผันส่วนเกินเป็น **Slack Variable** ชนิดหนึ่ง ตามข้อกำหนดของวิธี ซิมเพล็กซ์ ที่กำหนดให้ผลลัพธ์เบื้องต้นที่เป็นไปได้จะมีค่าตัวแปรที่เป็น **basic variable** มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์เท่านั้น แต่สัมประสิทธิ์หน้าตัวแปรผันส่วนเกินเป็น -1 ด้วยเหตุนี้จึงต้องเพิ่มตัวแปรผันเทียม (**Artificial variable**) เข้าไปอีกหนึ่งตัว เพื่อให้หาผลลัพธ์เบื้องต้นของปัญหาได้ ค่าของตัวแปรเทียมควรจะต้องมีขนาดใหญ่พอที่จะทำให้เงื่อนไขดังกล่าวเป็นจริงและจะถูกกำจัดไปจนมีค่าเป็นศูนย์ ถ้าไม่เป็นศูนย์แสดงว่าปัญหานี้หาผลลัพธ์ไม่ได้

เช่น $8x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geqslant 20$ ....(2)

เปลี่ยนเป็น $8x_1 + 3x_2 + 5x_3 - S_2 + A_2 = 20$

ให้ S แทนตัวแปรผันส่วนเกิน (**Surplus Variable**)

A แทนตัวแปรผันเทียม (**Artificial variable**)

ทำนองเดียวกันค่าของตัวแปรผันส่วนเกินและตัวแปรเทียมจะมีค่าเป็นบวกเสมอ

3. ในกรณีที่เครื่องหมายสมการข้อจำกัดขอบข่ายปัญหาอยู่ในรูปเท่ากับ (=) เราเพียงแต่เพิ่มค่าตัวแปรเทียมเข้าไปช่วยในการคำนวณเท่านั้น

เช่น $x_1 + x_2 = 10$ ....(3)

เปลี่ยนเป็น $x_1 + x_2 + A_3 = 10$

โดยสรุปจะเขียนตัวแปรเพิ่มขึ้นมาดังนี้

$\leqslant$	$+S$
$\geqslant$	$-S \quad +A$
$=$	$+A$

S = Slack variable

A = Artificial variable

<u>ตัวอย่างที่ 15</u> ตัวแบบปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นตรง ดังนี้.-

สมการเป้าหมายต้นทุนต่ำที่สุด

$$\text{Min } C = 1.5x_1 + 2.0x_2 + 1.2x_3$$

สมการและอสมการข้อจำกัดขอบข่ายปัญหา

$$350x_1 + 250x_2 + 200x3 \leqslant 300$$

$$250x_1 + 300x_2 + 150x_3 \geqslant 200$$

$$100x_1 + 150x_2 + 75x_3 \geqslant 100$$

$$75x_1 + 125x_2 + 150x_3 \geqslant 100$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$$

ก่อนที่จะนำวิธีการซิมเพล็กซ์มาคำนวณหาคำเฉลยของปัญหาใด ๆ จะต้องเปลี่ยนอสมการข้อจำกัดขอบข่ายของปัญหาทุกอันให้เป็นสมการเสียก่อน

ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรงจะเปลี่ยนเป็น

$$\text{Min } C = 1.5x_1 + 2.0x_2 + 1.2x_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4 + MA_1 + MA_2 + MA_3 + MA_4$$

$$350x_1 + 250x_2 + 200x_3 + S_1 = 300$$

$$250x_1 + 300x_2 + 150x_3 - S_2 + A_1 = 200$$

$$100x_1 + 150x_2 + 75x_3 - S_3 + A_2 = 100$$

$$75x_1 + 125x_2 + 150x_3 - S_4 + A_3 = 100$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + A_4 = 1$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4 \geqslant 0$$

ตัวแบบที่เขียนโดยเปลี่ยนอสมการข้อจำกัดเป็นสมการ เราเรียกว่าตัวแบบมาตรฐานของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นตรง (Standard Form of Linear Programming Problem)

ดังนั้นเราจึงเห็นได้ชัดว่าในแต่ละอสมการข้อจำกัดขอบข่ายของปัญหานั้นจะต้องประกอบไปด้วยตัวแปรผันส่วนขาด (Slack Variable) หรือตัวแปรผันส่วนเกิน (Surplus Variable) หรือตัวแปรเทียม (Artificial Variable) อย่างน้อย 1 ตัว **ตัวแปรทั้งสามนี้อาจจะเรียกรวม ๆ กันว่าเป็น** "<u>ตัวแปรหุ่น</u> (Dummy Variables)"

<u>ตัวอย่างที่ 16</u> จากตัวอย่างที่ 11

สมการเป้าหมายกำไรสูงสุด

$$\text{Max } q = 6x_1 + 9x_2$$

อสมการข้อจำกัดขอบข่ายของปัญหา

$$7x_1 + 12x_2 \leqslant 120$$

$$10x_1 + 8x_2 \leqslant 120$$

$$x_1 , x_2 \geqslant 0$$

นำมาเขียนใหม่ได้เป็นตัวแบบมาตรฐานดังนี้

$$ฯ = 6x_1 + 9x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

$$ฯ - 6x_1 - 9x_2 + 0S_1 + 0S_2 = 0$$

$$7x_1 + 12x_2 + S_1 = 120$$

$$10x_1 + 8x_2 + S_2 = 120$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2 \geqslant 0$$

ในกรณีนี้ S_1 และ S_2 ก็คือตัวแปรผันส่วนขาด (Slack Variable) นั่นเอง จากนั้นเราสามารถนำข้อความต่าง ๆ เขียนเป็นตาราง (Simplex Tableau) ได้ดังนี้

	ตาราง I	Basis	ฯ	x_1	x_2	S_1	S_2	b:Constant	test ratio $=\frac{b}{a}$
สมการเป้าหมาย	row 0	ฯ	1	-6	-9	0	0	0	
สมการข้อจำกัดขอบ	row 1	S_1	0	7	12	1	0	120	
ข่ายของปัญหา	row 2	S_2	0	10	8	0	1	120	

ตัวเลขต่าง ๆ ที่ปรากฏในตารางคือ สัมประสิทธิ์ของตัวแปรทุกตัวและค่าคงที่ที่อยู่ทางด้านขวามือของเท่ากับ

S_1, S_2 เป็น **Basic Variable** ทั้งนี้เนื่องจากการพัฒนาหาคำเฉลยขั้นแรกจะกำหนดให้ $x_1 = x_2 = 0$ ซึ่งเป็น **Non-basic variable**

2.1 <u>ขั้นตอนต่าง ๆ ในการหาคำเฉลยที่ดีที่สุดของปัญหาที่ว่าด้วยการทำให้ถึงจุดสูงสุด</u> (**Maximization Problem**)

<u>ขั้นที่ 1 การเลือก **Pivot Column**</u> เราจะเลือกตัวแปรตัดสินใจที่เป็น **Non-basic variable** ที่มีค่าสัมประสิทธิ์ที่ติดลบมีตัวเลขมากที่สุดในแถวนอนของสมการเป้าหมาย **row 0** เป็นตัวแปรที่เข้ามาแทนที่(**entering variable**) ใน **Basis** ทั้งนี้เพราะว่าถ้าสัมประสิทธิ์ติดลบมีตัวเลขมากที่สุดแสดงว่าจะให้กำไรต่อหน่วยมากที่สุดหากเปลี่ยนไปเป็น **basic variable** แล้วค่าของสมการเป้าหมายจะสูงขึ้น ดังนั้นถ้าต้องการกำไรสูงสุด **Non-basic variable** **ตัวที่สัมประสิทธิ์**เป็นลบมีตัวเลขมากที่สุดจะชี้ให้เห็นกำไรสูงขึ้นกว่าเดิมถ้าเปลี่ยนตัวแปรตัวนั้นมาเป็น **basic variable** และ<u>ถ้าพบว่าสัมประสิทธิ์มีค่าเป็นบวกหมดแสดงว่าได้คำเฉลยที่ดีที่สุดแล้ว</u> ในที่นี้ค่าสัมประสิทธิ์ที่ติดลบเป็นตัวเลขมากที่สุดใน **row 0** ก็คือ - 9 เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัดสินใจที่เป็น **Non - basic variable** x_2 ดังนั้น ตัวแปรที่เข้ามาแทนที่ที่จะนำมาพิจารณาเปลี่ยนให้เป็น **basic variable** ก่อนก็คือ x_2 เราจะเรียก x_2 **column** ว่าเป็น "<u>**Pivot Column**</u>"

วิธี ซิมเพล็กซ์ ดังกล่าวนี้อาจมีปัญหาที่เกิดขึ้นได้ คือ เมื่อตารางซิมเพล็กซ์ของเราเกิดมีสมาชิกใน **row 0** มีค่าเท่ากันแล้ว การเลือก **Pivot Column** ก็จะยุ่งยากขึ้นเราจะเลือกตัวไหนดี ในทางปฏิบัตินั้นเราจะต้องเลือกเอา **Pivot Column** ที่อยู่ซ้ายสุดของตารางซิมเพล็กซ์ก่อนเสร็จแล้วเราก็ดำเนินการกับ **Pivot steps** ที่เหลือต่อไป

<u>ขั้นที่ 2</u> การเลือก **Pivot element** เพื่อเลือกตัวแปรออกจาก **Basis** วิธีการเลือกก็คือ

ก. เลือก **element** ต่าง ๆ ใน **Pivot column** ทุก ๆ ค่าที่มีค่าเป็นบวก (**a**)

ข. Test ratio = $\frac{b}{a}$ เอา element ที่มีค่าเป็นบวกแต่ละตัวของ Pivot column ไปหารตัวคงที่ที่สอดคล้องกันใน Constant Column (ถ้าสัมประสิทธิ์ของแถวนอนใดใน Pivot column เป็นค่าลบ หรือ 0 เราไม่คำนวณ Test ratio)

ค. เปรียบเทียบดูผลหารที่ได้ ซึ่งเราเรียกผลหารที่ได้นั้นว่า <u>**Displacement quotients**</u> เลือกผลหารที่มีค่าน้อยที่สุดอยู่ในแถวนอนใดแถวนอนนั้นจะเป็น <u>**Pivot row**</u> จะเป็นแถวของตัวแปรที่จากไป (Departing variable) ในที่นี้ คือ s_1 ซึ่งจะกลายเป็น Non-basic variable สาเหตุของการเลือกผลหารที่น้อยที่สุดเพื่อหาตัวแปรออกนั้น เพราะค่าตัวแปรเข้ามานั้นต้องใช้ทรัพยากรให้อยู่ในข้อจำกัดของทุกอสมการขอบข่ายของปัญหาถ้าเราถือเอาผลหารมากมาเป็นเกณฑ์จะทำให้ขาดคุณสมบัติในอสมการขอบข่ายที่มีผลหารน้อยกว่า

ง. เลือก element ณ ตรงที่ Pivot column ตัดกับ Pivot row ในฐานะที่เป็น <u>**Pivot element**</u>

ดูตารางต่อไปนี้

Pivot Column

ตัวแปรที่เข้ามาแทนที่ (Entering Variable)

ตารางที่ I	Basis	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	b : Constant	test ratio = $\frac{b}{a}$
row 0	Z	1	-6	-9	0	0	$\boxed{0}$	
row 1	s_1	0	7	12	1	0	120	$\frac{120}{12}$ = 10*Pivot row
row 2	s_2	0	10	8	0	1	120	$\frac{120}{8}$ = 15

ตัวแปรที่จากไป (Departing Variable)

Pivot element

<u>ขั้นที่ 3</u> การแปลง **Pivot column** ไปเป็น **Unit Vector** โดยการทำให้ **Pivot element** เท่ากับ 1 และ **element** อื่น ๆ ใน **Pivot colum** นั้นเป็นศูนย์ โดยวิธีการปฏิบัติตามแถวนอน (**Row operation**) ดังนี้

หารค่าทุกตัวในแถวของ **Pivot row** ด้วย **Pivot element** ในที่นี้หารด้วย 12 ซึ่งผลลัพธ์ได้แสดงไว้ในแถวนอนที่ 1 (**row 1**) ในตารางที่ II โดยที่ x_2 แทนที่ s_1 และผลลัพธ์ของการหารนี้ก็คือสัมประสิทธิ์ของสมการข้อจำกัดใหม่นั่นเอง ขั้นต่อไปแปลงให้ค่าของ element อื่นใน Pivot Column เป็นศูนย์หมด (ยกเว้นค่าที่เป็น **Pivot** element จะเป็น 1) โดยใช้แถวนอนที่ 1 ในตารางที่ II เป็นหลัก และค่าที่ได้จะเป็นข้อจำกัดของขายปัญหาใหม่ รวมทั้งสมการเป้าหมายใหม่ด้วย

เริ่มต้นการคำนวณในขั้นที่ 3 หาตารางที่ 2 จะต้องเริ่มที่ Pivot row ก่อน โดยนำ **Pivot element** หาร Pivot row ตลอด เพราะต้องการเปลี่ยน Pivot element ให้เป็น 1 ในที่นี้ นำ 12 หาร row 1 ในตารางที่ 1 ตลอด ดังนี้

	¶	x_1	x_2	“1	s_2	b
row 1(I)	0	$\frac{12}{12}$	$\frac{12}{12}$	$1/_{12}$	0	$\frac{120}{12}$
row 1(II)	0	$7/_{12}$	1	$1/_{12}$	0	10

นำผลลัพธ์ที่ได้ไปใส่ไว้ใน row 1 ในตารางที่ II

ต่อจากนั้นนำผลลัพธ์ดังกล่าวข้างต้นมาใช้ให้เป็นประโยชน์ในการเปลี่ยน element ตัวอื่น ๆ ใน Pivot column ให้เป็นศูนย์

วิธีเปลี่ยน row 0(I) ให้เป็น row 0(II) ทำได้ดังนี้ เราจะเปลี่ยน row ไหนให้นำ row นั้นตั้งไว้ในกระดาษทดก่อน ในที่นี้ต้องการเปลี่ยน row 0(I) นำ row 0(I) ตั้งไว้ เราต้องการทำ -9 ให้เป็น 0 ดังนั้นนำ 9 x row 1(II) แล้วนำไปบวกกับ row 0(I) ดังตาราง

	¶	x_1	x_2	s_1	s_2	b
row 0 (I)	1	-6	-9	0	0	0
9 x row 1(II)	0	$\frac{63}{12}$	9	$\frac{9}{12}$	0	90
row 0(II)=row(0)I +9row(1)II	1	$\frac{-9}{12}$	0	912	0	90

วิธีเปลี่ยน row 2 (I) ให้เป็น row 2(II) ทำได้ดังนี้ เราต้องการทำ 8 ให้เป็น 0 ดังนั้น นำ 8 x row 1 (II) แล้วนำไปลบออกจาก row 2 (I) ดังตาราง

	¶	x_1	x_2	s_1	s_2	b
row 2 (I)	0	10	8	0	1	120
8 x row(1) II	0	$\frac{56}{12}$	8	$\frac{a}{12}$	0	a0
row 2(II)=row 2(I) -8row(1)II	0	$\frac{16}{3}$	0	$\frac{-2}{3}$	1	40

ดังนั้น ตารางที่ II จะเป็นดังนี้

ตาราง II	Basis	¶	x_1	x_2	s_1	s_2	b : Constant
row 0	¶	1	$-9/12$	0	$9/12$	0	90
row 1	x_2	0	$7/12$	1	$1/12$	0	10
row 2	s_2	0	$\frac{16}{3}$	0	$-2/3$	1	40

<u>ขั้นที่ 4</u> การหา **Pivot Step** อื่น ๆ ย้อนกลับขึ้นไปทำขั้นตอนที่ - ขั้นตอนที่ 3 ใหม่เรื่อยไปจนกระทั่งไม่มีค่าใดติดลบอีกเลยใน **row 0** นั่นคือ ตารางซิมพล็กซ์นั้นแสดงค่าที่เหมาะสมที่สุดแล้ว

ขั้นต่อไปให้สำรวจดูว่าสัมประสิทธิ์ใน **row 0** เป็นบวกหมดหรือยัง ถ้ายังให้กลับไปทำขั้นที่ 1 ต่อไป ถ้าเป็นบวกหมดแล้วแสดงว่าตารางซิมเพล็กซ์นั้นให้ค่าที่เหมาะสมที่ดีที่สุดแล้ว ในที่นี้ยังมีสัมประสิทธิ์ที่ติดลบเป็นตัวเลขมากที่สุดใน **row 0** คือ $-9/12$ เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัดสินใจที่เป็น **Non - basic variable** X_1 ดังนั้น ตัวแปรที่เข้ามาแทนที่ที่จะนำมาพิจารณาเปลี่ยนให้เป็น **basic variable** ก็คือ X_1 เราจะเรียก X_1 **column** ว่าเป็น **Pivot column** และดำเนินการขั้นที่ 2 ต่อไปดังนี้

Pivot column

ตัวแปรที่เข้ามาแทนที่

ตารางที่ II	Basis	¶	X_1	X_2	S_1	S_2	b : Constant	test ratio = $\frac{b}{a}$
row 0	¶	1	$\frac{-9}{12}$	0	$\frac{9}{12}$	0	90	
row 1	X_2	0	$\frac{7}{12}$	1	$\frac{1}{12}$	0	10	$\frac{10}{7/12} = 17.1$
row 2	S_2	0	$\frac{16}{3}$	0	$\frac{-2}{3}$	1	40	$\frac{40}{16/3} = 7.5$* pivot row

ตัวแปรที่จากไป

Pivot element

ขั้นที่ 3 ก็ดำเนินการทำนองเดียวกับที่กล่าวมาแล้วข้างต้นดังตารางที่ III ดังนี้

ตารางที่ III	Basis	¶	X_1	X_2	S_1	S_2	b:Constant
row 0 = row 0(II) + $\frac{9}{12}$ row 2 (III)	¶	1	0	0	$\frac{21}{32}$	$\frac{9}{64}$	$95\frac{5}{8}$
row 1 = row 1(II) $-\frac{7}{12}$ row 2 (III)	X_2	0	0	1	$\frac{5}{32}$	$\frac{-7}{64}$	$5\frac{5}{8}$
* row 2 = row 2 (II) $\times \frac{3}{16}$	X_1	0	1	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$7\frac{1}{2}$

จะเห็นได้ว่าเราจะทำการผลิต $\bar{x}_1$ และ $\bar{x}_2$ ที่ $7\frac{1}{2}$ และ $5\frac{5}{8}$ หน่วย โดยมีกำไร $95\frac{5}{8}$ บาท ทั้งนี้เพราะว่า row 0 ไม่มีค่าติดลบใด ๆ เหลืออยู่อีกแล้ว นั่นหมายความว่าไม่มี Pivoting ใด ๆ ที่จะทำให้มีกำไรสูงขึ้นอีก ดังนั้นเราจึงยอมรับ Optimal Solution ของตารางที่ III นี้

<u>ตัวอย่างที่ 17</u> ในโรงงานอุตสาหกรรมแห่งหนึ่ง มีความจำเป็นที่จะต้องหยุดการผลิตสินค้าชนิดหนึ่งซึ่งไม่มีกำไร โดยผลจากการหยุดนี้จะทำให้เครื่องจักรและแรงงานว่างลง โดยความเห็นของฝ่ายผลิต เครื่องจักร และแรงงานที่ว่างอยู่สามารถดัดแปลงใช้ผลิตสินค้าอื่น ๆ ได้ 3 ชนิด คือ โต๊ะ เก้าอี้ ตู้ ข้อมูลจากฝ่ายการผลิต โต๊ะ, เก้าอี้, และตู้ รวบรวมมาได้ดังนี้

ชนิดของเครื่องจักรที่ใช้	เวลาเครื่องจักร (ช.ม./อาทิตย์)	เวลาที่ใช้ในการผลิตสินค้า(ช.ม./หน่วย) โต๊ะ	เก้าอี้	ตู้
เครื่องตัดไม้	150	8	2	3
เครื่องกลึง	100	4	3	-
เครื่องขัด	80	2	-	1
ผลกำไรต่อหน่วยของสินค้า (บาท)		200	60	80

สินค้า โต๊ะ และเก้าอี้ สามารถขายได้ไม่จำกัด
แต่สินค้า ตู้ ความต้องการมีไม่เกิน 20 หน่วยต่ออาทิตย์
ฝ่ายผลิตควรจะดำเนินการผลิตอย่างไรจึงได้ผลกำไรสูงสุด

<u>วิธีทำ</u>

ให้ Z = จำนวนเงินกำไร

x_1, x_2, x_3 = จำนวนผลิตของสินค้า โต๊ะ, เก้าอี้ และตู้

สมการเป้าหมายเพื่อกำไรสูงสุด

$$\text{Max } Z = 200x_1 + 60x_2 + 80x_3$$

อสมการข้อจำกัดขอบข่ายของปัญหา

1. อัตราการผลิตของเครื่องจักร

เครื่องตัดไม้ : $8x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leqslant 150$ ชม./อาทิตย์

เครื่องกลึง : $4x_1 + 3x_2 \leqslant 100$ ชม./อาทิตย์

เครื่องขัด : $2x_1 + 1x_3 \leqslant 80$ ชม./อาทิตย์

2. ปริมาณการขาย

$x_3 \leqslant 20$ หน่วย

$x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$

เปลี่ยนแปลงให้เป็นตัวแบบมาตรฐานดังนี้

$$Z - 200x_1 - 60x_2 - 80x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4 = 0$$

$$8x_1 + 2x_2 + 3x_3 + s_1 = 150$$

$$4x_1 + 3x_2 + s_2 = 100$$

$$2x_1 + 1x_3 + s_3 = 80$$

$$x_3 + s_4 = 20$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3, s_4 \geqslant 0$$

นำมาเขียนเป็นตาราง (Simplex Tableau) ได้ดังนี้

Pivot Column ตัวแปรที่เข้ามาแทนที่

ตารางที่ I	Basis	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	b:Constant	test ratio=$\frac{b}{a}$
row 0	Z	1	-200	-60	-80	0	0	0	0	0	
row 1	S_1	0	8	2	3	1	0	0	0	150	$\frac{150}{8}$=18.75* Pivot row
row 2	S_2	0	4	3	0	0	10		0	100	$\frac{100}{4}$= 25
row 3	S_3	0	0	2		010			010	a0	$\frac{80}{2}$= 40
row 4	S_4	0		0	0	10	0	0	1	20	

ตัวแปรที่จากไป

Pivot element

Pivot column ตัวแปรที่เข้ามาแทนที่

ตารางที่II	Basis	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	32	93	54	):Constant	test ratio=$\frac{b}{a}$
row 0	Z	1	0	-10	-5	25	0	0	0	3750.	
row 1*	X_1	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	0	18.75	$\frac{18.75}{1/4}$ = 75
row 2	S_2	0	0	2	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	25	$\frac{25}{2}$ = 12.5* Pivot row
row 3	S_3	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	1	0	42.50	
row 4	S_4	0	0	0	1	0	0		01	20	

ตัวแปรที่จากไป

Pivot Column — ตัวแปรที่เข้ามาแทนที่

ตารางที่ III	basis	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	b:constant	test ratio = $\frac{b}{a}$
row 0	z	1	0	0	$\frac{-25}{2}$	$\frac{45}{2}$	5	0	0	3875.	
row 1	X_1	0	1	0	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{16}$	$-\frac{1}{8}$	0	0	15.625	$\frac{15.625}{9/16} = 27.7$
row 2	X_2	0	0	1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	12.5	
row 3	S_3	0	0	0	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	1	0	48.75	
row 4	S_4	0	0	0	1	0	0	0	1	20	$\frac{20}{1} = 20'$

ตัวแปรที่จากไป

ตารางที่ IV	basis	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	b:constant	test ratio = $\frac{b}{a}$
row 0	z	1	0	0	0	$\frac{45}{2}$	5	0	$\frac{25}{2}$	4125.	
COY 1	X_1	0	1	0	0	$\frac{3}{16}$	$-\frac{1}{8}$	0	$-\frac{9}{16}$	4.375	
row 2	X_2	0	0	1	0	$\frac{}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{4}$	27.5	
row 3	S_3	0	0	0	0	$-\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{8}$	51.25	
row 4	X_3	0	0	0	1	0	0	0	1	20	