จะเห็นได้ว่าจากตารางที่ 4 ใน row 0 ไม่มีสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัวใดที่มีค่าติดลบอีกแล้ว หมายความว่าไม่มีตัวแปรตัวใดที่จะทำให้กำไรสูงขึ้น ดังนั้นเราจึงยอมรับ **Optimal Solution** ของตารางที่ 4 นี้

นั่นคือ $\bar{Z} = 4125$, $\bar{x}_1 = 4.375$, $\bar{x}_2 = 27.5$, $\bar{x}_3 = 20$, $\bar{s}_3 = 51.25$

หมายความว่า เมื่อต้องการกำไรสูงสุด ควรจะผลิต

โต๊ะ	4.375	ตัว
เก้าอี้	27.5	ตัว
ตู้	20	ตู้

ทำให้ได้รับกำไรสูงสุด 4125 บาท

โดยที่เครื่องขัดใช้งานยังไม่เต็มสมรรถภาพยังเหลือเวลาที่ยังไม่ได้ใช้ 51.25 ช.ม./อาทิตย์

2.2 <u>ขั้นตอนต่าง ๆ ในการหาคำเฉลยที่ดีที่สุดของปัญหาที่ว่าด้วยการทำให้สิ่งจูดต่ำสุด</u> (**Minimization Problem**)

ในการแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นตรงโดยอาศัยวิธีซิมเพล็กซ์จะทำได้ดี ไม่ว่าสมการเป้าหมายจะเป็นกำไรสูงสุดหรือต้นทุนต่ำสุด และสำหรับกรณีต้นทุนต่ำสุดนั้นเรามีทางเลือกดำเนินการในการหาคำเฉลยด้วยวิธีซิมเพล็กซ์จากวิธีการใดวิธีการหนึ่งจาก 2 วิธี ต่อไปนี้

<u>วิธีที่ 1</u> ด้วยวิธีการเปลี่ยนความหมายของสมการเป้าหมายเดิมเป็นตรงข้าม นั่นคือเปลี่ยนเป้าหมายของปัญหาเดิมซึ่งต้องการต้นทุนต่ำสุดเป็นปัญหาที่เป้าหมายต้องการกำไรสูงสุด วิธีปฏิบัติในการเปลี่ยนก็เพียงแต่เอา −1 คูณสมการเป้าหมายเดิมพร้อมทั้งเปลี่ยนเป้าหมายเป็นตรงข้ามเท่านั้น โดยไม่ต้องเปลี่ยนแปลงอะไรทั้งสิ้นเกี่ยวกับข้อจำกัดขอบขายของปัญหา เช่น

สมการเป้าหมายเพื่อต้นทุนต่ำสุด

$$\text{Min } C = 5x_1 + 9x_2$$

ภายใต้ข้อจำกัดขอบข่ายของปัญหา

$$3x_1 + 2x_2 \leqslant 6$$

$$5x_1 + x_2 \geqslant 10$$

$$x_1 + 10x_2 \geqslant 9$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

จะเปลี่ยนเป็น

สมการเป้าหมายเพื่อกำไรสูงสุด

$$\text{Max } -C = -5x_1 - 9x_2$$

ภายใต้ข้อจำกัดขอบข่ายของปัญหา

$$3x_1 + 2x_2 \leqslant 6$$

$$5x_1 + x_2 \geqslant 10$$

$$x_1 + 10x_2 \geqslant 9$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

ต่อจากนั้น จึงดำเนินการหาคำเฉลยด้วยวิธีซิมเพล็กซ์เสมือนหนึ่งว่าเป้าหมายต้องการกำไรสูงสุด และคำเฉลยที่ดีที่สุดที่คำนวณได้จะเป็นคำเฉลยที่ดีที่สุดของปัญหาเดิมด้วย

<u>วิธีที่ 2</u> ดำเนินการหาคำเฉลยของปัญหาที่กำหนดให้ด้วยวิธีการปกติและเป็นปัญหาที่มีเป้าหมายเดิม คือ ต้นทุนต่ำสุด กระบวนการหาคำเฉลยเหมือนกับเป้าหมายกำไรสูงสุด แต่มีความแตกต่างกันตรงที่ในขั้นที่ 1 เราจะเลือกตัวแปรตัดสินใจที่มีค่าสัมประสิทธิ์เป็นค่าบวกมากที่สุดใน row 0 เป็นตัวแปรเข้ามาแทนที่และถ้าปรากฏว่าไม่มีสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัดสินใจใน row 0 มีค่าเป็นบวก แสดงว่าได้คำเฉลยที่ดีที่สุดแล้ว

<u>ตัวอย่างที่ 18</u> จากตัวอย่างที่ 2

สมการเป้าหมายเพื่อต้นทุนต่ำสุด

Minimize Cost : $C = 10q_1 + 20q_2$

อสมการข้อจำกัดขอบข่ายของปัญหา

แป้ง : $9q_1 + 6q_2 \geqslant 18$

ถั่ว : $4q_1 + 6q_2 \geqslant 12$

น้ำตาล : $2q_1 + 8q_2 \geqslant 8$

และ $q_1, q_2 \geqslant 0$

เราสามารถแปลงให้เป็นสมการมาตรฐานได้

$$C = 10q_1 + 20q_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + MA_1 + MA_2 + MA_3$$

$$9q_1 + 6q_2 - s_1 + A_1 = 18$$

$$4q_1 + 6q_2 - s_2 + A_2 = 12$$

$$2q_1 + 8q_2 - s_3 + A_3 = 8$$

$$q_1, q_2, s_1, s_2, s_3, A_1, A_2, A_3 \geqslant 0$$

The **Big M** Method

ในกรณีที่มีอสมการข้อจำกัดของปัญหามีเครื่องหมาย "มากกว่าหรือเท่ากับ" และเครื่องหมาย "เท่ากับ" อย่างเดียว เราจะนำตัวแปรเทียมบวกเพิ่มเข้าไปในอสมการเพื่อให้เป็นสมการ เนื่องจากตัวแปรเทียมนำเข้ามาเพื่อเป็นจุดเริ่มต้นของการแก้ปัญหาด้วยวิธีซิมเพล็กซ์จึงไม่มีความหมายอะไรเลยที่เกี่ยวกับปัญหาที่แท้จริง ดังนั้นเราจึงพยายามที่จะขจัดตัวแปรเทียมนี้ออกไปเป็น Non - basic variable ในตารางต่อ ๆ มา หรือพยายามให้ตัวแปรเทียมมีค่า 0 ในตารางสุดท้าย เราใช้วิธีการง่าย ๆด้วยการกำหนดให้สัมประสิทธิ์ของตัวแปรเทียมนี้ในสมการเป้าหมายต้นทุนต่ำสุดให้มีค่าสูงมาก (extremely large) และให้มีค่าน้อยมาก (extremely small) หรือมีค่าติดลบมากที่สุดในสมการเป้าหมายกำไรสูงสุด แต่แทนที่จะสมมติค่าตัวเลขบวกที่ใหญ่มากหรือค่าตัวเลขติดลบที่มาก ๆ เป็นสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเทียมในสมการเป้าหมาย ส่วนมากนิยมกำหนดให้มีค่าเป็นตัวอักษร M โดยที่ M มีค่าใหญ่มากเข้าใกล้ ∞ ซึ่งจะมีค่า - M ในกรณีเป้าหมายกำไรสูงสุด และ + M กรณีเป้าหมายต้นทุนต่ำสุด

จากโจทย์ตัวอย่างที่ 18

กำหนดคำเฉลยเริ่มแรกให้ A_1, A_2, A_3 เป็น basic variable และจะได้ q_1, q_2, s_1, s_2, s_3 เป็น non-basic variable

ก่อนที่จะเริ่มหาคำเฉลยด้วยวิธีซิมเพล็กซ์ เราต้องทำให้สัมประสิทธิ์ของ basic variable (A_1, A_2, A_3) ในสมการเป้าหมายหรือ ใน row 0 มีค่าเท่ากับศูนย์ ด้วยการนำค่า A_1, A_2 และ A_3 จากสมการข้อจำกัดขอบข่ายของปัญหาแทนลงในสมการเป้าหมาย

จากสมการข้อจำกัดขอบข่ายของปัญหาจะได้

$$A_1 = 18 - 9q_1 - 6q_2 + s_1$$

$$A_2 = 12 - 4q_1 - 6q_2 + s_2$$

$$A_3 = a - 2q_1 - 8q_2 + s_3$$

ดังนั้น

$$C = 10q_1 + 20q_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + M(18 - 9q_1 - 6q_2 + S_1) + M(12 - 4q_1 - 6q_2 + s_2) + M(8 - 2q_1 - 8q_2 + s_3)$$

$$= -(15M - 10)q_1 - (20M - 20)q_2 + Ms_1 + Ms_2 + Ms_3 + 38M$$

ปัญหาว่าด้วยการทำให้ถึงจุดต่ำสุด มีหลักในการนำสัมประสิทธิ์ของตัวแปรร่วมเข้าวงเล็บเดียวกันโดยจะต้องพยายามทำให้เครื่องหมายหน้าวงเล็บเป็นลบเมื่อย้ายตัวแปรไปไว้ทางซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับเพื่อให้ทางขวามือเหลือแต่ตัวคงที่ สัมประสิทธิ์หน้าตัวแปรที่ย้ายไปจะมีเครื่องหมายเป็นบวก ดังนี้

$$C + (15M - 10)q_1 + (20M - 20)q_2 - Ms_1 - Ms_2 - Ms_3 = 38M$$

$$9q_1 + 6q_2 - s_1 + A_1 = 18$$

$$4q_1 + 6q_2 - s_2 + A_2 = 12$$

$$2q_1 + 8q_2 - s3 + A3 = 8$$

$$q_1, q_2, s_1, s_2, s_3, A_1, A_2, A_3 \geqslant 0$$

เขียนลงในตารางซิมเพล็กซ์ได้ดังนี้

Pivot column

ตัวแปรที่เข้ามาแทนที่

ตาราง I	Basis	C	q_1	q_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	Constant	trot ratio
row 0	C	1	(15M-10)	(20M-20)	-M	a	-M	0	0	0	38M	
rov 1	A_1	0	9	6	-1	0	0	1	0	0	18	$\frac{18}{6} = 3$
row 2	A_2	0	4	6	0	-1	0	0	1	0	12	$\frac{12}{6} = 2$
. * row 3	A_3	0	2	8	0	0	-1	0	0	1	8	$\frac{8}{8} = 1$**

ตัวแปรที่จากไป

Pivot column

ตาราง II	Basis	C	q_1	q_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	Constant	test ratio
row 0 = row 0(1) - (20M-20) row 3(II)	C	1	(10M-5)	0	-M	-M	$(\frac{3M}{2}-\frac{5}{2})$	0	0	$-\frac{1}{8}$ (20M-20)	18M + 20	
row 1 = row 1(I) - 6 row 3(II)	←A_1	0	$\frac{15}{2}$	1	0-10		$\frac{3}{4}$	1	0	$-\frac{3}{4}$	12	$\frac{12}{15/2} = 1.6$**
row 2 = row 2(I) - 6 row 3(II)	A_2	0	$\frac{5}{2}$	0	0	-1	$\frac{3}{4}$	0	1	$-\frac{3}{4}$	6	$\frac{6}{5/2} = 2.4$
.* row 3 = $\frac{\text{row 3 (I)}}{8}$	q_2	0	$\frac{1}{4}$	1	0	0	$-\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{1}{1/4} = 4$

Pivot Column

1

ตาราง III	Basis	C	q_1	q_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	Constant	test ratio
row 0 = row 0(II) - (10M - 5) row 1(III)	C	1	0	0	$\frac{1}{3}M-\frac{2}{3}$	-M	$(\frac{1}{2}M-2)$	$-\frac{2}{15}(10M-5)$	0	$-(\frac{3}{2}M-2$	2M+28	
**row 1 = row 1(II) x $\frac{2}{15}$	q_1	0	1	0	$\frac{-2}{15}$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{15}$	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{8}{5} \div \frac{1}{10} = 16$
row 2 = row 2(II) - $\frac{5}{2}$ row 1(III)	← A_2	0	0	0	$\frac{1}{3}$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{3}$	1	$-\frac{1}{2}$	2	$2 \div \frac{1}{2} = 4$*
row 3 = row 3(II) - $\frac{1}{4}$ row 1(III)	q_2	0		01	$\frac{1}{30}$	0	$\frac{-3}{20}$	$\frac{-1}{30}$	0	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{5}$	

Pivot Column

ตาราง IV	Basis	C	q_1	q_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	Constant	test ratio
row 0 = row 0(III) - ($\frac{1}{2}$M -2) row 2(IV)	C	1	0	0	$\frac{2}{3}$	-4	0	$-\frac{(M+2)}{3}$	-(M-4)	-M	36	
row 1 = row 1(III) - $\frac{1}{10}$ row 2(IV)	q_1	0	1	0	$\frac{-1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{-1}{5}$	0	$\frac{6}{5}$	
**row 2 = row 2(III) x 2	← S_3	00		0	3	-2	1	-/3	2	-1	4	$4 \div \frac{2}{3} = 6$*
row 3 = row 3(III) + $\frac{3}{20}$ row 2 (IV)	q_2	0	0	1	$\frac{2}{15}$	$\frac{-3}{10}$	0	-2 4	$\frac{3}{10}$	0	$\frac{6}{5}$	$\frac{6}{5} \div \frac{2}{15} = 9$

ตาราง V	Basis	C	q_1	q_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	Constant	test ratio
row 0 = row 0 (IV) $-\frac{2}{3}$ row 2 (V)	C	1	0	0	0	-2	-1	-M	-(M-2)	-(M-1)	32	
row 1 = row 1 (IV) $+\frac{1}{3}$ row 2 (V)	q_1	0	1	0	0	$\frac{-2}{5}$	$\frac{3}{10}$	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{12}{5}$	
row 2 = row 2 (IV) x $\frac{3}{2}$	S_1	0	0	0	1	-3	$\frac{3}{2}$	-1	3	$\frac{-3}{2}$	6	
row 3 = row 3 (IV) $-\frac{2}{15}$ row 2 (V)	q_2	0	0	1	0	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{-1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	

จากตารางที่ 5 จะเห็นว่าสัมประสิทธิ์ใน row 0 ไม่มีค่าเป็นบวก (ติดลบหมด) แล้ว แสดงว่าค่าที่ได้ในตารางที่ 5 เป็นค่าที่เหมาะสมที่สุด

นั่นคือ $\bar{C} = 32$ บาท

$\bar{q}_1 = \frac{12}{5} = 2.4$ ถุง

$\bar{q}_2 = \frac{2}{5} = 0.4$ ถุง

$\bar{S}_1 = 6$ แสดงว่ามีการใช้แป้งเกินกว่าขีดจำกัดขั้นต่ำไป 6 กรัม

$\bar{S}_2 = 0, \bar{S}_3 = 0, \bar{A}_1 = 0, \bar{A}_2 = 0, \bar{A}_3 = 0$

ลองเปรียบเทียบค่าเฉลยที่ดีที่สุดของปัญหานี้ด้วยวิธีกราฟในตัวอย่างที่ 13 จะเท่ากับค่าเฉลยที่ดีที่สุด ของปัญหานี้ด้วยวิธีซิมเพล็กซ์ การนำ Big M มาใช้ในกรณีเป้าหมายกำไรสูงสุด เราจะกำหนดให้สัมประสิทธิ์ของตัวแปรเทียมมีค่าลบมากที่สุด สำหรับวิธีการคำนวณต่าง ๆ เพื่อหาค่าเฉลยเหมือนเดิม

<u>ตัวอย่างที่ 19</u> จงหาค่าที่เหมาะสมของ x_1, x_2, x_3 จากโปรแกรมเชิงเส้นตรงต่อไปนี้

สมการเป้าหมายเพื่อกำไรสูงสุด

$$\text{Max } Z = -5x_1 + 6x_2 + 8x_3$$

สมการและอสมการข้อจำกัดขอบข่ายของปัญหา

$$x_1 + 5x_2 - 3x_3 \geqslant 15$$

$$5x_1 - 6x_2 + 10x_3 \leqslant 25$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$$

แปลงให้เป็นสมการมาตรฐานได้

$$z = -5x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 0S_1 + 0S_2 - MA_1 - MA_2$$

$$x_1 + 5x_2 - 3x_3 - S_1 + A_1 = 15$$

$$5x_1 - 6x_2 + 10x_3 + S_2 = 25$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + A_2 = 5$$

$$x_1, x_2, x_3, S_1, S_2, A_1, A_2 \geqslant 0$$

กำหนดค่าเฉลยเริ่มแรกคือ S_2, A_1, A_2 เป็น basic variable

x_1, x_2, x_3, S_1 เป็น non - basic variable

ทำให้สัมประสิทธิ์ของ A_1 , A_2 ในสมการเป้าหมายมีค่าเท่ากับศูนย์ ด้วยการแทนค่าลงใน Z ดังนี้

$$A_1 = 15 - x_1 - 5x_2 + 3x_3 + S_1$$

$$A_2 = 5 - x_1 - x_2 - x_3$$

จะได้

$$Z = -5x_1 + 6x_2 + 8x_3 + OS_1 + OS_2 - M(15 - x_1 - 5x_2 + 3x_3 + S_1)$$
$$-M(5 - x_1 - x_2 - x_3)$$
$$= (2M - 5)x_1 + (6M + 6)x_2 + (8 - 2M)x_3 - MS_1 + OS_2 - 20M$$

ปัญหาว่าด้วยการทำให้ถึงจุดสูงสุดมีหลักในการนำสัมประสิทธิ์ของตัวแปรร่วมเข้าวงเล็บเดียวกันโดยจะต้องพยายามทำให้เครื่องหมายหน้าวงเล็บเป็นบวกเมื่อย้ายตัวแปรไปไว้ทางซ้ายของเครื่องหมายเท่ากับเพื่อให้ทางขวามือเหลือแต่ตัวคงที่ สัมประสิทธิ์หน้าตัวแปรที่ย้ายไปจะมีเครื่องหมายเป็นลบ ดังนี้

$$Z - (2M - 5)x_1 - (6M + 6)x_2 - (8-2M)x_3 + MS_1 + OS_2 = -20M$$

$$x_1 + 5x_2 - 3x_3 - S_1 + A_1 = 15$$

$$5x_1 - 6x_2 + 10x_3 + S_2 = 25$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + A_2 = 5$$

$$x_1, x_2, x_3, S_1, S_2, A_1, A_2 \geqslant 0$$

เขียนตารางซิมเพล็กซ์ได้ดังนี้

Pivot column

ตาราง I	Basis	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	A_1	A_2	Constant	test ratio
row 0	Z	1	$-(2M-5)$	$-(6M+6)$	$-(8-2M)$	M	0	0	0	$-20M$	
row 1	$\leftarrow A_1$	0	1	5	-3	-1	0	1	0	15	$\frac{15}{5} = 3$ *
row 2	S_2	0	5	-6	10	0	1	0	0	25	
row 3	A_2	0	1	1	1	0	0	0	1	5	$\frac{5}{1} = 5$

Pivot column

Table II	Basis	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	A_1	A_2	Constant	test ratio
row 0 = row 0(I) + (6M+6) row 1(II)	Z	1	$-(\frac{4}{5}M-\frac{31}{5})$	0	$-(\frac{8}{5}M+\frac{58}{5})$	$-(\frac{1}{5}M+\frac{6}{5})$	0	$\frac{1}{5}(6M+6)$	0	$-2M+18$	
**row 1 = $\frac{\text{row 1(I)}}{5}$	x_2	0	$\frac{1}{5}$	1	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	3	
row 2 = row 2(I) + 6 row 1(II)	S_2	0	$\frac{31}{5}$	0	$\frac{32}{5}$	$-\frac{6}{5}$	1	$\frac{6}{5}$	0	43	$43 \div \frac{32}{5} = 6.7$
row 3 = row 3(I) - row 1(II)	A_2	0	$\frac{4}{5}$	0	$\frac{8}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	1	2	$2 \div \frac{8}{5} = 1.2$ *

ตาราง III	Basis	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	A_1	A_2	Constant	test ratio
row 0 = row 0 (II) $+(\frac{8M}{5}+\frac{58}{5})$ row 3(III)	Z	1	12	0	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{M-1}{4}$	$\frac{M+29}{4}$	$\frac{65}{2}$	
row 1 = row 1 (II) + $\frac{3}{5}$ row 3 (III)	x_2	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{15}{4}$	
row 2 = row 2 (II) $-\frac{32}{5}$row 3 (III)	S_2	0	3	0	0	-2	1	2	-4	35	
$\ddot{\text{r}}$ow 3 = row 3 (II) x $\frac{5}{8}$	x_3	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{8}$	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{4}$	

จากตารางที่ 3 จะเห็นว่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรใน row 0 เป็นบวกหมด ไม่มีค่าติดลบอีกแล้ว แสดงว่าค่าที่ได้ในตารางที่ 3 เป็นค่าที่เหมาะสมที่สุดนั่นคือ

$$\bar{Z} = \frac{65}{2}$$

$$\bar{x}_1 = 0$$

$$\bar{x}_2 = \frac{15}{4}$$

$$\bar{x}_3 = \frac{5}{4}$$

$$\bar{S}_2 = 35$$

$$\bar{S}_1 = 0, \quad \bar{A}_1 = 0, \quad \bar{A}_2 = 0$$

ลักษณะของผลลัพธ์ด้วยวิธีซิมเพล็กซ์

การหาค่าเฉลยของตัวแบบปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรงด้วยวิธีซิมเพล็กซ์จะสามารถหาค่าเฉลยได้อย่างดี แต่ก็มีอยู่หลายกรณีที่วิธีซิมเพล็กซ์ไม่สามารถหาผลลัพธ์ชนิดที่ถูกต้องได้ตามเป้าหมาย กรณีต่อไปนี้เป็นลักษณะปัญหาของผลลัพธ์ที่อาจจะเกิดขึ้น คือ

1. กรณีย้อนซ้ำขั้นตอนดำเนินงาน หรือความแย้งกัน (Degeneracy)
2. กรณีผลลัพธ์ไม่มีขอบเขต (Unbounded Solutions)
3. กรณีที่มีผลลัพธ์ที่เหมาะสมหลายผลลัพธ์ (Alternative Optimal Solutions)
4. กรณีที่ไม่มีผลลัพธ์ (Non - existing Feasible Solution)

1. <u>กรณีย้อนซ้ำขั้นตอนดำเนินงานหรือความแย้งกัน</u> (Degeneracy)

ในกรณีที่ test ratio แล้วปรากฏว่ามี ratio ต่ำสุดมากกว่า 1 ค่าและเท่ากัน แสดงว่ามีตัวแปรนำออกได้มากกว่า 1 ตัว ให้เลือกตัวใดตัวหนึ่งออกจากผลลัพธ์ได้ ดังนั้น <u>ค่าตัวแปรหลัก</u> (basic variable) <u>หนึ่งตัวหรือมากกว่าจะมีค่าเท่ากับศูนย์</u> แสดงว่าเกิด degeneracy ขึ้นแล้ว การคำนวณครั้งต่อไปไม่สามารถรับประกันได้ว่าค่าตามสมการเป้าหมายจะได้รับการปรับปรุงให้ดีขึ้น อาจจะเกิด degeneracy ได้อีก เรียกว่าเข้า loop ผลลัพธ์ตามเป้าหมายจะอยู่ในลักษณะย้อนซ้ำขั้นตอนอย่างชนิดที่ไม่มีที่สิ้นสุด หมุนเวียนเป็นวัฏจักรวนมาจนได้ค่าตอบเดิม เรียก Degenerale Optimal Solution แต่ในบางกรณี แม้จะมีปัญหาย้อนซ้ำเกิดขึ้นก็อาจจะเป็นการย้อนซ้ำชั่วคราว (Temporary Degeneracy) หมายความว่าครั้งแรกเกิด degenerate แต่คำนวณครั้งต่อไปไม่ degenerate แสดงว่าเกิดการย้อนซ้ำชั่วคราว

ดังนั้น จึงแสดงให้เห็นว่าถึงแม้จะมีการ degenerate เกิดขึ้นก็ควรทำต่อไปจนกว่าจะถึงจุดที่เหมาะสมได้

ตัวอย่างที่ 20 ปัญหา **Degenerate Optimal Solution**

$$\text{Max } x_0 = 6x_1 + 10x_2$$

ภายใต้ข้อจำกัด

$$3x_1 + 4x_2 \leqslant 12$$

$$x_1 + 2x_2 \leqslant 6$$

$$x_1, x_2, \geqslant 0$$

$$x_0 = 6x_1 + 10x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

$$x_0 - 6x_1 - 10x_2 + 0S_1 + 0S_2 = 0$$

$$3x_1 + 4x_2 + S_1 = 12$$

$$x_1 + 2x_2 + S_2 = 6$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2 \geqslant 0$$

ตารางเริ่มแรก

Basis	X_0	X_1	X_2	S_1	S_2	b	
X_0	1	-6	-10	0	0	0	
S_1	0	3	4	1	0	12	$12/4 = 3^*$
← S_2	0	1	2	0	1	6	$6/2 = 3^*$

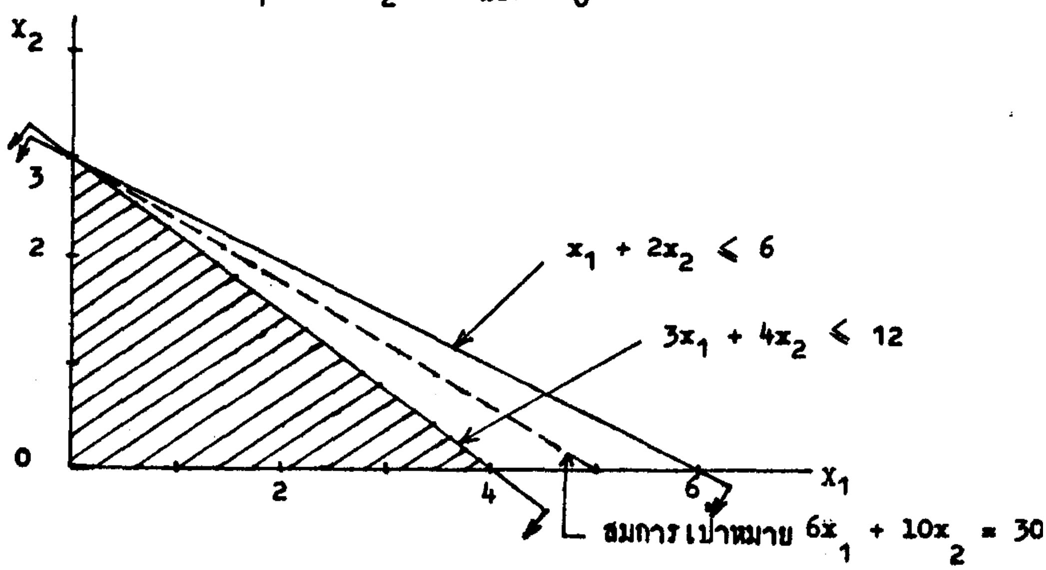
ตารางที่ 2 นำ x_2 เข้า และ s_2 ออก

Basis	x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	b	
x_0	1	-1	0	0	5	30	
%	0	0	10	1	-2	0	$0/1 = 0$
x_2	0	1/2	1	0	1/2	3	$3 \div \frac{1}{2} = 6$

ตารางที่ 3 นำ x_1 เข้า และ s_1 ออก

Basis	x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	b
x_0	1	0	0	1	3	30
x_1	0	1	0	1	-2	0
x_2	0	0	1	-1/2	3'2	3

ผลลัพธ์ที่เหมาะสม คือ $\bar{x}_1 = 0$, $\bar{x}_2 = 3$ และ $\bar{x}_0 = 30$



ตัวอย่างที่ 21 ปัญหา Temporary Degenerate Solution

$$\text{Max } X_0 = 3X_1 + X_2$$

$$6x_1 + 3X_2 \leqslant 18$$

$$6x_1 + X_2 \leqslant 12$$

$$6x_1 - X_2 \leqslant 12$$

$$X_1, X_2 \geqslant 0$$

$$X_0 - 3x_1 - X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 = 0$$

$$6X_1 + 3X_2 + S_1 = 18$$

$$6x_1 + X_2 + s_2 = 12$$

$$6X_1 - X_2 + s_3 = 12$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geqslant 0$$

ตารางเริ่มแรก

Basis	X_0	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	b	
X_0	1	-3	-1	0	0	0	0	
S_1	0	6	3	1	0	0	18	$\frac{18}{6} = 3$
← S_2	0	6	1	0	1	0	12	$12/_6 = 2$
S_3	0	6	-1	0	0	1	12	$12/_6 = 2$

<u>ตารางที่ 2</u> นำ x_1 เข้า และ s_2 ออก

Basis	x_0	x_1	x_2 ↓	s_1	s_2	s_3	b	
x_0	1	0	-1/2	0	1/2	0	6	
← s_1	0	0	2	1	-1	0	6	$6/2 = 3$
x_1	0	1	1/6	0	1/6	0	2	$2 \times \frac{6}{1} = 12$
s_3	0	0	-2	0	-1	1	0	

<u>ตารางที่ 3</u> นำ x_2 เข้า และ s_1 ออก

Basis	x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
x_0	10		0	1/4	1/4	0	15/2
x_2	0	0	1	1/2	-1/2	0	3
x_1	0		10	-1/12	1/4	0	3/2
s_3	0	0	0	1	-2	1	6

ผลลัพธ์ที่เหมาะสม คือ $\bar{x}_1 = 3/2$ $\bar{x}_2 = 3$, $\bar{s}_3 = 6$ $\bar{x}_0 = \frac{15}{2}$

ผลลัพธ์ในตารางที่ 2 เกิด degenerate แต่ในตารางที่ 3 กลับไม่ degenerate แสดงว่าเป็นการ degenerate ชั่วคราว

ดังนั้นจึงแสดงให้เห็นว่า ถึงแม้จะมีการ degenerate เกิดขึ้นก็ไม่ควรหยุดคำนวณ ควรจะทำต่อไปก็จะได้คำเฉลยที่เหมาะสมได้

2. กรณีผลลัพธ์ไม่มีขอบเขต (Unbounded Solutions)

กรณีนี้เกิดขึ้นในกรณีที่มีการกำหนดข้อจำกัดขอบข่ายของปัญหาผิดหรือไม่ได้กำหนดข้อจำกัดขอบข่ายของปัญหาที่จำเป็นไว้ จึงไม่สามารถหาผลลัพธ์ที่ต้องการได้ ทั้งนี้ เพราะเนื้อที่ที่เป็นผลลัพธ์ไม่มีขอบเขต ค่าตามเป้าหมายจะเพิ่มขึ้นจนนับไม่ได้ และไม่สามารถกำหนดได้แน่นอนว่า เท่าใดจึงเป็นผลลัพธ์ที่เหมาะสม เช่น

$$\text{Max } x_0 = 3x_1 + x_2$$

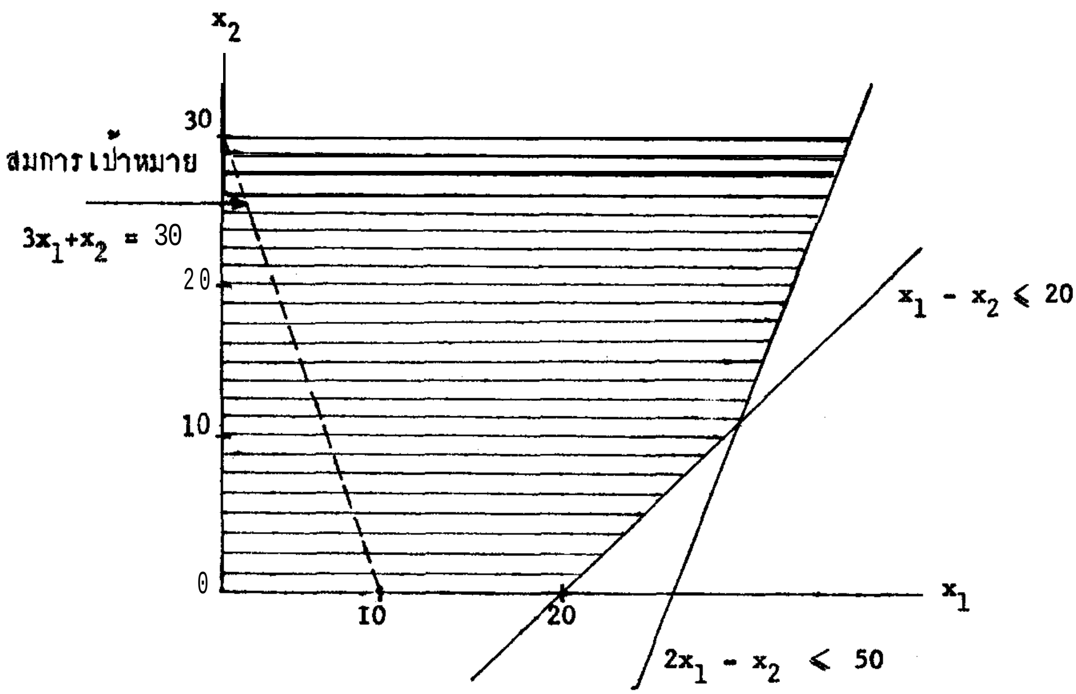
$$\text{ภายใต้ข้อจำกัด } x_1 - x_2 \leqslant 20$$

$$2x_1 - x_2 \leqslant 50$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

ขอให้สังเกตสัมประสิทธิ์ของ x_2 ในข้อจำกัดขอบข่ายของปัญหาติดลบทั้งหมด จึงสรุปได้ว่าปัญหาข้อนี้มีผลลัพธ์ไม่มีขอบเขต ค่าของ x_2 สามารถเพิ่มขึ้นได้อย่างไม่จำกัดให้ดูรูปภาพประกอบ

โดยทั่วไปแล้วผลลัพธ์ที่ไม่มีขอบเขตสามารถตรวจพบได้ ถ้าปรากฏว่าตารางใดก็ตาม ตัวแปรที่เป็นตัวแปรเข้ามาแทนที่ (Entering variable) มีสัมประสิทธิ์ในข้อจำกัดขอบข่ายของปัญหาเป็นลบ หรือมีค่า 0 ทั้งหมด



ในบางกรณีอาจจะเกิดเนื้อที่ที่มีผลลัพธ์ไม่มีขอบเขต แต่มีผลลัพธ์ที่เหมาะสม เช่น

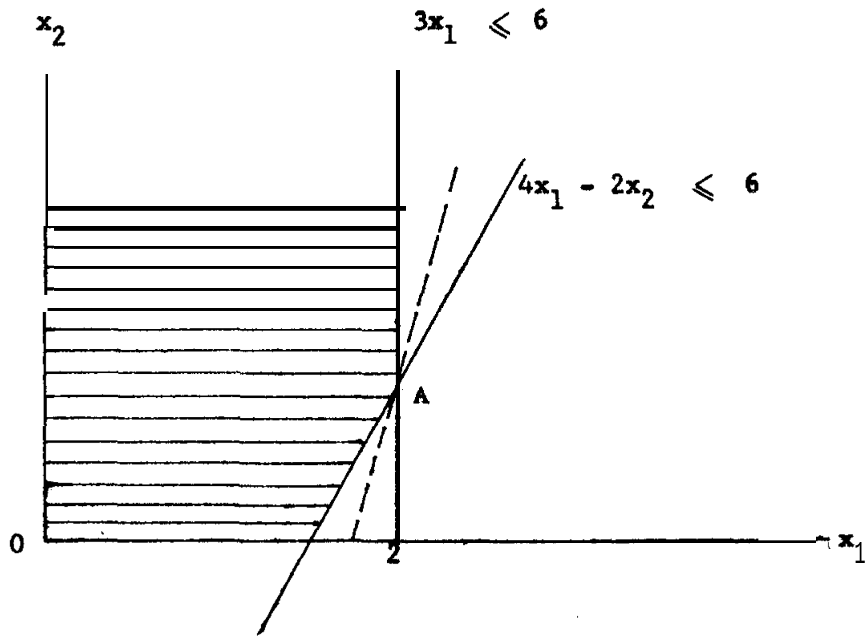
$$\text{Max } x_0 = 7x_1 - 2.15x_2$$

$$\text{ภายใต้ข้อจำกัด} \quad 4x_1 - 2x_2 \leqslant 6$$

$$3x_1 \leqslant 6$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

จะเห็นว่าสัมประสิทธิ์ของ x_2 ในอสมการข้อจำกัดขอบข่ายของปัญหามีค่าติดลบและเป็น o (-2, o) แสดงว่าจะเกิดผลลัพธ์ที่ไม่มีขอบเขต ดูรูปประกอบ



อย่างไรก็ดี ผลลัพธ์ที่เหมาะสมจะมีขอบเขตคือ

$\bar{x}_1 = 2 \quad \bar{x}_2 = 1$ และ $\bar{x}_0 = 11.85$

ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่าปัญหาหนึ่งอาจจะมีเนื้อที่มีผลลัพธ์ไม่มีขอบเขต แต่ก็ยังมีผลลัพธ์ที่เหมาะสมอย่างมีขอบเขตได้

3. <u>กรณีที่มีผลลัพธ์เหมาะสมหลายผลลัพธ์</u> **(Alternative Optimal Solution)**

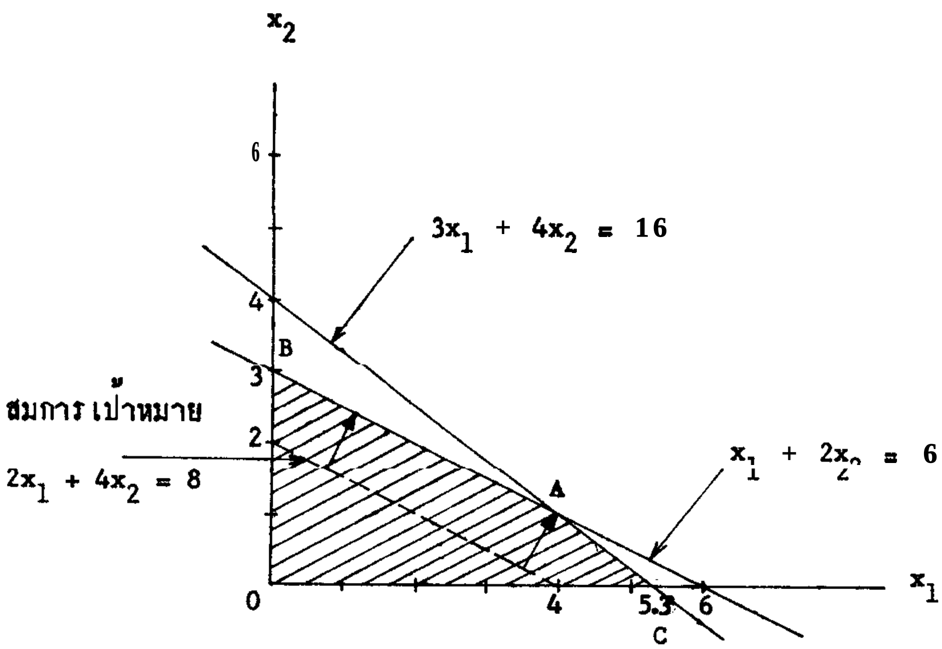
กรณีนี้เกิดขึ้นเมื่อสมการเป้าหมายขนานกับสมการข้อจำกัดขอบข่ายของปัญหา (เส้นตรงสองเส้นนี้มี **Slope** เท่ากัน) ทำให้จำนวนผลลัพธ์ที่เหมาะสมมีมากนับไม่ถ้วนโดยที่แต่ละผลลัพธ์ให้ค่าตามเป้าหมายค่าเดียวกัน เช่น

$$\text{Max} \quad x_0 = 2x_1 + 4x_2$$

ภายใต้ข้อจำกัด $1x_1 + 2x_2 \leqslant 6$

$$3x_1 + 4x_2 \leqslant 16$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0$$



รูปภาพแสดงให้เห็นว่าสมการเป้าหมายขนานกับสมการข้อจำกัดของปัญหา $x_1 + 2x_2 = 6$ และพื้นที่ขอบเขตที่เป็นไปได้ของผลลัพธ์คือ ABOC ถ้าเลื่อนเส้นสมการเป้าหมาย $2x_1 + 4x_2 = 8$ ขึ้นไป จะทับเส้น AB จุดทุกจุดบนเส้น AB จะให้ผลลัพธ์ที่เหมาะสมที่สุดหลายค่า ซึ่งให้ค่าเป้าหมาย (x_0) เดียวกัน

4. <u>กรณีที่ไม่มีผลลัพธ์</u> (**Non** - existing Feasible Solution)

กรณีนี้เกิดขึ้นเมื่อไม่มีค่าหรือผลลัพธ์ใดเลยที่จะเป็นไปได้ภายใต้ข้อจำกัดขอบข่ายของปัญหาทั้งหมด พื้นที่ขอบเขตที่เป็นไปได้ที่อยู่ภายใต้ข้อจำกัดทั้งหมดจะไม่มี จึงไม่มีผลลัพธ์ เช่น

$$\text{Max} \quad x_0 = 4x_1 + 5x_2$$

ภายใต้ข้อจำกัด

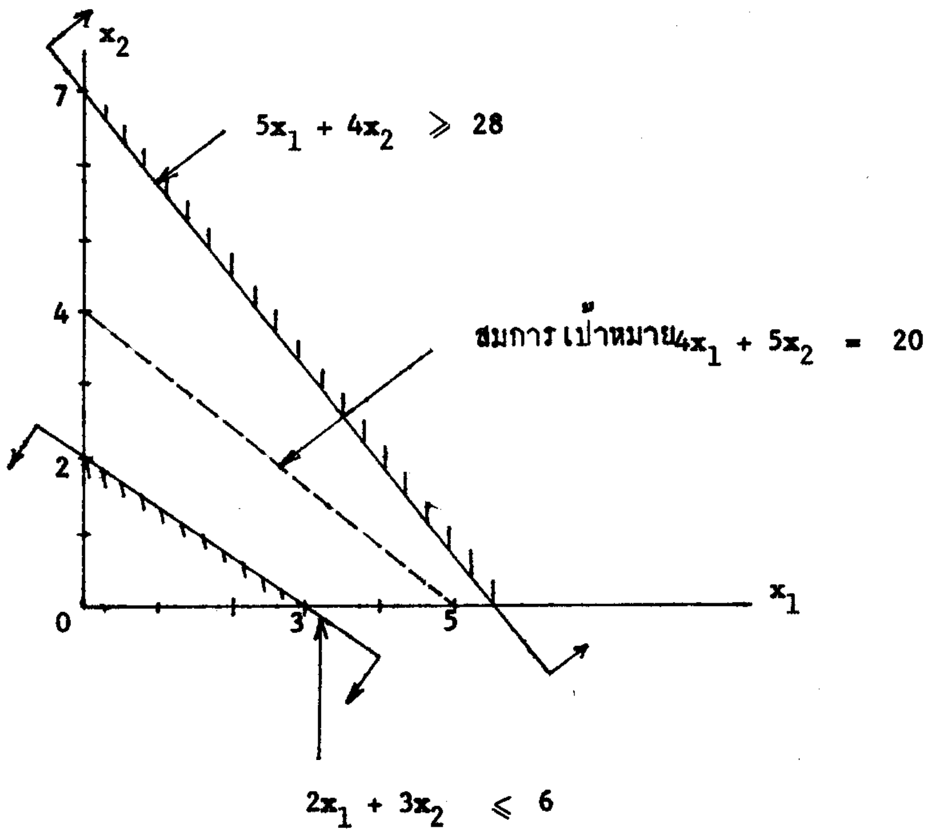
$$2x_1 + 3x_2 \leqslant 6$$

$$5x_1 + 4x_2 \geqslant 28$$

$$x_1 , x_2 \geqslant 0$$

ถ้าหาค่าเฉลยที่ดีที่สุดโดยวิธีซิมเพล็กซ์ค่าสมการเป้าหมายในค่าเฉลยที่ดีที่สุดจะติดค่า M และ ค่าเฉลยที่ดีที่สุดจะยังมีตัวแปรเทียม (A) ค้างอยู่ด้วยค่าบวก แสดงว่าปัญหานี้ไม่มีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้

ถ้าหาค่าเฉลยที่ดีที่สุดด้วยกราฟ รูปภาพจะปรากฏดังนี้



จะเห็นว่าไม่มีพื้นที่ขอบเขตที่เป็นไปได้ที่อยู่ภายใต้ข้อจำกัดทั้งหมด จึงไม่มีผลลัพธ์เกิดขึ้น

<u>แบบฝึกหัดบทที่ 5</u>

ข้อ 1. แม่บ้านผู้หนึ่งกำลังตัดสินใจทำขนมโดนัท ขนมปังทาเนย และคุกกี้ไปขายที่ท่างาน ขนมโดนัทหนึ่งถุงจะต้องใช้แป้งสาลี 2 กรัม ใช้น้ำตาล 1 กรัม และใช้เนย 1 กรัม ขนมปังทาเนยหนึ่งถุงจะต้องใช้แป้งสาลี 1 กรัม ใช้น้ำตาล 3 กรัม และใช้เนย 1 กรัม ส่วนขนมคุกกี้หนึ่งถุงจะต้องใช้แป้งสาลี 3 กรัม ใช้น้ำตาล 2 กรัม และใช้เนย 1 กรัม แม่บ้านผู้นี้ประสงค์ที่จะทำให้ขนมทั้งสามชนิดใช้แป้งสาลีอย่างมากที่สุด 14 กรัมใช้น้ำตาลอย่างมากที่สุด 15 กรัม และใช้เนยอย่างน้อยที่สุด 8 กรัม โดยที่ขนมโดนัทต้องเสียต้นทุนถุงละ 5 บาท ขนมปังทาเนยต้นทุนถุงละ 3 บาท และคุกกี้ต้นทุนถุงละ 14 บาท

ปัญหาก็คือแม่บ้านคนนี้ควรผลิตขนมโดนัท ขนมปังทาเนย และคุกกี้เป็นจำนวนเท่าใดจึงจะเสียต้นทุนต่ำที่สุด

ข้อ 2 ผู้จัดการบริษัทแห่งหนึ่งมีจดหมายธุรกิจที่จะต้องโต้ตอบเป็นการด่วนที่สุดภายใน 20 นาทีข้างหน้านี้จำนวน 8 ฉบับ แต่ขณะนี้พนักงานของบริษัททุกคนต่างมีงานเร่งด่วนทำอยู่แล้วไม่สามารถวางมือจากงานมาพิมพ์จดหมายได้ และประกอบกับมีเครื่องพิมพ์ดีดที่ว่างและใช้การได้อยู่เพียงเครื่องเดียวเท่านั้น

ขณะที่ผู้จัดการกำลังประสบปัญหาเช่นนี้อยู่ พอดีมีบุคคล 3 คนเดินเข้ามาในบริษัทพร้อมกันและต่างก็เสนอบริการรับจ้างพิมพ์ดีด โดยแต่ละคนต่างอ้างว่าตนสามารถพิมพ์ดีดได้ถูกต้องและรวดเร็วและเสนอค่าบริการเป็นรายชั่วโมง (โดยใช้เครื่องพิมพ์ดีดของผู้จ้าง) อัตราชั่วโมงละ 27.00 บาท, 16.20 บาท และ 12.60 บาท สำหรับบุคคลที่ 1, 2 และ 3 ตามลำดับ และถ้าพิมพ์จดหมายธุรกิจจะใช้เวลาพิมพ์ต่อฉบับ 2 นาที, 3 นาทีและ 4 นาที สำหรับบุคคลที่ 1, 2 และ 3 ตามลำดับ และบุคคลที่ 1 จะยินดีรับจ้างพิมพ์จดหมายโดยมีข้อแม้ว่าจะต้องว่าจ้างไม่น้อยกว่า 4 ฉบับ

ถ้าท่านเป็นผู้จัดการบริษัทนี้ ท่านจะตัดสินใจกับปัญหาที่เกิดขึ้นในขณะนี้เช่นไร

เพื่อให้เกิดผลดีที่สุดแก่บริษัท

<u>ข้อเสนอแนะ</u> ให้ x_1, x_2, x_3 เป็นจำนวนจดหมายธุรกิจที่บุคคลที่ 1, 2 3 พิมพ์ได้ตามลำดับ (มีหน่วยเป็นฉบับ)

ข้อ 3. บริษัทเหมืองแร่แห่งหนึ่งเป็นเจ้าของหลุมแร่ 2 หลุม หลุมแร่ทั้งสองแห่งตั้งอยู่คนละภาคของประเทศ และมีกำลังการผลิตต่างกัน หลังจากได้รับการบดแล้ว แร่นั้นจะถูกนำมาจัดเป็น 3 ประเภท เกรด A เกรด B และเกรด C บริษัทได้ทำสัญญาขายและส่งมอบแร่เกรด A 12 ตัน เกรด B 8 ตัน และเกรด C 24 ตัน ต่อสัปดาห์ให้แก่ลูกค้า ในการดำเนินการขุดแร่บริษัทเสียค่าใช้จ่าย 200 บาทต่อวัน และ 160 บาทต่อวันสำหรับหลุมที่ 1 และ 2 ตามลำดับ อย่างไรก็ตามถ้าขุดหลุมที่ 1 หนึ่งวันจะได้แร่เกรด A 6 ตัน เกรด B 2 ตัน และเกรด C 4 ตัน ขณะที่ขุดหลุมที่ 2 จะได้เกรด A 2 ตัน เกรด B 2 ตัน และเกรด C 12 ตันต่อวัน

บริษัทควรดำเนินการขุดกี่วันต่อสัปดาห์ เพื่อที่จะมีแร่ส่งให้ลูกค้าอย่างเพียงพอ โดยจะเสียค่าใช้จ่ายดำเนินการน้อยที่สุด ให้หาคำตอบโดยใช้วิธี Simplex Method

ข้อ 4. บริษัทผลิตรถแห่งหนึ่งผลิตรถยนต์และรถบรรทุกในโรงงานแบ่งเป็น 2 แผนก แผนกที่ 1 เป็นแผนกผลิตจะต้องใช้แรงงาน 5 คนต่อวันในการผลิตรถบรรทุก 1 คัน และใช้ 2 คนต่อวันในการผลิตรถยนต์ 1 คัน แผนกที่ 2 เป็นแผนกประกอบจะใช้แรงงาน 3 คนต่อวันสำหรับรถบรรทุก 1 คันหรือรถยนต์ 1 คันในแผนกที่ 1 มีแรงงาน 180 คนต่อวัน และแผนกที่ 2 มีเพียง 135 คนต่อวัน

ถ้าผู้ผลิตสามารถทำกำไร 3,000 บาทต่อรถบรรทุก 1 คัน และ 2,000 บาทต่อรถยนต์ 1 คัน เขาควรจะผลิตรถบรรทุกและรถยนต์เป็นจำนวนเท่าใดต่อวันจึงจะได้กำไรสูงสุด (ให้ใช้ Simplex Method เท่านั้นในการหาค่าเฉลยที่ดีที่สุด)

ข้อ 5. บริษัทโฮ จำกัด ผลิตบันได 3 ชนิด ชนิดที่ 1 ได้กำไรอันละ 50 บาท ชนิดที่ 2 ได้กำไรอันละ 20 บาท ชนิดที่ 3 ได้กำไรอันละ 80 บาท บันไดแต่ละชนิดต้องผ่านกรรมวิธีการผลิต 3 ขั้นตอน

		กรรมวิธีการผลิต		
		ขั้นตอนที่ 1	ขั้นตอนที่ 2	ขั้นตอนที่ 3
	ชนิดที่ 1 : x_1	4 นาที	5 นาที	6 นาที
บันได	ชนิดที่ 2 : x_2	5	7	9
	ชนิดที่ 3 : x_3	6	7	7
จำนวนเวลาทั้งหมดที่แต่ละขั้นตอนกำหนดให้ใช้ได้		80	100	120

บริษัทโฮ จำกัด ควรผลิตบันไดอย่างไรจึงจะได้กำไรสูงสุด

ข้อ 6. บริษัทแห่งหนึ่งกำลังพิจารณาจัดสรรงบโฆษณาสำหรับปีถัดไปซึ่งตั้งวงเงินไว้ 4 ล้านบาทเพื่อให้ได้รับผลตอบแทนจากการโฆษณาสูงสุด และกะว่าใน 6 เดือนแรกของปีจะใช้งบโฆษณาไม่เกิน 2.5 ล้านบาท สื่อโฆษณาที่พิจารณาได้แก่ หนังสือพิมพ์รายวัน, นิตยสารรายสัปดาห์, วิทยุ และโทรทัศน์ งบประมาณที่จัดสรรให้กับสื่อโฆษณาแต่ละประเภทกำหนดเป็นนโยบาย ดังนี้

1. งบโฆษณาทางหนังสือพิมพ์รายวัน และนิตยสารรายสัปดาห์ สำหรับงวดครึ่งปี จะต้องไม่น้อยกว่า 800,000 บาท

2. งบโฆษณาทางโทรทัศน์สำหรับงวดครึ่งปีจะต้องไม่เกิน 70% ของงบโฆษณาของงวดระยะเวลา 6 เดือน

3. งบโฆษณาทางวิทยุต่อปีไม่น้อยกว่า 30,000 บาท โดยจัดสรรเท่ากันทุกเดือน

4. งบโฆษณาทางโทรทัศน์ครึ่งปีหลังต้องไม่น้อยกว่า 35% ของงบโฆษณาของงวดระยะเวลา 6 เดือน

ผลตอบแทนต่อเงินหนึ่งบาทที่โฆษณาแต่ละประเภท ปรากฏดังนี้

สื่อโฆษณา	ผลตอบแทน (บาท)
วิทยุ	4
โทรทัศน์	25
หนังสือพิมพ์รายวัน	12
นิตยสารรายสัปดาห์	10

ให้เขียนตัวแบบปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรง เพื่อวางแผนจัดสรรงบโฆษณาไปยังสื่อต่าง ๆ ว่าควรจะเป็นเท่าใด

ข้อ 7. บริษัทขนส่งแห่งหนึ่งต้องการทราบว่า ควรจะซื้อน้ำมันสำหรับรถบรรทุกจากบริษัทน้ำมัน 3 บริษัท เป็นจำนวนเท่าไร บริษัทขนส่งแห่งนี้จะเติมน้ำมันรถที่สถานีเติมน้ำมันของบริษัทเอง 3 สถานี บริษัทน้ำมันสามารถที่จะขายน้ำมันในเดือนหน้าให้แก่บริษัทขนส่งได้ดังนี้ บริษัทที่ 1, บริษัทที่ 2 และบริษัทที่ 3 ขายให้ได้อย่างมากไม่เกิน 300,000 ลิตร, 600,000 ลิตร และ 800,000 ลิตร ตามลำดับ โดยที่สถานีเติมน้ำมันต้องการใช้น้ำมันในเดือนหน้าดังนี้ สถานีที่ 1, สถานีที่ 2 และสถานีที่ 3 มีความต้องการอย่างน้อย 200,000 ลิตร, 150,000 ลิตร และ 300,000 ลิตร ตามลำดับ

ราคาน้ำมันรวมค่าขนส่งต่อลิตรจากบริษัทน้ำมันไปยังสถานีต่าง ๆ ของบริษัทขนส่ง แสดงอยู่ในตารางข้างล่าง

	สถานีที่ 1	สถานีที่ 2	สถานีที่ 3
บริษัทน้ำมันที่ 1	4	6	5
บริษัทน้ำมันที่ 2	8	7	4
บริษัทน้ำมันที่ 3	6	3	5

จงเขียนตัวแบบของปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นตรงโดยไม่ต้องหาคำเฉลย

ข้อ 8. บริษัทตัวแทนจำหน่ายนมสดชนิดพาสเจอร์ไรซ์และโยเกิร์ตแห่งหนึ่งในเขตกรุงเทพมหานคร วางแผนที่จะจ้างพนักงานรายวันทำหน้าที่ส่งสินค้าให้ถึงบ้านพักอาศัยของลูกค้าที่เป็นสมาชิกประจำ เนื่องจากงบประมาณมีจำกัดจึงกำหนดว่าจ้างได้ไม่เกิน 25 คน จากประสบการณ์ที่ผ่านมาผู้ที่เคยผ่านงานมาก่อน 1 คน สามารถส่งนมสดได้ 200 ถุง และโยเกิร์ตได้ 80 ขวด/วัน สำหรับผู้ที่ไม่เคยผ่านงานมาก่อน 1 คน สามารถส่งนมสดได้ 120 ถุง และโยเกิร์ตได้ 30 ขวด/วัน

ในช่วงนี้คาดว่าแต่ละวันจะมีความต้องการนมสดเพิ่มขึ้นอย่างน้อย 4,200 ถุง และโยเกิร์ตอย่างน้อย 880 ขวด อัตราค่าจ้างสำหรับผู้ที่เคยผ่านงานวันละ 120 บาท ผู้ที่ไม่เคยผ่านงานวันละ 80 บาท บริษัทควรวางแผนจ้างคนงานอย่างไรจึงจะเสียค่าจ้างน้อยที่สุด

ข้อ 9. บริษัทผลิตน้ำปลาแห่งหนึ่งมีโรงงานผลิตน้ำปลาอยู่ 3 แห่ง ซึ่งตั้งอยู่ใกล้แหล่งวัตถุดิบในที่ต่างกัน และน้ำปลาที่ผลิตสำเร็จแล้วจะส่งไปให้ตัวแทนขายในเขตต่าง ๆ จึงทำให้เกิดปัญหาการจัดส่งสินค้าจากโรงงานไปยังตัวแทน ทั้งนี้เนื่องจากค่าขนส่งจากโรงงานแต่ละแห่งไปยังตัวแทนแต่ละเขตแตกต่างกัน โดยขึ้นอยู่กับระยะทางที่ขนส่ง รวมถึงต้นทุนการผลิตต่อหน่วยของแต่ละโรงงาน ตลอดจนราคาขายต่อหน่วยที่สามารถขายได้ในแต่ละเขตด้วย

ตารางค่าขนส่งต่อหน่วยจากโรงงานไปยังตัวแทนขายกำลังการผลิตต่อสัปดาห์และต้นทุนการผลิตต่อหน่วยของโรงงานแต่ละแห่ง ตลอดจนปริมาณที่ตัวแทนขาย

สามารถขายได้ในแต่ละสัปดาห์และราคาขายต่อหน่วย ปรากฏดังตารางข้างล่างนี้

ถึง / จาก	ค่าขนส่งต่อหน่วย (บาท) จากโรงงานไปยังตัวแทนขาย			กำลังการผลิต (หน่วย)	ต้นทุนการผลิตต่อหน่วย (บาท)
	เขต ก	เขต ข	เขต ค		
โรงงาน 1	2.0	1.5	1.8	500	3.0
โรงงาน 2	1.8	1.6	2.0	400	3.5
โรงงาน 3	1.5	1.8	1.9	500	3.2
ปริมาณขาย (หน่วย)	350	400	450		
ราคาขายต่อหน่วย (บาท)	5.6	5.8	6.0		

บริษัทควรวางแผนจัดส่งสินค้าจากโรงงานแต่ละแห่งไปยังตัวแทนขายอย่างไร จึงจะได้รับกำไรสูงสุด ให้ท่านเขียนตัวแบบของโปรแกรมเชิงเส้นตรงของปัญหาดังกล่าว

ข้อ 10. โรงงานแกะสลักไม้ "นงนุชอุตสาหกรรม" ผลิตไม้แกะสลัก 3 แบบ คือ ช้างไม้ สิงห์โตแกะสลัก **และกวางไม้** โดยมีองค์ประกอบการผลิตสองอย่างคือ ไม้และช่างฝีมือ ในการผลิตช้างไม้ 1 ตัว ต้องใช้ไม้ 0.06 ลูกบาศก์เมตร แรงงาน 21 ชั่วโมง การผลิตสิงห์โตแกะสลัก 1 ตัวต้องใช้ไม้ 0.04 ลูกบาศก์เมตร แรงงาน 12 ชั่วโมง และกวางไม้ 1 ตัวต้องใช้ไม้ 0.03 ลูกบาศก์เมตร แรงงาน 6 ชั่วโมง สำหรับไม้โรงงานเหมาจากโรงเลื่อยมาวันละ 1.2 ลูกบาศก์เมตรด้วยราคาลูกบาศก์เมตรละ 2,000 บาท ส่วนทางด้านช่างฝีมือโรงงานมีอยู่ด้วยกัน 45 คน โดยจ่ายค่าแรงงานวันละ 80 บาทต่อคน ต้องทำงานคนละ 10 ชั่วโมงต่อวันตั้งแต่ 8.00 - 18.00 น.

โรงงานขายช้างไม้ตัวละ 360 บาท สิงห์โตแกะสลักราคาขายตัวละ 212 บาท กวางไม้ราคาขายตัวละ 138 บาท ทางโรงงานต้องการทราบว่าจะจัดดำเนินการผลิตเช่นใดจึงจะทำให้ผลกำไรมากที่สุด และมีองค์ประกอบการผลิตใดบ้างที่ใช้ไม่หมด

ข้อ 11. ลูกค้าคนหนึ่งของบริษัทลีกัล ต้องการของผสมทางเคมีชนิดหนึ่ง 1000 ปอนด์ของผสมทางเคมีชนิดนี้ประกอบด้วยวัตถุดิบ 3 ชนิด ต้นทุนต่อปอนด์ของวัตถุดิบแต่ละชนิดปรากฏดังนี้

x_1	2	บาทต่อปอนด์
x_2	3	บาทต่อปอนด์
x_3	4	บาทต่อปอนด์

ลูกค้าต้องการได้ของผสมนี้เป็นไปตามเงื่อนไขต่าง ๆ ข้างล่างนี้

ก. ของผสมนี้ต้องใช้ x_2 อย่างน้อยที่สุด 200 ปอนด์

ข. ของผสมนี้จะมี x_1 เกินกว่า 400 ปอนด์ไม่ได้

ค. ของผสมนี้จะต้องมี x_3 อย่างน้อยที่สุด 100 ปอนด์

ให้กำหนดของผสมที่มีต้นทุนน้อยที่สุดสำหรับของผสม 1,000 ปอนด์ ตามความต้องการของลูกค้า

ข้อ 12. แม่บ้านผู้หนึ่งใช้เวลาว่างทำขนมและของว่างต่าง ๆ จำหน่ายโดยการส่งให้ร้านค้าประจำหรือบางครั้งก็ออกร้านในงานเทศกาลต่าง ๆ ด้วย ปรากฏว่าฝีมือในการทำขนมเป็นที่เลื่องลือได้รับความนิยมจากแม่บ้านเป็นอย่างมาก ในงานกาชาดที่จะมีขึ้นในเดือนกุมภาพันธ์นี้ จึงได้ไปจับจองเช่าสถานที่สำหรับออกร้านเช่นเคย โดยเสียค่าเช่า 500 บาท ตั้งใจว่าจะทำวุ้นกรอบบรรจุกล่องพลาสติกเพิ่มขึ้นอีกอย่างหนึ่ง และเพื่อให้น่ารับประทานก็จะทำเป็นพิมพ์รูปดอกไม้สีแดง และสีเหลือง ประมาณว่าแต่ละกล่องต้องบรรจุอย่างน้อย 35 ชิ้น เป็นดอกไม้สีแดงอย่างต่ำ 10 ชิ้น ดอกไม้สีแดงชิ้นหนึ่งหนัก 1.6 ออนซ์ สีเหลืองชิ้นหนึ่งหนัก 0.8 ออนซ์ขนมที่จะบรรจุกล่องต้องมีน้ำหนักอย่างน้อย 32 ออนซ์ กล่องที่จะใช้บรรจุขนมนี้มีเนื้อที่ที่จะวางขนมได้ทั้งหมด 65 ตารางนิ้ว วุ้นกรอบที่จะวางในกล่อง จะต้องใช้พื้นที่อย่างต่ำ 40 ตารางนิ้วและไม่มีการวางซ้อนกัน วุ้นพิมพ์ดอกไม้สีแดง และเหลืองต้องใช้เนื้อที่ในการวางชิ้นละ 2 และ 1 ตารางนิ้ว ตามลำดับ ต้นทุนของขนมแต่ละกล่อง (ไม่รวมค่ากล่อง) ไม่ควรเกิน 6 บาท ต้นทุนของดอกไม้สีแดงและสีเหลืองชิ้นละ 20 และ 10 สตางค์ ตามลำดับ

อยากทราบว่าแม่บ้านผู้นี้จะต้องบรรจุวุ้นกรอบสีแดง และสีเหลืองในส่วนผสมเท่าไรจึงเสียต้นทุนน้อยที่สุด