บทที่ 11
ทฤษฎีของเกมส์
(Games Theory)

เกมส์ หมายถึง สถานการณ์ที่มีการแข่งขันหรือการขัดแย้ง คู่แข่งขันอาจเป็นบุคคลหรือกลุ่มบุคคลที่มีจำนวนตั้งแต่ 2 บุคคลหรือ 2 กลุ่มขึ้นไปมาแข่งขันกันโดยมีผลได้ผลเสียเป็นเดิมพัน ผู้ที่เข้าแข่งขันในแต่ละฝ่ายต่างก็ต้องศึกษาถึงกฎเกณฑ์การเล่นและยึดหลักเกณฑ์ที่วางไว้เป็นหลัก แต่ละฝ่ายจะอาศัยประสบการณ์พยายามคาดคะเนล่วงหน้าถึงวิธีเล่นของอีกฝ่ายหนึ่ง เพื่อที่จะได้ใช้วิธีของตนเข้าแข่งขัน คู่แข่งขันแต่ละฝ่ายมีทางหรือวิธีให้เลือกหลายวิธีต่าง ๆ กัน ทางที่ให้เลือกนี้เรียก กลยุทธ (Strategy) ต่างตัดสินใจเลือกกลยุทธ (Strategy) โดยใช้เหตุผลความจริงเข้าช่วยเพื่อให้ตนได้รับชัยชนะ ผลของการแข่งขันจะมีผู้ได้และผู้ที่เสีย ผู้ที่ได้จะได้ค่าตอบแทนจากผู้ที่เสีย ค่าตอบแทนที่เกิดขึ้นเราสร้างเป็นตารางตอบแทนได้ (Payoff Matrix) คู่แข่งขันต่างก็ใช้เทคนิคทางคณิตศาสตร์ โดยพยายามเลือกกลยุทธที่ดีที่สุดเพื่อจะได้ชัยชนะ การแข่งขันประเภทนี้สามารถพบได้ในทางการตลาด เศรษฐกิจ สังคม การเมือง การอุตสาหกรรม และปัญหาทางการทหาร เป็นต้น

จอห์น ฟอน นิวแมน (John Von Neumann) และออสการ์ มอร์เกนสเติร์น (Oskar Morganstern) เป็นผู้คิดทฤษฎีนี้ขึ้นเมื่อปี 1928 โดยแบ่ง ทฤษฎีเกมส์ออกเป็น

1. เกมส์ที่มีผู้แข่งขันตั้งแต่ 2 ฝ่ายขึ้นไปประจัญหน้าซึ่งกันและกันเพื่อแสวงหาวัตถุประสงค์ที่ขัดกัน (Competitive) มีผู้ได้และผู้เสีย ผู้แข่งขันบางคน(ฝ่าย) อาจจะชนะและได้รับการจ่ายเป็นบวก (Positive Payoff) ในขณะที่ผู้แข่งขันฝ่ายอื่นอาจจะแพ้และได้รับการจ่ายที่เป็นลบ (Negative Payoff)

2. เกมส์ที่มีผู้แข่งขันคนเดียว แข่งขันกับโอกาสที่เกิดขึ้นหรือกับธรรมชาติ (Non Competitive)

<u>คุณสมบัติของเกมส์ในการแข่งขัน</u>

ในการเล่นเกมส์ เราจะตั้งข้อสมมติในการแข่งขันดังนี้

1. คู่แข่งขันมีจำนวนจำกัด คือ นับจำนวนได้ (Finite Number)

2. ถ้าสมมติมีผู้แข่งขันทั้งหมดเท่ากับ N คน ผู้แข่งขันแต่ละคนต่างมีแผนการหรือกลยุทธ (Strategy) ที่แน่นอนอยู่เป็นจำนวนจำกัด คือ นับได้เพื่อเข้าสู่ในการแข่งขัน จำนวนแผนการหรือกลยุทธของผู้แข่งขันแต่ละคนไม่จำเป็นต้องเท่ากัน

3. ผู้แข่งขันแต่ละคนฉลาดมองสถานการณ์ต่าง ๆ ทุกอย่างรู้หมด (Known Courses of action) แต่ไม่สามารถรู้ล่วงหน้าอย่างแน่นอนเลยว่า คู่แข่งขันของตนจะใช้กลยุทธไหน

4. มีกำไร / ขาดทุนในการเล่นที่แน่นอน (Finite Gain)

5. ผลตอบแทนที่ผู้แข่งขันแต่ละคนได้รับขึ้นอยู่กับการกระทำหรือการตัดสินใจของคู่แข่งขันทุกฝ่าย (Gain depends on all actions)

6. ค่าของเกมส์สามารถคำนวณออกมาได้ว่า ใครได้เท่าไร เสียเท่าไร และผู้ใดไม่ได้ ไม่เสีย (All outcomes can be Calculated)

<u>กลยุทธในการแข่งขัน</u>

กลยุทธ (Strategy) คือ ทางเลือกที่ผู้แข่งขันจะเลือกใช้ ผู้แข่งขันแต่ละฝ่ายจะมีกลยุทธกี่วิธีก็ได้ขึ้นอยู่กับความสามารถของผู้แข่งขันแต่ละฝ่าย กลยุทธมี 2 ประเภท คือ

ก. กลยุทธแท้ (Pure Strategy)

ข. กลยุทธผสม (Mixed Strategy)

<u>กลยุทธแท้</u> (Pure Strategy) คือ กลยุทธหนึ่งในจำนวนกลยุทธทั้งหมดที่มีอยู่ซึ่งผู้แข่งขันจะตัดสินใจเลือกกลยุทธนี้เท่านั้น เข้าต่อสู้ในการแข่งขันทุกครั้ง ไม่เปลี่ยนไปเล่นวิธีอื่นกลยุทธแท้นี้จะมีจุดอานม้าหรือจุดผลเท่ากัน (Saddle Point) และหาค่าของเกมส์ (Value of game) ได้

<u>กลยุทธผสม</u> (Mixed Strategies) คือ การที่ผู้แข่งขันมิได้เล่นกลยุทธใดกลยุทธหนึ่งแต่เพียงกลยุทธเดียวเข้าแข่งขัน จะเล่นหลายกลยุทธผสมกัน ส่วนจะใช้กลยุทธไหนขึ้นอยู่กับความน่าจะเป็นที่กำหนดไว้สำหรับกลยุทธนั้น ๆ และถ้าผู้แข่งขันเล่นตามสัดส่วนหรือความน่าจะเป็นนั้นจะคิดค่าของเกมส์ออกมาได้ วิธีหาค่าของเกมส์และกลยุทธที่ดีที่สุดของคู่แข่งขันทั้งสองฝ่ายมีวิธีคำนวณได้หลายวิธี

<u>เกมส์การแข่งขัน 2 ฝ่ายที่มีผลรวมเท่ากับศูนย์</u> (Two Persons Zero-Sum Games)

ในเกมส์การแข่งขัน 2 ฝ่าย ผลรวมเป็นศูนย์ ประกอบด้วยผู้แข่งขันสองคนหรือ 2 ฝ่าย เมื่อฝ่ายหนึ่งชนะจำนวนเท่าใดก็หมายถึงอีกฝ่ายหนึ่งจะเสียเป็นจำนวนเท่านั้น จึงทำให้ผลรวมของผลได้และผลเสียของคู่แข่งขันเป็นศูนย์ เช่น

นาย ก. และ นาย ข เล่นเกมส์กัน ก เล่นชนะได้ 50 บาท ข เล่นแพ้ก็จะเสีย 50 บาท ผลรวมที่ได้จะเป็น+50-50 = 0 โดยทั่วไปแล้ว เกมส์การแข่งขัน 2 คน ผลรวมเป็นศูนย์นั้นมักนิยมแสดงด้วย แมทหริกซ์ 2 แมทหริกซ์ แมทหริกซ์หนึ่งเป็นผลได้ของ A ส่วนอีกแมทหริกซ์หนึ่งเป็นผลได้ของ B ค่าของตัวเลขในแมทหริกซ์ B ก็คือ ค่าลบของจำนวนผลประโยชน์ที่ผู้แข่งขัน A ได้รับ แสดงได้ดังนี้

Payeff Matrix ของ A

	กลยุทธผู้แข่งขัน B 1	2	3 - - - - - n
กลยุทธ 1	a_{11}	a_{12}	a_{13} - - - a_{1n}
ผู้แข่งขันA 2	a_{21}	a_{22}	a_{23} - - - - a_{2n}
⋮	⋮		⋮
m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3} - - - a_{mn}

Payeff Matrix ของ B

	กลยุทธผู้แข่งขัน B 1	2	3 - - - - - m
1	$-a_{11}$	$-a_{12}$	$-a_{13}$ - - - $-a_{1n}$
กลยุทธ 2	$-a_{21}$	$-a_{22}$	$-a_{23}$ - - - $-a_{2n}$
ผู้แข่งขัน A 2	⋮		⋮
m	$-a_{m1}$	$-a_{m2}$	$-a_{m3}$ - - - $-a_{mn}$

เนื่องจากเกมส์ที่กล่าวนี้มีผู้แข่งขันสองคนคือ A กับ B เนื่องจากผลประโยชน์ที่ฝ่ายหนึ่งได้ไป ก็คือผลประโยชน์ที่อีกฝ่ายหนึ่งเสียไป ซึ่งเป็นจำนวนที่เท่ากัน ด้วยเหตุนี้ เกมส์ที่มีผู้เล่นสองคนและผลรวมเท่ากับศูนย์ จึงนิยมแสดงเฉพาะแมทริกซ์ผลลัพธ์ของผู้แข่งขัน A เพียงแมทริกซ์เดียว ส่วนผลลัพธ์ของ B จะเป็นค่าลบในแมทริกซ์ผลลัพธ์ของผู้แข่งขัน A นั่นเอง

ค่าของเกมส์ (Value of the game)

ค่าของเกมส์ คือผลตอบแทนเฉลี่ยที่ผู้แข่งขันฝ่ายหนึ่งฝ่ายใดจะได้ต่อการเล่นหนึ่งครั้ง ค่าของเกมส์เป็นค่าถัวเฉลี่ยของการเล่นหลายครั้งต่อเนื่องกัน อีกนัยหนึ่งค่าของเกมส์ ก็คือค่าคาดหมายที่เป็นไปได้ของฝ่ายใดฝ่ายหนึ่งจะได้หรือจะเสียหลังจากที่เล่นเกมส์นั้นหลายครั้งต่อเนื่องกัน

1. <u>ค่าของเกมส์ที่ดีที่สุดเมื่อผู้แข่งขันใช้กลยุทธแท้</u>

เกมส์การแข่งขันที่ผู้แข่งขันเมื่อเล่นไปหลายครั้งแล้วพบว่ามีเพียงกลยุทธใดกลยุทธหนึ่งเพียงกลยุทธเดียวที่ประกันผลได้ให้แก่ผู้แข่งขันว่าได้มากกว่ากลยุทธอื่น ดังนั้นผู้แข่งขันจะใช้กลยุทธนี้เข้าแข่งขันทุกครั้ง เรียกว่า กลยุทธแท้ ซึ่งเป็นกลยุทธที่ดีที่สุดของผู้แข่งขัน เพราะถ้าเขานำกลยุทธนี้ออกมาใช้ทุกครั้งของการแข่งขันแล้ว ผลตอบแทนเฉลี่ยที่ได้จากการแข่งขันหลาย ๆ ครั้งจะมีค่ามากกว่ากรณีที่เขานำเอากลยุทธอื่นออกมาใช้

ผู้แข่งขันแต่ละคนจะเลือกกลยุทธใดของตนเป็นกลยุทธแท้ที่จะนำไปใช้ในการแข่งขันทุกครั้ง มีหลักเกณฑ์อยู่หลายหลักเกณฑ์ที่สามารถจะนำมาช่วยพิจารณาตัดสินใจว่าผู้แข่งขันแต่ละคนจะเลือกกลยุทธใดเป็นกลยุทธแท้สำหรับตน อาจใช้

- หลักเกณฑ์ลาปลาส (Laplace Criteria)
- หลักเกณฑ์เพิ่มค่าที่น้อยที่สุด (Maximin Criteria)
- หลักเกณฑ์เพิ่มค่าที่มากที่สุด (Maximax Criteria)
- หลักเกณฑ์เฮอร์วิคซ์ (Hurwicz Criteria)
- หลักเกณฑ์ลดค่าที่มากสุด (Minimax Criteria)

ในที่นี้จะกล่าวถึงเฉพาะหลักเกณฑ์ Maximin และหลัก Minimax เข้ามาช่วยคำนวณหาค่าของเกมส์ที่ดีที่สุดเท่านั้น

<u>หลักเกณฑ์แมกซิมินและมินนิแมกซ์</u> (Maximin and Minimax Criterion)

ในการแก้ปัญหาของเกมส์โดยใช้หลักเกณฑ์ Maximin และ Minimax เข้ามาช่วยนี้จะสมมติว่า

ผู้เล่น	A	จะเลือกเกณฑ์	Maximin
"	B	"	Minimax

เข้ามาช่วยในการตัดสินใจว่าตนจะเลือกกลยุทธใดเข้าแข่งขัน

หลักเกณฑ์ <u>Maximin</u> คือ การหาค่าที่มากสุดจากผลได้ที่น้อยที่สุด (Maximize the Minimum Gain) หลักเกณฑ์นี้เป็นพวกที่ชอบมองโลกในแง่ร้าย คิดว่าสิ่งที่ร้ายที่สุดจะเกิดขึ้นก่อน ผู้แข่งขัน A จะเลือกผลได้ที่น้อยที่สุดของแต่ละกลยุทธของตน

ออกมาและจะเลือกใช้กลยุทธที่ทำให้ได้รับผลได้ที่มากสุดจากผลได้ที่น้อยสุดที่เลือกมานั้น ผู้แข่งขัน A จะมักน้อยไว้ก่อน โดยไม่คิดว่าถ้าเลือกกลยุทธอื่นอาจได้ผลได้มากกว่านี้ กลยุทธที่เลือกจึงเป็นกลยุทธแท้

หลักเกณฑ์ Minimax ก็คือ การหาค่าที่น้อยสุดจากผลเสียที่มากสุด ของแต่ละกลยุทธที่มีอยู่ (Minimize the Maximum Loss) หลักเกณฑ์นี้ ผู้แข่งขัน B จะเลือกผลเสียที่มากสุดของแต่ละกลยุทธของตนออกมา กลยุทธแท้ที่ผู้แข่งขัน B จะเลือกก็คือกลยุทธที่ทำให้เขาเสียน้อยที่สุดจากผลเสียที่มากที่สุด เพื่อประกันว่าตนจะเสียประโยชน์น้อยที่สุด ไม่ว่าคู่แข่งขัน A จะเลือกกลยุทธใดออกมาแข่งขัน

ตัวอย่างที่ 1 ห้างสรรพสินค้า A และ B ต่างก็อยู่ในย่านรามคำแหงทั้งคู่ จึงพยายามใช้กลยุทธการส่งเสริมการขายเพื่อดึงดูดให้ลูกค้ามาซื้อสินค้ายังห้างของตน ห้างสรรพสินค้า A ได้ศึกษาข้อมูลพบว่ายอดขายของห้างขึ้นอยู่กับกลยุทธการส่งเสริมการขายของตนและคู่แข่งขัน B ดังนี้ (หน่วย : ล้านบาท)

		B: ลดราคา (1)	แจกของแถม (2)	คูปอง (3)	แสตมป์การค้า (4)	ค่าต่ำสุดของแถวนอน	
A	ลดราคา (1)	9	12	18	8	8	
	แจกของแถม (2)	15	-4	1	9	-4	
	ชิงโชคชิงรางวัล (3)	11	12	13	10	10	Maximin
	ค่าสูงสุดของแถวตั้ง	15	12	18	10		
					Minimax		

Maximin = Minimax

ห้างสรรพสินค้า A และ B ควรเลือกใช้กลยุทธการส่งเสริมการขายวิธีใด จึงจะทำให้ได้รับยอดขายเฉลี่ยสูงสุดในระยะยาว

<u>วิธีทำ</u> ถ้าผู้แข่งขัน A เลือกกลยุทธที่ 1 เข้าแข่งขัน เขาจะได้ผลได้เท่ากับ 9, 12, 18, 8 ถ้าผู้แข่งขัน B เลือกใช้กลยุทธ 1, 2, 3, 4 มาใช้แข่งขันตามลำดับ ผู้แข่งขัน A จะประกันผลได้จากการแข่งขันอย่างน้อยเท่ากับ 8 ถ้าเขาเลือกกลยุทธที่ 1 ไม่ว่า B จะใช้กลยุทธใดในทำนองเดียวกัน ถ้า A เลือกกลยุทธ 2 เข้าแข่งขัน เขาก็สามารถประกันได้ว่าอย่างน้อยที่สุดผลได้ของเขาจะเท่ากับค่าน้อยที่สุดของ 15, -4, 1, 9 ซึ่งเท่ากับ -4 ถ้าเขาเลือกกลยุทธที่ 3 เข้าแข่งขันเขาก็สามารถประกันได้ว่า อย่างน้อยที่สุดผลได้ของเขาจะเท่ากับค่าน้อยที่สุดของ 11, 12, 13, 10 ซึ่งเท่ากับ 10

ผู้แข่งขัน A เลือกกลยุทธ 3 ซึ่งจะทำให้เขาได้รับผลได้มากที่สุดจากผลได้ต่ำสุดคือ 10 จาก 8, -4, 10

ผู้แข่งขัน A จะใช้หลักเกณฑ์ Maximin เข้ามาช่วยพิจารณาเลือกกลยุทธแท้ที่จะใช้ในการแข่งขันทุกครั้ง เพราะจะประกันผลได้มากที่สุดจากผลได้ต่ำสุดจากการแข่งขันทุกครั้ง ซึ่งจะได้มากกว่าเลือกกลยุทธอื่น

ในทางตรงกันข้าม ถ้ามาพิจารณาฝ่ายคู่แข่งขัน คือผู้แข่งขัน B บ้าง ผู้แข่งขัน B พยายามจะลดจำนวนผลเสียของเขาให้น้อยที่สุดเท่าที่จะทำได้ (Minimize the Losses) ผู้แข่งขัน B รู้ว่าถ้าเขาเลือกกลยุทธที่ 1 ออกแข่งขัน ผลเสียที่เขาจะเสียมากที่สุดก็คือ ค่าที่มากที่สุดของ 9, 15, 11 ซึ่งเท่ากับ 15 โดยไม่คำนึงถึงว่าผู้แข่งขัน A จะใช้กลยุทธใดออกแข่งขัน ในทำนองเดียวกันถ้าผู้เล่น B เลือกกลยุทธที่ 2 เข้าแข่งขันผลเสียที่เขาจะเสียมากที่สุดคือ 12 ถ้าผู้เล่น B เลือกกลยุทธที่ 3 และกลยุทธที่ 4 เข้าแข่งขัน ผลเสียที่เขาจะเสียมากที่สุดก็คือ 18 และ 10 ตามลำดับ ค่าสูงสุดหรือมากที่สุดของแต่ละแถวยืนแสดงไว้ในเมทริกซ์ข้างต้น ค่าสูงสุดของแถวยืนนี้ก็คือผลเสียที่มากที่สุด (Maximum Losses) ของผู้แข่งขัน B เมื่อเขาเลือกแต่ละกลยุทธที่เขามีอยู่ออกมาต่อสู้ ผู้แข่งขัน B สามารถลดค่าผลเสียที่มากที่สุดลงได้โดยเลือกกลยุทธที่ให้ค่าน้อยที่สุดจากค่าผลเสียที่มากที่สุด นั่นคือ ถ้าผู้แข่งขัน B เลือกกลยุทธที่ 4 แล้ว ผลเสียที่น้อยสุดจากผลเสียที่มากที่สุดของเขาจะเท่ากับ 10 ผลเสียที่เท่ากับ 10 นี้

หามาได้จากการเลือกค่าที่น้อยที่สุดของ 15, 12, 18, 10 เพราะฉะนั้นถ้าผู้แข่งขัน B เลือกกลยุทธ์ที่ 4 เป็นกลยุทธ์แท้ของเขาในการแข่งขันทุกครั้งแล้ว ผลเสียที่มากที่สุดของเขาจะเท่ากับ 10 และถ้าเขาเลือกกลยุทธ์อื่นมาใช้ ผลเสียที่มากที่สุดของเขาจะต้องมากกว่าหรืออย่างน้อยที่สุดก็เท่ากับ 10 เสมอ ในกรณีนี้ผู้แข่งขัน B จะใช้หลักเกณฑ์ Minimax เข้ามาช่วยพิจารณาเลือกกลยุทธ์แท้เข้าแข่งขันทุกครั้งไป

โดยทั่วไปแล้ว ในเกมส์การแข่งขันสองคนผลรวมเท่ากับศูนย์นั้น ค่ามินนิแมกซ์ (Minimax Value) จะมากกว่าหรือเท่ากับค่าแมกซิมิน (Maximin Value) ในกรณีที่ค่ามินนิแมกซ์เท่ากับค่าแมกซิมินนั้น แสดงว่าเกมส์การแข่งขันมีจุดผลเท่ากับ (Saddle Point) กลยุทธ์แท้ของผู้แข่งขัน A และผู้แข่งขัน B ที่ผ่านจุดผลเท่ากันนั้น ถือว่าเป็นกลยุทธ์ที่ดีที่สุดของผู้แข่งขันทั้งสอง (Optimal Strategy) ในการเล่นเกมส์ในตัวอย่างนี้ กลยุทธ์ที่ดีที่สุดของห้างสรรพสินค้า A คือ กลยุทธ์ที่ 3 (ชิงโชคชิงรางวัล) และกลยุทธ์ที่ดีที่สุดห้างสรรพสินค้า B ก็คือกลยุทธ์ที่ 4 (แสตมป์การค้า) ค่าผลได้ผลเสียที่กลยุทธ์ทั้งคู่ (ของ A และ B) ตัดกันในเมตทริกซ์ผลตอบแทน (Payoff Matrix) นั้น เรียกว่าค่าของเกมส์ที่ดีที่สุด (Optimal Value of the Game)ในตัวอย่างนี้ ค่าของเกมส์ที่ดีที่สุดคือ 10 ซึ่งเป็นค่าที่ได้จากการตัดกันของกลยุทธ์ 3 ของห้างสรรพสินค้า A และกลยุทธ์ 4 ของห้างสรรพสินค้า B ในแมททริกซ์ที่แสดงไว้ และแสดงว่าในระยะยาวแล้วห้างสรรพสินค้า A จะใช้วิธีส่งเสริมการขายชิงโชคชิงรางวัลขณะที่ห้างสรรพสินค้า B จะใช้วิธีแจกแสตมป์การค้าซึ่งจะมีผลทำให้ห้างสรรพสินค้า A มียอดขายเฉลี่ย 10 ล้านบาทและห้างสรรพสินค้า B จะสูญเสียเฉลี่ย 10 ล้านบาท (เกมส์นี้เป็น Zero-Sum Games)

<u>จุดผลเท่ากันหรือจุดอานม้า</u> (Saddle Point)

จุดผลเท่ากันหรือจุดอานม้า (Saddle Point) คือจุดที่ Maximin เท่ากับ Minimax หรือเขียนในรูปคณิตศาสตร์ได้เป็น

$$\max_{i} \; \min_{j} \; (a_{ij}) = \min_{j} \; \max_{i} \; (a_{ij})$$

$$\begin{array}{cc} & \text{B} \\ \text{A} & \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 8 & 9 & 2 \\ 7 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 4 \longrightarrow \text{maximin} \end{array} \\ & \begin{array}{ccc} 8 & 9 & 4 \\ & & \uparrow \\ & & \text{minimax} \end{array} \end{array}$$

กรณีนี้ Maximin = Minimax จะเกิดผลลัพธ์ที่ดีที่สุด ที่จุดผลเท่ากัน สมาชิกตัวหนึ่งเป็นทั้ง maximin และ minimax อันนี้เราจะเรียกว่าเป็น Saddle point นั่นคือ เป็นจุดสูงสุดในทัศนะหนึ่งแต่เป็นจุดต่ำสุดในอีกทัศนะหนึ่ง

ในกรณีที่จุดผลเท่ากันเกิดขึ้นในตารางผลตอบแทน เราสามารถพิจารณาว่ามันเป็นค่าของเกมส์ที่ดีที่สุด (Optimal Value of the Game) ในตัวอย่างของเราจุดผลเท่ากันก็คือ 4 และก็เป็นค่าของเกมส์ที่ดีที่สุดด้วย ($a_{33} = 4$) ถ้าเราพิจารณาตัว a_{ij} เราสามารถจะกะได้ว่าผู้แข่งขันแต่ละคนจะเลือกกลยุทธที่ 3 เป็นกลยุทธที่ดีที่สุด ยิ่งกว่านั้น 4 ยังแสดงอีกด้วยว่าผู้แข่งขัน A จะได้รับการจ่ายเท่ากับ 4 ในขณะที่ผู้แข่งขัน B จะได้รับการจ่ายเท่ากับ -4 (ถ้าหากสมมติว่าเกมส์นี้เป็น Zero-Sum Games)

ตัวอย่างที่ 2 แสดงการหาค่าของเกมส์และจุดผลเท่ากัน

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} 5 \text{-Maximin} \\ 3 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 5 & 8 \end{array} & \\ \text{Minimax} & \end{array}$$

ค่าของเกมส์ = 5
มีจุดผลเท่ากันที่แถวนอนที่ 1 และแถวตั้งที่ 1

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} -2 & 5 & -3 \\ 5 & 5 & 4 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} -3 \\ 4 \text{-Maximin} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} 5 & 5 & 4 \end{array} & \\ \text{Minimax} & \end{array}$$

ค่าของเกมส์ = 4
มีจุดผลเท่ากันที่แถวนอนที่ 2 และแถวตั้งที่ 3

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 16 & 17 & 9 \\ 12 & 13 & 18 \\ 9 & 10 & 15 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} 9 \\ 12 \text{-Maximin} \\ 9 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} 16 & 17 & 18 \end{array} & \\ \text{Minimax} & \end{array}$$

Maximin $\neq$ Minimax
ไม่มีจุดผลเท่ากัน

อิทธิพลของกลยุทธหนึ่งที่มีต่อกลยุทธอีกอันหนึ่ง (Domination)

การคำนวณหาค่าของเกมส์ที่ดีที่สุด ก็โดยอาศัยแมทหริกซ์ซึ่งแสดงผลได้ผลเสียของผู้แข่งขันทั้งสองเป็นหลัก การคำนวณหาค่าของเกมส์ที่ดีที่สุดอาจลดเวลาการคำนวณลงมาได้ ถ้าใช้หลักความมีอิทธิพลเหนือกว่า (Dominance) เข้ามาช่วยพิจารณาก่อนเริ่มคำนวณ การใช้กฎเกณฑ์ความมีอิทธิพลเหนือกว่ามีดังนี้ เริ่มต้นจากผู้แข่งขัน A ก่อน สมมติว่า A มีกลยุทธอยู่ m กลยุทธ ถ้ากลยุทธอันหนึ่งหรือหลายอันของ A มีผลได้น้อยกว่าหรือเท่ากับกลยุทธอื่น ๆ ของ A โดยไม่คำนึงว่าคู่ต่อสู้ใช้กลยุทธใด กลยุทธอันแรก

ที่น้อยกว่า(ด้อยกว่า) จะเรียกว่ากลยุทธที่อยู่ภายใต้อิทธิพล (Dominated Strategy) ในการคำนวณหาค่าของเกมส์ตัดทิ้งได้เลยไม่มีประโยชน์เพราะผู้แข่งขัน A จะไม่เลือกใช้กลยุทธนี้อย่างแน่นอน ตัวอย่างเช่น ในการแข่งขันเกมส์ชนิดหนึ่ง A มีกลยุทธอยู่ 4 วิธี และ B มีกลยุทธอยู่ 3 วิธี แมทหริกซ์ผลได้ของ A เป็นดังนี้

		B 1	2	3
	1	-1	4	3
	2	-2	2	1
A	3	3	4	-2
	4	-4	3	1

ถ้าเราได้เปรียบเทียบสมาชิกแต่ละตัวทุกตัวในกลยุทธ 1 กับกลยุทธ 2 และกลยุทธ 4 ของผู้แข่งขัน A แล้วจะพบว่ากลยุทธ 2 และกลยุทธ 4 มีผลได้น้อยกว่ากลยุทธ 1 ไม่ว่าผู้แข่งขัน B จะใช้กลยุทธอันใดก็ตาม จึงไม่มีเหตุผลใด ๆ ที่ผู้แข่งขัน A จะนำเอากลยุทธที่ 2 และ 4 มาใช้ หากว่ากลยุทธที่ 1 ยังเปิดโอกาสให้เขาอยู่ ดังนั้นกลยุทธ 2 และ 4 จึงถูกเรียกว่าเป็นกลยุทธที่ได้รับอิทธิพลมาจากกลยุทธที่ 1 (กลยุทธที่ 2 และ 4 เป็นกลยุทธที่อยู่ภายใต้อิทธิพล (Dominated Strategy ของกลยุทธที่ 1) และสามารถจะเอาออกไปจากตารางผลตอบแทนได้

แน่นอนที่ว่ากลยุทธที่อยู่ภายใต้อิทธิพลไม่จำเป็นว่าจะต้องมีสมาชิกแต่ละตัวเลวกว่าขอเพียงว่าสมาชิกแต่ละตัวอย่างน้อยที่สุดต้องไม่ดีไปกว่าสมาชิกแต่ละตัวของอีกกลยุทธหนึ่งก็เป็นการเพียงพอแล้ว (พูดง่าย ๆ ก็คือ สมาชิกบางตัวของกลยุทธหนึ่งอาจเท่ากับสมาชิกบางตัวของกลยุทธอีกอันหนึ่งก็ได้) ดังนั้นเราจึงสามารถเรียกมันว่าเป็นกลยุทธที่อยู่ภายใต้อิทธิพล จากตัวอย่างแมทหริกซ์ผลได้ใหม่ของ A จะเป็นดังนี้

B

A		1	2	3
	1	-1	4	3
	3	3	4	-2

ถ้ามองในคู่แข่งขัน A จะเห็นว่าไม่มีกลยุทธที่อยู่ภายใต้อิทธิพลอีกขั้นต่อไป พิจารณาแมทหริกซ์ผลเสียของ B โดยมองแถวตั้ง จะเห็นได้ชัดว่ากลยุทธ 2 มีสมาชิกทุกตัวมากกว่ากลยุทธ 1 และ 3 เพราะฉะนั้นกลยุทธ 2 จึงเป็นกลยุทธที่อยู่ภายใต้อิทธิพลของกลยุทธ 1 และ 3 ดังนั้น ผู้แข่งขัน B จะไม่เล่นกลยุทธ 2 เพราะจะทำให้เขาเสียมากกว่า เขาจะเล่นกลยุทธ 1 และ 3 ตราบเท่าที่กลยุทธ 1 และ 3 ยังเปิดโอกาสให้เขาอยู่ ดังนั้น เราจึงสามารถเอากลยุทธ 2 ออกไปจากตารางผลตอบแทนของ A ได้ แมทหริกซ์ผลได้ของ A จะเหลือดังนี้

B

A		1	3
	1	-1	3
	3	3	-2

เมื่อใช้กฎเกณฑ์ความเหนือกว่ามาพิจารณาแมทหริกซ์ของคู่แข่งขันแล้ว จะสามารถลดขนาดของแมทหริกซ์ลงไปได้ จากตัวอย่างจะเห็นว่าแมทหริกซ์เดิมมีขนาด (4×3) เมื่อใช้กฎเกณฑ์ของความมีอิทธิพลเหนือกว่ามาขจัดกลยุทธในแถวนอน (row) หรือกลยุทธในแถวตั้ง (Column) ออกไปแล้ว แมทหริกซ์สุดท้ายจะมีขนาด (2×2) เมื่อขนาดของแมทหริกซ์ลดลง เวลาที่ใช้ในการคำนวณหาค่าของเกมส์ที่ดีที่สุดจะน้อยลงด้วย

ดังนั้น การหากลยุทธที่อยู่ภายใต้อิทธิพลนั้นมีหลักเกณฑ์ดังนี้ ผู้แข่งขัน A จะตัดกลยุทธในแถวนอนที่มีสมาชิกทุกตัวน้อยกว่าหรือเท่ากับกลยุทธในแถวนอนอื่น ๆ ส่วนผู้แข่งขัน B จะตัดกลยุทธในแถวตั้งที่มีสมาชิกทุกตัวมากกว่าหรือเท่ากับกลยุทธในแถวตั้งอื่น ๆ

2. ค่าของเกมส์ที่ดีที่สุดเมื่อคู่แข่งขันใช้กลยุทธผสม

เมื่อใดที่เกมส์มีจุดอานม้าหรือจุดผลเท่ากัน (Saddle Point) คู่แข่งขันทั้งคู่สามารถใช้กลยุทธแท้เพียงกลยุทธเดียวในการแข่งขันทุกครั้ง ถ้าเกมส์ใดไม่มีจุดอานม้าในเกมส์แล้ว (ค่าของ Maximin ไม่เท่ากับ Minimax) คู่แข่งขันทั้งคู่ไม่สามารถหากลยุทธแท้ที่จะนำมาต่อสู้เพื่อให้ตนได้ผลตอบแทนที่ดีที่สุดได้

ตัวอย่างที่ 1 บริษัท A และ B เป็นบริษัทคู่แข่งขัน ผลิตสินค้าชนิดหนึ่งออกมา ยอดขายของบริษัท A ขึ้นอยู่กับสีของบรรจุภัณฑ์ของตน และของคู่แข่งขัน ดังแสดงไว้ในตารางดังนี้ (หน่วย:ล้านบาท)

B

	แดง (1)	ขาว (2)	ฟ้า (3)	ค่าต่ำสุดของแถวนอน
แดง (1)	-2	4	5	-2 Maximin
ขาว (2)	0	-3	6	-3
ฟ้า (3)	-5	1	-6	-6
ค่าสูงสุดของแถวตั้ง	0 Minimax	4	6	

Maximin $\neq$ Minimax no Saddle Point

บริษัท A และ B ควรเลือกใช้สีบรรจุภัณฑ์สีใดจึงจะทำให้เขาได้ผลตอบแทนเฉลี่ยสูงสุดในระยะยาว

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจากเกมส์นี้ไม่มีจุดอานม้า และค่าของ Maximin ไม่เท่ากับ Minimax และไม่ใช่จุดเดียวกันในแมทริกซ์ผลตอบแทนดังนั้น บริษัท A และ B ไม่สามารถหากลยุทธแท้ที่ทำให้ตนได้ผลตอบแทนที่ดีที่สุดในการแข่งขันทุกครั้งได้ จากแมทริกซ์ผลตอบแทนข้างต้น

บริษัท A ใช้หลักเกณฑ์ Maximin ในการเลือกกลยุทธแท้ เขาจะเลือกกลยุทธ 1 ในการแข่งขัน ซึ่งประกันผลได้ว่าอย่างน้อยที่สุดเขาจะได้เท่ากับ −2 ในทำนองเดียวกันบริษัท B ใช้หลักเกณฑ์ Minimax ในการเลือกกลยุทธแท้เขาจะเลือกกลยุทธ 1 ซึ่งจะประกันได้ว่าเขาจะไม่เสียมากกว่า 0 ในการแข่งขันทุกครั้ง สมมติว่า เมื่อเริ่มต้นการแข่งขัน A เลือกกลยุทธแท้กลยุทธที่ 1 และ B เลือกกลยุทธแท้กลยุทธที่ 1 เข้าแข่งขัน ไม่ช้าไม่นาน A จะสังเกตพบว่า B ใช้กลยุทธที่ 1 ออกมาเล่นทุกครั้งที่ผ่านมา ในการเล่นครั้งต่อไป A ก็จะเปลี่ยนจากกลยุทธที่ 1 มาใช้กลยุทธที่ 2 ซึ่งจะทำให้เขาได้ผลได้เพิ่มจาก −2 มาเป็น 0 เมื่อแข่งขันไปพักหนึ่ง B ก็จะสังเกตพบว่า เมื่อเขาใช้กลยุทธ 1 แข่งขัน บริษัท A จะใช้กลยุทธ 2 ออกมาต่อสู้เสมอ เพราะฉะนั้นในการแข่งขันครั้งต่อไป บริษัท B จะใช้กลยุทธ 2 แทนกลยุทธ 1 เพราะจะทำให้ B ได้ 3 แทนที่จะเสีย 0 เมื่อเล่นต่อไปเรื่อย A จะพบว่า B เปลี่ยนมาใช้กลยุทธ 2 เข้าต่อสู้ตลอดเวลา A จะเปลี่ยนมาใช้กลยุทธ 1 เข้าแข่งขันในครั้งต่อไป เหตุการณ์จะดำเนินในรูปนี้ต่อไปเรื่อย ๆ กลยุทธที่ทั้งคู่นำออกมาใช้ต่อสู้กันในเกมส์จะไม่ถูกกำหนดตายตัวแบบกรณีที่มีจุดอานม้า ทั้งนี้เพราะว่าตราบใดที่ผู้แข่งขันทราบว่าคู่ต่อสู้ใช้กลยุทธแท้กลยุทธใดออกมาแข่งขันอยู่เขาก็จะเปลี่ยนกลยุทธเดิม โดยเอากลยุทธอื่นที่จะทำให้เขามีผลได้ดีขึ้นกว่าเดิมออกต่อสู้ทันที เหตุการณ์เช่นนี้จะไม่เกิดขึ้นเลยถ้าเกมส์นั้นมีจุดอานม้า ทั้งนี้เพราะว่าถ้าผู้แข่งขันผู้ใดเปลี่ยนกลยุทธ โดยใช้กลยุทธที่ไม่ผ่านจุดอานม้า โดยที่คู่แข่งขันยังคงใช้กลยุทธแท้อันเดิมที่ผ่านจุดอานม้าเข้าต่อสู้แล้ว ผู้แข่งขันที่เปลี่ยนแผนการต่อสู้จะไม่ได้รับผลตอบแทนเพิ่มขึ้นเลย จะมีแต่เสียผลประโยชน์มากกว่าค่าผลลัพธ์ที่จุดอานม้ารับประกันเอาไว้

สรุปแล้ว เมื่อเกมส์ไม่มีจุดผลเท่ากันหรือจุดอานม้า ทั้งผู้แข่งขัน A และ B จะไม่สามารถกำหนดกลยุทธแท้ตายตัวที่จะนำไปแข่งขันทุก ๆ ครั้งได้ ทั้งนี้เพราะว่าตราบใดที่ผู้แข่งขันคนใดคนหนึ่งรู้ว่าคู่ต่อสู้ใช้กลยุทธใดออกมาเล่นเป็นลำดับต่อเนื่องกัน เขาก็จะเปลี่ยนแผนการเล่นทันที โดยที่กลยุทธที่เขาเลือกใช้ใหม่จะทำให้เขาได้ผลตอบแทนดีกว่าเก่า การเปลี่ยนแผนการเล่นจะดำเนินเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ แบบลูกโซ่ ทางออกที่ดีที่สุดเพื่อหาค่าของเกมส์ที่ดีที่สุด โดยหลีกเลี่ยงการนำกลยุทธแท้ออกมาใช้เป็นลำดับต่อเนื่องกันที่จะจุดก็คือ สมมติให้กลยุทธที่มีอยู่ทั้งหมดเป็นตัวแปรเชิงสุ่ม (Random Variable) เมื่อกลยุทธที่ผู้เข้าแข่งขันแต่ละคนที่มีอยู่เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแล้ว แต่ละกลยุทธจะต้องมีความน่าจะเป็น (Probability) ที่ผู้แข่งขันจะเลือกออกมาใช้แข่งขันมากน้อยเท่าใดกำกับอยู่ด้วย[1]

ในกรณีนี้กลยุทธที่ดีที่สุดที่คู่แข่งขันนำออกมาใช้จะไม่เป็นกลยุทธแท้แล้วทั้งคู่จะเล่นเกมส์ชนิดนำเอากลยุทธผสม (Mixed Strategy) ออกมาต่อสู้กัน ถ้าจะกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างการเลือกใช้กลยุทธแท้และกลยุทธผสมแล้ว การเลือกใช้กลยุทธแท้ตลอดเวลาเมื่อมีจุดผลเท่ากัน ก็คือส่วนหนึ่งของการใช้กลยุทธผสม นั่นคือ ถ้าเราใช้กลยุทธผสมทุก ๆ กลยุทธจะถูกนำออกมาใช้ไม่มากก็น้อยแล้วแต่ค่าความน่าจะเป็นที่กำกับอยู่ในแต่ละกลยุทธ แต่ในการเลือกใช้กลยุทธแท้เมื่อมีจุดผลเท่ากันนั้น จะถือว่าเฉพาะกลยุทธที่ทำให้เกิดจุดผลเท่ากันเท่านั้นที่มีความน่าจะเป็นของการออกนำมาใช้เท่ากับ 1 ส่วนกลยุทธอื่น ๆ จะมีความน่าจะเป็นที่จะนำออกมาใช้เท่ากับศูนย์

ในเกมส์การแข่งขันที่ผู้แข่งขันใช้กลยุทธผสมเข้าต่อสู้กันนั้น ผู้แข่งขันทั้งคู่จะตัดกลยุทธที่อยู่ภายใต้อิทธิพล (Dominated Strategy) ออกก่อนและจะนำกลยุทธทุกกลยุทธที่เหลืออยู่ออกมาใช้ แต่อัตราส่วนของการนำแต่ละกลยุทธออกมาใช้จะไม่เท่ากัน นั่นคือ ผู้แข่งขันจะต้องกำหนดอัตราส่วนที่จะนำแต่ละกลยุทธที่ตนมีอยู่มาแข่งขันในเกมส์หนึ่ง ๆ บางกลยุทธอาจ

---

[1] ผศ.ดร.วิจิตร ตัณฑสุทธิ์และคณะ , "การวิจัยดำเนินงาน" จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2520 หน้า 289-293

นำมาใช้น้อยเพราะให้ผลประโยชน์น้อย แต่จะมีบางกลยุทธที่จะถูกนำออกมาใช้บ่อย ๆ เพราะให้ผลประโยชน์มากกว่ากลยุทธอื่นเมื่อคาดคะเนกับกลยุทธที่คู่แข่งขันจะนำออกมาใช้แล้ว

ในเกมส์การแข่งขันสองคนผลรวมเท่ากับศูนย์[3]

ถ้าให้ $x_1, x_2, x_3, \ldots x_m$ $(x_i, i=1,\ldots m)$ คือความน่าจะเป็นที่ผู้แข่งขัน A จะนำเอาแต่ละกลยุทธจากกลยุทธทั้งหมดที่เขามีอยู่ m กลยุทธออกมาใช้

$y_1, y_2, y_3, \ldots y_n, (y_j, j=1,2\ldots n)$ คือความน่าจะเป็นที่ผู้แข่งขัน B จะนำเอากลยุทธแต่ละกลยุทธจากทั้งหมด n กลยุทธออกมาใช้

โดยที่ x_i, y_j มีคุณสมบัติ ตามกฎของความน่าจะเป็น คือ

1. $0 \leqslant x_i \leqslant 1$

   $0 \leqslant y_j \leqslant 1$

2. $\sum x_i = 1$

   $\sum y_j = 1$

ถ้า a_{ij}, เป็นผลได้ผลเสียของผู้เล่นเกมส์ A และ B เมทริกซ์ผลตอบแทนของเกมส์จะมีค่าความน่าจะเป็นกำกับอยู่ ดังนี้

---

[3] Hamdy A. Taha, "Operations Research : An Introduction", The Macmillan Publishing Co., Inc. New York. 1976 P. 342-343

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
 & & & B & & \\
 & y_1 & y_2 & \cdots & y_n & \text{(B) Minimax} \\
\hline
x_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \\
x_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}y_j \\
A \quad \vdots & \vdots & \vdots & & & \\
x_m & a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} & \sum_{j=1}^{n} a_{mj}y_j \\
\hline
\text{(A) Maximin} & \sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i & \sum_{i=1}^{m} a_{i2}x_i & & \sum_{i=1}^{m} a_{in}x_n &
\end{array}
$$

x_i คือค่าความน่าจะเป็นที่ผู้แข่งขัน A จะเลือกกลยุทธ i เข้าแข่งขัน

y_j ค่าคือความน่าจะเป็นที่ผู้แข่งขัน B จะเลือกกลยุทธ j เข้าแข่งขัน

กรณีที่คู่แข่งขันใช้กลยุทธผสมเข้าแข่งขันกันจะนำหลักของ Maximin และ Minimax เข้ามาประยุกต์ใช้เพื่อหาค่าของเกมส์ที่ดีที่สุดโดยมีหลักว่า

<u>ผู้แข่งขัน A</u> จะเลือกอัตราส่วนหรือความน่าจะเป็น x_i ที่จะทำให้ค่าเฉลี่ยที่น้อยที่สุดในแถวตั้งหนึ่ง ๆ มีค่ามากที่สุด (Maximin)

<u>ผู้แข่งขัน B</u> จะเลือกอัตราส่วนหรือความน่าจะเป็น y_j ที่จะทำให้ค่าเฉลี่ยที่มากที่สุดในแถวนอนหนึ่ง ๆ มีค่าน้อยที่สุด (Minimax)

หลักเกณฑ์ Maximin และ Minimax ที่นำมาใช้กับเกมส์ที่ใช้กลยุทธผสมเข้าแข่งขัน อาจเขียนในรูปของคณิตศาสตร์ ได้ดังนี้

ผู้แข่งขัน A จะเลือกค่า x_i ($x_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$) ซึ่งจะทำให้เกิดผลดังนี้

$$\underset{x_i}{\text{Max.}} \left\{ \text{Min.} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1} x_i ,\ \sum_{i=1}^{m} a_{i2} x_i , \ldots\ldots\ldots , \sum_{i=1}^{m} a_{in} x_i \right) \right\}$$

ผู้แข่งขัน B จะเลือกค่า y_j ($y_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$) ซึ่งจะทำให้เกิดผลดังนี้

$$\underset{y_j}{\text{Min.}} \left\{ \text{Max.} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} y_j ,\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} y_j , \ldots\ldots\ldots , \sum_{j=1}^{n} a_{mj} y_j \right) \right\}$$

ค่าที่แสดงไว้ข้างบนนี้เรียกว่า ค่าผลตอบแทนเฉลี่ยจากเกมที่ใช้หลักการ Maximin และ Minimax ตามลำดับ

เช่นเดียวกับกรณีของการใช้กลยุทธ์เฉพาะต่อสู้กัน ในกรณีที่ใช้กลยุทธ์ผสม [illegible]

ค่าผลตอบแทนเฉลี่ย Minimax $\geq$ ค่าผลตอบแทนเฉลี่ย Maximin [illegible]

จากทฤษฎี [illegible] จะต้องทำให้ [illegible] ที่ดีที่สุด เป็นค่าที่ [illegible] Optimal Expected Value of the Game [illegible]

$$[illegible] = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

วิธีการหาค่าของเกมส์และกลยุทธที่ดีที่สุดของผู้เล่นทั้งสองฝ่าย มีวิธีคำนวณหลายวิธีมีอยู่ 3 วิธีด้วยกันที่มีผู้นำไปใช้ในการคำนวณอยู่เสมอ คือ

1. วิธีคำนวณโดยใช้หลักพีชคณิต
2. วิธีคำนวณโดยใช้กราฟ
3. วิธีคำนวณโดยใช้โปรแกรมเชิงเส้นตรง (Linear programming)

<u>วิธีที่ 1 หาค่าของเกมส์โดยใช้หลักพีชคณิต</u>

<u>กรณีเกมส์ขนาด 2 x 2</u>

วิธีนี้ใช้กับกลยุทธผสม ซึ่งผู้เล่นแต่ละฝ่ายมี 2 กลยุทธเท่านั้น หรืออีกนัยหนึ่งตารางตอบแทนจะอยู่ในรูปแมทหริกซ์ขนาด 2 x 2 หลักการคำนวณที่ใช้มีดังนี้

ก. กำหนดสัดส่วนหรือความน่าจะเป็น x ให้กับผู้เล่นฝ่ายหนึ่ง
y ให้กับผู้เล่นอีกฝ่ายหนึ่ง

ข. ใช้หลัก Expected Value of Payoff ในการคำนวณหาค่า x^*, y^*

หลัก $E(x) = \sum x\, P(x)$

ค. คำนวณหาค่าของเกมส์โดยแทนค่า x^*, y^* ที่คำนวณได้

$$V^* = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^* y_j^*$$

หรือ

$$V^* = y_1^* \left(a_{11}x_1^* + a_{21}x_2^* + \dots\dots a_{m1}x_m^*\right) + y_2^* \left(a_{12}x_1^* + \dots\dots a_{m2}x_m^*\right) + \dots\dots + y_n^* \left(a_{1n}x_1^* + \dots\dots a_{mn}x_n^*\right)$$

จากโจทย์ตัวอย่างที่ 2 เมื่อบริษัท A และ B ต่างใช้กลยุทธผสมเข้าต่อสู้กัน ก่อนจะคำนวณค่าของเกมส์ที่ดีที่สุดสำรวจกลยุทธที่อยู่ภายใต้อิทธิพล พบว่าบริษัท A จะไม่เลือกกลยุทธ 3 ถ้ายังมีกลยุทธ 1 เพราะกลยุทธ 1 ให้ผลตอบแทนมากกว่า จึงตัดกลยุทธ 3 ออกไปจากแมทหริกซ์ผลตอบแทนได้เลย ต่อจากนั้นสำรวจกลยุทธที่อยู่ภายใต้อิทธิพลของบริษัท B จากแมทหริกซ์ 2 x 3 ที่เหลือ พบว่าบริษัท B จะไม่เลือกกลยุทธ 3 ออกใช้ถ้ายังมีกลยุทธ 1 และ 2 เพราะกลยุทธ 3 ทำให้เขาเสียยอดขายมากกว่า ดังนั้นเราจึงสามารถเอากลยุทธ 3 ของ B ออกจากแมทหริกซ์ผลตอบแทนได้จะเหลือแมทหริกซ์ที่มีขนาด 2 x 2 ดังนี้

-2	4
0	-3

วิธีทำ ก. กำหนดความน่าจะเป็น

$$\begin{array}{lll} & & \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{B(II)} \\ \text{แดง} & \text{ขาว} \\ y & 1-y \end{array} \\ A(I) & \begin{array}{l} \text{แดง} : x \\ \text{ขาว} : 1-x \end{array} & \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \end{array}$$

ถ้าให้ x เป็นค่าความน่าจะเป็นที่ A จะเลือกใช้กลยุทธ 1

$1-x$	A	2
y	B	1
$1-y$	B	2

จากหลัก $\sum x = 1$, $\sum y = 1$

ข. นำหลัก $E(x) = \sum xP(x)$ มาใช้

โดยที่ E_{ij} = ค่าตอบแทนโดยเฉลี่ยของผู้แข่งขัน A เมื่อใช้กลยุทธ i

โดยที่คู่ต่อสู้ใช้กลยุทธ j

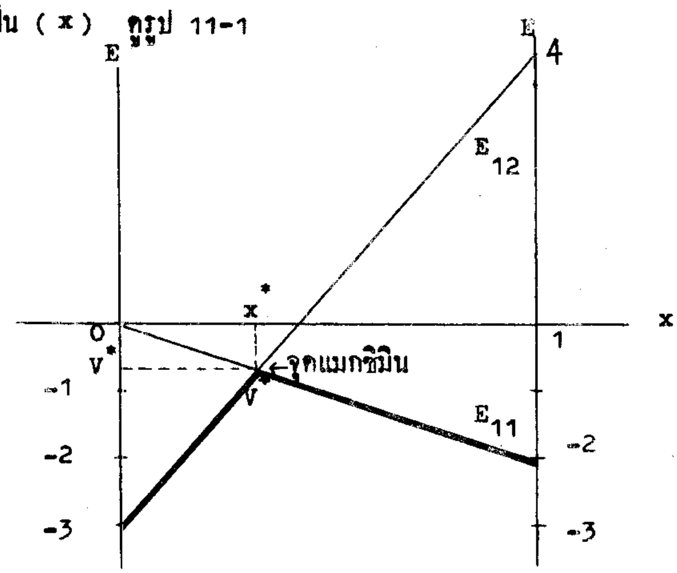
<u>ในกรณีของ A</u>

ค่าคาดหมายผลได้ของ A เมื่อ B ใช้กลยุทธ $1 = E_{11} = -2x + 0\ (1-x) = -2x \ldots (1)$

ค่าคาดหมายผลได้ของ A เมื่อ B ใช้กลยุทธ $2 = E_{12} = 4x - 3\ (1-x) = -3 + 7x \ldots (2)$

จากสมการ (1) และ (2) จะเห็นว่า ค่าตอบแทนเฉลี่ยขึ้นอยู่กับความน่าจะเป็น สามารถวาดรูปได้โดยให้แกนตั้งเป็นค่าตอบแทนเฉลี่ย (E) แกนนอนเป็นความน่าจะเป็น (x) ดูรูป 11-1

รูปที่ 11-1



ในทัศนะของ A เขาจะแสวงหา Maximin A จะเลือกค่าสูงสุดจากจุดต่ำสุด นั่นคือ ที่จุด V^* ซึ่งมีค่าความน่าจะเป็น x^* ซึ่งที่จุดนี้ $E_{11} = E_{12}$

เพื่อทำให้ค่าคาดหมายผลได้ของ A เมื่อ B เล่นกลยุทธ 1 เท่ากับค่าคาดหมายผลได้ของ A เมื่อ B เล่นกลยุทธ 2 จะให้

$$-2x + 0(1-x) = 4x - 3(1-x)$$

$$-2x = -3 + 7x$$

$$9x = 3$$

$$x = \frac{1}{3}$$

$$1-x = \frac{2}{3}$$

สรุป A จะใช้กลยุทธผสม โดยความน่าจะเป็นที่ A จะใช้กลยุทธที่ 1 บรรจุภัณฑ์สีแดง $= \frac{1}{3}$ และเลือกใช้กลยุทธที่ 2 บรรจุภัณฑ์สีขาว ด้วยความน่าจะเป็น $\frac{2}{3}$ ไม่ว่า B จะเลือกใช้กลยุทธใด

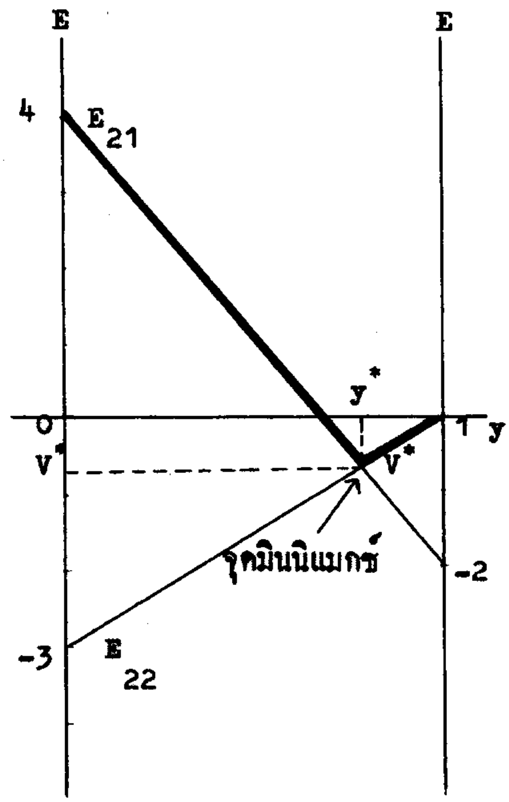
<u>ในกรณีของ B</u>

ค่าที่คาดหมายผลเสียของ B เมื่อ A ใช้กลยุทธที่ 1 $= E_{21} = -2y + 4(1-y) = 4-6y$ (3)

" " B " A " 2 $= E_{22} = 0y - 3(1-y) = -3+3y$ (4)

มองในแง่ B จะใช้ทัศนะ Minimax ในการแข่งขัน จากสมการ (3) และ (4) วาดรูปได้ดังนี้

รูปที่ 11-2



B จะเลือกค่าต่ำสุดจากค่าสูงสุด นั่นคือที่จุด V^*

ซึ่ง

$$E_{21} = E_{22}$$

$$-2y + 4(1-y) = 0y - 3(1-y)$$

$$4 - 6y = -3 + 3y$$

$$9y = 7$$

$$y = \frac{7}{9}$$

$$1-y = \frac{2}{9}$$

ดังนั้นกลยุทธที่ดีที่สุดของ A คือใช้บรรจุภัณฑ์สีแดงด้วยความน่าจะเป็น 1/3 ไม่ว่า B จะเลือกใช้กลยุทธใด
สีขาว " 2/3

กลยุทธที่ดีที่สุดของ B คือใช้บรรจุภัณฑ์สีแดง " 7/9 ไม่ว่า A จะเลือกใช้กลยุทธใด
สีขาว " 2/9

ค. คำนวณค่าของเกมส์ แทนค่า x และ y ที่คำนวณได้ลงในสูตร

$$\begin{array}{ccc} & 7/9 & 2/9 \\ 1/3 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$}} \\ 2/3 & & \end{array} \qquad V^* = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^* y_j^*$$

คิดในด้านของผู้เล่น A มีเหตุผลดังนี้

1. A จะได้ผลตอบแทน -2 ต่อเมื่อใช้กลยุทธที่ 1 เป็นสัดส่วน 1/3 และจะได้ผลตอบแทน 0 เมื่อใช้กลยุทธที่ 2 เป็นสัดส่วน 2/3 และในการนี้ต้องขึ้นอยู่กับ B ว่าจะต้องใช้กลยุทธที่ 1 ด้วยสัดส่วน $\frac{7}{9}$

ค่าที่คาดหมายโดยกำหนดให้ B เล่นกลยุทธที่ 1 เป็นหลักจะเท่ากับ

$$7/9\left[-2\left(\frac{1}{3}\right) + 0\left(\frac{2}{3}\right)\right] = -2 \times \frac{1}{3} \times \frac{7}{9} + 0 \times \frac{2}{3} \times \frac{7}{9}$$
$$= \frac{-14}{27}$$

2. A จะได้ผลตอบแทน 4 ต่อเมื่อใช้กลยุทธที่ 1 เป็นสัดส่วน 1/3 และจะได้ผลตอบแทน -3 เมื่อใช้กลยุทธที่ 2 ด้วยสัดส่วน 2/3 และในการนี้ต้องขึ้นอยู่กับ B ว่าจะต้องใช้กลยุทธที่ 2 ด้วยสัดส่วน 2/9

ค่าที่คาดหมายโดยกำหนดให้ B เล่นกลยุทธที่ 2 เป็นหลักจะเท่ากับ

$$2/9\left[4\left(\frac{1}{3}\right) - 3\left(\frac{2}{3}\right)\right] = 4 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{9} - 3 \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{9}$$
$$= \frac{-4}{27}$$

ค่าของเกมส์ = ค่าที่คาดหมายทั้งหมดของ A

= ค่าที่คาดหมายของ A โดยกำหนดให้ B เล่นกลยุทธที่ 1 + ค่าที่คาดหมายของ A กำหนดให้ B เล่นกลยุทธที่ 2

$$= \frac{7}{9}\left[-2(\tfrac{1}{3}) + 0(\tfrac{2}{3})\right] + \frac{2}{9}\left[4(\tfrac{1}{3}) - 3(\tfrac{2}{3})\right]$$

ค่าของเกมส์ $= \frac{-14}{27} - \frac{4}{27}$

$= \frac{-18}{27}$

ดังนั้นค่าของเกมส์จึงเป็น $= -\frac{2}{3}$

คิดในด้านของผู้เล่น B มีเหตุผลดังนี้

1. B จะเสีย -2 ต่อเมื่อใช้กลยุทธที่ 1 ด้วยสัดส่วน 7/9 และจะเสีย 4 เมื่อใช้กลยุทธที่ 2 ด้วยสัดส่วน 2/9 ในการนี้ต้องขึ้นอยู่กับ A ว่าจะต้องเล่นกลยุทธที่ 1 ด้วยสัดส่วน $\frac{1}{3}$

ค่าที่คาดหมายของ B โดยกำหนดให้ A เล่นกลยุทธที่ 1 เป็นหลักจะเท่ากับ

$$\frac{1}{3}\left[-2(\tfrac{7}{9}) + 4(\tfrac{2}{9})\right] = -2 \times \frac{7}{9} \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{-6}{27}$$

2. B จะเสีย 0 ต่อเมื่อใช้กลยุทธที่ 1 ด้วยสัดส่วน 7/9 และจะเสีย -3 เมื่อใช้กลยุทธที่ 2 ด้วยสัดส่วน 2/9 ในการนี้ต้องขึ้นอยู่กับ A ว่าจะต้องเล่นกลยุทธที่ 1 ด้วยสัดส่วน $\frac{2}{3}$

ค่าที่คาดหมายของ B โดยกำหนดให้ A เล่นกลยุทธที่ 2 เป็นหลักจะเท่ากับ

$$\frac{2}{3}\left[0(\tfrac{7}{9}) - 3(\tfrac{2}{9})\right] = 0 \times \frac{7}{9} \times \frac{2}{3} - 3 \times \frac{2}{9} \times \frac{2}{3}$$

$$= \frac{-12}{27}$$

ค่าของเกมส์ = ค่าที่คาดหมายทั้งหมดของ B ที่จะต้องเสีย

= ค่าที่คาดหมายของ B โดยกำหนดให้ A เล่นกลยุทธที่ 1 + ค่าที่คาดหมายของ B โดยกำหนดให้ A เล่นกลยุทธที่ 2

$$= \frac{1}{3}\left[-2\left(\frac{7}{9}\right) + 4\left(\frac{2}{9}\right)\right] + \frac{2}{3}\left[0\left(\frac{7}{9}\right) - 3\left(\frac{2}{9}\right)\right]$$

$$= \frac{-6}{27} - \frac{12}{27}$$

$$= \frac{-18}{27}$$

$$= -2/3$$

ค่าของเกมส์ในกรณีนี้ A เป็นผู้เสีย มิได้หมายความว่า A จะเล่นเสีย 2/3 ล้านบาท ทุกครั้งที่เล่นเกมส์นี้ แต่หมายความว่าหลังจากที่เล่นเกมส์นี้ไปหลายครั้งแล้วมาหาค่าถัวเฉลี่ยของผลตอบแทนจะเสีย 2/3 ล้านบาท

<u>กรณีเกมส์ขนาด 3 x 3</u>

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> รองเท้ายี่ห้อ "เอเอ" และรองเท้ายี่ห้อ "ปีปี" ต่างทำการโฆษณาสินค้าของตนผ่านสื่อต่าง ๆ ทำให้ส่วนครองตลาดของรองเท้ายี่ห้อ เอ เอ เป็นดังนี้ (หน่วย : เปอร์เซนต์)

		รองเท้ายี่ห้อ ปีปี		
		หนังสือพิมพ์	โทรทัศน์	นิตยสาร
รองเท้ายี่ห้อ เอเอ	โทรทัศน์	5	-2	4
	หนังสือพิมพ์	2	3	-1
	นิตยสาร	1	2	3

สมมติให้ส่วนครองตลาดที่เกิดขึ้นเป็นเกมส์สองคนผลรวมเป็นศูนย์คือถ้า เอเอ ใช้สื่อโฆษณาโทรทัศน์และ ปีปี ใช้สื่อหนังสือพิมพ์จะมีผลให้เอเอ ได้ส่วนครองตลาดเป็น 5% และ ปีปี จะเสียส่วนครองตลาดไป 5% เท่ากัน เป็นต้น

ถามว่ารองเท้ายี่ห้อ เอเอ และ บีบี ควรเลือกใช้ส่วนประสมของสื่อโฆษณาอย่างไรจึงจะทำให้เขาได้ส่วนครองตลาดเฉลี่ยสูงสุดในระยะยาว

วิธีทำ ทดสอบว่าเกมส์มีจุดผลเท่ากันหรือไม่ และมีกลยุทธภายใต้อิทธิพลหรือไม่

บีบี

		y_1	y_2	y_3	Min
เอเอ	x_1	5	-2	4	-2
	x_2	2	3	-1	-1
	x_3	1	2	3	1 - Maximin
	Max	5	3	4	

Minimax

Maximin $\neq$ Minimax no Saddle point

และไม่มีกลยุทธภายใต้อิทธิพล

เกมส์มีขนาด 3×3

ค่าเฉลี่ยที่ดีที่สุดของเกมส์หาได้จาก

$$V^* = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\, x_i^* y_j^*$$

เมื่อค่า x_i^* และ y_j^* คือ ความน่าจะเป็นที่จะทำให้ A (เอเอ) และ B (บีบี) ได้รับผลตอบแทนจากเกมส์ดีที่สุด แทนค่าตัวเลขของ a_{ij} จากตัวอย่างลงไปในสูตรจะได้

<u>ค่าของเกมส์ที่ดีที่สุดของ A (เอเอ)</u>

$$y_1^*(5x_1^* + 2x_2^* + 1x_3^*) + y_2^*(-2x_1^* + 3x_2^* + 2x_3^*) + y_3^*(4x_1^* - 1x_2^* + 3x_3^*) = V^* \cdots (A)$$

เนื่องจากสมการข้างบนนี้จะเป็นจริงสำหรับทุก ๆ ค่าของ y_j^* ซึ่งก็หมายความว่าสมการข้างต้นนี้ก็ยังคงเป็นความจริงในกรณีที่ค่าใดค่าหนึ่งของ y_j^* มีค่าเท่ากับ 1 ส่วน y_j^* ที่เหลือ (ในตัวอย่างนี้อีก 2 ค่า) มีค่าเท่ากับศูนย์ สมมติให้ y_1^* มีค่าเท่ากับ 1 ส่วน y_2^* และ y_3^* มีค่าเท่ากับศูนย์ทั้งคู่เราจะได้

$$5x_1^* + 2x_2^* + 1x_3^* = V^* \qquad (1)$$

ต่อไปถ้าสมมติให้ y_2^* และ y_3^* มีค่าเท่ากับ 1 ส่วน y_j^* ตัวอื่นมีค่าเท่ากับศูนย์ เราก็จะได้สมการอีกสองสมการตามลำดับดังนี้

$$-2x_1^* + 3x_2^* + 2x_3^* = V^* \qquad (2)$$

$$4x_1^* - 1x_2^* + 3x_3^* = V^* \qquad (3)$$

<u>ค่าของเกมส์ที่ดีที่สุดของ B (บีบี)</u>

$$x_1^*(5y_1^* - 2y_2^* + 4y_3^*) + x_2^*(2y_1^* + 3y_2^* - 1y_3^*) + x_3^*(1y_1^* + 2y_2^* + 3y_3^*) = V^* \cdots (B)$$

สำหรับผู้แข่งขัน B ค่า x_i^* อาจจะมีค่าเท่าใดก็ได้ และขณะเดียวกันสมการของ V^* ที่กล่าวข้างต้นนี้ยังคงเป็นความจริงถ้าค่าใดค่าหนึ่งของ x_i^* มีค่าเท่ากับ 1 และค่า x_i^* ตัวอื่น ๆ มีค่าเท่ากับศูนย์ ถ้าสมมติให้ x_1^* x_2^* และ x_3^* มีค่าเท่ากับ 1 ทีละครั้ง ส่วนค่า x_i^* ที่เหลือมีค่าเท่ากับศูนย์ เราก็จะได้สมการเพิ่มอีก 3 สมการตามลำดับดังนี้

$$5y_1^* - 2y_2^* + 4y_3^* = V^* \qquad (4)$$

$$2y_1^* + 3y_2^* - 1y_3^* = V^* \qquad (5)$$

$$1y_1^* + 2y_2^* + 3y_3^* = V^* \qquad (6)$$

ตามกฎของความน่าจะเป็น (Probability Law) จะมีสมการเพิ่มขึ้นอีก 2 สมการจากหลักการที่ว่าผลรวมของความน่าจะเป็นที่ผู้แข่งขันจะเลือกกลยุทธทุกกลยุทธรวมกันจะต้องเท่ากับ 1 ด้วยเหตุนี้ สมการที่เพิ่มขึ้นอีกสองสมการก็คือ

$$x_1^* + x_2^* + x_3^* = 1 \qquad (7)$$

$$y_1^* + y_2^* + y_3^* = 1 \qquad (8)$$

จากสมการดังกล่าวข้างบนแก้สมการหาค่าตัวแปร x_i^* ได้ดังนี้

(1) = (2) $\quad 5x_1^* + 2x_2^* + 1x_3^* = -2x_1^* + 3x_2^* + 2x_3^*$

$$7x_1^* - x_2^* - x_3^* = 0 \qquad (9)$$

(7) + (9) $\quad 8x_1^* = 1$

$$x_1^* = 1/8 = 0.125$$

(2) = (3) $\quad -2x_1^* + 3x_2^* + 2x_3^* = 4x_1^* - x_3^* + 3x_3^*$

$$6x_1^* - 4x_2^* + x_3^* = 0 \qquad (10)$$

(10)-(7) $\quad 5x_1^* - 5x_2^* = -1 \qquad (11)$

แทนค่า $x_1^* = 1/8$ ลงใน(11), $5(1/8) - 5x_2^* = -1$

$$5x_2^* = \frac{5}{8} + 1$$

$$x_2^* = \frac{13}{40} = 0.325$$

แทนค่า x_1^*, x_2^* ลงใน(10)

$$6(1/8) - 4(\frac{13}{40}) + x_3^* = 0$$

$$x_3^* = \frac{22}{40} = 0.55$$

แทนค่า x_1^* , x_2^* , x_3^* ลงใน (1)

$$5\left(\frac{1}{8}\right) + 2\left(\frac{13}{40}\right) + \frac{22}{40} = v^*$$

$$v^* = \frac{73}{40} = 1\frac{33}{40}$$

$$= 1.825$$

ในทำนองเดียวกัน การหาค่าของ y_j^* ก็คล้ายกับการหาค่าของ x_i^* ดังนั้น ผลลัพธ์ของสมการข้างบนก็คือ

$$x_1^* = 0.125$$

$$x_2^* = 0.325$$

$$x_3^* = 0.55$$

$$y_1^* = 0.375$$

$$y_2^* = 0.425$$

$$y_3^* = 0.2$$

$$v^* = 1.825$$

ผลลัพธ์ที่ได้นี้จะต้องสอดคล้องกับสมการ (1) ถึงสมการ (8) และ A กับ B ด้วย

ผลลัพธ์ที่ได้หมายความว่า

รองเท้าเอเอ จะใช้กลยุทธส่วนประสมของสื่อโฆษณาดังนี้

ใช้สื่อโทรทัศน์	ด้วยความน่าจะเป็น	0.125
" หนังสือพิมพ์	"	0.325
" นิตยสาร	"	0.55

รองเท้าบีบี จะใช้กลยุทธส่วนประสมของสื่อโฆษณาดังนี้

ใช้สื่อหนังสือพิมพ์	ด้วยความน่าจะเป็น	0.375
" โทรทัศน์	"	0.425
" นิตยสาร	"	0.2

ทั้งนี้ทำให้รองเท้าเอเอได้ส่วนครองตลาดเท่ากับ 1.825%

ในการใช้กลยุทธส่วนประสมของสื่อโฆษณานี้ รองเท้าเอเอจะได้ส่วนครองตลาดเฉลี่ยเท่ากับ 1.825% เมื่อเปรียบเทียบกับการที่เขาใช้กลยุทธแท้เข้าต่อสู้ดังกล่าวไว้ในตอนต้นแล้วเขาจะได้ส่วนครองตลาดเท่ากับ 1%(Maximin) ในด้านรองเท้าบีบี เมื่อใช้กลยุทธส่วนประสมนี้แล้ว จะพบว่าโดยเฉลี่ยเขาจะเสียส่วนครองตลาดเท่ากับ 1.825%ในการเล่นเกมส์นี้ ซึ่งถ้าเปรียบเทียบกับการที่เขาใช้กลยุทธแท้เข้าต่อสู้แล้ว เขาจะเสียผลประโยชน์จากการเล่นเกมส์นี้เท่ากับ 3% (Minimax) ดังนั้นผลจากการใช้ส่วนประสมของสื่อโฆษณาทำให้คู่แข่งขันทั้งสองได้ผลประโยชน์เพิ่มขึ้น

<u>วิธีที่ 2 การใช้กราฟเข้าช่วยหาผลลัพธ์ของเกมส์เมื่อผู้แข่งขันใช้กลยุทธผสม</u> [1]

การหาผลลัพธ์ของเกมส์เมื่อคู่แข่งขันใช้กลยุทธผสมที่นิยมใช้กันอยู่ อีกวิธีหนึ่ง คือการใช้กราฟเข้าช่วยในการหาคำตอบ การใช้กราฟเข้าช่วยหาผลลัพธ์ของเกมส์ที่ดีที่สุดนั้นมีข้อดีอยู่ตรงที่ว่าง่ายและสามารถเข้าใจในวิธีการได้อย่างกระจ่างชัดกว่าวิธีอื่น แต่ข้อเสียที่สำคัญที่สุดก็คือ สามารถนำเอาไปแก้ปัญหาของเกมส์ได้ในวงแคบ ซึ่งเป็นไปได้ยากในเกมส์ที่สลับซับซ้อนซึ่งปรากฏอยู่ทั่วไป ที่กล่าวว่าวิธีกราฟนี้สามารถแก้ปัญหาเกมส์การเล่นสองคนผลรวมเป็นศูนย์ในวงแคบ หมายถึง เกมส์นั้นผู้แข่งขันผู้หนึ่งผู้ใดต้องมีกลยุทธเข้าแข่งขันเพียงสองกลยุทธเท่านั้น ส่วนคู่แข่งขันจะมีกี่กลยุทธก็ได้ เพราะฉะนั้นถ้าเกมส์ใด ๆ ที่คู่แข่งขันทั้งคู่มีกลยุทธต่าง ๆ ที่จะนำออกมาใช้มากกว่าสองกลยุทธแล้ว วิธีนี้ก็ไม่สามารถจะนำมาใช้ได้ การที่กำหนดไว้ว่าผู้แข่งขันผู้หนึ่งผู้ใดถ้ามีกลยุทธเพียงสองกลยุทธเข้าแข่งขัน ส่วนคู่แข่งขันมีกี่กลยุทธก็ได้นั้นก็จะทำให้สามารถเขียนกราฟใน 2 มิติได้นั่นเองเมื่อเราสามารถเขียนกราฟใน 2 มิติได้ การคำนวณหาผลลัพธ์ของเกมส์ก็จะง่ายขึ้นมาก เพราะสามารถใช้รูปกราฟแสดงผลลัพธ์ได้ทันที

---

[1] ผศ.ดร.วิจิตร ตัณฑสุทธิ์, Ibid P.297-302

โดยทั่วไปในเกมส์การแข่งขันสองคนผลรวมเท่ากับศูนย์ จะมีผู้แข่งขัน 2 คน คือ A กับ B วิธีการใช้กราฟเข้าช่วยหาคำตอบที่ดีที่สุดของเกมส์จะใช้ได้ก็ต่อเมื่อผู้แข่งขัน A มีกลยุทธเข้าแข่งขัน 2 กลยุทธ ส่วนคู่ต่อสู้ B มีกลยุทธโต้ตอบ n กลยุทธ (2 x n) หรือในทางตรงกันข้าม วิธีการนี้จะใช้ได้ก็ต่อเมื่อผู้แข่งขัน A มีกลยุทธที่จะนำเอามาใช้ทั้งหมดเท่ากับ m กลยุทธ แต่คู่แข่งขันมีกลยุทธจะตอบโต้อยู่เพียง 2 กลยุทธเท่านั้น (m x 2) ปัญหาเกมส์ที่ซับซ้อนใด ๆ ก็ตามถ้าสามารถลดกลยุทธของคู่แข่งขันผู้หนึ่งผู้ใดลงมาให้เหลือเพียง 2 กลยุทธดังกล่าวไว้ข้างต้นนี้แล้วเกมส์นั้นก็สามารถใช้วิธีกราฟหาผลลัพธ์ออกมาได้

สมมติการแข่งขันเกมส์ชนิดหนึ่ง ผู้แข่งขัน A มีกลยุทธเข้าแข่งขันอยู่ 2 กลยุทธ ความน่าจะเป็นที่ A จะเลือกกลยุทธของตนออกมาใช้เท่ากับ x_1 และ x_2 สำหรับกลยุทธที่ 1 และกลยุทธที่ 2 ตามลำดับ ตามกฎของความน่าจะเป็นผลรวมของความน่าจะเป็นของกลยุทธทั้งสองจะเท่ากับ 1 คือ

$$x_1 + x_2 = 1 \; ; \; x_1 \geqslant 0, \; x_2 \geqslant 0$$

เพราะฉะนั้น $x_2 = 1 - x_1$

ส่วนผู้แข่งขัน B มีกลยุทธเข้าแข่งขันทั้งหมดเท่ากับ n กลยุทธ ความน่าจะเป็นที่ผู้แข่งขัน B จะเลือกกลยุทธที่ 1, 2,....., n ออกมาใช้เท่ากับ y_1, y_2, ...,y_n ตามลำดับแมทหริกซ์ผลตอบแทนจากเกมส์แสดงได้ดังนี้[1]

B

		y_1	y_2	....	......	y_n
A	x_1	a_{11}	a_{12}	....	......	a_{1n}
	$x_2 = 1 - x_1$	a_{21}	a_{22}	....	......	a_{2n}

---

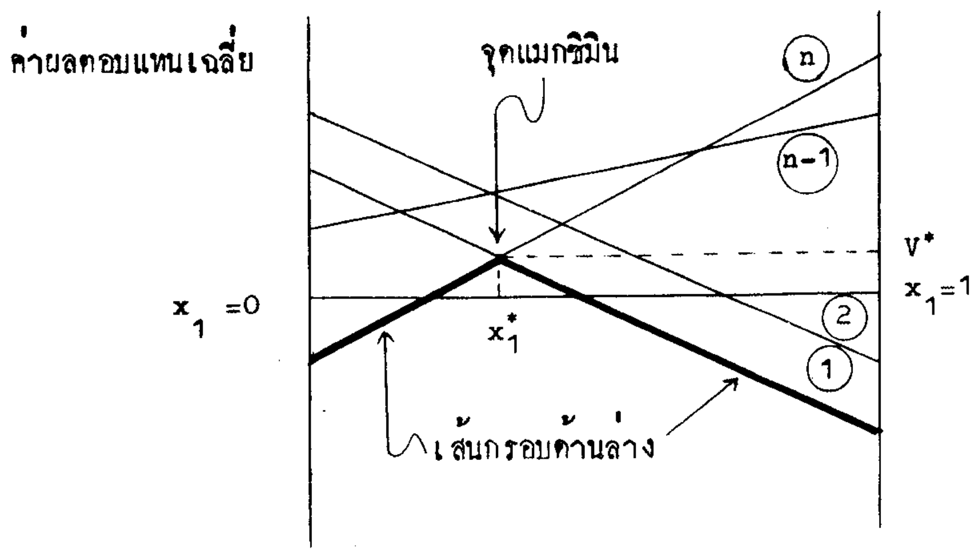
[1] Hamdy A.Taha , Ibid. P.343-348

ผลตอบแทนเฉลี่ยหรือผลได้เฉลี่ยที่ผู้แข่งขัน A จะได้รับ เมื่อคู่แข่งขัน B เลือก กลยุทธ แต่ละกลยุทธที่ตนมีอยู่มาแข่งขัน แสดงได้ดังตารางข้างล่างนี้

กลยุทธที่ B ใช้	ผลตอบแทนเฉลี่ยของ A
1	$a_{11}x_1 + a_{21}(1-x_1) = (a_{11} - a_{21})x_1 + a_{21}$
2	$a_{12}x_1 + a_{22}(1-x_1) = (a_{12} - a_{22})x_1 + a_{22}$
⋮	
n	$a_{1n}x_1 + a_{2n}(1-x_1) = (a_{1n} - a_{2n})x_1 + a_{2n}$

ตามหลักเกณฑ์ Maximin ที่นำไปใช้ในการแก้ปัญหาเกมส์ที่ใช้กลยุทธผสม ผู้แข่งขัน A จะเลือกหาค่า x_1 ซึ่งจะทำให้ผลตอบแทนเฉลี่ยที่น้อยที่สุดของเขามีค่ามากที่สุด (Maximize the Minimum Average Payoff) ปัญหาของเกมส์แบบนี้สามารถนำวิธีกราฟมาช่วยแก้ปัญหาได้ โดยเขียนสมการเส้นตรงซึ่งเป็นฟังก์ชั่นของ x_1 จากตารางข้างต้นนี้ลงบนกระดาษกราฟ สมการเส้นตรงเหล่านี้จะมีหลายเส้น ตัวอย่างเช่น ถ้า B ใช้กลยุทธที่ 1 เส้นตรงที่ได้จะเป็น $(a_{11} - a_{21})x_1 + a_{21}$ ถ้า B เลือกกลยุทธที่ 2 เส้นตรงที่ได้จะเป็น $(a_{12} - a_{22})x_1 + a_{22}$ เป็นต้น

กราฟของเส้นตรงทั้งหมดเมื่อวาดขึ้นมาแล้ว อาจจะได้เป็นดังรูปที่ 11-3



รูปที่ 11-3 กราฟแสดงผลลัพธ์ของเกมส์ของผู้แข่งขัน A

ตัวเลขที่อยู่ในวงกลมคือกลยุทธที่ B เลือกใช้ซึ่งจะทำให้เกิดเส้นตรงต่าง ๆ แล้วแต่ว่า B จะเลือกกลยุทธใดออกมาใช้ จากกราฟเราจะได้เส้นกรอบด้านล่างแสดงขอบเขตค่าผลตอบแทนเฉลี่ยน้อยที่สุด ซึ่งเป็นฟังค์ชั่นของ x_1 จุดที่สูงที่สุดในแนวเส้นกรอบด้านล่างนี้ก็คือ จุดแมกซิมิน ที่จุดนี้จะทำให้ค่าผลตอบแทนเฉลี่ยที่น้อยที่สุดมีค่ามากที่สุด ค่า x_1 ที่จุดแมกซิมินก็คือ ค่า x_1^* ซึ่งเป็นค่าความน่าจะเป็นที่ดีที่สุดของผู้แข่งขัน A ส่วนค่าผลตอบแทนเฉลี่ยที่ดีที่สุดของเกมส์คือค่า V^*

สำหรับความน่าจะเป็นที่ดีที่สุดของผู้แข่งขัน B สามารถคำนวณหาได้จากสมการของค่าผลตอบแทนเฉลี่ยของเกมส์

สำหรับเกมส์ที่มีขนาดของแมทริกซ์ผลตอบแทนเท่ากับ (2 x n) ดังที่กล่าวไว้ข้างต้นนี้ ค่าผลตอบแทนเฉลี่ยที่ดีที่สุดของเกมส์หาได้ดังนี้