บทที่ 8

การทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยสองค่า

ในการสืบเสาะทางจิตวิทยา และทางการศึกษา สิ่งสำคัญของการเพิ่มพูนความรู้คือการถามว่าสิ่งที่ศึกษาให้ผลแตกต่างกันอย่างไร เมื่อมีการวัดบางตัวแปรภายใต้สองเงื่อนไขที่แตกต่างกัน เช่นความสามารถในการสะกดคำของนักเรียนชายและนักเรียนหญิงในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เท่ากันหรือไม่ อัตราการพิมพ์งานในบรรยากาศที่มีเสียงดังกับบรรยากาศที่สงบเงียบเท่ากันหรือไม่ หรือผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนสองกลุ่มที่เรียนด้วยวิธีการสอนที่แตกต่างกันเท่ากันหรือไม่ หรือ ผลของการสอนแบบค้นพบและการสอนแบบปกติจะเหมือนกันหรือไม่

คำถามต่าง ๆเหล่านี้เป็นตัวอย่างของปัญหาซึ่งใช้ทดสอบสมมุติฐานของการเท่ากันของสองค่าเฉลี่ยซึ่งอาจเป็นประโยชน์ในการหาคำตอบ เนื่องจากตัวแปรที่ศึกษาได้มาด้วยการสุ่ม จึงเป็นไปได้ที่สองกลุ่มตัวอย่างจะมีค่าเฉลี่ยแดกต่างกัน แม้ว่าทั้งสองกลุ่มจะได้รับการจัดกระทำเหมือนกัน

คำถามสำคัญไม่ใช่ถามเกี่ยวกับกลุ่มตัวอย่าง แต่เกี่ยวกับกลุ่มประชากรจากที่กลุ่มตัวอย่างได้มา เช่น ถามว่าความน่าจะเป็นที่ค่าเฉลี่ยของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของประชากรที่เรียนแบบค้นพบจะเท่ากันกับการเรียนแบบปกติหรือไม่ ถ้าประชากรสองกลุ่มจะมีค่าเฉลี่ยเท่ากันก็แสดงว่าการสอนแบบค้นพบไม่มีผลให้เกิดการเปลี่ยนแปลงไปจากการสอนแบบปกติ

จากคำถามที่ว่า "ผลของการสอนแบบค้นพบ และการสอนแบบปกติจะเท่ากันหรือไม่"

คำถามนี้อาจแสดงในรูปสมมุติฐานทางสถิติเพื่อใช้ในการทดสอบ ได้ดังนี้

$$H_0: \mu_X - \mu_Y = 0$$

การทดสอบความแตกต่างระหว่างสองค่าเฉลี่ยปกติจะเกี่ยวข้องกับความแตกต่างระหว่างการวัดของตัวแปรชนิดเดียวกันที่กระทำภายใต้สองเงื่อนไข เช่นให้ X เป็นคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจากกลุ่มที่สอนแบบค้นพบ Y เป็นคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจากกลุ่มที่สอนแบบปกติ

สมมุติฐานแย้ง H_A อาจระบุทิศทางหรือไม่ระบุทิศทางขึ้นอยู่กับตรรกะของการศึกษา ถ้าความสนใจเพียงต้องการค้นพบว่าการสอนแบบค้นพบจะพัฒนาผลการเรียนให้สูงขึ้นกว่าการสอนแบบปกติหรือไม่ จะได้ $H_A: \mu_X - \mu_Y > 0$ เป็นสมมุติฐานแย้งที่เหมาะสม ในกรณีปกติผู้ทดสอบสมมุติฐานต้องการรู้ผลที่เกิดขึ้นโดยไม่สนใจทิศทาง เพราะฉะนั้นจะเลือกสมมุติฐานแย้งที่ไม่กำหนดทิศทางจะได้สมมุติฐานว่างและสมมุติฐานแย้งดังนี้

$$H_0: \mu_X - \mu_Y = 0$$
$$H_A: \mu_X - \mu_Y \neq 0$$

กระบวนการของการทดสอบสมมุติฐานว่าง เราต้องเลือก α เป็นเกณฑ์ของการตัดสินใจและเลือกขนาดของกลุ่มตัวอย่างที่จะช่วยให้เรามีโอกาสที่ดีของการค้นพบความแตกต่าง (ถ้ามันมีความแตกต่าง) ขั้นต่อไปเราต้องตรวจสอบลักษณะของการแจกแจงการชักตัวอย่างเราจะพิจารณาบริเวณของการปฏิเสธตามธรรมชาติของ H_A และค่าของ α ในการนำเสนอปัญหา ถ้าความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างสองกลุ่มมีมาก ในทิศทางใดทิศทางหนึ่ง นั่นคือไม่สมเหตุสมที่จะมีโอกาสเบี่ยงเบนเมื่อประชากรเหมือนกัน ตรรกะและกระบวนการทั่วไปสำหรับการทดสอบสมมุติฐานว่างเกี่ยวกับความแตกต่างระหว่างสองค่าเฉลี่ยเหมือนกับการทดสอบ สมมุติฐานว่างเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยเชิงเดี่ยว

1. การแจกแจงการชักตัวอย่างแบบสุ่มของการแจกแจงของความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของสองกลุ่มตัวอย่าง

การแจกแจงการชักตัวอย่างแบบสุ่มของค่าเฉลี่ยเชิงเดี่ยวจะบรรยายการแจกแจงค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างที่ชักตัวอย่างจากประชากรโดยมีค่าเฉลี่ยจำเพาะเจาะจงใน H_0

ในที่นี้เราเกี่ยวข้องกับความแตกต่างระหว่างสองค่าเฉลี่ย และอ้างอิงการแจกแจงเป็นการแจกแจงการชักตัวอย่างโดยการสุ่มของความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของสองกลุ่มตัวอย่าง

สมมุติกลุ่มตัวอย่างหนึ่งสุ่มจากประชากรของคะแนน X และอีกกลุ่มหนึ่งสุ่มจากประชากรของคะแนน Y คำนวณค่าเฉลี่ยของแต่ละกลุ่ม และหาความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยสองกลุ่มนี้ และรายงานผล กลุ่มตัวอย่างจะอนุมานไปสู่ประชากรของกลุ่มตัวอย่างนั้น และเลือกคู่ที่สองของตัวอย่างขนาดเดียวกันในทำนองเดียวกัน และคำนวณค่าเฉลี่ยความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ย รายงานผล ถ้าการทดลองนี้กระทำซ้ำๆไม่จำกัดจำนวน หาความแตกต่าง จำนวน $(\bar{X}-\bar{Y})$ ก่อรูปการแจกแจงการชักตัวอย่างแบบสุ่มของความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของสองกลุ่มตัวอย่าง

การใช้การแจกแจงการชักตัวอย่างบรรยายว่าความแตกต่างอะไรจะปรากฏระหว่าง $\bar{X}$ และ $\bar{Y}$ เมื่อ H_0 เป็นจริง ในการสืบสวนสอบสวนเกี่ยวกับความแตกต่างระหว่างสองค่าเฉลี่ย ในการทดสอบสมมุติฐาน H_0 ส่วนใหญ่มักกำหนดว่า μ_X และ μ_y ไม่แตกต่างกัน (สมมุติฐานว่างสามารถกำหนดว่า $\mu_X - \mu_y = +4$ แต่การสืบสวนสอบสวนมักไม่นำไปสู่คำถามเช่นนั้น) ในตอนนี้ ถ้าคู่ของตัวอย่างถูกสุ่มจากสองประชากร และถ้าค่าเฉลี่ยของสองประชากรเท่ากัน เราจะพบว่าบางที $\bar{X}$ มากกว่า $\bar{Y}$ ทำให้ $\bar{X}$ - $\bar{Y}$ นำไปสู่ค่าบวก และบางที่ $\bar{X}$ น้อยกว่า $\bar{Y}$ ทำให้ $\bar{X}$ - $\bar{Y}$ นำไปสู่ค่าลบ เมื่อพิจารณาค่าผลรวมของความแตกต่าง ของค่าเฉลี่ยของมันจะเป็นศูนย์ดังนั้นค่าเฉลี่ยของการแจกแจงการชักตัวอย่างของความแตกต่าง $\bar{X}$ - $\bar{Y}$ เป็นศูนย์ เมื่อความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของสองประชากรเป็นศูนย์ เราจะใช้สัญลักษณ์ $\mu_{\bar{X}-\bar{Y}}$ สำหรับค่าเฉลี่ยของการแจกแจงการชักตัวอย่างของ $\bar{X}$ - $\bar{Y}$ เขียนสรุปได้เป็น

$$\mu_{\bar{X}-\bar{Y}} = 0$$

เมื่อ $\mu_{\bar{X}} - \mu_{\bar{y}} = 0$

โดยทั่วไป ค่าเฉลี่ยของการแจกแจงการชักตัวอย่างของความแตกต่างระหว่างสองค่าเฉลี่ยเท่ากับความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของสองประชากร

$$\mu_{\bar{X}-\bar{Y}} = \mu_{\bar{X}} - \mu_{\bar{y}}$$

1.1 การแสดงการแจกแจงการชักตัวอย่างของความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ย

ในการสำรวจธรรมชาติของการแจกแจงของ $\bar{X}$ - $\bar{Y}$ เราจะสมมุติประชากรของคะแนน X ประกอบด้วย: 4, 6, 8 เพราะว่าการสืบสวนสอบสวนถามว่าอะไรจะเกิดขึ้นถ้า"การจัดกระทำ" ไม่มีผล เราจะสมมุติว่าประชากรของคะแนน Y ประกอบด้วยคะแนนสามคะแนน: 4, 6, 8 เช่นเดียวกัน ถ้าชักตัวอย่างขนาดสองโดยการสุ่ม แล้วใส่คืนจากแต่ละประชากร จะมีตัวอย่างที่เป็นไปได้ 9 แบบและมีค่าเฉลี่ยที่เป็นไปได้ 9 ค่าในแต่ละประชากร ซึ่งแสดงได้ด้วยตาราง 8.1

ตาราง 8.1 กลุ่มตัวอย่างและค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างของขนาดสอง ที่เป็นไปได้ (การชักตัวอย่างโดยใส่คืน)

ประชากรของคะแนน X: 4, 6, 8

ประชากรของคะแนน Y: 4, 6, 8

$\mu_X = \mu_Y = 6$

$\sigma_X = \sigma_Y = \sqrt{[(4-6)^2+(6-6)^2+(8-6)^2]/3} = 1.633$

กลุ่มตัวอย่างจากประชากร X	$\bar{X}$	กลุ่มตัวอย่างจากประชากร Y	$\bar{Y}$
4, 4	4	4, 4	4
4, 6	5	4, 6	5
4, 8	6	4, 8	6
6, 4	5	6, 4	5
6, 6	6	6, 6	6
6, 8	7	6, 8	7
8, 4	6	8, 4	6
8, 6	7	8, 6	7
8, 8	8	8, 8	8

เนื่องจากกลุ่มตัวอย่างประชากร X และกลุ่มตัวอย่างจากประชากร Y แต่ละกลุ่มตัวอย่างมีกลุ่มตัวอย่างที่แตกต่างกัน 9 กลุ่ม ดังนั้น จะมีคู่ของความแตกต่าง 81 คู่ คือ $(\bar{X} - \bar{Y})$ จำนวน 81 คู่ ซึ่งแสดงดังตาราง 8.2

ตาราง 8.2 ความแตกต่างระหว่างคู่ของค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่าง $(\bar{X} - \bar{Y})$ สำหรับทุกคู่ตัวอย่างของ X และ Y

	$\bar{Y}$								
$\bar{X}$	4	5	5	6	6	6	7	7	8
4	0	-1	-1	-2	-2	-2	-3	-3	-4
5	1	0	0	-1	-1	-1	-2	-2	-3
5	1	0	0	-1	-1	-1	-2	-2	-3
6	2	1	1	0	0	0	-1	-1	-2
6	2	1	1	0	0	0	-1	-1	-2
6	2	1	1	0	0	0	-1	-1	-2
7	3	2	2	1	1	1	0	0	-1
7	3	2	2	1	1	1	0	0	-1
8	4	3	3	2	2	2	1	1	0

เมื่อพิจารณาการแจกแจงของความแตกต่างระหว่างทุกคู่ที่เป็นไปได้ของค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่าง ซึ่งเป็นข้อมูลจากตาราง 8.2 มีตารางการแจกแจงดังนี้

ตาราง 8.3 การแจกแจงของความแตกต่างระหว่างทุกคู่ที่เป็นไปได้ของค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่าง (ข้อมูลจากตาราง 8.2)

$(\bar{X} - \bar{Y})$	f	$f\left[(\bar{X}-\bar{Y})-\mu_{\bar{x}-\bar{y}}\right]^2 = f(\bar{x}-\bar{y})^2$
-4	1	$(-4)^2$
-3	4	$4(-3)^2$
-2	10	$10(-2)^2$
-1	16	$16(-1)^2$
0	19	0
1	16	$16(1)^2$
2	10	$10(2)^2$
3	4	$4(3)^2$
4	1	$(4)^2$
	n = 81	

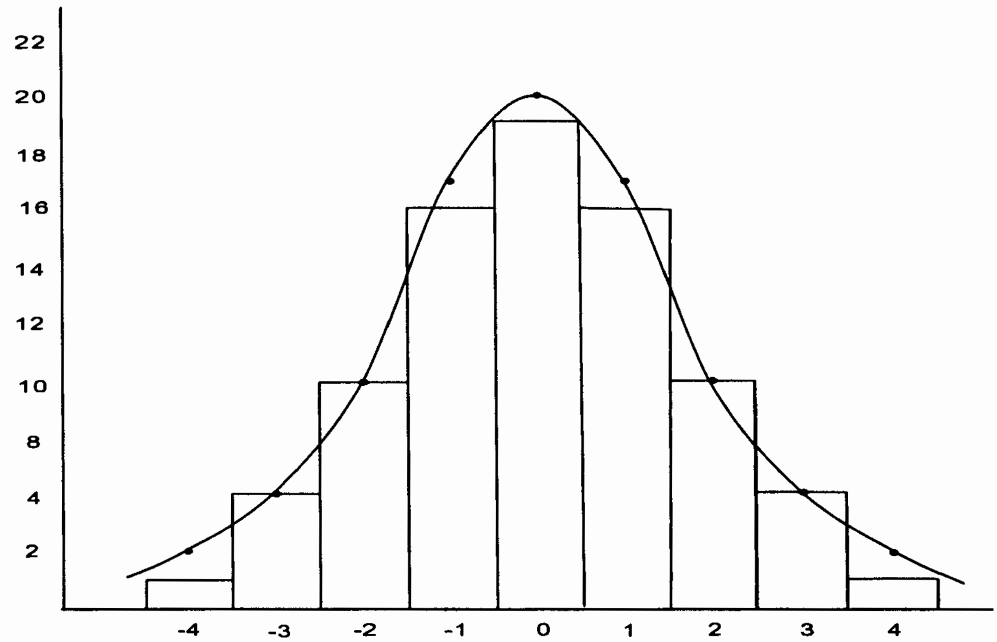
จะได้ $\mu_{\bar{X}-\bar{Y}} = 0$

$$\sigma_{\bar{X}-\bar{Y}} = \sqrt{\frac{(-4)^2 + 4(-3)^2 + 10(-2)^2 + 16(-1)^2 + 16(1^2) + 10(2^2) + 4(3^2) + 4^2}{81}}$$

$$= 1.633$$

1.2 สมบัติของการแจกแจงการชักตัวอย่างของความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ย

ในตอนนี้เรารู้แล้วว่า ค่าเฉลี่ยของการแจกแจงการชักตัวอย่างโดยการสุ่มของความแตกต่างระหว่างคู่ของค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่าง $\mu_{\bar{X}-\bar{Y}}$ เท่ากับความแตกต่างระหว่างสองค่าเฉลี่ยของประชากร μ_{X-Y} เรารู้ด้วยว่าการแจกแจงการชักตัวอย่างของ $(\bar{X} - \bar{Y})$ จะเป็นการแจกแจงปกติเมื่อสองประชากรนั้นเป็นการแจกแจงปกติ ดังรูป 8.1 และการแจกแจงการชักตัวอย่างจะเข้าสู่รูปปกติแม้ว่าสองประชากรนั้นไม่เป็นปกติ แต่สำหรับค่าของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานจะเป็นเท่าไร คำตอบจะขึ้นอยู่กับตัวอย่างต่าง ๆเป็นอิสระต่อกันหรือขึ้นต่อกัน



$(\overline{X}-\overline{Y})$

รูป 8.1

การสุ่มตัวอย่างเป็นอิสระต่อกันเมื่อเลือกสมาชิกที่ประกอบเป็นคะแนนของ Y ไม่มีอิทธิพลกับการเลือกสมาชิกที่ประกอบเป็นคะแนนของ X และในทางกลับกันด้วย การเลือกการสุ่มตามปกติ เลือกจากสองประชากร

การสุ่มตัวอย่างที่ไม่เป็นอิสระต่อกันเมื่อตัวอย่างเดียวกันถูกใช้สำหรับทั้งสองเงื่อนไขการปฏิบัติ หรือถ้าตัวอย่างนั้นสำหรับสองเงื่อนไขถูกจับคู่ในบางกรณี เราจะพิจารณาเพียงกระบวนการสำหรับตัวอย่างที่เป็นอิสระต่อกันในบทนี้

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของการแจกแจงการชักตัวอย่างของ $(\overline{X}-\overline{Y})$ เรียกความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของความแตกต่างระหว่างสองค่าเฉลี่ย และใช้สัญลักษณ์ $\sigma_{\overline{X}-\overline{Y}}$ ถ้าการแจกแจงการชักตัวอย่างประกอบด้วยความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างที่เป็นอิสระต่อกัน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของมันคือ

ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของผลต่างระหว่างสองค่าเฉลี่ยที่เป็นอิสระต่อกัน (ให้กลับไปทบทวนการหาค่า σ ในบทที่ 3)

$$\sigma_{\bar{X}-\bar{Y}} = \sqrt{\sigma_{\bar{X}}^2 + \sigma_{\bar{Y}}^2} \qquad \text{.......... (8.1)}$$

ในตัวอย่างของหัวข้อ 8.2 การแจกแจงของความแตกต่างที่เป็นไปได้สร้างบนสมมุติฐานของค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างที่เป็นอิสระต่อกัน ตามสูตร 8.1 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของมันควรเป็น

$$\sigma_{\bar{X}-\bar{Y}} = \sqrt{\left(\frac{1.633}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1.633}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$= 1.633$$

สังเกตว่าการคำนวณของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน(จากข้อมูลในตาราง 8.1 และตาราง 8.2) มีค่าเท่ากัน เท่ากับ 1.633 นั่นคือ $\sigma_X = \sigma_Y = \sigma_{\bar{X}-\bar{Y}}$

2. การตรวจสอบสูตรสำหรับ t independent

สำหรับสูตร 8.1 ใช้ในกรณีที่เรารู้ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของค่าเฉลี่ยของ X และของ Y และจากกรณีนี้ เราจะต้องรู้ μ_X และ μ_Y ซึ่งตามปกติเราจะไม่ทราบส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากร และต้องประมาณมันจากกลุ่มตัวอย่าง สัญลักษณ์สำหรับการประมาณความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของความแตกต่างระหว่างสองค่าเฉลี่ยคือ $s_{\bar{X}-\bar{Y}}$ สูตรสำหรับการประมาณ $\sigma_{\bar{X}-\bar{Y}}$ คือ

การประมาณของ $\sigma_{\bar{X}-\bar{Y}}$ สำหรับกลุ่มตัวอย่างที่เป็นอิสระต่อกัน

$$s_{\bar{X}-\bar{Y}} = \sqrt{s_{\bar{X}}^2 + s_{\bar{Y}}^2} \qquad \text{.......... (8.2(1))}$$

ในการทดสอบความแตกต่างระหว่างสองค่าเฉลี่ยที่เป็นอิสระต่อกัน เราสามารถคำนวณค่าประมาณ "z" เมื่อ z เป็น (คะแนน – ค่าเฉลี่ย)/ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ในการชักตัวอย่างการแจกแจงของความแตกต่าง ความแตกต่างคือคะแนน $\bar{X} - \bar{Y}$ เป็นความแตกต่างของค่าเฉลี่ย และ $s_{\bar{X}-\bar{Y}}$ เป็นการประมาณส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

$$\text{"z"} = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_x - \mu_Y)_{hyp}}{s_{\bar{X}-\bar{Y}}}$$

เมื่อขนาดของกลุ่มตัวอย่างเป็นขนาดใหญ่สัมพัทธ์ "z" จะมีลักษณะเข้าใกล้การแจกแจงปกติ ในขณะที่ขนาดของกลุ่มตัวอย่างลดลง การแจกแจงจะเบี่ยงเบนจากปกติ เราจะเรียกการแจกแจงว่า การแจกแจง t ของ student (student's t) การเปลี่ยนแปลงที่ Fisher แนะนำคือ ตั้งสมมุติฐานว่า $\sigma^2_{\bar{X}} = \sigma^2_{\bar{Y}}$ ซึ่งมักเรียกสมมุติฐานของ homogeneity of variance

ตามสูตร เราอาจแทน σ^2_X / n สำหรับ $\sigma^2_{\bar{X}}$ และแทน σ^2_y / n สำหรับ $\sigma^2_{\bar{Y}}$ ผลคือ

$$\sigma_{\bar{X}-\bar{Y}} = \sqrt{\frac{\sigma^2_X}{n_X} + \frac{\sigma^2_Y}{n_Y}}$$

สูตรนี้เป็นไปได้ที่ $\sigma^2_{\bar{X}}$ แตกต่างจาก $\sigma^2_{\bar{Y}}$ เมื่อประมาณสองความแปรปรวนจากตัวอย่าง จะได้ :

$$s_{\bar{X}-\bar{Y}} = \sqrt{\frac{s^2_X}{n_X} + \frac{s^2_Y}{n_Y}} \qquad \text{..........(8.2(2))}$$

ถ้า $\sigma^2_{\bar{X}}$ แตกต่างจาก $\sigma^2_{\bar{Y}}$ แล้วแต่ละการประมาณกลุ่มตัวอย่างจะสมนัยกับค่าประชากร ภายใต้ข้อสมมุติฐานของ homogeneity of variance ทั้ง s^2_X และ s^2_Y เป็นค่าประมาณของความแปรปรวนประชากรเดียวกัน ถ้าการประมาณของที่ขึ้นกับตัวอย่างจะใช้ข้อมูลจากทั้งสองกลุ่มตัวอย่างและทำเป็น single pooled estimate ของความ

แปรปรวนประชากร (ใช้สัญลักษณ์ s_p^2)　โดยทั่วไป "การประมาณที่ดี" ของความแปรปรวนประชากร หาได้ดังนี้

$$\sigma^2_{est} = \frac{\textit{sum of square of deviation scores}}{\textit{degrees of freedom}} = \frac{SS}{df}$$

หรือเขียนในรูป

$$s_X^2 = \frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n-1}$$

เราสามารถทำประมาณรวม (pooled estimate) จากสองตัวอย่างโดยการรวม (pooling) ผลบวกของกำลังสองของคะแนนความเบี่ยงเบนจากแต่ละตัวอย่างและหารด้วยผลรวมขององศาเสรีที่เกี่ยวข้องกับการรวมผลบวกของกำลังสอง(pooled sum of squares) ดังนั้น s_p^2 คือ

การประมาณของ σ^2 ที่ทำโดยการรวมข้อมูลจากสองตัวอย่าง

$$s_p^2 = \frac{SS_X + SS_Y}{(n_X - 1) + (n_Y - 1)} \qquad \text{..........(8.3)}$$

เราอาจแทนปริมาณนี้สำหรับ s_X^2 และสำหรับ s_Y^2 ในสูตรสำหรับ $s_{\bar{X}-\bar{Y}}$:

$$s_{\bar{X}-\bar{Y}} = \sqrt{\frac{s_p^2}{n_X} + \frac{s_p^2}{n_Y}}$$

$$= \sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}\right)}$$

ถ้านิพจน์ s_p^2 กำหนดโดยสูตร 8.3 ถูกแทนที่ในสูตร เรามี
การประมาณของความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของความแตกต่างระหว่างสองค่าเฉลี่ยที่เป็นอิสระต่อกัน เมื่อ $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ และ $n_X = n_Y = n$

$$s_{\bar{X}-\bar{Y}} = \sqrt{\frac{SS_X + SS_Y}{n(n-1)}} \qquad \text{..........(8.5)}$$

เมื่อเราคำนวณ t ตามสูตรต่อไปนี้และคำนวณ $s_{\bar{X}-\bar{Y}}$ ตามสูตร 8.4 หรือ 8.5 t จะแจกแจงตามการแจกแจง student ด้วย $(n_X - 1) + (n_Y - 1)$ องศาเสรี

t สำหรับการทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับความแตกต่างระหว่างสองค่าเฉลี่ย

$$t = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)_{hyp}}{s_{\bar{X}-\bar{Y}}} \qquad \text{..........(8.6)}$$

2.1 การทดสอบสมมุติฐานระหว่างสองค่าเฉลี่ยที่เป็นอิสระต่อกัน

ตัวอย่าง จากการศึกษาความสามารถในการอ่านของเด็กที่มีความผิดปกติในการอ่านเนื่องจากมีความบกพร่องทางสมอง (dyslexic) ปรับปรุงโดยการวาง Blue plastic overlay บน reading material วิลเลียมส์ (Williams) และ คณะ (E.W.Minium and others,1993:308-309;citing Williams and others.1992) ทดสมมุติฐานว่า

$$H_0:\ \mu_X - \mu_Y = 0$$

$$H_A:\ \mu_X - \mu_Y \neq 0$$

ใช้ระดับนัยสำคัญ 5% (α = .05) เด็กที่บกพร่องทางสมองจำนวนยี่สิบสี่คน ถูกสุ่มกำหนดเป็นหนึ่งของสองกลุ่ม ข้อมูลสำหรับปัญหานี้และการคำนวณถูกคำนวณในตาราง 8.4

เราคำนวณโดยการหา n_X, $\sum X$, $\sum X^2$, n_Y, $\sum Y$ และ $\sum Y^2$ ในที่นี้มีคะแนน 12 คะแนนภายใต้แต่ละเงื่อนไข แต่เรายังคงใช้สูตร 8.5 คำนวณ t เพราะว่า $n_X = n_Y$ และเราสามารถใช้สูตร 8.5 คำนวณค่า $s_{\bar{X}-\bar{Y}}$ แต่มันดูเหมือนดีที่สุดที่จะตรวจสอบกระบวนการทั่วไป ซึ่งเมื่อ $n_X \neq n_Y$ เช่นเดียวกับเมื่อทั้งสองเท่ากัน

ขั้นต่อไป เราคำนวณสองค่าเฉลี่ยในขั้นที่(1) และผลบวกของกำลังสองของคะแนนความเบี่ยงเบนในขั้นที่ (2a) และ (2b) แม้ว่าสองการประมาณส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานไม่จำเป็นต้องคำนวณ แต่ในการฝึกหัดจะคำนวณและรายงานมันด้วย และการคำนวณที่จำเป็นจะได้แสดง ขั้นที่ (3) แสดงการคำนวณของ t และขั้นที่ (4) แสดงการตรวจสอบองศาเสรี สังเกตว่า เมื่อเราตรวจสอบสมมุติฐานว่างของความไม่แตกต่างระหว่างสอง

ค่าเฉลี่ยที่เป็นอิสระต่อกัน จำนวนองศาเสรีคือ $(n_X-1)+(n_Y-1)$ ในขั้นที่ (5) ค่าวิกฤต ของ t ได้จากตาราง D ในภาคผนวก

ตาราง 8.4 คำนวณสำหรับทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับความแตกต่างระหว่างสองค่าเฉลี่ยที่เป็นอิสระต่อกัน สำหรับการทดลองเด็กที่มีปัญหาทางด้านสมองในเรื่องการอ่าน

Blue overlay X	Clear overlay Y	X^2	Y^2
70	50	4900	2500
80	40	6400	1600
90	50	8100	2500
80	50	6400	2500
50	60	2500	3600
80	60	6400	3600
70	60	4900	3600
80	40	6400	1600
70	60	4900	3600
80	70	6400	4900
80	60	6400	3600
70	80	4900	6400
$\sum X = 900$	$\sum Y = 680$	$\sum X^2 = 68,600$	$\sum Y^2 = 40,000$

(1) $\bar{X} = \dfrac{\sum X}{n_X} = \dfrac{900}{12} = 75.0$ $\qquad \bar{Y} = \dfrac{\sum Y}{n_Y} = \dfrac{680}{12} = 56.7$

(2a) $SS_X = \sum X^2 - \dfrac{\left(\sum X\right)^2}{n_X} = 68,600 - \dfrac{900^2}{12} = 1,100$

$$s_X = \sqrt{\frac{SS_X}{n_x - 1}} = \sqrt{\frac{1100}{12-1}} = \sqrt{100} = 10$$

(2b) $SS_y = \sum Y^2 - \frac{\left(\sum Y\right)^2}{n_Y} = 40{,}000 - \frac{680^2}{12} = 1{,}466.7$

$$s_Y = \sqrt{\frac{SS_Y}{n_Y - 1}} = \sqrt{\frac{1466.7}{12-1}} = \sqrt{133.3} = 11.5$$

(3) $$t = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)_{hyp}}{\sqrt{\left(\frac{SS_X + SS_Y}{(n_X - 1) + (n_Y - 1)}\right)\left(\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}\right)}}$$

$$= \frac{(75.0 - 56.7) - 0}{\sqrt{\left(\frac{1100 + 1466.7}{(12-1) + (12-1)}\right)\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{12}\right)}}$$

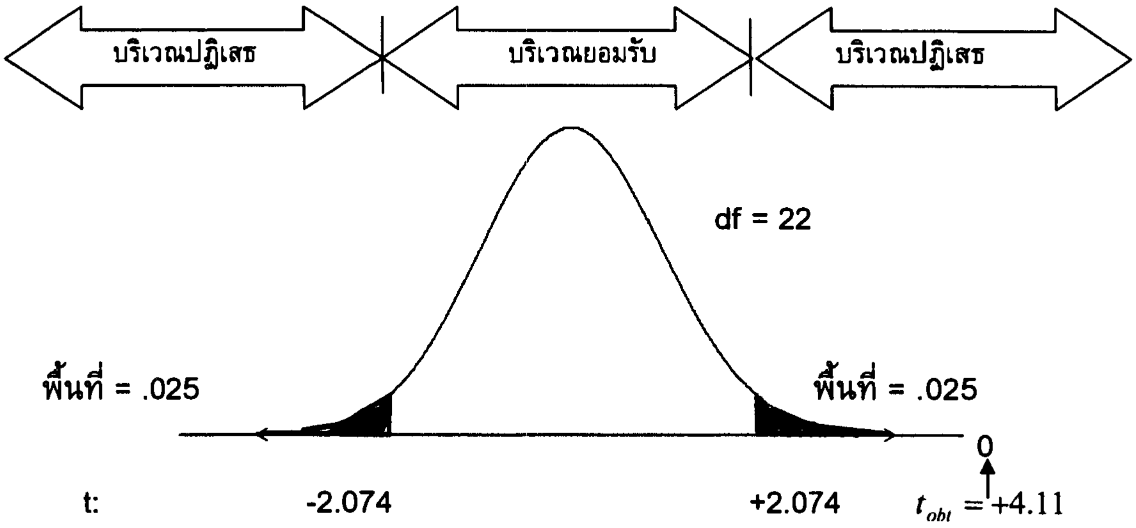
$$= +4.11$$

(4) $df = (n_X - 1) + (n_Y - 1) = (12\text{-}1) + (12\text{-}1) = 22$

(5) $t_{crit} = \pm 2.074$

การตัดสินใจ : ปฏิเสธ H_0

ผลของการทดสอบแสดงดังรูป 8.2 ค่าของ t ที่ได้รับตกในบริเวณการปฏิเสธ ดังนั้นความแตกต่างจากค่าที่กำหนดใน H_0 ที่สรุปว่ามันมีความน่าจะเป็นน้อยของการปรากฏถ้า H_0 เป็นจริง ดังนั้นจึงปฏิเสธ H_0 งานวิจัยของเขาสรุปว่า the blue plastic overlays บน reading material ปรับปรุงกระบวนการเกี่ยวกับสายตาและช่วยปรับปรุงความสามารถในการอ่านของเด็กที่มีความบกพร่องทางสมองเกี่ยวกับการมองเห็น



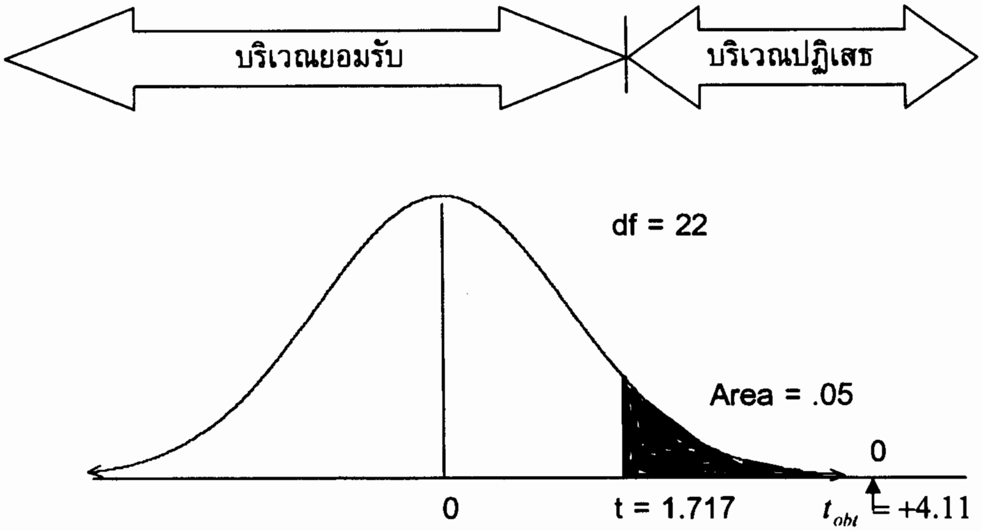
รูป 8.2 การทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับความแตกต่างระหว่างสองค่าเฉลี่ย สมมุติฐานแย้งไม่มีทิศทาง α = .05

การดำเนินการทดสอบหางเดียว

สมมุติส่วนสำคัญในการศึกษาเด็กที่มีความผิดปกติในการอ่าน เนื่องจากมีความบกพร่องทางสมอง เพียงค้นพบว่า the blue overlay ปรับปรุงการอ่านในกรณีนี้ การทดสอบหางเดียวจะมีอันดับ สมมุติฐานว่างและสมมุติฐานแย้ง จะเป็นดังนี้

$$H_0: \mu_X - \mu_Y = 0$$
$$H_A: \mu_X - \mu_Y > 0$$

บริเวณของการปฏิเสธเป็นส่วนทั้งหมดในหางด้านบนของการแจกแจงการชักตัวอย่างของ $(\overline{X} - \overline{Y})$ รูป 8.3 แสดงสถานการณ์ การคำนวณของ t เหมือนกับการทดสอบสองหาง และได้รับค่า t = +4.11 ในการแจกแจง t ซึ่งองศาเสรีเท่ากับ 22, t = +1.717 แยกแยะจุดด้านบน 5% ของค่าที่จะหา และค่า t ตกในบริเวณปฏิเสธ



รูป 8.3 การทดสอบสมมุติฐานที่ $\mu_X - \mu_Y = 0$ สมมุติฐานแย้ง $\mu_X - \mu_Y > 0$ ข้อมูลจากตาราง 8.4

สำหรับเทคนิคที่พรรณนาในบทนี้ เงื่อนไขทางสถิติต้องเป็นพื้นฐานเหมือนกับที่กล่าวมาแล้วสำหรับแบบจำลองโค้งปกติ จุดสำคัญจะได้สรุปดังต่อไปนี้

1. แต่ละตัวอย่างถูกสุ่มจากประชากรของมัน
2. สองกลุ่มตัวอย่างที่สุ่มต้องเลือกโดยอิสระ
3. กลุ่มตัวอย่างถูกสุ่มด้วยการแทนที่
4. การแจกแจงการสุ่มของ $(\bar{X} - \bar{Y})$ เป็นไปตามโค้งปกติ

3. การเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของสองกลุ่มตัวอย่างที่ไม่อิสระต่อกัน

ในหัวข้อก่อนเราได้กล่าวถึงการเลือกสองกลุ่มตัวอย่างกลุ่มละ 10 คน กลุ่มหนึ่งควบคุมอาหารตามปกติ อีกกลุ่มหนึ่งควบคุมอาหารโดยเพิ่มวิตามินเอ ทดสอบการมองเห็นก่อนการทดลอง หลังจากทดลองแล้วได้ทดสอบการมองเห็นอีกครั้ง การวัดนี้เรียกว่าการออกแบบการวัดซ้ำ(repeated – measures design) เราจะมี 10 คู่ของการสังเกต ซึ่งแต่ละคู่วัดสาระอย่างเดียวกัน (same subject) ประโยชน์ของวิธีการนี้ ช่วยลดความแตกต่างระหว่างสองกลุ่มของคะแนนในการชักตัวอย่างโดยการสุ่ม ดังนั้นสำหรับ

การกำหนดคู่ของการสังเกตค่า Y เป็นส่วนที่ตรวจสอบโดย(หรือสัมพันธ์กับ) ค่าเฉพาะของ X และกลุ่มตัวอย่างไม่สามารถกล่าวว่าเป็นอิสระต่อกัน

กลุ่มตัวอย่างอาจขึ้นกับความแตกต่างที่ใช้ ในการทดลองเช่น การทดลองวิตามิน A เราอาจพิจารณาว่าแหล่งความแปรปรวน(extraneous source) ของความเบี่ยงเบนหาได้จากความแตกต่างในการมองเห็นระหว่างแต่ละบุคคลที่เลือกจากการสุ่ม เราสามารถลดความเบี่ยงเบนโดยจับคู่ผลสัมฤทธิ์ก่อนในการมองเห็น ซึ่งเรียกว่า matched-subjects design ดังนั้นสองสมาชิกของคู่แรกของตัวอย่างอาจเป็น 20-40 คู่ที่สองอาจเป็น 20-20 และต่อ ๆไป เมื่อการสังเกตแต่ละคู่โดยวิธีนี้ ค่าของคะแนน Y จะเป็นส่วนที่สัมพันธ์กับค่าของคู่ของมันของคะแนน X และค่าของ X และ Y ไม่สามารถกล่าวว่าเป็นอิสระโดยสมบูรณ์

3.1 การตรวจสอบสูตรสำหรับ t

สำหรับค่าเฉลี่ยที่ขึ้นต่อกัน สมมุติว่ามีประชากรของคู่การสังเกต(ทั้งการจับคู่หรือการวัดซ้ำ) และกลุ่มตัวอย่างถูกเลือกโดยการสุ่มจากประชากรนี้ และสมมุติว่า ρ (rho) เมื่อรู้สหสัมพันธ์ระหว่างคู่ของการสังเกตในประชากร ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยที่ไม่อิสระต่อกัน ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของความแตกต่างระหว่างสองค่าเฉลี่ยที่ไม่เป็นอิสระต่อกัน

$$\sigma_{\bar{X}-\bar{Y}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2 - 2\rho_{XY}\sigma_{\bar{X}}\sigma_{\bar{Y}}} \qquad \text{..........(8.7)}$$

เมื่อ $\sigma_{\bar{X}}$ คือความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของค่าเฉลี่ยของ X

$\sigma_{\bar{Y}}$ คือความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของค่าเฉลี่ยของ Y

ρ_{XY} คือสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์สำหรับประชากรของคู่ของการวัด X และ Y

สังเกตว่าสูตร 8.7 เหมือนกับสูตร 8.1(สูตรความคลาดเคลื่อนมาตรฐานสำหรับกลุ่มตัวอย่างที่เป็นอิสระต่อกัน) ยกเว้นสำหรับพจน์สุดท้าย ($-2\rho_{XY}\sigma_{\bar{X}}\sigma_{\bar{Y}}$) ถ้า ρ = 0 พจน์สุดท้ายจะเป็นศูนย์ เมื่อไม่ทราบพารามิเตอร์ สูตรที่ใช้ประมาณ $\sigma_{\bar{X}-\bar{Y}}$ คือ

การประมาณความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของความแตกต่างระหว่างสองค่าเฉลี่ยที่ไม่อิสระต่อกัน

$$s_{\bar{X}-\bar{Y}} = \sqrt{s_x^2 + s_y^2 - 2rs_{\bar{X}}s_{\bar{Y}}} \qquad ....(8.8)$$

การประมาณความคลาดเคลื่อนมาตรฐานสำหรับกลุ่มตัวอย่างที่ไม่เป็นอิสระต่อกันเบี่ยงเบนไปจากกลุ่มตัวอย่างหนึ่งไปยังอีกกลุ่มตัวอย่างหนึ่ง เพราะฉะนั้น เราต้องแปลงความแตกต่างระหว่างสองค่าเฉลี่ยสู่ค่า t มากกว่าค่า z การคำนวณของ t สำหรับการทดสอบของความแตกต่างระหว่างสองค่าเฉลี่ยที่ไม่เป็นอิสระต่อกันคือ

$$t = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)_{hyp}}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2 - 2rs_{\bar{X}}s_{\bar{Y}}}} \qquad ....(8.9)$$

ไม่เหมือนกับการทดสอบความแตกต่างระหว่างสองค่าเฉลี่ยที่เป็นอิสระต่อกัน ข้อสมมุติฐานของความเป็นเอกพันธ์ (homogeneity) ของความแปรปรวนไม่เป็นข้อกำหนดสำหรับการทดสอบระหว่างสองค่าเฉลี่ยที่ไม่เป็นอิสระต่อกัน อย่างไรก็ตาม ทางเลือกของขนาดของกลุ่มตัวอย่างเป็นสิ่งสำคัญของการออกแบบปัญหา

ถ้ากลุ่มตัวอย่างขนาดเล็กและมีพื้นฐานความเชื่อว่าประชากร(parent population) ไม่เป็นโค้งปกติ การทดสอบทางสถิติ "nonparametric" อาจเป็นวิธีการที่เหมาะสมกว่า

องศาเสรีสำหรับการทดสอบของความไม่แตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยที่ไม่เป็นอิสระต่อกัน

สำหรับตัวอย่างที่ไม่เป็นอิสระต่อกัน องศาเสรีคือ

$$df = n - 1$$

เมื่อ n เป็นจำนวนคู่ของคะแนน

3.2 การทดสอบสมมุติฐาน เมื่อสองค่าเฉลี่ยไม่เป็นอิสระต่อกัน

ครูอุตม ได้ออกแบบการวิจัยโดยสุ่มนักเรียน 30 คนและจับคู่ได้ 15 คู่ โดยเป็นคนที่มีคะแนนใกล้เคียงกันหรือเท่ากัน แล้วใช้การสุ่มเพื่อให้คนหนึ่งในแต่ละคู่อยู่กลุ่มทดลองส่วนสิบห้าคนที่เหลือของแต่ละคู่อยู่ในกลุ่มควบคุม จากนั้นครูอุตมใช้การสอนแนวใหม่กับกลุ่มทดลอง และใช้การสอนแบบปกติกับกลุ่มควบคุม ทั้งสองกลุ่มจะได้รับการ

สอนเนื้อหาความรู้เท่าๆกัน เมื่อสิ้นภาคเรียนใช้แบบวัดความสามารถที่เป็นแบบวัดมาตรฐาน เราจะทดสอบโดย

สมมุติฐานว่าง H_0: $\mu_X = \mu_Y$ (เมื่อ X แทนคะแนนของนักเรียนที่สอนตามปกติ และ Y แทนคะแนนของการสอนแบบใหม่)

สมมุติฐานแย้ง H_1: $\mu_X \neq \mu_Y$

ใช้ระดับนัยสำคัญ 5%

เราจะคำนวณหา t จากข้อมูลในตาราง 8.5

ตาราง 8.5 การทดสอบความแตกต่างระหว่างสองค่าเฉลี่ยที่ไม่เป็นอิสระต่อกัน

คู่	คะแนน X กลุ่มสอนปกติ	คะแนน Y กลุ่มสอนวิธีใหม่	X^2	Y^2	XY
1	77	73	5929	5329	5621
2	54	44	2916	1936	2376
3	99	87	9801	7569	8613
4	55	63	3025	3969	3465
5	60	64	3600	4096	3840
6	80	75	6400	5625	6000
7	50	41	2500	1681	2050
8	81	62	6561	3844	5022
9	90	80	8100	6400	7200
10	70	64	4900	4096	4480
11	50	43	2500	1849	2150
12	80	82	6400	6724	6560
13	46	53	2116	2809	2438
14	64	58	4096	3364	3712
15	82	72	6724	5184	5904
	$\sum X$ =1038	$\sum Y$ =961	$\sum X^2$ =75568	$\sum Y^2$ =64475	$\sum XY$ =69431

คำนวณ

(1) $\bar{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{1038}{15} = 69.2$ $\qquad$ $\bar{Y} = \frac{\sum Y}{n} = \frac{961}{15} = 64.067$

(2(1)) $SS_X = \sum X^2 - \frac{\left(\sum X\right)^2}{n} = 75568 - \frac{(1038)^2}{15} = 75568 - 71829.6 = 3738.4$

(2(2)) $s_X = \sqrt{\frac{SS_X}{n-1}} = \sqrt{\frac{3738.4}{14}} = \sqrt{267.028} = 16.341$

(3(1)) $SS_Y = \sum y^2 - \frac{\left(\sum y\right)^2}{n} = 64475 - \frac{(961)^2}{15} = 64475 - 61568.066 = 2906.934$

(3(2)) $s_Y = \sqrt{\frac{SS_Y}{n-1}} = \sqrt{\frac{2906.934}{14}} = \sqrt{207.638} = 14.410$

(4(1)) $\sum(X-\bar{X})(Y-\bar{Y}) = \sum XY - \frac{\left(\sum X\right)\left(\sum Y\right)}{n}$

$= 69431 - \frac{(1038)(961)}{15}$

$= 2929.8$

(4(2)) $r = \frac{\sum(X-\bar{X})(Y-\bar{Y})}{\sqrt{(SS_X)(SS_Y)}} = \frac{2929.8}{\sqrt{(3738.4)(2906.934)}}$

$= \frac{2929.8}{3296.556} = .889$

(5(1)) $s_{\bar{X}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}} = \frac{16.341}{\sqrt{15}} = \frac{16.341}{3.873} = 4.219$

(5(2)) $s_{\bar{Y}} = \frac{s_y}{\sqrt{n}} = \frac{14.410}{\sqrt{15}} = \frac{14..410}{3.873} = 3.721$

(6) $s_{\bar{X}-\bar{Y}} = \sqrt{s_X^2 + s_Y^2 - 2rs_{\bar{X}}s_{\bar{Y}}} = \sqrt{(4.219)^2 + (3.721)^2 - 2(.889)(4.219)(3.721)}$

$$= \sqrt{3.733}$$

$$= 1.932$$

(7) $t = \dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_X - \mu_Y)_{hyp}}{s_{\bar{X}-\bar{Y}}} = \dfrac{69.2 - 64.967}{1.932} = 2.656$

ค่าที่ได้รับของ t คือ 2.656 การแจกแจงการชักตัวอย่างของ t เมื่อ H_0 เป็นจริงค่าคาดหมายคือ 0 ค่าวิกฤตของ t สำหรับการทดสอบสองหางกับ $\alpha = .05$ และ df = 14 คือ ± 2.145 (จากตาราง D ในภาคผนวก) ความน่าจะเป็นของการสุ่มกลุ่มตัวอย่างนี้เบี่ยงเบนจากค่าที่กำหนดใน H_0 น้อยกว่า.05เมื่อ H_0 เป็นจริง ค่า t ที่ได้รับตกในบริเวณปฏิเสธ เพราะฉะนั้นเราปฏิเสธ H_0

ข้อสรุปงานวิจัยของเราคือนักเรียนที่เรียนวิธีใหม่มีผลสัมฤทธิ์ต่ำกว่าการเรียนตามปกติ ซึ่งตรงข้ามกับที่เราหวัง ตัวอย่างนี้แสดงว่าทำไมเราจึงชอบทดสอบแบบสองหาง ถ้าเราเลือกที่จะใช้ H_A: $\mu_X - \mu_Y < 0$ เราจะไม่สามารถสรุปว่าวิธีใหม่แย่กว่าวิธีปกติ แม้ว่าเราหวังว่าวิธีใหม่ของการสอนน่าจะมีประสิทธิภาพกว่า เราควรต้องรู้ว่าแล้วถ้าวิธีการสอนแบบใหม่แย่กว่าวิธีปกติล่ะ ดังนั้นการทดสอบหางเดียวเหมาะสมจะใช้เพียงเพื่อหาในทิศทางตรงข้ามกับที่กำหนดใน H_A ไม่ใช่สิ่งสำคัญ

สมมุติฐานแย้งกับปัญหาของสองค่าเฉลี่ยที่ไม่เป็นอิสระต่อกัน สูตร 8.3 ต้องการสหสัมพันธ์ระหว่างคู่ค่าของ X และ Y มีวิธีคำนวณ t โดยวิธีอื่นซึ่งให้ผลเช่นเดียวกัน

พิจารณาสมมุติฐานว่างที่ H_0: $\mu_X - \mu_Y = 0$ ถ้าสมมุติฐานเป็นจริง แล้วมันจะเป็นจริงเมื่อค่าเฉลี่ยของประชากรของความแตกต่างระหว่างคู่ของค่าของ X และ Y เป็นศูนย์ ถ้าความแตกต่างระหว่างคู่คะแนน X และ Y เขียนแทนด้วย D สมมุติฐานเริ่มต้นอาจเขียนแทนด้วย H_0: $\mu_D = 0$ ด้วยวิธีนี้ เราหา $\bar{D}$ ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างชุดของคะแนนความแตกต่าง และสืบสวนว่ามันแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญจากสมมุติฐาน ค่าเฉลี่ยของประชากรของคะแนนความแตกต่าง μ_D สังเกตว่าการแปลงนี้การทดสอบจากการ

ทดสอบสองกลุ่ม(ของคะแนน X และ Y) สู่การทดสอบตัวอย่างเชิงเดี่ยว (ของความแตกต่างของคะแนน)

แทนตัวอย่างของคะแนน X เรามีตัวอย่างของคะแนนความแตกต่าง D การประมาณส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนความแตกต่าง s_D คือ

$$s_D = \sqrt{\frac{SS_D}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum(D-\overline{D})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum D^2 - \frac{\left(\sum D\right)^2}{n}}{n-1}}$$

การประมาณความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของค่าเฉลี่ยของคะแนนความแตกต่าง $s_{\overline{D}}$ คือ $s_{\overline{D}} = \frac{s_D}{\sqrt{n}}$

และสูตรในการหา t จะเป็นสูตรสำหรับ t สำหรับทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยที่ไม่อิสระต่อกัน

$$t = \frac{\overline{D} - \mu_{D(hyp)}}{s_{\overline{D}}} \qquad \text{..........(8.10)}$$

สูดรคำนวณสำหรับ t สำหรับค่าเฉลี่ยที่ไม่เป็นอิสระต่อกันหาได้จากสูตร

$$t = \frac{\overline{D} - \mu_{D(hyp)}}{\sqrt{\frac{\sum D^2 - \frac{\left(\sum D\right)^2}{n}}{n(n-1)}}} \qquad \text{..........(8.11)}$$

เราจะแสดงการใช้สูตร 8.11 ในตาราง 8.6

ตาราง 8.6 การทดสอบความแตกต่างระหว่างสองค่าเฉลี่ยที่ไม่อิสระต่อกัน โดยสูตร 8.11

คู่	คะแนนภายหลังการสอนปกติ (X)	คะแนนภายหลังการสอนวิธีใหม่ (Y)	D=X-Y	D^2
1	78	74	4	16
2	55	45	10	100
3	95	88	7	49
4	57	65	-8	64
5	60	64	-4	16
6	80	75	5	25
7	50	41	9	81
8	83	68	15	225
9	90	80	10	100
10	70	64	6	36
11	50	43	7	49
12	80	82	-2	4
13	48	55	-7	49
14	65	57	8	64
15	85	75	10	100
			$\sum D = 70$	$\sum D^2 = 978$

$$\overline{D} = \frac{\sum D}{n} = \frac{70}{15} = 4.67$$

$$t = \frac{\overline{D} - \mu_{D(hyp)}}{\sqrt{\dfrac{\sum D^2 - \dfrac{\left(\sum D\right)^2}{n}}{n(n-1)}}}$$

$$= \frac{4.67 - 0}{\sqrt{\dfrac{978 - \dfrac{4900^2}{15}}{15(14)}}}$$

$$= \frac{4.67}{\sqrt{3.10}} = 2.65$$

แบบฝึกหัด 8

1. สุ่มกลุ่มตัวอย่าง 40 คน กำหนดให้ได้รับยาการจดจำชนิดใหม่กับยาหลอก หลังการทดลอง (treatment) จะมีการทดสอบการจดจำ ค่าเฉลี่ยสำหรับความจำสำหรับกลุ่มที่รับยาเป็น 82% ในขณะที่กลุ่มที่ให้ยาหลอกเป็น 64% เราสามารถสรุปว่ายาความจำใช้ได้ผลหรือไม่ จงอธิบาย

2. กำหนดกลุ่มตัวอย่างที่เป็นอิสระต่อกัน เมื่อ $s_X = s_Y = 10$

    2.1 จงคำนวณ $s_{\overline{X}-\overline{Y}}$ ถ้า $n_X = n_Y = 30$

    2.2 จงคำนวณ $s_{\overline{X}-\overline{Y}}$ ถ้า $n_X = 15$ และ $n_Y = 45$

    2.3 จงเปรียบเทียบสองค่าของ $s_{\overline{X}-\overline{Y}}$ ผลอันนี้แสดงอะไร

3. กำหนด $\overline{X} = 165.0$, $SS_X = 840$, $n_X = 36$, $\overline{Y} = 175.0$, $SS_Y = 1008$, และ $n_Y = 49$ สมมุติว่ากลุ่มตัวอย่างเป็นอิสระ
   กำหนดสมมุติฐานที่จำเป็นที่จะใช้การทดสอบแบบไม่มีทิศทางของความไม่แตกต่างระหว่างสองค่าเฉลี่ยประชากร

    3.1 คำนวณ $s_{\overline{X}-\overline{Y}}$

    3.2 คำนวณ t

    3.3 ประเมิน t สำหรับ $\alpha = .05$ และ $\alpha = .01$ และสรุปผล

4. ในปัญหาข้อ 3. สมมุติว่า $H_A: \mu_X - \mu_Y < 0$ จงคำนวณ t สำหรับ $\alpha = .05$ และ $\alpha = .01$ และสรุปผล

5. กำหนดข้อมูลต่อไปนี้จากสองกลุ่มตัวอย่างที่ไม่เป็นอิสระต่อกัน $\overline{X} = 86.0$, $s_X = 15.0$, $\overline{Y} = 83.0$, $s_Y = 11.0$, n = 62 และ r = +.48

    5.1 จงเขียนสมมุติฐานที่จำเป็นกับการทดสอบไม่มีทิศทางระหว่างสองค่าเฉลี่ยประชากรที่ไม่แตกต่างกัน

    5.2 คำนวณ $s_{\overline{X}-\overline{Y}}$

    5.3 หาข้อสรุปของการทดสอบสมมุติฐานเมื่อกำหนดระดับนัยสำคัญที่ .05 และ .01

6. Dr. Fredericks เชื่อว่าสิ่งแวดล้อมเป็นสิ่งสำคัญมากกว่าพันธุกรรมที่มีอิทธิพลกับความฉลาด เขาได้นำฝาแฝดมา 12 คู่ให้คนหนึ่งของฝาแฝดอยู่ในenriched environment อีกคนหนึ่งของฝาแฝดอยู่ใน impoverished environment และหลังจากการทดลองตามช่วงเวลาที่กำหนดใช้แบบวัดความฉลาด (IQ) ได้ผลดังนี้

คู่	enriched	impoverished
1	100	102
2	95	93
3	122	116
4	107	110
5	85	75
6	96	100
7	135	124
8	110	110
9	108	110
10	90	88
11	100	90
12	113	108

6.1 จงเขียนสมมุติฐานที่จำเป็นกับการทดสอบไม่มีทิศทางระหว่างสองค่าเฉลี่ยประชากรที่ไม่แตกต่างกัน

6.2 หาข้อสรุปของการทดสอบสมมุติฐานเมื่อกำหนดระดับนัยสำคัญที่ .05

6.3 ทำไมกรณีนี้เป็นตัวอย่างที่ไม่เป็นอิสระต่อกัน Dr. Fredericks สามารถสรุปว่าสิ่งแวดล้อมเป็นสิ่งสำคัญมากกว่า พันธุกรรมที่มีอิทธิพลกับความฉลาดได้หรือไม่อธิบาย