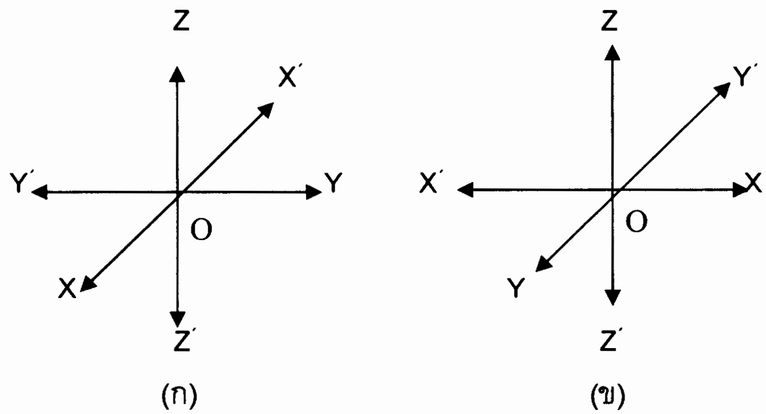
บทที่ 8
เวกเตอร์ในระบบสามมิติ

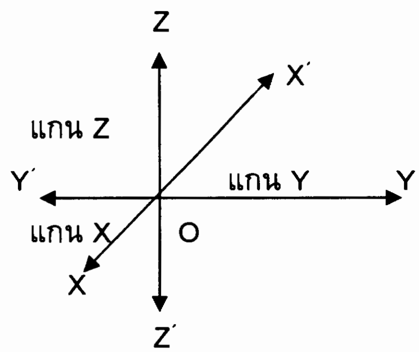
8.1 ระบบพิกัดฉากสามมิติ

กำหนดเส้นตรง XX′ , YY′ และ ZZ′ เป็นเส้นจำนวน (real line) ที่ผ่านจุด O และตั้งฉากซึ่งกันและกัน โดยการกำหนดทิศทางของเส้นตรงทั้งสามนั้นเป็นไปได้สองระบบคือ ระบบมือขวาและระบบมือซ้ายดัง ภาพประกอบ 8.1-1(ก) และ (ข) ตามลำดับ แต่ในบทเรียนนี้มักกำหนดโดยใช้กฎมือขวา



ภาพประกอบ 8.1-1

เรียกเส้นจำนวน XX′ , YY′ และ ZZ′ ว่าแกนพิกัด X แกนพิกัด Y และแกนพิกัด Z หรือเรียกสั้น ๆ ว่า แกน X (x-axis) แกน Y (y-axis) และแกน Z(z-axis) ตามลำดับ เรียกจุด O ซึ่งเป็นจุดตัดของแกน X แกน Y และแกน Z ว่า จุดกำเนิด (origin) ภาพประกอบ 8.1-2

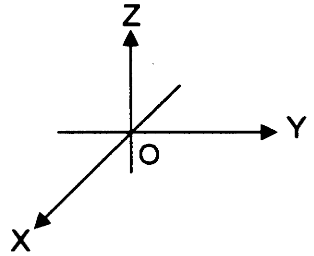


ภาพประกอบ 8.1-2

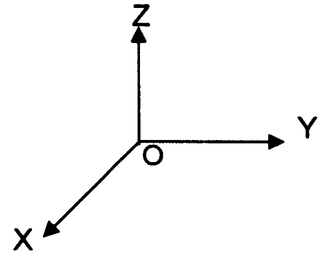
เรียกส่วนของเส้นตรง OX , OY และ OZ ว่าแกน X ทางบวก (positive x- axis) แกน Y ทางบวก (positive y- axis) และแกน Z ทางบวก (positive z- axis) ตามลำดับ

เรียกส่วนของเส้นตรง OX′ ,OY′ และ OZ′ ว่าแกน X ทางลบ (negative x- axis) แกน Y ทางลบ (negative y- axis) และแกน Z ทางลบ (negative z- axis) ตามลำดับ

โดยทั่วไปเมื่อเขียนรูปแกนพิกัดในสามมิติ นิยมเขียนเฉพาะ แกน X แกน Y และ แกน Z ที่เน้นเฉพาะทางด้านที่แทนจำนวนจริงบวกซึ่งมีหัวลูกศรกำกับดังภาพประกอบ 8.1-3(ก) หรือ (ข) โดยละทางด้านจำนวนจริงลบไว้



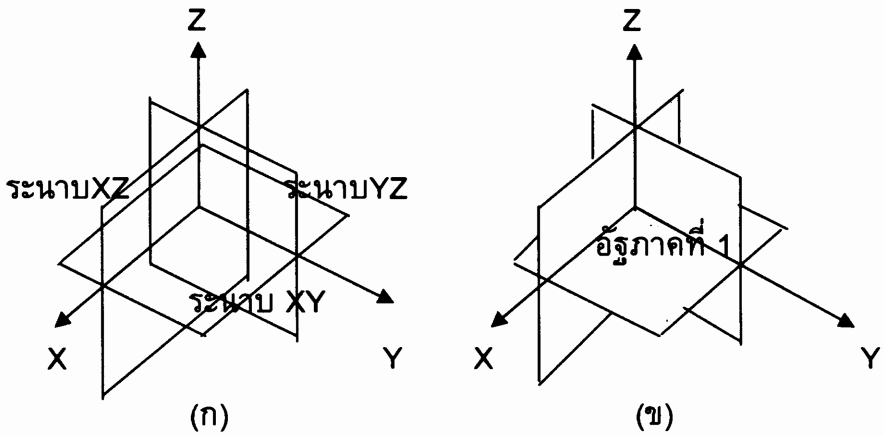
(ก)



(ข)

ภาพประกอบ 8.1-3

แกน X แกน Y และแกน Z จะกำหนดระนาบขึ้น 3 ระนาบ เรียกว่าระนาบอ้างอิง โดยเรียกระนาบที่กำหนดด้วยแกน X และแกน Y ว่าระนาบอ้างอิง XY ระนาบที่กำหนดด้วยแกน X และแกน Z ว่าระนาบอ้างอิง XZ ระนาบที่กำหนดด้วยแกน Y และแกน Z ว่าระนาบอ้างอิง YZ ระนาบอ้างอิง XY ระนาบอ้างอิง XZ และระนาบอ้างอิง YZ จะแบ่งปริภูมิสามมิติออกเป็น 8 บริเวณ คือเหนือระนาบ XY (ไปทางแกน Z ทางบวก) สี่บริเวณ และใต้ระนาบ XY (ไปทางแกน Z ทางลบ) สี่บริเวณ เรียกแต่ละบริเวณว่า อัฐภาค (octant) ดังภาพประกอบ 8.1-4 อัฐภาคที่บรรจุ แกน X แกน Y และแกน Z จะเรียกว่าอัฐภาคที่ 1 อัฐภาคอื่น ๆ ใช้ระบบการเรียกเช่นเดียวกับระนาบสองมิติคือนับทวนเข็มนาฬิกาไปตามลำดับ โดยนับจากบริเวณเหนือระนาบ XY ก่อน



ภาพประกอบ 8.1-4

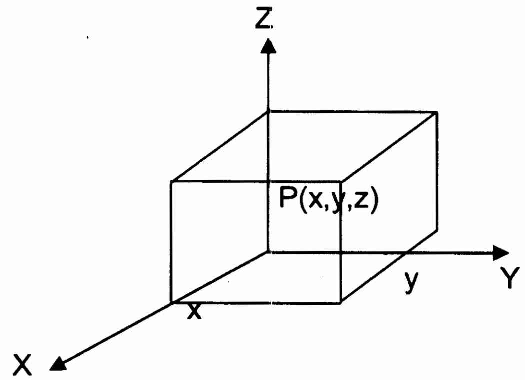
เมื่อกำหนด P เป็นจุดใด ๆ ในปริภูมิสามมิติ จะระบุพิกัดหรือตำแหน่งของจุด P โดยใช้จำนวนจริงสามจำนวนเขียนเรียงกันในวงเล็บเล็ก คั่นด้วยเครื่องหมาย , เรียกสามสิ่งอันดับ (ordered triple) ในรูป (x , y , z) โดยที่

x บอกให้ทราบว่าจุด P อยู่ห่างระนาบ YZ ซึ่งมีระยะจากจุดกำเนิดไปบนแกน X ทางบวก (x > 0) หรือทางลบ (x < 0) เป็นระยะ | x | หน่วย

y บอกให้ทราบว่าจุด P อยู่ห่างระนาบ XZ ซึ่งมีระยะจากจุดกำเนิดไปบนแกน Y ทางบวก (y > 0) หรือทางลบ (y < 0) เป็นระยะ | y | หน่วย

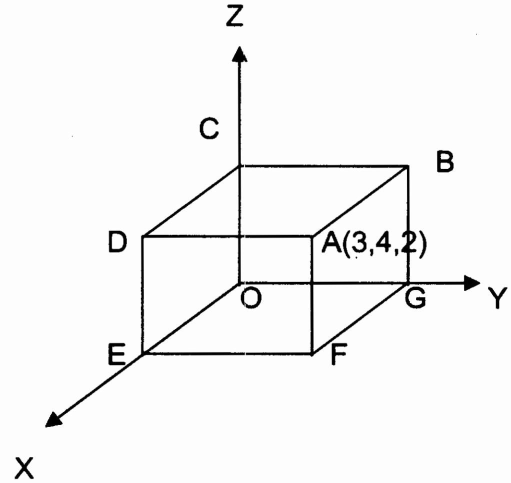
z บอกให้ทราบว่าจุด P อยู่ห่างระนาบ XY ซึ่งมีระยะจากจุดกำเนิดไปบนแกน Z ทางบวก (z > 0) หรือทางลบ (z < 0) เป็นระยะ | z | หน่วย

เรียก (x , y , z) ว่าพิกัดของจุด P และมักเขียนจุดและพิกัดกำกับไว้ด้วยกันเป็น P(x , y , z) ดังภาพประกอบ 8.1-5



ภาพประกอบ 8.1-5

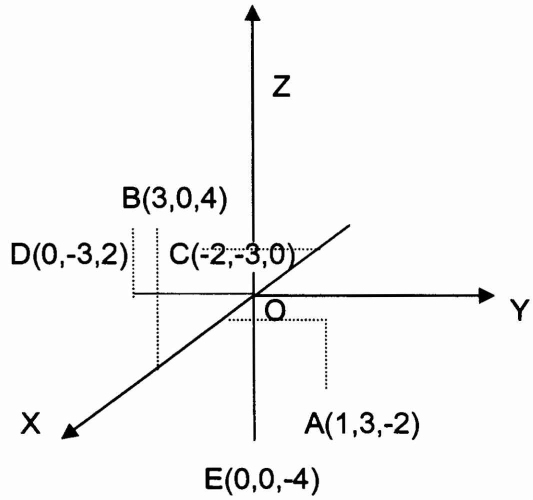
ตัวอย่างที่ 1 จงหาพิกัดของจุด B , C , D , E , F และ G เมื่อกำหนด A (3 , 4 , 2)



ตอบ B(0 , 4 , 2) , C(0 , 0 , 2) , D(3 , 0 , 2) , E(3 , 0 , 0) , F(3 , 4 , 0) , G(0 , 4 , 0)

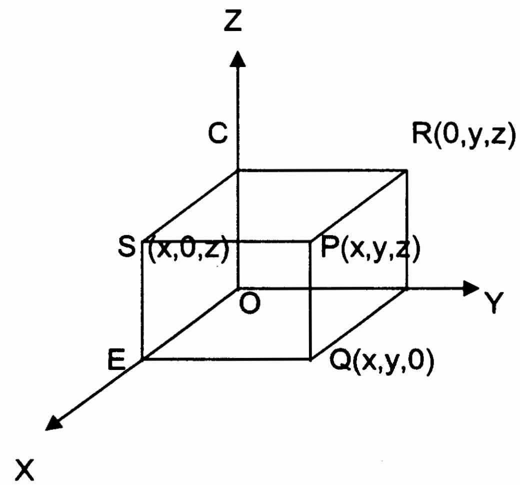
ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนจุด A(1 , 3 , -2) , B(3 , 0 , 4) , C(-2 , -3 , 0) D(0 , -3 , 2) E(0 , 0 , -4) ลงในระบบพิกัดฉากสามมิติ

ตอบ



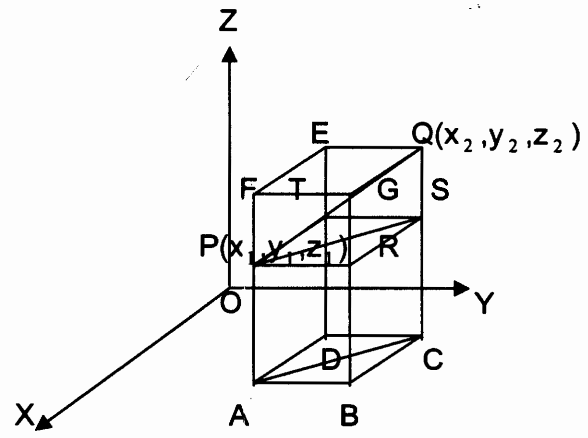
ระยะทางระหว่างจุดสองจุดในปริภูมิสามมิติ

ถ้าลากเส้นผ่านจุด P(x , y , z) ให้ขนานกับแกน Z ไปตัดระนาบ XY ที่จุด Q จะได้จุดตัดมีพิกัด Q(x , y , 0) เรียกจุดนี้ว่า ภาพฉายของจุด P บนระนาบ XY ถ้าลากเส้นผ่านจุด P(x , y , z) ให้ขนานกับแกน X ไปตัดระนาบ YZ ที่จุด R จะได้จุดตัดมีพิกัด R(0 , y , z) เรียกจุดนี้ว่า ภาพฉายของจุด P บนระนาบ YZ ถ้าลากเส้นผ่านจุด P(x,y,z) ให้ขนานกับแกน Y ไปตัดระนาบ XZ ที่จุด S จะได้จุดตัดมีพิกัด S(x , 0 , z) เรียกจุดนี้ว่า ภาพฉายของจุด P บนระนาบ XZ ดังภาพประกอบ 8.1-6



ภาพประกอบ 8.1-6

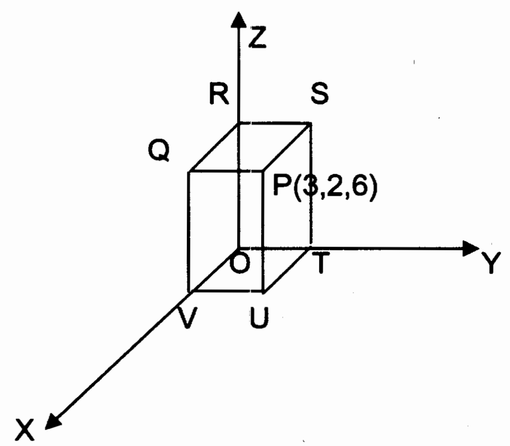
สมมุติให้ $P(x_1, y_1, z_1)$ และ $Q(x_2, y_2, z_2)$ เป็นพิกัดของจุดสองจุดในปริภูมิสามมิติ



ภาพประกอบ 8.1-7

จะได้ PQ = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

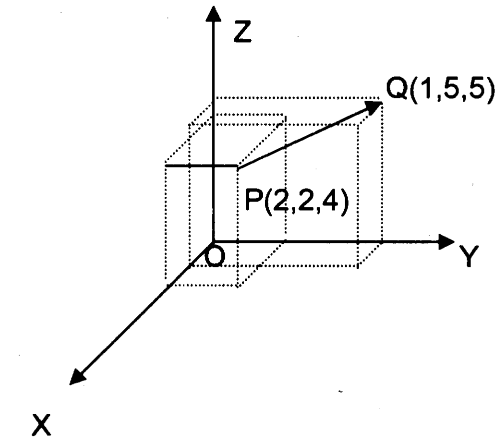
ตัวอย่างที่ 3 จงหาภาพฉายของจุด P(3 , 2 , 6) บนแกน XY , YZ และ XZ
วิธีทำ



ภาพฉายของจุด P(3 , 2 , 6) บนแกน XY , YZ และ XZ คือ U(3 , 2 , 0) , S(0 , 2 , 6) และ Q(3 , 0 , 6) ตามลำดับ

ตัวอย่างที่ 4 จงหาระยะทางระหว่าง P(2 , 2 , 4) และ Q (1 , 5 , 5)

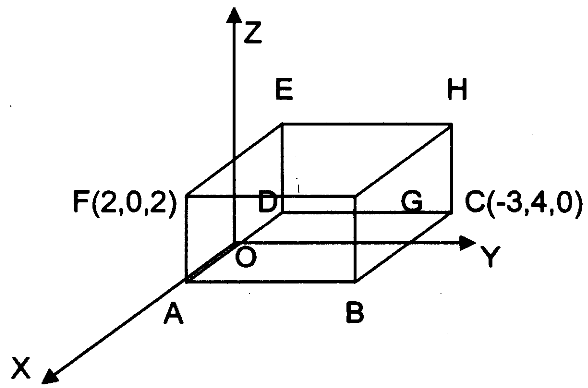
วิธีทำ



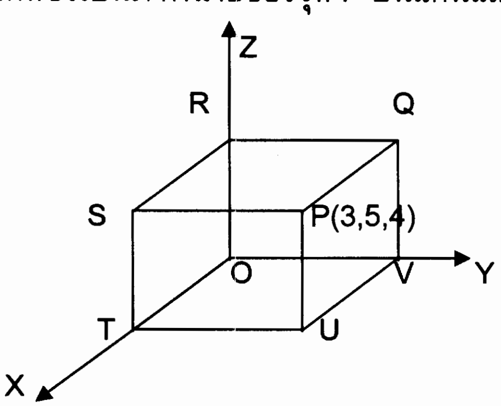
$$
\begin{aligned}
PQ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \\
&= \sqrt{(1-2)^2 + (5-2)^2 + (5-4)^2} \\
&= \sqrt{1+9+1} \\
&= \sqrt{11}
\end{aligned}
$$

แบบฝึกหัด 8.1

1. จากรูป จงหาพิกัดของจุด A , B , D , E , G , E และ H ซึ่งยังไม่ได้ระบุพิกัด ของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมีหน้าทั้งหกขนานกับระนาบอ้างอิงระนาบใดระนาบหนึ่ง



2. จากรูป จงหาพิกัดซึ่งเป็นภาพฉายของจุด P บนแกนและระนาบต่อไปนี้



(1) บนแกน X (2) บนแกน Y (3) บนแกน Z

(4) บนระนาบ XY (5) บนระนาบ YZ (6) บนระนาบ XZ

3. จงเขียนรูปทั่วไปของพิกัดของจุดที่อยู่บนแกน หรือระนาบที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(1) จุดบนแกน X (2) จุดบนแกน Y (3) จุดบนแกน Z

(4) จุดบนระนาบ XY (5) จุดบนระนาบ YZ (6) จุดบนระนาบ XZ

4. จงกำหนดระบบพิกัดฉากของจุดในปริภูมิสามมิติ โดยใช้ระบบมือขวา และเขียนจุดในปริภูมิสามมิติที่มีพิกัดต่อไปนี้

(1) A(2 ,-3 ,1) (2) B(-1 , 0 , 5) (3) C(5 ,4 , -2)

(4) D(0 ,0 ,-6) (5) E(0 , 3 , 0) (6) F(-3 , 0 , 0)

จงพิจารณาว่ารูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดที่ A(1 , 2 ,1) , B(-3 , 7 , 9) , C(11 ,4 , 2) เป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดใด

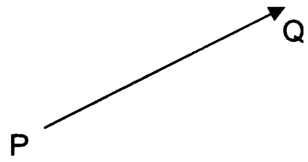
8.2 เวกเตอร์

ปริมาณมีสองประเภท ประเภทหนึ่งใช้บอกแต่ขนาด และอีกประเภทหนึ่งใช้บอกทั้งขนาดและทิศทาง

บทนิยาม ปริมาณที่มีแต่ขนาดเพียงอย่างเดียว เรียกว่า ปริมาณสเกลาร์ (scalar quantity) ส่วน ปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง เรียกว่า ปริมาณเวกเตอร์ (vector quantity) หรือเรียกสั้น ๆ ว่าเวกเตอร์

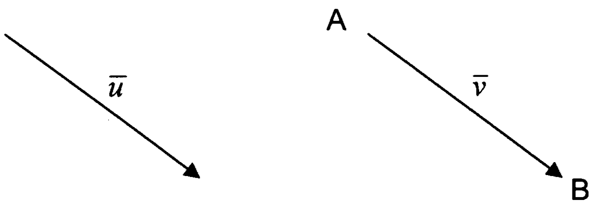
ปริมาณสเกลาร์ แทนด้วยจำนวนจริง ส่วนปริมาณเวกเตอร์ ในเชิงเรขาคณิต แทนได้ด้วยส่วนของเส้นตรงที่ระบุทิศทาง (directed line segment) โดยความยาวของส่วนของเส้นตรงบอกขนาดของเวกเตอร์ และหัวลูกศรบอกทิศทางของเวกเตอร์

เวกเตอร์ในสองมิติ



รูปข้างบนนี้แสดงเวกเตอร์ในสองมิติ หรือ เวกเตอร์ในระนาบ อ่านว่า เวกเตอร์ AB เขียนแทนด้วย $\overrightarrow{AB}$ เรียก A ว่า จุดเริ่มต้น (initial point) ของ $\overrightarrow{AB}$ เรียก B ว่า จุดสิ้นสุด (terminal point) ของเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ ความยาวของ $\overrightarrow{AB}$ คือขนาดของเวกเตอร์ เขียนแทนด้วย $|\overrightarrow{AB}|$

ในกรณีที่ต้องการกล่าวถึงเวกเตอร์ใด ๆ โดยไม่ต้องการระบุจุดเริ่มต้น และ จุดสิ้นสุด อาจใช้อักษรตัวเดียว และมีเครื่องหมาย กำกับไว้ เช่น $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, ... และใช้สัญลักษณ์ เช่น $|\bar{u}|$ แทนขนาดของ $\bar{u}$

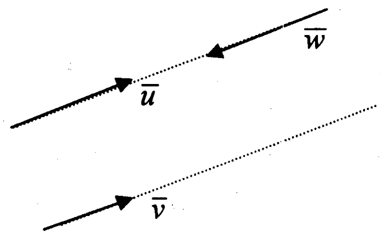


(ก) (ข)

ภาพประกอบ 8.2-1

เวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกันเป็นเวกเตอร์ที่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันหรือเส้นตรงที่ขนานกัน และมีหัวลูกศรไปทางเดียวกัน จากภาพประกอบ 8.2-1 $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ มีทิศทางเดียวกัน

เวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงข้ามกัน เป็นเวกเตอร์ที่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันหรือเส้นตรงที่ขนานกัน แต่หัวลูกศรมีทิศทางตรงข้ามกัน จากภาพประกอบ 8.2-2 $\bar{w}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์มีทิศทางตรงข้ามกัน และ $\bar{w}$ และ $\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงข้ามกัน



ภาพประกอบ 8.2-2

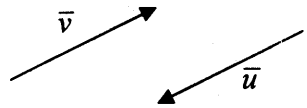
บทนิยาม $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ขนานกัน ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์ทั้งสองมีทิศทางเดียวกันหรือมีทิศทางตรงข้ามกัน

พิจารณา $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ มีขนาดเท่ากัน และมีทิศทางเดียวกัน เรากล่าวว่า $\bar{u}$ เท่ากับ $\bar{v}$

บทนิยาม $\bar{u}$ เท่ากับ $\bar{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ มีขนาดเท่ากัน และมีทิศทางเดียวกัน

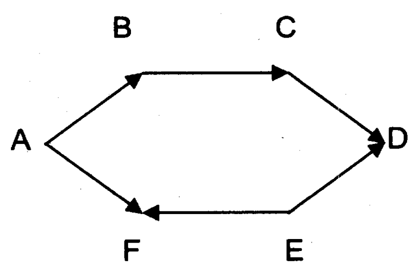
เขียนแทนด้วย $\bar{u} = \bar{v}$

พิจารณา $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ มีขนาดเท่ากัน แต่มีทิศทางตรงข้ามกัน เรากล่าวถึงความสัมพันธ์ของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ โดยใช้คำว่านิเสธ ดังบทนิยาม



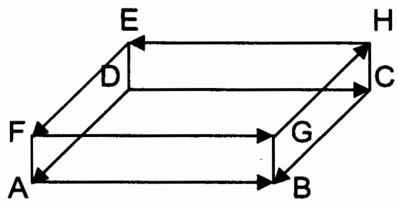
บทนิยาม นิเสธของ $\bar{u}$ (negative of $\bar{u}$) คือเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับขนาดของ $\bar{u}$ แต่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\bar{u}$ เขียนแทนนิเสธของ $\bar{u}$ ด้วย $-\bar{u}$

ตัวอย่างที่ 1 ABCDEF เป็นรูปหกเหลี่ยมด้านเท่า เวกเตอร์ที่กำหนดให้คู่ใดบ้างที่เท่ากันและเวกเตอร์คู่ใดบ้างที่เป็นนิเสธของกันและกัน



ตอบ เวกเตอร์ที่เท่ากันคือ $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{AF}$ และ $\overrightarrow{CD}$ เวกเตอร์ที่เป็นนิเสธของกันและกันคือ $\overrightarrow{BC}$ และ $\overrightarrow{EF}$

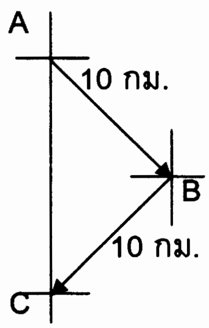
ตัวอย่างที่ 2 ABCDEFGH เป็นทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก จงพิจารณาว่า เวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{FA}$ และ $\overrightarrow{GH}$ เวกเตอร์ใดบ้างที่เท่ากัน และเวกเตอร์ใดบ้างที่เป็นนิเสธของกันและกัน



ตอบ เวกเตอร์ที่เท่ากันในแนว AB คือ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{FG}$ และ $\overrightarrow{DC}$ โดยมี $\overrightarrow{HE}$ เป็นนิเสธของเวกเตอร์สามเวกเตอร์แรก

เวกเตอร์ที่เท่ากันในแนว AD คือ $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{EF}$ และ $\overrightarrow{CB}$ โดยมี $\overrightarrow{GH}$ เป็นนิเสธของเวกเตอร์สามเวกเตอร์แรก

ตัวอย่างที่ 3 ขับรถโดยเริ่มขับไปทางทิศตะวันออกเฉียงใต้เป็นระยะทาง 10 กิโลเมตร แล้วขับไปทางทิศตะวันตกเฉียงใต้อีก 10 กิโลเมตร อยากทราบว่ารถจะอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นเป็นระยะทางเท่าใด และอยู่ในทิศใดของจุดเริ่มต้น



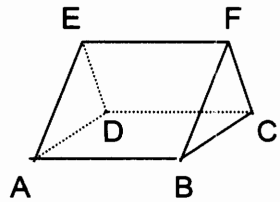
หาขนาดของมุม ABC ได้ 90° จะได้ว่า รถขับมาถึงตอนใต้ของจุดเริ่มต้น และ

$$
\begin{aligned}
AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\
&= 10^2 + 10^2 \\
AC &= \sqrt{200} \\
&\approx 14.142
\end{aligned}
$$

ดังนั้นรถอยู่ห่างรากจุดเริ่มต้นประมาณ 14.14 กิโลเมตร

แบบฝึกหัด 8.2

1. จากรูป จงหาเวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกันและที่มีทิศทางตรงข้ามกัน มาอย่างละ 4 คู่

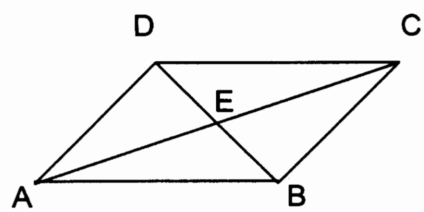


2. ถ้ากำหนดทิศทางเป็นองศา ด้วยการบอกค่าของมุมที่วัดจากทิศเหนือไปตามเข็มนาฬิกาซึ่งมีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 360 องศา โดยใช้ระบบตัวเลขสามตัว (three figure system) เช่น 045^0, 135^0 ในการระบุทิศ จงเขียนส่วนของเส้นตรงที่มีทิศทางแทนปริมาณเวกเตอร์ต่อไปนี้

   (1) 15 เมตร ไปทางทิศเหนือ (2) 30 เมตร ไปทางทิศ 150^0

   (3) 40 เมตร ไปทางทิศ 225^0

3. ให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน จากรูปจงหาเวกเตอร์ที่เท่ากับเวกเตอร์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้



   (1) $\overrightarrow{AB}$ (2) $\overrightarrow{AD}$ (3) $-\overrightarrow{DE}$

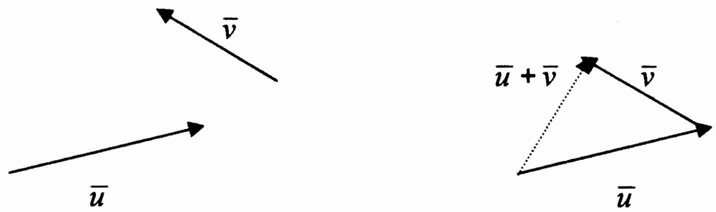
   (4) $\overrightarrow{CD}$ (5) $-\overrightarrow{BE}$ (6) $-\overrightarrow{BC}$

4. ถ้า $\bar{u}$ แทนการเดินทาง 645 กิโลเมตร ในทิศ 060^0 จงบรรยายถึงการเดินทางที่แทนด้วย $-\bar{u}$

5. ชายคนหนึ่งเดินทางในทิศตะวันออกเฉียงเหนือเป็นระยะทาง 10 กิโลเมตร จากนั้นเดินทางในทิศ 315^0 เป็นระยะทางอีก 10 กิโลเมตร ชายคนนี้อยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นกี่กิโลเมตร และอยู่ในทิศทางใดของจุดเริ่มต้น

8.3 การบวกและการลบเวกเตอร์ (Addition and subtraction of Vectors) การบวกเวกเตอร์

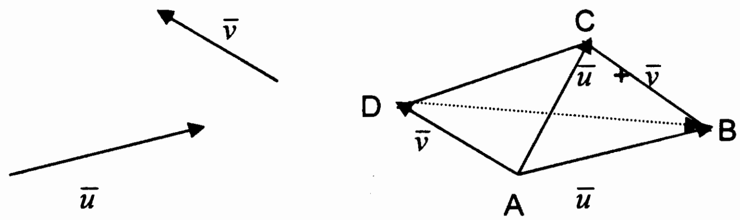
บทนิยาม ให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ เลื่อน $\bar{v}$ ให้จุดเริ่มต้นของ $\bar{v}$ อยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\bar{u}$ ผลบวกของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เขียนแทนด้วย $\bar{u} + \bar{v}$ คือ เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นของ $\bar{u}$ และมีจุดสิ้นสุดที่จุดสิ้นสุดของ $\bar{v}$



ภาพประกอบ 8.3-1

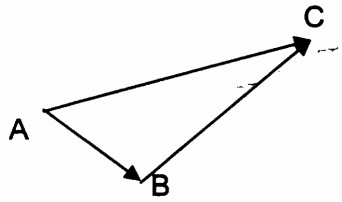
หรืออาจหาผลบวกของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ โดยใช้วิธีการที่เรียกว่า กฎของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ดังนี้

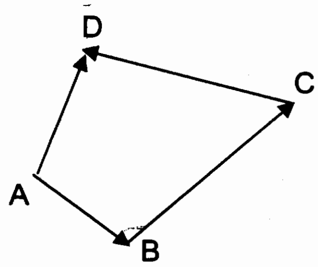
เลือกจุด A เป็นจุดเริ่มต้น หาจุด B ที่ทำให้ $\bar{u} = \overrightarrow{AB}$ แล้วหาจุด D ที่ทำให้ $\bar{v} = \overrightarrow{AD}$ สร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD และอาศัยบทนิยามของการบวกเวกเตอร์ จะได้ว่า $\bar{u} + \bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ผลลัพธ์ ซึ่งแทนด้วยเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน โดยเวกเตอร์ผลลัพธ์จะมีจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดเริ่มต้นของ $\bar{u}$ และจุดสิ้นสุดอยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\bar{v}$ ภาพประกอบ 8.3-2



ภาพประกอบ 8.3-2

ตัวอย่างการบวกเวกเตอร์

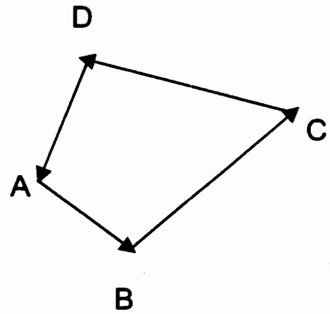




$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

พิจารณา

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$



เวกเตอร์ผลลัพธ์จะมีจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดเป็นจุดเดียวกัน

บทนิยาม เวกเตอร์ศูนย์ (zero vector) คือเวกเตอร์ที่มีขนาดเป็นศูนย์ เขียนแทนด้วย $\overline{0}$

สมบัติของการบวกเวกเตอร์

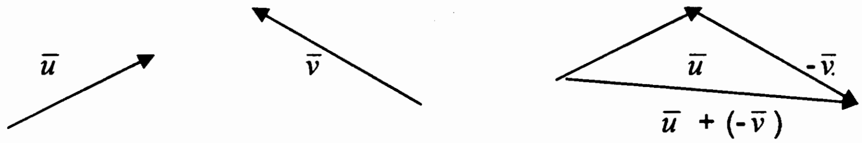
ถ้า $\overline{u}$, $\overline{v}$ และ $\overline{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในระนาบ

1. $\overline{u} + \overline{v}$ เป็นเวกเตอร์ ในระนาบ (สมบัติปิด)
2. $\overline{u} + \overline{v} = \overline{v} + \overline{u}$ (สมบัติการสลับที่)
3. $\overline{u} + (\overline{v} + \overline{w}) = (\overline{u} + \overline{v}) + \overline{w}$ (สมบัติการเปลี่ยนหมู่)
4. มี $\overline{0}$ โดยที่ $\overline{0} + \overline{u} = \overline{u} + \overline{0} = \overline{u}$ (สมบัติการมีเอกลักษณ์)
5. สำหรับทุก $\overline{u}$ จะมี $-\overline{u}$ โดยที่
   $-\overline{u} + \overline{u} = \overline{0} = \overline{u} + (-\overline{u})$ (สมบัติการมีตัวผกผัน)
6. ถ้า $\overline{u} = \overline{v}$ แล้ว $\overline{w} + \overline{u} = \overline{w} + \overline{v}$ (สมบัติการบวกด้วยเวกเตอร์ที่เท่ากัน)

บทนิยาม ให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในระนาบ ผลลบเวกเตอร์ $\bar{u}$ ด้วย $\bar{v}$ เขียนแทนด้วย

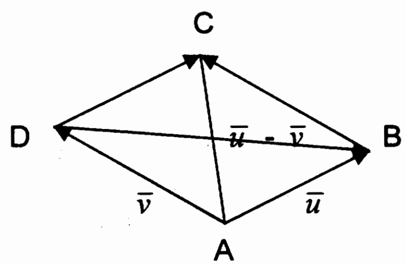
$\bar{u} - \bar{v}$ และ $\bar{u} - \bar{v} = \bar{u} + (-\bar{v})$

การหา $\bar{u} - \bar{v}$ ทำได้โดยหาผลบวกของ $\bar{u}$ และนิเสธของ $\bar{v}$ ดังภาพประกอบ



ภาพประกอบ 8.3-3

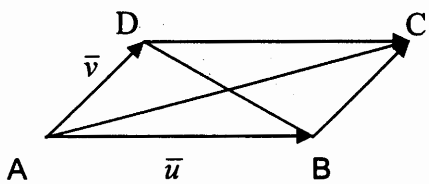
การหาผลลบของเวกเตอร์ อาจทำได้โดยให้จุดเริ่มต้นของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นจุดเดียวกัน แล้วสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ซึ่งเวกเตอร์ที่เป็นผลลบจะมีจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดเป็นจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์ทั้งสองที่กำหนดให้ โดยมีจุดเริ่มต้นเป็นจุดสิ้นสุดของตัวลบและมีจุดสิ้นสุดเป็นจุดเดียวกับจุดสิ้นสุดของตัวตั้งดังภาพประกอบ



ภาพประกอบ 8.3-4

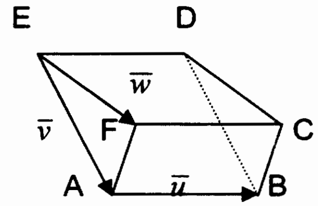
ตัวอย่างที่ 1 กำหนดรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD

ให้ $\overrightarrow{AB} = \bar{u}$, $\overrightarrow{AD} = \bar{v}$ จงเขียน $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CA}$ และ $\overrightarrow{BA}$ ในรูปของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$



วิธีทำ ให้ $\overrightarrow{AB} = \bar{u}$, $\overrightarrow{BC} = \bar{v}$ จะได้ $\overrightarrow{CD} = -\bar{u}$, $\overrightarrow{CA} = -\bar{v} - \bar{u}$, $\overrightarrow{BD} = -\bar{u} + \bar{v}$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดเวกเตอร์ ดังรูป จงหา $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FC}$, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FD}$



วิธีทำ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}$

$= \overline{u} + (\overline{w} - \overline{v})$

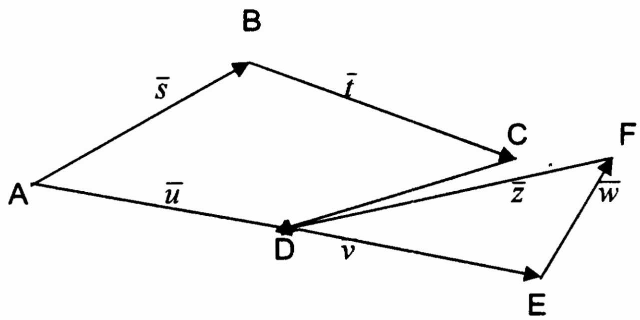
$\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FD} = \overline{u} + (-\overline{u}) + (-\overline{w} + \overline{u})$

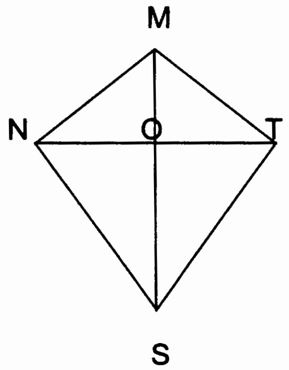
$= \overline{u} - \overline{w}$

แบบฝึกหัด 8.3

1. จากรูป จงเขียน $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{EA}$
ในรูปของเวกเตอร์ $\overline{s}$, $\overline{t}$, $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ และ $\overline{z}$



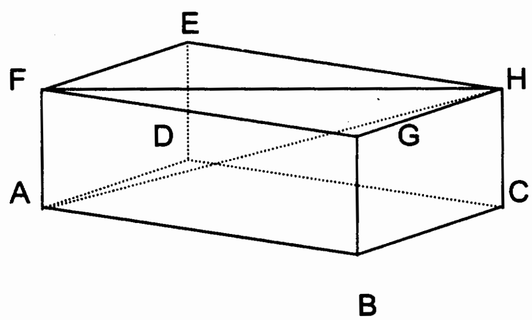
2.



MNST เป็นรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว มีเส้นทแยงมุมตัดกันที่ O จงหา

1) $\overrightarrow{NM} + (\overrightarrow{MT} + \overrightarrow{TN})$
2) $\overrightarrow{MT} - \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{TO}$
3) $(\overrightarrow{NS} - \overrightarrow{NM}) - \overrightarrow{TS}$

3.

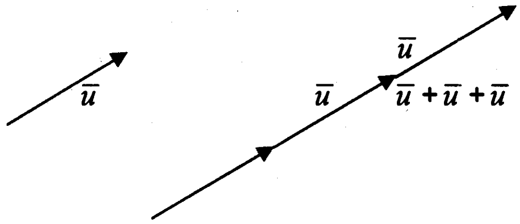


กำหนด ABCDEFGH เป็นทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก จงหา

1) $\overrightarrow{GF} + (\overrightarrow{FH} + \overrightarrow{CH})$
2) $(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{GF}) + \overrightarrow{AB}$
3) เวกเตอร์ที่บวกกันแล้วได้ $\bar{0}$

8.4 การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ (Scalar multiplication)

พิจารณาเวกเตอร์ต่อไปนี้



เมื่อพิจารณาผลบวก ของ $\bar{u}+\bar{u}+\bar{u}$ จะเห็นได้ว่า $\bar{u}+\bar{u}+\bar{u}$ มีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$ และยาวเป็นสามเท่าของ $\bar{u}$

บทนิยาม ให้ a เป็นสเกลาร์ และ $\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์ ผลคูณของเวกเตอร์ $\bar{u}$ ด้วยสเกลาร์ a เป็นเวกเตอร์ เขียนแทนด้วย $a\bar{u}$ โดยที่

1. ถ้า a = 0 แล้ว $a\bar{u} = \bar{0}$
2. ถ้า a > 0 แล้ว $a\bar{u}$ จะมีขนาดเท่ากับ $|a|\,|\bar{u}|$ และมีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$
3. ถ้า a < 0 แล้ว $a\bar{u}$ จะมีขนาดเท่ากับ $|a|\,|\bar{u}|$ และมีทิศทางตรงข้ามกับ $\bar{u}$

จากบทนิยาม จะเห็นว่า $(-1)\,\bar{u} = -\bar{u}$

สมบัติของการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

ให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในระนาบ a และ b เป็นจำนวนจริง

1. $a\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์ในระนาบ (สมบัติปิด)
2. $a(b\bar{u}) = (ab)\bar{u}$ (สมบัติการเปลี่ยนหมู่)
3. $(a+b)\bar{u} = a\bar{u} + b\bar{u}$

   $a(\bar{u}+\bar{v}) = a\bar{u} + a\bar{v}$ (สมบัติการแจกแจง)
4. $1\bar{u} = \bar{u}$

ทฤษฎีบทที่สำคัญเกี่ยวกับการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

ทฤษฎีบท 1 สำหรับ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ที่ต่างไม่เท่ากับ $\bar{0}$ และ $\bar{u}$ ขนานกับ $\bar{v}$ ก็ต่อเมื่อมีจำนวนจริง a ที่ไม่เท่ากับศูนย์ ที่ทำให้ $\bar{u} = a\bar{v}$

ทฤษฎีบท 2 สำหรับ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ที่ต่างไม่เท่ากับ $\bar{0}$ และ $\bar{u}$ ไม่ขนานกับ $\bar{v}$ ถ้า

$a\bar{u} + b\bar{v} = \bar{0}$ แล้ว จะได้ $a = 0$ และ $b = 0$

ตัวอย่างที่ 1 จงแสดงว่า สำหรับ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ที่ต่างไม่เท่ากับ $\bar{0}$ และไม่ขนานกับ $\bar{v}$

ถ้า $a_1\bar{u} + b_1\bar{v} = a_2\bar{u} + b_2\bar{v}$ แล้ว $a_1 = a_2$ และ $b_1 = b_2$

วิธีทำ จาก $a_1\bar{u} + b_1\bar{v} = a_2\bar{u} + b_2\bar{v}$

จะได้ $a_1\bar{u} + b_1\bar{v} - a_2\bar{u} - b_2\bar{v} = \bar{0}$

$(a_1 - a_2)\bar{u} + (b_1 - b_2)\bar{v} = \bar{0}$

แต่ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ต่างไม่เท่ากับ $\bar{0}$ และไม่ขนานกัน

ดังนั้น $a_1 - a_2 = 0$ และ $b_1 - b_2 = 0$

จะได้ $a_1 = a_2$ และ $b_1 = b_2$

ตัวอย่างที่ 2 จากสมการในแต่ละข้อต่อไปนี้ จะสรุปเกี่ยวกับ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ได้อย่างไร

(1) $6\bar{u} - 5\bar{v} = 4\bar{u} - \bar{v}$

(2) $a\bar{u} - 2\bar{v} = \bar{u} + 3\bar{v}$

วิธีทำ (1) $6\bar{u} - 5\bar{v} = 4\bar{u} - \bar{v}$

ดังนั้น $6\bar{u} - 4\bar{u} = 5\bar{v} - \bar{v}$

$2\bar{u} = 4\bar{v}$

หรือ $\bar{u} = 2\bar{v}$

นั่นคือ ถ้า $\bar{u} \neq \bar{v}$ จะได้ว่า $\bar{u} \,//\, \bar{v}$ และ $\bar{u}$ มีทิศทางเดียวกับ $\bar{v}$ และ $\bar{u}$ มีขนาดเป็น 2 เท่าของ $\bar{v}$

(2) $a\bar{u} - 2\bar{v} = \bar{u} + 3\bar{v}$

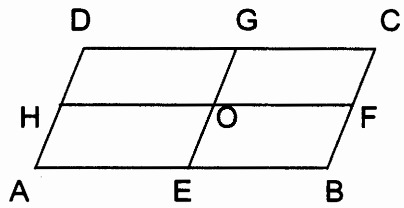
ดังนั้น $(a - 1)\bar{u} = 5\bar{v}$

หรือ $\bar{u} = \dfrac{5}{a-1}\bar{v}$

นั่นคือ ถ้า $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ไม่เท่ากับศูนย์ และ $a \neq 1$ จะได้ว่า $\bar{u} \,//\, \bar{v}$, $\bar{u}$ มีทิศทางเดียวกับ $\bar{v}$ ถ้า $a > 1$ $\bar{u}$ มีทิศทางตรงข้ามกับ $\bar{v}$ เมื่อ $a < 1$ และ $\bar{u}$ มีขนาด $\left|\dfrac{5}{a-1}\right|$ ของ $\bar{v}$

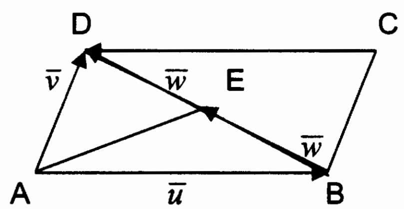
แบบฝึกหัด 8.4

1. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน มี E , F , G และ H เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ และ $\overrightarrow{AD}$ ตามลำดับ จงเขียนเวกเตอร์ที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้ในรูปของ $a\overrightarrow{OF} + b\overrightarrow{OE}$ (a , b เป็นจำนวนจริง)



1) $\overrightarrow{OB}$	2) $\overrightarrow{OD}$	3) $\overrightarrow{DB}$	4) $\overrightarrow{AC}$
5) $\overrightarrow{OC}$	6) $\overrightarrow{CA}$	7) $\overrightarrow{OA}$	8) $\overrightarrow{BD}$

2. จากรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้ข้อใดเป็นจริง

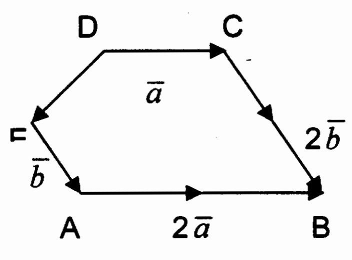


1) $\bar{v} = \bar{w}$ 2) $\overrightarrow{AE} = \bar{u} + \bar{w}$

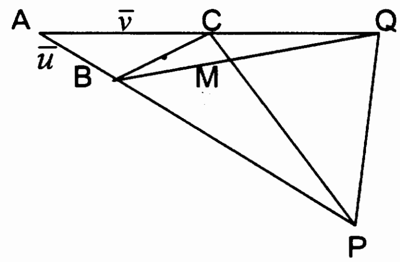
3) $\overrightarrow{DB} = 2\bar{w}$ 4) $2\bar{w} - \bar{u} = \bar{v}$

5) $\overrightarrow{AE} = \frac{\bar{u}}{2} - \frac{\bar{v}}{2}$

3. จากรูปที่กำหนดให้ จงเขียน $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CD}$ ในรูปของ $\bar{a}$ และ $\bar{b}$



4. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง ซึ่งมี $\overrightarrow{AB} = \bar{u}$ และ $\overrightarrow{AC} = \bar{v}$, P และ Q เป็นจุดที่ทำให้ $\overrightarrow{AP} = 4\bar{u}$ และ $\overrightarrow{AQ} = 2\bar{v}$ จงเขียนเวกเตอร์ที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้ในรูปของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$



1) $\overrightarrow{BC}$ 2) $\overrightarrow{PB}$ 3) $\overrightarrow{PQ}$ 4) $\overrightarrow{PC}$

5) $\overrightarrow{BQ}$ 6) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CQ}$ 7) $\overrightarrow{AM}$ เมื่อ M เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC

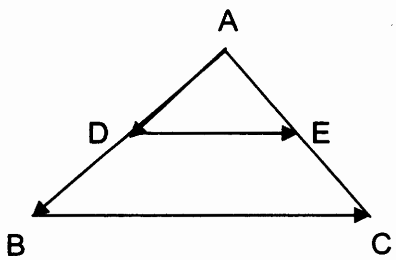
5. O เป็นจุดที่กำหนดให้ ที่ไม่อยู่บน $\overline{AB}$ จงแสดงว่า ถ้า M เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$ แล้ว $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

6. A, C และ B เป็นจุดซึ่งอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน C แบ่ง $\overline{AB}$ ตามอัตราส่วน $|\overrightarrow{AC}|:|\overrightarrow{CB}| = m : n$, O เป็นจุด ๆ หนึ่งซึ่งไม่อยู่บน $\overline{AB}$ ให้ $\overrightarrow{OA} = \bar{u}$ และ $\overrightarrow{OB} = \bar{v}$ จงแสดงว่า $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{m+n}(n\bar{u} + m\bar{v})$

8.5 การใช้เวกเตอร์ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทในเรขาคณิต

ตัวอย่างที่ 1 จงแสดงว่าส่วนของเส้นตรงที่ต่อจุดกึ่งกลางของด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ย่อมยาวเป็นครึ่งหนึ่งของด้านที่สามและขนานกับด้านที่สาม

วิธีทำ



กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง D และ E เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB และ AC ตามลำดับ

จะต้องพิสูจน์ว่า $\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{BC}$ และ $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

พิสูจน์ เนื่องจาก $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ (D และ E เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BA และ AC และบทนิยามการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์)

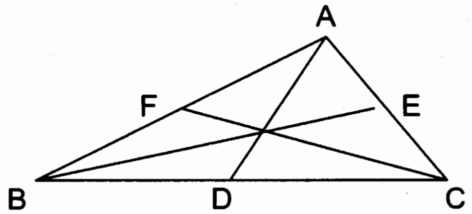
$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

ดังนั้น $\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{BC}$ และ $\overrightarrow{DE}$ ยาวเป็นครึ่งหนึ่งของ $\overrightarrow{BC}$

ตัวอย่างที่ 2 จงแสดงว่า ผลรวมของเวกเตอร์ที่เป็นมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ มีค่าเป็นศูนย์ เมื่อจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมเป็นจุดเริ่มต้นของเวกเตอร์ที่เป็นมัธยฐาน

วิธีทำ



กำหนด ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ และ $\overline{CF}$ เป็นมัธยฐานดังรูป

จะต้องพิสูจน์ว่า $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \bar{0}$

พิสูจน์ เนื่องจาก $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE}$

$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF}$

ดังนั้น $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF}$

$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AF})$

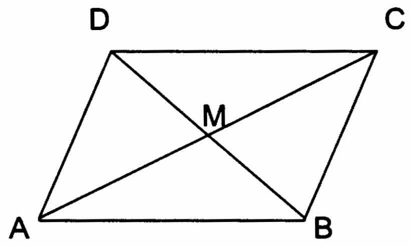
$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB})$

$= \bar{0}$ เนื่องจาก $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \bar{0}$

และ $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \bar{0}$

ตัวอย่างที่ 3 จงแสดงว่า เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

วิธีทำ



ให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานซึ่งมี M เป็นจุดตัดของเส้นทแยงมุม AC และ BD จะแสดงว่า M เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AC}$ และ $\overline{BD}$

ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง ซึ่ง

$$\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AC} \quad \text{และ} \quad \overrightarrow{BM} = b\overrightarrow{BD}$$

จาก $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AC}$

จะได้ว่า $\overrightarrow{AM} = a(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$

$= a\overrightarrow{AB} + a\overrightarrow{BC}$ ....(1)

และ $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$

$= \overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{BD}$

$= \overrightarrow{AB} + b(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD})$

$= (1 - b)\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{BC}$ ....(2)

(1) = (2) จะได้

$a\overrightarrow{AB} + a\overrightarrow{BC} = (1 - b)\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{BC}$

$(a + b - 1)\overrightarrow{AB} + (a - b)\overrightarrow{BC} = \bar{0}$

เนื่องจาก $\overrightarrow{AB}$ ไม่ขนานกับ $\overrightarrow{BC}$

ดังนั้น $a + b - 1 = 0$ และ $a - b = 0$

นั่นคือ $a = b = \frac{1}{2}$

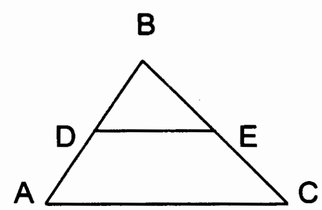
จากที่กำหนดให้ $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AC}$ และ $\overrightarrow{BM} = b\overrightarrow{BD}$

จะได้ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ และ $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

นั่นคือ เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานจะแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

แบบฝึกหัด 8.5

1. ถ้า $\overrightarrow{PQ}$ และ $\overrightarrow{RS}$ เป็นเวกเตอร์ที่เท่ากัน แต่ไม่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน จงพิสูจน์ว่า PQSR เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
2. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่ง P เป็นจุดบนเส้นทแยงมุม BD และ $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC}$ จงแสดงว่า ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
3. กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC

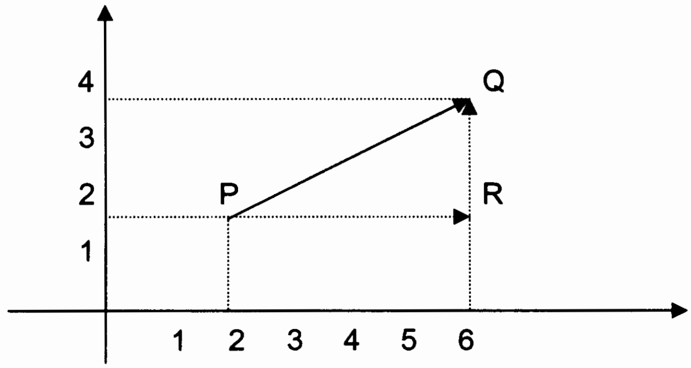


D เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB ส่วนของเส้นตรง DE ขนานกับด้าน AC จงพิสูจน์ว่า E เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC

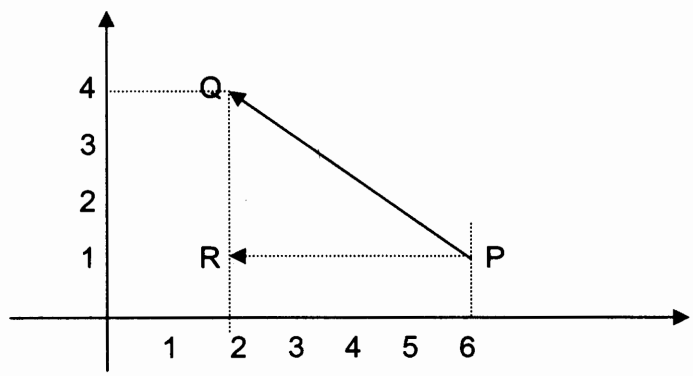
4. ต่อด้าน AC ของรูปสามเหลี่ยม ABC ออกไปถึงจุด D ให้ส่วนของเส้นตรง CD ยาวเท่ากับด้าน AC ต่อด้าน BC ถึงจุด E ให้ส่วนของเส้นตรง CE ยาวเท่ากับด้าน CB จงแสดงว่า ส่วนของเส้นตรง ED และด้าน AB ยาวเท่ากันและขนานกัน
5. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่งมี P , Q , R และ S เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB , BC , CD และ DA ตามลำดับ จงแสดงว่า PQRS เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
6. จงแสดงว่าเส้นที่เชื่อมจุดกึ่งกลางของเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู จะขนานกับฐานและยาวเป็นครึ่งหนึ่งของผลต่างของด้านที่ขนานกัน
7. PQRS เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน M เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน PQ ส่วนของเส้นตรง SM ตัดด้าน PR ที่จุด N จงแสดงว่า $\overrightarrow{PN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PR}$

8.6 เวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉาก

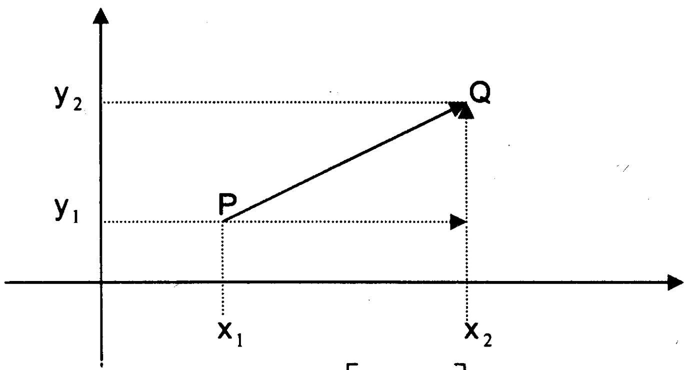
พิจารณาเวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉากจากรูปต่อไปนี้



จากรูป $\overrightarrow{PQ}$ เป็นผลบวกของ $\overrightarrow{PR}$ และ $\overrightarrow{RQ}$ ซึ่ง $\overrightarrow{PR}$ ขนานกับแกน X ไปทางขวา 4 หน่วย และ $\overrightarrow{RQ}$ ขนานกับแกน Y ไปทางด้านบน 2 หน่วย เราจะเขียนแทน $\overrightarrow{PQ}$ ด้วย $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$



จากรูป $\overrightarrow{PQ}$ เป็นผลบวกของ $\overrightarrow{PR}$ และ $\overrightarrow{RQ}$ ซึ่ง $\overrightarrow{PR}$ ขนานกับแกน X ไปทางซ้าย 4 หน่วย และ $\overrightarrow{RQ}$ ขนานกับแกน Y ไปทางด้านบน 2 หน่วย เราจะเขียนแทน $\overrightarrow{PQ}$ ด้วย $\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$ เมื่อ P และ Q มีพิกัด (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) ตามลำดับ



$\overrightarrow{PQ}$ จะเขียนแทนได้ด้วย $\begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ A มีพิกัดเป็น (2 , 4) B มีพิกัดเป็น (5 , 8) จงหา $\overrightarrow{AB}$

ตอบ $\overrightarrow{AB}$ $= \begin{bmatrix} 5-2 \\ 8-4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

บทนิยาม $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ ก็ต่อเมื่อ a = c และ b = d

ตัวอย่างที่ 2 ให้เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}$ มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุด (-2 , 3) จงหาพิกัดของจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์นี้

วิธีทำ ให้จุดสิ้นสุดอยู่ที่ (x_2 , y_2) จะได้ $\begin{bmatrix} x_2 - (-2) \\ y_2 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $x_2 - (-2) = 4$ และ $y_2 - 3 = -5$

$x_2 + 2 = 4$ และ $y_2 = 3 - 5$

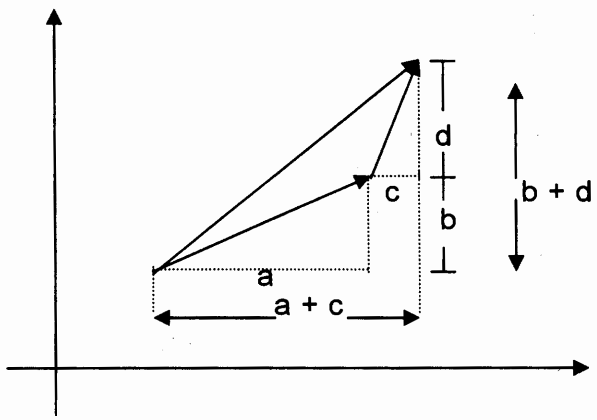
$x_2 = 2$ และ $y_2 = -2$

จุดสิ้นสุดอยู่ที่ (2 , -2)

การบวกเวกเตอร์

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix}$$

ซึ่งอาจแสดงด้วยรูปได้ดังนี้



เวกเตอร์ศูนย์

เวกเตอร์ศูนย์ คือ เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

จะเห็นได้ว่า $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

นิเสธของเวกเตอร์

นิเสธของเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ คือเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} -a \\ -b \end{bmatrix}$

จะเห็นได้ว่า $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a \\ -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

การลบเวกเตอร์

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-c \\ b-d \end{bmatrix}$$

การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

$\alpha \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha c \\ \alpha d \end{bmatrix}$ เมื่อ α เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ถ้า α = -1 จะได้ $(-1)\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)c \\ (-1)d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c \\ -d \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 3 จงหา $\bar{u}$ - 2$\bar{v}$ + 3$\bar{w}$ เมื่อกำหนดให้ $\bar{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\bar{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ และ $\bar{w} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ พร้อมทั้งเขียนรูปแสดง

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \bar{u} - 2\bar{v} + 3\bar{w} &= \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -7 \\ 8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $\bar{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$, $\bar{v} = \begin{bmatrix} -6 \\ 8 \end{bmatrix}$, $\bar{w} = \begin{bmatrix} 12 \\ -16 \end{bmatrix}$, $\bar{s} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4.5 \end{bmatrix}$ และ $\bar{t} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1.5 \end{bmatrix}$ เวกเตอร์คู่ใดที่ขนานกัน

วิธีทำ เนื่องจาก $\bar{v} = \begin{bmatrix} -6 \\ 8 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = -2\bar{u}$

ดังนั้น $\bar{u}$ ขนานกับ $\bar{v}$

เนื่องจาก $\bar{w} = \begin{bmatrix} 12 \\ -16 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} -6 \\ 8 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$

$= -2\bar{v} = 4\bar{u}$

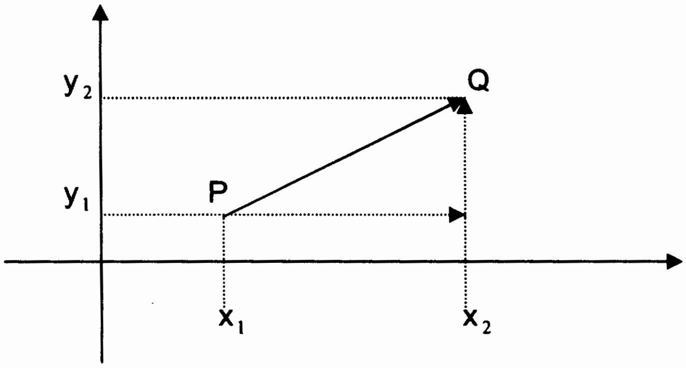
ดังนั้น $\bar{u}$, $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ ขนานกัน

$\bar{s} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4.5 \end{bmatrix}$, $\bar{t} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1.5 \end{bmatrix}$ และ $-2\bar{t} = -2\begin{bmatrix} -3 \\ 1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $\bar{s}$ ไม่ขนานกับ $\bar{t}$

ขนาดของเวกเตอร์

เมื่อ P และ Q มีพิกัด (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) ตามลำดับ



จะได้ $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$

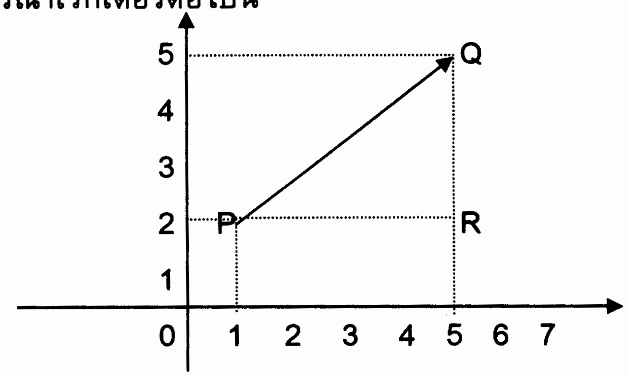
และ $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

ถ้า $x_2 - x_1$ = a และ $y_2 - y_1$ = b แล้ว $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยหมายถึงเวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วย ไม่ว่าเวกเตอร์นั้นจะมีทิศทางใด

พิจารณาเวกเตอร์ต่อไปนี้



$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} 5-1 \\ 5-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(5-1)^2 + (5-2)^2}$

$= \sqrt{4^2 + 3^2}$

$= 5$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{PQ}$ คือ $\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{4}{5}\\ \frac{3}{5}\end{bmatrix}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\overrightarrow{PQ}$ คือ เวกเตอร์ $-\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{4}{5}\\ -\frac{3}{5}\end{bmatrix}$

สำหรับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ ใด ๆ จะมีขนาด $\sqrt{a^2+b^2}$

ดังนั้น เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ ใด ๆ ที่ไม่เท่ากับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ คือ

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตรงข้ามกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ ใด ๆ ที่ไม่เท่ากับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ คือ

$$-\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกันและทิศทางตรงข้ามกันกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix}-5\\12\end{bmatrix}$

วิธีทำ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix}-5\\12\end{bmatrix}$ คือ $\frac{1}{\sqrt{(-5)^2+12^2}}\begin{bmatrix}-5\\12\end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{13}\begin{bmatrix}-5\\12\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-\frac{5}{13}\\ \frac{12}{13}\end{bmatrix}$$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตรงข้ามกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} -5 \\ 12 \end{bmatrix}$ คือ $-\frac{1}{\sqrt{(-5)^2+12^2}}\begin{bmatrix} -5 \\ 12 \end{bmatrix}$

$$= -\frac{1}{13}\begin{bmatrix} -5 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{13} \\ -\frac{12}{13} \end{bmatrix}$$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่สำคัญคือ เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ และเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

เราจะกำหนดให้ $\bar{i}$ แทน เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $\bar{j}$ แทนเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

สำหรับ เวกเตอร์$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ใด ๆ จะได้

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a\bar{i} + b\bar{j}$$

เนื่องจากขนาดของเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ เท่ากับ $\sqrt{a^2+b^2}$

ดังนั้น ขนาดของเวกเตอร์ $a\bar{i} + b\bar{j}$ เท่ากับ $\sqrt{a^2+b^2}$

ตัวอย่างที่ 6 กำหนด A(2 , -3) , B(-1 , 1) , C(4 , 3) , D(-2 , 0) จงเขียน $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ และ $\overrightarrow{AD}$ ในรูปของ $\bar{i}$ และ $\bar{j}$ พร้อมทั้งหาขนาดของเวกเตอร์แต่ละเวกเตอร์

$$\overrightarrow{AB} = (-1 - 2)\bar{i} + (1 + 3)\bar{j}$$
$$= -3\bar{i} + 4\bar{j}$$
$$\overrightarrow{BC} = [4 - (-1)]\bar{i} + (3 - 1)\bar{j}$$
$$= 5\bar{i} + 2\bar{j}$$
$$\overrightarrow{CD} = (-2 - 4)\bar{i} + (0 - 3)\bar{j}$$
$$= -6\bar{i} - 3\bar{j}$$
$$\overrightarrow{AD} = (-2 - 2)\bar{i} + [0 - (-3)]\bar{j}$$
$$= -4\bar{i} + 3\bar{j}$$

แบบฝึกหัด 8.6

1. กำหนด O เป็นจุดกำเนิดในระบบแกนมุมฉาก และมี $\overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ จงหา $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{BA}$
2. กำหนด A(2 , 4) , B(-1 , 0) , C(0 , -3) , D(3 , -5) จงเขียน $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ และ $\overrightarrow{DA}$ ในรูป ของ $\bar{i}$ และ $\bar{j}$
3. กำหนด $\bar{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\bar{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$ จงเขียนเวกเตอร์ต่อไปนี้ในรูปของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$

   (1) $\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
4. จงหาขนาดของเวกเตอร์ต่อไปนี้

   (1) $\begin{bmatrix} -12 \\ 5 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$
5. OABC เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ถ้า $\overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{OC} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ จงหาความยาวของเส้นทแยงมุมทั้งสองของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
6. จงหา a และ b เมื่อกำหนดให้

   (1) $3\bar{i} - 4\bar{j} = a(3\bar{i} + 2\bar{j}) + b(2\bar{i} + 2\bar{j})$

   (2) $a(\bar{i} - 2\bar{j}) - 2b(4\bar{i} + 3\bar{j}) = 3(\bar{i} + 2\bar{j}) + 4(2\bar{i} - 3\bar{j})$
7. จงหาเวกเตอร์ที่มีขนาด 4 หน่วย และขนานกับเวกเตอร์ ต่อไปนี้

   (1) $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ (2) $4\bar{i} - 3\bar{j}$

8.7 ผลคูณเชิงสเกลาร์ (Scalar Product or Dot Product)

บทนิยาม ถ้า $\bar{u} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j}$ และ $\bar{v} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j}$ ผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เขียนแทนด้วย $\bar{u}\cdot\bar{v}$ โดยที่

$$\bar{u}\cdot\bar{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

ตัวอย่างที่ 1 ถ้า $\bar{u} = 2\bar{i} + 4\bar{j}$ และ $\bar{v} = 3\bar{i} - 5\bar{j}$ จงหา $\bar{u} \cdot \bar{v}$ และ $\bar{v} \cdot \bar{u}$

$\bar{u} \cdot \bar{v} = 2(3) + 4(-5) = 6 - 20 = -14$

สมบัติที่สำคัญของผลคูณเชิงสเกลาร์

1) $\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot \bar{u}$

พิสูจน์ ให้ $\bar{u} = a\bar{i} + b\bar{j}$ $\quad \bar{v} = c\bar{i} + d\bar{j}$

$$
\begin{aligned}
\bar{u} \cdot \bar{v} &= ac + bd \\
&= ca + db \\
&= \bar{v} \cdot \bar{u}
\end{aligned}
$$

2) $\bar{i} \cdot \bar{i} = \bar{j} \cdot \bar{j} = 1$

3) $\bar{i} \cdot \bar{j} = \bar{j} \cdot \bar{i} = 0$

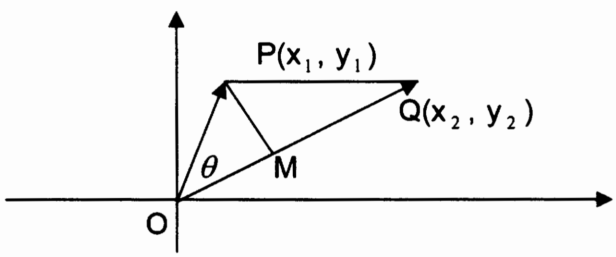
4) ถ้า a เป็นสเกลาร์ $(a\bar{u}) \cdot \bar{v} = \bar{u} \cdot (a\bar{v}) = a(\bar{u} \cdot \bar{v})$

5) สมบัติการแจกแจง $\bar{u} \cdot (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{u} \cdot \bar{w}$

6) ถ้ามุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็น θ แล้ว $\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}|\,|\bar{v}| \cos\theta$

(มุมระหว่างเวกเตอร์หมายถึงมุมที่ไม่ใช่มุมกลับ ซึ่งมีแขนของมุมเป็นเวกเตอร์ทั้งสองนั้น)

พิสูจน์



ให้ $\bar{u} = \overrightarrow{OP} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j}$

$\bar{v} = \overrightarrow{OQ} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j}$

และมุม POQ เท่ากับ θ

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{PQ}| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\
|\overrightarrow{PQ}| &= (x_1^{\,2} + y_1^{\,2}) + (x_2^{\,2} + y_2^{\,2}) - 2(x_1x_2 + y_1y_2) \\
&= |\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 - 2\bar{u} \cdot \bar{v} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)
\end{aligned}
$$

จากจุด P ลากเส้นตั้งฉากกับส่วนของเส้นของเส้นตรง OQ และตัดกับส่วนของเส้นตรง OQ ที่จุด M

$|\overrightarrow{PQ}|^2 = |\overrightarrow{PM}|^2 + |\overrightarrow{MQ}|^2$

$= [|\overrightarrow{OP}|^2 - |\overrightarrow{OM}|^2] + [|\overrightarrow{OQ}| - |\overrightarrow{OM}|]^2$

$= [|\overrightarrow{OP}|^2 - (|\overrightarrow{OP}|\cos\theta)^2] + [|\overrightarrow{OQ}| - |\overrightarrow{OP}|\cos\theta]^2$

$= |\overrightarrow{OP}|^2 - |\overrightarrow{OP}\cos\theta|^2 + |\overrightarrow{OQ}|^2 - 2|\overrightarrow{OQ}|\,|\overrightarrow{OP}|\cos\theta + (|\overrightarrow{OP}|\cos\theta)^2$

$= |\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 - 2|\bar{u}|\,|\bar{v}|\cos\theta$ ....(2)

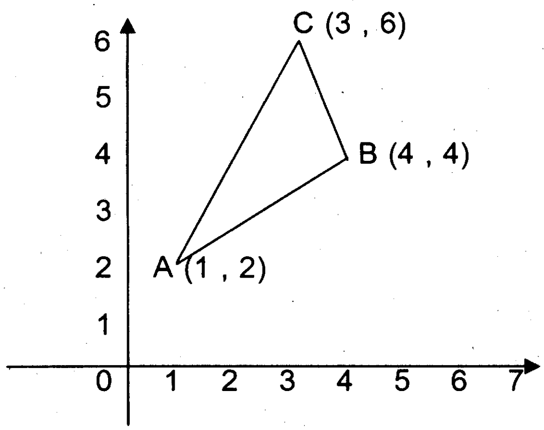
จาก (1) และ (2) จะได้

$\bar{u}\cdot\bar{v} = |\bar{u}|\,|\bar{v}|\cos\theta$

7) $\bar{u}\cdot\bar{u} = |\bar{u}|^2$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ A (1 , 2) , B(4 , 4) , C(3 , 6) เป็นมุมยอดของรูปสามเหลี่ยม ABC จงหาขนาดของมุม BAC

วิธีทำ



$\overrightarrow{AB} = (4 - 1)\bar{i} + (4 - 2)\bar{j}$

$\overrightarrow{AB} = 3\bar{i} + 2\bar{j}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 2^2}$

$= \sqrt{13}$

$\overrightarrow{AC} = (3 - 1)\bar{i} + (6 - 2)\bar{j}$

$= 2\bar{i} + 4\bar{j}$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2^2+4^2}$$
$$= \sqrt{20}$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 3(2) + 2(4)$$
$$= 14$$

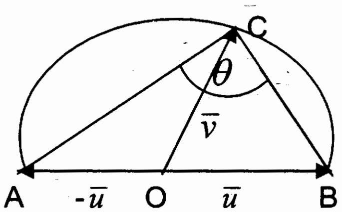
เนื่องจาก $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}| \cos A$

ดังนั้น $14 = \sqrt{13}\,\sqrt{20}\,\cos A$

$$\cos A = \frac{14}{\sqrt{13\times 20}}$$
$$\approx 0.8682$$
$$A \approx 29^0\ 45'$$

ตัวอย่างที่ 3 จงพิสูจน์ว่ามุมในครึ่งวงกลมเป็นมุมฉาก

พิสูจน์



กำหนดให้ ให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม ส่วนของเส้นตรง AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง และ C เป็นจุดจุดหนึ่ง บนเส้นรอบวง

จะต้องพิสูจน์ว่า มุม ACB มีขนาด 90^0

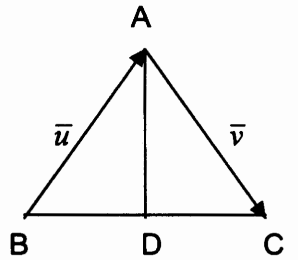
พิสูจน์ $\overrightarrow{CA} = -\bar{v} - \bar{u}$

$$\overrightarrow{CB} = -\bar{v} + \bar{u}$$
$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = (-\bar{v} - \bar{u})\cdot(-\bar{v} + \bar{u})$$
$$= (-\bar{v} - \bar{u})\cdot(-\bar{v}) + (-\bar{v} - \bar{u})\cdot\bar{u}$$
$$= (-\bar{v})\cdot(-\bar{v}) - \bar{u}\cdot(-\bar{v}) + (-\bar{v})\cdot\bar{u} - \bar{u}\cdot\bar{u}$$
$$= |(-\bar{v}\ |^2 + \bar{u}\cdot\bar{v} - \bar{v}\cdot\bar{u} - |\bar{u}|^2$$
$$= |\bar{v}|^2 - |\bar{u}|^2$$
$$= \bar{0}$$

ตัวอย่างที่ 4 จงแสดงว่าเส้นมัธยฐานที่ลากจากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วย่อมตั้งฉากกับฐาน

วิธีทำ

กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมี AB = AC และเส้นมัธยฐาน AD แบ่งครึ่ง $\overline{BC}$ ที่ จุด D



จะต้องพิสูจน์ว่า $\overline{AD}$ ตั้งฉากกับ $\overline{BC}$

พิสูจน์ $\overrightarrow{BA} = \bar{u}$ และ $\overrightarrow{AC} = \bar{v}$

$$\overrightarrow{BC} = \bar{u} + \bar{v}$$

$$\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\bar{u} + \bar{v})$$

$$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA}$$

$$= \frac{1}{2}(\bar{u} + \bar{v}) - \bar{v}$$

$$= \frac{1}{2}(\bar{u} - \bar{v})$$

$$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}(\bar{u} + \bar{v}) \cdot \frac{1}{2}(\bar{u} - \bar{v})$$

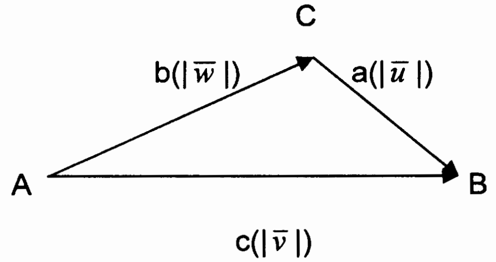
$$= \frac{1}{4}(|\bar{u}|^2 - |\bar{v}|^2)$$

$$= 0$$

ดังนั้น $\overrightarrow{DC}$ ตั้งฉากกับ $\overrightarrow{DA}$

ตัวอย่างที่ 5 ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมี a , b และ c เป็นความยาวของด้าน BC , AC และ AB ตามลำดับ จงแสดงว่า $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ เมื่อ A เป็นมุมระหว่างด้าน AC และด้าน AB

วิธีทำ



ให้ $\overrightarrow{CB} = \bar{u}$, $\overrightarrow{AB} = \bar{v}$, $\overrightarrow{AC} = \bar{w}$

จะได้ $|\overrightarrow{CB}| = |\bar{u}| = a$, $|\overrightarrow{AB}| = |\bar{v}| = c$ และ $|\overrightarrow{AC}| = |\bar{w}| = b$

เมื่อ A เป็นมุมระหว่าง $\overrightarrow{AC}$ และ $\overrightarrow{AB}$

จาก $\bar{u} = \bar{v} - \bar{w}$

จะได้ $\bar{u} \cdot \bar{u} = (\bar{v} - \bar{w})(\bar{v} - \bar{w})$

$|\bar{u}|^2 = |\bar{v}|^2 + |\bar{w}|^2 - 2|\bar{v}||\bar{u}| \cos A$

ดังนั้น $a^2 = c^2 + b^2 - cb \cos A$

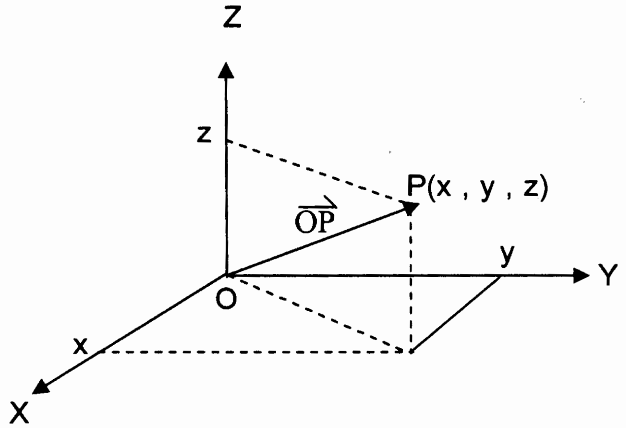
แบบฝึกหัด 8.7

1. จงหาค่า $\bar{u} \cdot \bar{v}$ เมื่อกำหนด $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ดังต่อไปนี้
   (1) $\bar{u} = 3\bar{i} + 6\bar{j}$ และ $\bar{v} = 2\bar{i} + \bar{j}$
   (2) $\bar{u} = -2\bar{i} + 3\bar{j}$ และ $\bar{v} = 4\bar{i} - 5\bar{j}$
   (3) $\bar{u} = 5\bar{i} - 6\bar{j}$ และ $\bar{v} = -3\bar{i} - 3\bar{j}$
2. จงหาขนาดของมุมระหว่างเวกเตอร์ต่อไปนี้
   (1) $\bar{u} = 3\bar{i} + 6\bar{j}$ และ $\bar{v} = 2\bar{i} + \bar{j}$
   (2) $\bar{u} = -2\bar{i} + 3\bar{j}$ และ $\bar{v} = 4\bar{i} - 5\bar{j}$
   (3) $\bar{u} = 5\bar{i} - 6\bar{j}$ และ $\bar{v} = -3\bar{i} - 3\bar{j}$
3. จงหาค่า a ที่ทำให้เวกเตอร์ $3\bar{i} + a\bar{j}$ และเวกเตอร์ $-4\bar{i} - 6\bar{j}$ ตั้งฉากกัน
4. จงหาขนาดของมุมและความยาวรอบรูปของรูปสามเหลี่ยม ABC เมื่อกำหนด $\overrightarrow{AB} = -\bar{i} + 4\bar{j}$ และ $\overrightarrow{AC} = 4\bar{i} + \bar{j}$

8.8 เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

บทนิยาม กำหนดให้ x , y , z เป็นจำนวนจริง เรียก $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ว่าเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติหรือเวกเตอร์ในสามมิติหรือเรียกสั้น ๆ ว่า เวกเตอร์ในสามมิติ

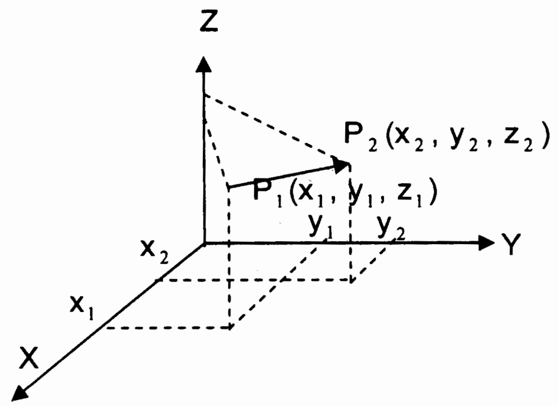
ในทางเรขาคณิตเราแทนเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ด้วยส่วนของเส้นตรงที่กำหนดทิศทางซึ่งมีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด (O) และมีจุดสิ้นสุดที่ (x , y , z) ดังภาพประกอบ 8.8-1



ภาพประกอบ 8.8-1

ตัวอย่าง

ส่วนของเส้นตรงที่ระบุทิศทาง มีจุดเริ่มต้นที่ $P_1(x_1 , y_1 , z_1)$ และจุดสิ้นสุดที่ $P_2(x_2 , y_2 , z_2)$



ซึ่งแทนด้วย $\overrightarrow{P_1P_2}$ หมายถึง เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ P มีพิกัดเป็น (3 , 2 ,1) Q มีพิกัด (5 , -2 , 0) จงหา

วิธีทำ $\overrightarrow{PQ}$ $= \sqrt{(5-3)^2 + (-2-2)^2 + (0-1)^2}$

$= \sqrt{4+16+1}$

$= \sqrt{21}$

บทนิยาม

1) การเท่ากันของเวกเตอร์

$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$ ก็ต่อเมื่อ a = d , b = e , c = f

2) การบวกเวกเตอร์

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+d \\ b+e \\ c+f \end{bmatrix}$$

3) เวกเตอร์ศูนย์คือ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

4) การลบเวกเตอร์

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c \\ d \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-c \\ b-d \\ c-f \end{bmatrix}$$

5) การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

$\alpha\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a \\ \alpha b \\ \alpha c \end{bmatrix}$ เมื่อ α เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ขนาดของเวกเตอร์ในสามมิติ

ถ้า $\overrightarrow{AB}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ A มีพิกัดเป็น (x_1, y_1, z_1) และ B มีพิกัดเป็น (x_2, y_2, z_2) จะได้ $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

ถ้า $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ แล้ว $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย

เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยและมีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ คือ

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่สำคัญคือ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

โดยแทนเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ด้วย $\bar{i}$ แทน $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ด้วย $\bar{j}$ และแทน $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ด้วย $\bar{k}$

เราสามารถเปลี่ยน $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ ให้อยู่ในรูปของ $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} \\ &= a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= a\,\bar{i} + b\,\bar{j} + c\,\bar{k} \end{aligned}$$

นั่นคือ $|a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$ คือ $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 2 $\overrightarrow{PQ}$ มีจุดเริ่มต้นที่ P(2 , 1 , 3) และจุดสิ้นสุดที่ Q(4 , -2 , 1) จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{PQ}$ ในรูปของ $\bar{i}$, $\bar{j}$ และ $\bar{k}$

วิธีทำ $\overrightarrow{PQ} = (4 - 2)\bar{i} + (-2 - 1)\bar{j} + (1 - 3)\bar{k}$

$= 2\bar{i} - 3\bar{j} - 2\bar{k}$

$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(4-2)^2+(-2-1)^2+(1-3)^2}$

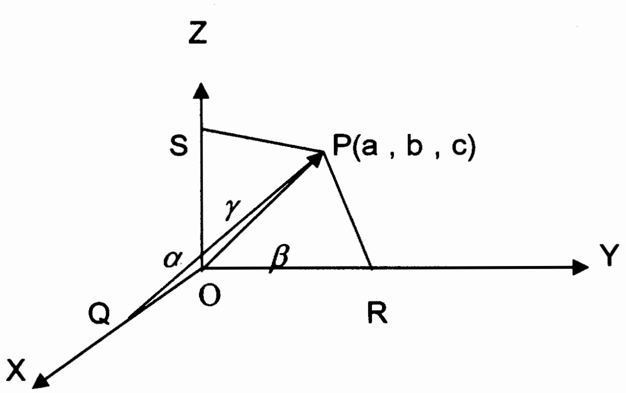
$= \sqrt{4+9+4}$

$= \sqrt{17}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{PQ}$ คือ $\dfrac{1}{\sqrt{17}}\overrightarrow{PQ} = \dfrac{1}{\sqrt{17}}(2\bar{i} - 3\bar{j} - 2\bar{k})$

$= \dfrac{2}{\sqrt{17}}\bar{i} - \dfrac{3}{\sqrt{17}}\bar{j} - \dfrac{2}{\sqrt{17}}\bar{k}$

โคไซน์แสดงทิศทาง (direction cosines)



กำหนดจุด P(a , b , c) จะได้ $\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ ซึ่ง $\overrightarrow{OP} \neq \bar{0}$

ถ้า $\alpha,\beta,\gamma \in [0,\pi]$ เป็นมุมที่วัดจากแกนพิกัดด้านบวกทั้งสามตามลำดับไปยัง $\overrightarrow{OP}$ จะได้

$$\cos\alpha = \frac{a}{|\overrightarrow{OP}|}$$

$$\cos\beta = \frac{b}{|\overrightarrow{OP}|}$$

$$\cos\gamma = \frac{c}{|\overrightarrow{OP}|}$$

หมายเหตุ ในที่นี้ $\overrightarrow{OQ}$. $\overrightarrow{OR}$, $\overrightarrow{OS}$ หมายถึงระยะที่มีทิศทางตามแนวแกน X ,Y และ Z ตามลำดับ

มุม α,β,γ คือมุมที่ $\overrightarrow{OP}$ ทำกับแกน X , Y , Z ทางด้านบวกตามลำดับ เรียกมุมดังกล่าวว่ามุมกำหนดทิศทาง (direct angle) ของ $\overrightarrow{OP}$ และเรียก $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\ \gamma$ ว่า โคไซน์แสดงทิศทาง (direct cosines)

ตัวอย่างที่ 3 จงหาโคไซน์แสดงทิศทางของ $\overrightarrow{PQ}$ เมื่อจุดเริ่มต้น P มีพิกัด (2 , 3 , -1) จุดสิ้นสุด Q มีพิกัด (4 , 5 , 2) เทียบกับแกน X , Y และ Z ตามลำดับ

วิธีทำ $\overrightarrow{PQ} = (4-2)\bar{i} + (5-3)\bar{j} + (2+1)\bar{k}$

$= 2\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$

โคไซน์แสดงทิศทางของ $\overrightarrow{PQ}$ เทียบกับแกน X ,Y และ Z คือ $\frac{a_1}{/a/}$, $\frac{a_2}{/a/}$ และ $\frac{a_3}{/a/}$ ตามลำดับ

เนื่องจาก a_1 , a_2 , และ a_3 คือ 2 , 2 และ 3 ตามลำดับ และ

$a = \sqrt{2^2+2^2+3^2}$

$= \sqrt{17}$

ดังนั้น โคไซน์แสดงทิศทางของ $\overrightarrow{PQ}$ เทียบกับแกน X ,Y และ Z คือ $\frac{2}{\sqrt{17}},\frac{2}{\sqrt{17}}$ และ $\frac{3}{\sqrt{17}}$ ตามลำดับ

บทนิยาม เวกเตอร์สองเวกเตอร์ จะมีทิศทางเดียวกัน ก็ต่อเมื่อมีโคไซน์แสดงทิศทางชุดเดียวกัน และมีทิศทางตรงข้ามกัน ก็ต่อเมื่อ โคไซน์แสดงทิศทางเทียบแต่ละแกนของเวกเตอร์หนึ่งเป็นจำนวนตรงข้ามกับโคไซน์แสดงทิศทางของอีกเวกเตอร์หนึ่ง

ตัวอย่างที่ 4 จงตรวจสอบว่าเวกเตอร์ต่อไปนี้คู่ใดขนานกัน

$$\bar{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix} \quad \bar{c} = \begin{bmatrix} -9 \\ 6 \\ -15 \end{bmatrix} \quad \bar{d} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ $\bar{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\bar{c} = \begin{bmatrix} -9 \\ 6 \\ -15 \end{bmatrix} = -3\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\bar{d} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $\bar{a}$ ขนานกับ $\bar{c}$ และ $\bar{b}$ ขนานกับ $\bar{d}$

ผลคูณเชิงสเกลาร์ (Scalar Product or Dot Product)

บทนิยาม ถ้า $\bar{u} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$ และ $\bar{v} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$ ผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เขียนแทนด้วย $\bar{u} \cdot \bar{v}$ คือ $\bar{u} \cdot \bar{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

สมบัติที่สำคัญของผลคูณเชิงสเกลาร์

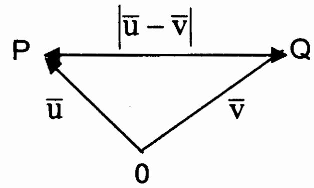
1. $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ ในสามมิติ และ a เป็นสเกลาร์จะได้ว่า
   - 1.1 $\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot \bar{u}$
   - 1.2 $\bar{u} \cdot (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{u} \cdot \bar{w}$
   - 1.3 $a(\bar{u} \cdot \bar{v}) = (a\bar{u}) \cdot \bar{v} = \bar{u} \cdot (a\bar{v})$
   - 1.4 $0 \cdot \bar{u} = 0$
   - 1.5 $\bar{u} \cdot \bar{u} = |\bar{u}|^2$

1.6 $\bar{i} \cdot \bar{i} = \bar{j} \cdot \bar{j} = \bar{k} \cdot \bar{k} = 1$

$\bar{i} \cdot \bar{j} = \bar{i} \cdot \bar{k} = \bar{j} \cdot \bar{k} = 0$

$\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}|\,|\bar{v}| \cos\theta$ (มุมระหว่างเวกเตอร์ หมายถึง มุมที่ไม่ใช่มุมกลับ ซึ่งมีแขนของมุมเป็นรังสีที่มีทิศทางเดียวกันกับเวกเตอร์ทั้งสอง)

2. ถ้า $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ $\bar{u}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$



พิสูจน์ ข้อ 2. กำหนด $\overrightarrow{OP} = \bar{u}$ และ $\overrightarrow{OQ} = \bar{v}$

จะได้ $\overrightarrow{QP} = \bar{u} - \bar{v}$

โดยใช้กฎของโคไซน์ จะได้ว่า

$$(\overrightarrow{QP})^2 = \overrightarrow{OP}^2 + \overrightarrow{OQ}^2 - 2(\overrightarrow{QP})(\overrightarrow{OQ})\cos\theta$$

ถ้า $\bar{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\bar{v} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $\bar{u} - \bar{v} = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{bmatrix}$

เนื่องจาก $|\bar{u} - \bar{v}|^2$ คือ $(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2$

ดังนั้น $|\bar{u} - \bar{v}|^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)$$

$$= \bar{u}^2 + \bar{v}^2 - 2\bar{u}^2 \cdot \bar{v}^2 \qquad \text{..................................(1)}$$

แต่โดยกฎของโคไซน์จะได้ว่า

$$|\bar{u} - \bar{v}|^2 = \bar{u}^2 + \bar{v}^2 - 2|\bar{u}|\,|\bar{v}|\cos\theta \qquad \text{..................................(2)}$$

(1) = (2) จะได้

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}|\,|\bar{v}|\cos\theta$$

ตัวอย่างที่ 5 จงหา โคไซน์ของมุมระหว่าง u และ v เมื่อ

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \bar{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก $\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}|\,|\bar{v}|\cos\theta$

ดังนั้น $\cos\theta = \dfrac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{/\bar{u}//\bar{v}/}$

$$|\bar{u}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2}$$
$$= 3$$
$$|\bar{v}| = \sqrt{4^2 + 4^2 + (-2)^2}$$
$$= 6$$
$$\bar{u} \cdot \bar{v} = (-2)(4) + 1(4) + 2(-2)$$
$$= -8$$
$$\cos\theta = \frac{-8}{3(6)}$$
$$= -\frac{4}{9}$$

ตัวอย่างที่ 6 จงแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดอยู่ที่ A(2 , 4 , 3) , B(4 , 5 , -1) และ C (3 , -2 , 2) เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่

วิธีทำ $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 4-2 \\ 5-4 \\ -1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 3-2 \\ -2-4 \\ 2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2(1) + 1(-6) + (-4)(-1)$$
$$= 2 - 6 + 4$$
$$= 0$$

ดังนั้น $\overrightarrow{AB}$ ตั้งฉากกับ $\overrightarrow{AC}$

ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (Cross Product or Vector Product)

บทนิยาม ผลคูณเชิงเวกเตอร์ ของ $\bar{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ และ $\bar{v} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ เขียนแทนด้วย $\bar{u} \times \bar{v}$

อ่านว่า เวกเตอร์ยู ครอส เวกเตอร์วี คือเวกเตอร์

$$\begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)\bar{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\bar{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\bar{k}$$

ในทางปฏิบัติ นิยมใช้ รูปดีเทอร์มินันต์ เพื่อหาผลลัพธ์ ของ $\bar{u} \times \bar{v}$ ดังนี้

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 7 ให้ $\bar{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ จงหา $\bar{u} \times \bar{v}$

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= [3(4) - 1(0)]\bar{i} - [(-2)(4) - 2(0)]\bar{j} + [(-2)(1) - 2(3)]\bar{k}$$

$$= 12\bar{i} + 8\bar{j} - 8\bar{k}$$

สมบัติของผลคูณเชิงเวกเตอร์

1. กำหนด $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในสามมิติ และ α เป็นจำนวนจริงใด ๆ
   1) $\bar{u} \times \bar{v} = -(\bar{v} \times \bar{u})$
   2) $(\bar{u} + \bar{v}) \times \bar{w} = (\bar{u} \times \bar{w}) + (\bar{v} \times \bar{w})$

3) $\bar{u} \times (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} \times \bar{v}) + (\bar{u} \times \bar{w})$

4) $\bar{u} \times (\alpha \bar{v}) = \alpha (\bar{u} \times \bar{v})$

5) $(\alpha \bar{u}) \times \bar{v} = \alpha (\bar{u} \times \bar{v})$

6) $\bar{u} \times \bar{u} = \bar{o}$

7) $\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}$, $\bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}$, $\bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}$

2. ให้ $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในสามมิติ จะได้ว่า $\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = (\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{w}$
3. ถ้า $\bar{u} \neq \bar{o}$ และ $\bar{v} \neq \bar{o}$ จะได้ว่า $|\bar{u} \times \bar{v}| = |\bar{u}|\,|\bar{v}| \sin\theta$ เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$, $\bar{o} \leq \theta \leq 180$
4. ให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ในสามมิติ ซึ่งไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ และ ไม่ขนานกัน จะได้ว่า $\bar{u} \times \bar{v}$ ตั้งฉากกับ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$

พิสูจน์ 3.

ให้ $\bar{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ และ $\bar{v} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2b_3 - b_2a_3)i - (a_1b_3 - b_1a_3)j + (a_1b_2 - b_1a_2)k$$

$$|\bar{u} \times \bar{v}|^2 = (a_2b_3 - b_2a_3)^2 + (a_1b_3 - b_1a_3)^2 + (a_1b_2 - b_1a_2)^2$$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$$

$$= |\bar{u}|^2\,|\bar{v}|^2 - |\bar{u} \cdot \bar{v}|^2$$

$$= |\bar{u}|^2\,|\bar{v}|^2 - |\bar{u}|^2\,|\bar{v}|^2 \cos^2\theta$$

$$= |\bar{u}|^2\,|\bar{v}|^2 (1 - \cos^2\theta)$$

$$= |\bar{u}|^2\,|\bar{v}|^2 \sin^2\theta$$

$$|\bar{u} \times \bar{v}| = |\bar{u}|\,|\bar{v}| \sin\theta \ , \ 0^0 \leq \theta \leq 180^0$$

ตัวอย่างที่ 8 กำหนดให้ $\bar{u} = 2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$, $\bar{v} = 3\bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k}$

จงหาค่าของ sine ของมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$

วิธีทำ

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (2 - 2)\bar{i} - [2(2) - 3(-1)]\bar{j} + [2(-2) - 3(1)]\bar{k}$$

$$= 7\bar{j} - 7\bar{k}$$

$$|\bar{u} \times \bar{v}| = \sqrt{49+49}$$

$$= 7\sqrt{2}$$

$$|\bar{u}| = \sqrt{4+1+1}$$

$$= \sqrt{6}$$

$$|\bar{v}| = \sqrt{9+4+4}$$

$$= \sqrt{17}$$

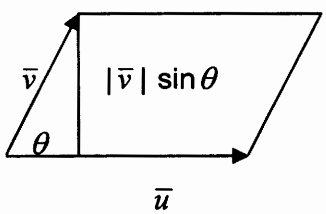
$$|\bar{u} \times \bar{v}| = |\bar{u}|\,|\bar{v}| \sin\theta \;,\; 0^0 \le \theta \le 180^0$$

$$7\sqrt{2} = \sqrt{6}\,\sqrt{17}\ \sin\theta$$

$$\sin\,\theta = \frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{6}\sqrt{17}}$$

$$\approx 0.98$$

การใช้เวกเตอร์ในการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน



จากรูป θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$, $|\bar{v}|\sin\theta$ คือส่วนสูงของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ดังนั้น $|\bar{u} \times \bar{v}| = |\bar{u}|\ |\bar{v}|\ \sin\theta$ เป็นพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านที่อยู่ติดกันยาว $|\bar{u}|$ และ $|\bar{v}|$ หน่วย

ตัวอย่างที่ 9 จงหาพื้นที่ ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD เมื่อ

$\overrightarrow{AB} = \bar{i} + 3\bar{j} + 2\bar{k}$ และ $\overrightarrow{AC} = 2\bar{i} + \bar{j} - 4\bar{k}$

วิธีทำ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD เท่ากับ |AB×AC|

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = [3(-4) - 1(2)]\bar{i} - [1(-4) - 2(2)]\bar{j} + [1(1) - 2(3)]\bar{k}$$

$$= -14\bar{i} + 8\bar{j} - 5\bar{k}$$

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-14)^2 + 8^2 + (-5)^2}$$

$$= \sqrt{285}$$

$$\approx 16.88$$

พื้นที่ ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD ประมาณ 16.88 ตารางหน่วย

ตัวอย่างที่ 10 จงหาพื้นที่ ของรูปสามเหลี่ยม ที่มีจุดยอดเป็น A(1 , 2 , 4) , B(2 , -1 , 3) C(2 , 3 , -2)

วิธีทำ พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับ $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$

$$\overrightarrow{AB} = (2 - 1)\bar{i} + (-1 - 2)\bar{j} + (3 - 4)\bar{k}$$

$$= \bar{i} - 3\bar{j} - 1\bar{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = (2 - 1)\bar{i} + (3 - 2)\bar{j} + (-2 - 4)\bar{k}$$

$$= \bar{i} + \bar{j} - 6\bar{k}$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= [(-3)(-6) - 1(-1)]\bar{i} - [1(-6) - 1(-1)]\bar{j} + [1(1) - 1(-3)]\bar{k}$$

$$= 17\bar{i} + -5\bar{j} + 4\bar{k}$$

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \sqrt{17^2 + (-5)^2 + 4^2}$$

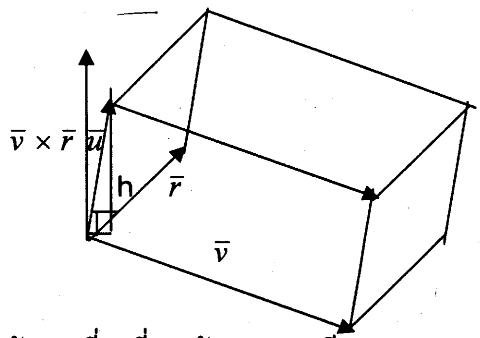
$$= \sqrt{285 + 25 + 16}$$

$= \sqrt{326}$

≈ 18.06

ดังนั้นพื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC ประมาณ $\frac{1}{2} \times 18.06 = 9.03$ตารางหน่วย

การใช้เวกเตอร์เพื่อหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน



กำหนดให้ ทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานมีความยาวของด้านเป็น $|\bar{u}|$, $|\bar{v}|$ และ $|\bar{r}|$ ดังรูป ให้ h เป็นความยาวของเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุดสิ้นสุดของ $\bar{u}$ มายังระนาบที่กำหนดด้วย $\bar{v}$ และ $\bar{r}$ ดังนั้น ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานทรงตัน เท่ากับ

$$|\bar{u}|\,|\cos\theta|\,|\bar{v} \times \bar{r}| = |\bar{u}|\,|\bar{v} \times \bar{r}|\,|\cos\theta|$$

$$= |\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{r})|$$

ข้อสังเกต 1) $\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{r}) = \bar{r} \cdot (\bar{u} \times \bar{v}) = \bar{v} \cdot (\bar{r} \times \bar{u})$

$\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{r}) = -\bar{u} \cdot (\bar{r} \times \bar{v}) = -\bar{r} \cdot (\bar{v} \times \bar{u}) = -\bar{v} \cdot (\bar{u} \times \bar{r})$

2) ถ้า $\bar{u}$, $\bar{v}$ และ $\bar{r}$ อยู่บนระนาบเดียวกัน แล้วจะได้ว่า $\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{r}) = 0$

3) เวกเตอร์สามเวกเตอร์ใด ๆ ผลคูณของ $\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{v}) = \bar{v} \cdot (\bar{r} \times \bar{r}) = \bar{r} \cdot (\bar{u} \times \bar{u}) = 0$

ตัวอย่างที่ 11 จงหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี

$\bar{u} = \bar{i} + \bar{j}$, $\bar{v} = \bar{j} + \bar{k}$ และ $\bar{r} = \bar{i} + \bar{k}$

วิธีทำ ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี

$\bar{u} = \bar{i} + \bar{j}$, $\bar{v} = \bar{j} + \bar{k}$ และ $\bar{r} = \bar{i} + \bar{k}$ เป็นด้านเท่ากับ $|\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{r})|$

$$\bar{v} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1\bar{i} + 1\bar{j} - 1\bar{k}$$

$$|\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{r})| = |1 + 1|$$

$$= 2$$

ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก เท่ากับ 2 ลูกบาศก์หน่วย

แบบฝึกหัด 8.8

1. จงหา $\bar{u} \times \bar{v}$ และ $\bar{v} \times \bar{u}$ จากเวกเตอร์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้
   1) $\bar{u} = 2\bar{i} + 3\bar{k}$, $\bar{v} = \bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$
   2) $\bar{u} = -\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k}$, $\bar{v} = \bar{k}$
2. ให้ $\bar{u} = -3\bar{i} + 4\bar{j} + 5\bar{k}$, $\bar{v} = -\bar{i} + \bar{k}$ จงหา
   1) $\bar{u} \times \bar{v}$
   2) $|\bar{u} \times \bar{v}|$
   3) ค่า sine ของมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$
3. $\bar{u}$, $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในสามมิติ จงแสดงว่า $(\bar{u} - \bar{v}) \times (\bar{u} + \bar{v}) = (2\bar{u}) \times \bar{v}$
4. ให้ $\bar{u} = 2\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$ และ $\bar{v} = -\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$ จงหาเวกเตอร์สองเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ $|\bar{u} \cdot \bar{v}|$ และทิศทางตั้งฉากกับระนาบที่ประกอบด้วยเวกเตอร์ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$
5. จงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน PQRS เมื่อ $\overrightarrow{PQ} = 3\bar{i} - 2\bar{j}$, $\overrightarrow{PS} = 3\bar{i} + 4\bar{k}$
6. จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็น A(0 , 2 , 2) (8 , 8 , -2) และ C(9 , 12 , 6)
7. จงหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี $\bar{u}$, $\bar{v}$ และ $\bar{r}$ ดังนี้
   1) $\bar{u} = \bar{i} + \bar{j}$ $\quad$ $\bar{v} = \bar{j} + \bar{k}$ $\quad$ $\bar{r} = \bar{i} + \bar{k}$
   2) $\bar{u} = \bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$ $\quad$ $\bar{v} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$ $\quad$ $\bar{r} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - 4\bar{k}$
   3) $\bar{u} = 2\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k}$ $\quad$ $\bar{v} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$ $\quad$ $\bar{r} = 2\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$