บทที่ 7

จำนวนเชิงซ้อน

7.1 จำนวนเชิงซ้อน (complex number)

จำนวนเชิงซ้อน คือจำนวนที่เขียนได้ในรูป a + bi เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง และ $i^2 = -1$ หรือ $i = \sqrt{-1}$

เรียก a ว่า ส่วนจริง (real part)

เรียก b ว่า ส่วนจินตภาพ (imaginary part)

เราอาจเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปคู่อันดับกล่าวคือ

เขียน a + bi ในรูป (a , b)

เมื่อ (a , b) และ (c , d) เป็นจำนวนเชิงซ้อนสองจำนวน

1. การเท่ากัน

   (a , b) = (c , d) ก็ต่อเมื่อ a = c และ b = d

2. การบวก

   (a , b) + (c , d) = (a + c , b + d)

3. การคูณ

   (a , b)(c , d) = (ac - bd , ad + bc)

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลบวกและผลคูณของจำนวนเชิงซ้อน (4 , -2) และ (1 , 5)

วิธีทำ

$$(4 , -2) + (1 , 5) = (5 , 3)$$

$$\begin{aligned}(4 , -2)(1 , 5) &= (4(1) - (-2)5 , 4(5) + (-2)1) \\ &= (14 , 18)\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาจำนวนจริง a และ b ที่ทำให้ $(a , b) + (-4 , 5) = (3 , -2)$

วิธีทำ จาก $(a , b) + (-4 , 5) = (3 , -2)$

จะได้ $(a - 4 , b + 5) = (3 , -2)$

$a - 4 = 3$ และ $b + 5 = -2$

$a = 7$ และ $b = -7$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลบวกและผลคูณของ $4 + 7i$ และ $-3 + 2i$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}(4 + 7i) + (-3 + 2i) &= (4 + (-3)) + (7 + 2)i \\ &= 1 + 9i \\ (4 + 7i)(- 3 + 2i) &= (4(-3) + 4(2i) + 7i(-3) + 7i(2i) \\ &= -12 + 8i - 21i - 14 \\ &= -28 - 13i\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลคูณของ i , $-2i$ และ $5 + 6i$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}i(-2i)(5 + 6i) &= [i(-2i)](5 + 6i) \\ &= 2(5 + 6i) \\ &= 10 + 12i\end{aligned}$$

เอกลักษณ์ และตัวผกผันการบวก

$(a , b) + (0 , 0) = (a , b)$ และ $(0 , 0) + (a , b) = (a , b)$ เราเรียก $(0 , 0)$ ว่า เอกลักษณ์การบวกในระบบจำนวนเชิงซ้อน

$(a , b) + (-a , -b) = (0 , 0)$ และ $(-a , -b) + (a , b) = (0 , 0)$ เราเรียก $(-a , -b)$ ว่า ตัวผกผันการบวก ของ (a , b)

เอกลักษณ์และตัวผกผันการคูณ

พิจารณาการคูณจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

$$\begin{aligned}(a , b)(1 , 0) &= (a(1) - b(0) , a(0) + b(1)) \\ &= (a , b)\end{aligned}$$

เช่นเดียวกันหาผลคูณของ (1 , 0)(a , b) ได้ (a , b) เราเรียก (1 , 0) ว่าเอกลักษณ์การคูณในระบบจำนวนเชิงซ้อน

สำหรับ (a , b) ที่ไม่เท่ากับ (0 , 0) จะมีจำนวนเชิงซ้อนตัวหนึ่งและตัวเดียวที่คูณกับ (a , b) แล้วได้ (1 , 0) เรียกจำนวนเชิงซ้อนดังกล่าวนี้ว่าตัวผกผันการคูณของ (a , b)

จงหา ตัวผกผันการคูณของ (a , b)

ให้ (x , y) เป็นตัวผกผันการคูณของ (a , b)

ดังนั้น (x , y)(a , b) = (1 , 0)

(xa - yb , xb + ya) = (1 , 0)

จะได้ว่า xa - yb = 1

xb + ya = 0

แก้สมการจะได้

x = $\frac{a}{a^2+b^2}$ และ y = $\frac{-b}{a^2+b^2}$

ดังนั้น ตัวผกผันการคูณของ (a , b) คือ $\left(\frac{a}{a^2+b^2}\ ,\ -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาตัวผกผันการคูณของ (5 , -12)

วิธีทำ ตัวผกผันการคูณของ (a , b) คือ $\left(\frac{a}{a^2+b^2}\ ,\ -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$

ดังนั้น ตัวผกผันการคูณของ (-3 , 4) คือ $\left(\frac{-3}{(-3)^2+4^2}\ ,\ -\frac{4}{(-3)^2+4^2}\right)$

$= \left(-\frac{3}{25}, -\frac{4}{25}\right)$

การลบ และการหารจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม (a , b) - (c , d) = (a , b) + (-c , -d)

ตัวอย่างที่ 6 จงหา (-3,11) - (-7 , -19)

วิธีทำ (-3,11) - (-7 , -19) = (-3 + 7 , 11 + 19)

= (4 , 30)

บทนิยาม $(a , b)\div(c , d) = (a , b)\left(\frac{c}{c^2+d^2},-\frac{d}{c^2+d^2}\right)$

เมื่อ $(c , d)\neq(0 , 0)$

ตัวอย่างที่ 7 จงหา $(-6 , 8)\div(-10 , -24)$

วิธีทำ $(-6 , 8)\div(-10 , -24) = (-6 , 8)\times\left(\frac{-10}{(-10^2)+(-24)^2},-\frac{-24}{(-10)^2+(-24)^2}\right)$

$= (-6 , 8)\left(\frac{-10}{676}+\frac{24}{676}\right)$

$= \left(\frac{60}{676}-\frac{192}{676},-\frac{80}{676}-\frac{144}{676}\right)$

$= \left(-\frac{132}{676},-\frac{224}{676}\right)$

$= \left(-\frac{33}{169},-\frac{56}{169}\right)$

ในการหาผลหารของจำนวนเชิงซ้อน เราสามารถใช้ความรู้ในเรื่องสังยุค

บทนิยาม สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน a + bi คือจำนวนเชิงซ้อน a - bi เขียนแทนสังยุคของ a + bi ด้วย $\overline{a+bi}$ นั่นคือ $\overline{a+bi}$ = a - bi

ตัวอย่างที่ 7 จงหาสังยุคของ -13 + 21i

ตอบ สังยุคของ -13 + 21i คือ -13 - 21i

ทฤษฎีบท 1 ให้ z , z_1 , z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้

1. $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1+\bar{z}_2$
2. $\overline{z_1-z_2} = \bar{z}_1-\bar{z}_2$

3. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

4. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

5. $\overline{(z^{-1})} = (\bar{z})^{-1}$

6. $\bar{\bar{z}} = z$

ตัวอย่างที่ 8 จงหาผลหาร ของ $\frac{5-2i}{6-4i}$ โดยใช้สังยุคของตัวหาร

วิธีทำ
$$
\begin{aligned}
\frac{5-2i}{6-4i} &= \frac{5-2i}{6-4i} \times \frac{6+4i}{6+4i} \\
&= \frac{5(6)+5(4i)-2i(6)-2i(4i)}{6(6)+6(4i)-4i(6)-4i(4i)} \\
&= \frac{30+8i+8}{36+16} \\
&= \frac{38+8i}{52} \\
&= \frac{19}{26} + \frac{2}{13}i
\end{aligned}
$$

แบบฝึกหัด 7.1

1. จงหาค่า x และ y ที่สอดคล้องกับสมการที่กำหนดให้

   (1) $x + yi = 7 - 2i$

   (2) $x - 6yi = 42i$

   (3) $(x - yi)(3 + 4i) = 2 - i$

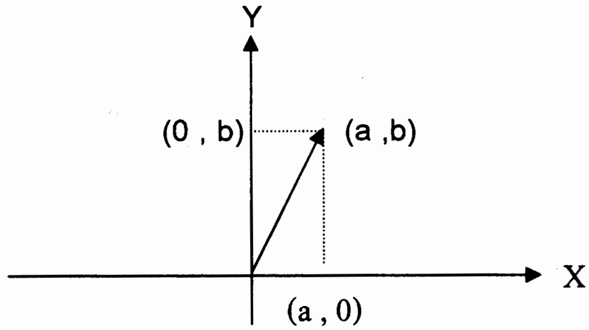
2. จงทำให้เป็นผลสำเร็จ โดยตอบในรูป a + bi

   (1) $\frac{2+5i}{3+4i}$ (2) $\frac{12-5i}{-8-6i}$

   (3) $\frac{5-2i}{3+2i} \times \frac{2+i}{4-i}$ (4) $\frac{3}{4-i} - \frac{5}{4+i} + \frac{2}{i}$

7.2 กราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

เราสามารถแทนจำนวนเชิงซ้อน (a , b) ด้วยจุดบนระนาบในระบบแกนมุมฉาก และเรียกแกนนอนหรือแกน X ว่า แกนจริง (real axis) เรียกแกนตั้งหรือแกน Y ว่า แกนจินตภาพ (imaginary axis) และเรียกระนาบที่เกิดจากแกนทั้งสองว่า ระนาบเชิงซ้อน (complex plane)



ค่าสัมบูรณ์ (absolute value หรือ modulus) ของจำนวนเชิงซ้อน a + bi เขียนแทนด้วย | a + bi | โดยที่ | a + bi | = $\sqrt{a^2+b^2}$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าสัมบูรณ์ของ

1. 3 +2i
2. 4 - 5i
3. $-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}i$

วิธีทำ 1. $|3 + 2i| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$

2. $|4 - 5i| = \sqrt{4^2+(-5)^2} = \sqrt{41}$

3. $\left| -\frac{3}{4} + \frac{1}{2}i \right| = \sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{13}{16}}$

ทฤษฎีบท 2 ให้ z , z_1 , z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้

1. $|z|^2 = \overline{z\,z}$
2. $|z| = |-\bar{z}|$
3. $|z| = |\bar{z}|$
4. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
5. $|z^{-1}| = |z|^{-1}$
6. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$
7. $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$
8. $|z_1 - z_2| \ge |z_1| - |z_2|$

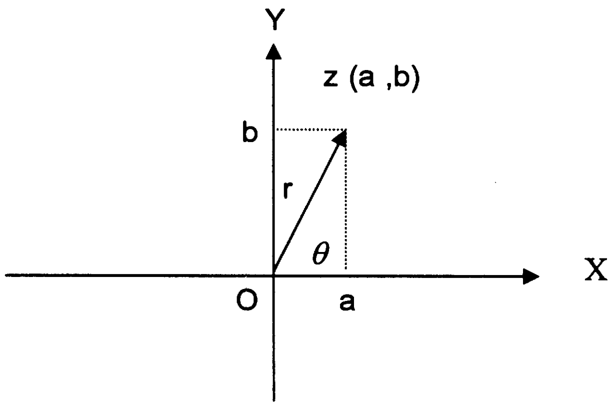
แบบฝึกหัด 7.2

1. จงพิสูจน์ ทฤษฎีบท 2 ข้อ 1. และข้อ 2.
2. จงเขียนจุดแทนจำนวน 3 - 2i และ 5 + i และผลบวกของสองจำนวนนี้ในระนาบเชิงซ้อน
3. จงหาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

   (1) 2 - 4i (2) $-1 - \sqrt{3}\,i$ (3) $-\sqrt{5} + 2\sqrt{3}\,i$
4. จงแสดงว่า $|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$ เมื่อ z_1 , z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน

7.3 จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

ถ้า z = a + bi เป็นจำนวนเชิงซ้อน เราสามารถเขียน z ด้วยเวกเตอร์บนระนาบเชิงซ้อนได้ดังนี้



กำหนด θ เป็นมุมที่วัดทวนเข็มนาฬิกาจากแกน X ไปยัง $\overrightarrow{OZ}$

ให้ r = | $\overrightarrow{OZ}$ | จากรูป จะได้

$r = |\bar{z}| = \sqrt{a^2+b^2}$

$\tan\theta = \frac{b}{a}$

$\sin\theta = \frac{b}{r}$ หรือ $b = r\sin\theta$

$\cos\theta = \frac{a}{r}$ หรือ $a = r\cos\theta$

ดังนั้น $z = a + bi$

$= r\cos\theta + i\, r\sin\theta$

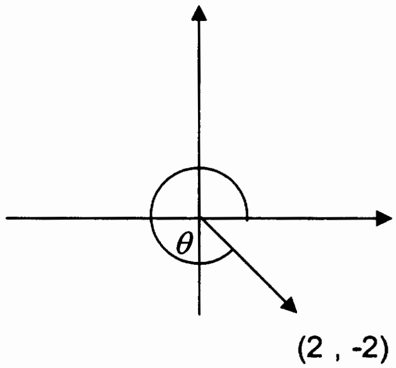
$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$

เรียก $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ว่ารูปเชิงขั้ว (polar form) ของจำนวนเชิงซ้อน a + bi และเรียก θ ว่าอาร์กิวเมนต์ของ z (argument of z) และจะได้ $r[\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi)]$ เป็นรูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน a + bi ด้วย

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ในรูปเชิงขั้ว

1. $2 - 2i$ 2. $-1 - \sqrt{3}i$

วิธีทำ 1. $2 - 2i$



r $= \sqrt{a^2+b^2}$

$= \sqrt{2^2+(-2)^2}$

$= \sqrt{8}$

r $= 2\sqrt{2}$

$\tan\theta$ $= \dfrac{b}{a}$

$= \dfrac{-2}{2}$

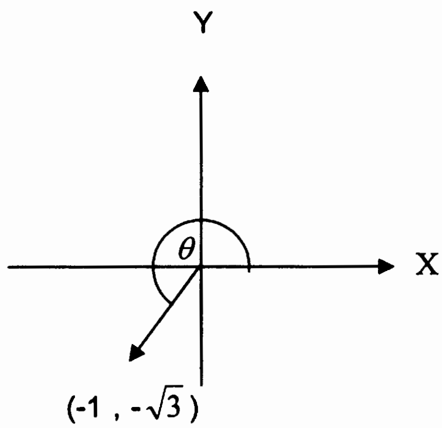
$= -1$

θ $= 315^0$

จาก z = a + bi เขียนในรูปเชิงขั้วได้เป็น z = r ($\cos\theta$ + i $\sin\theta$)

ดังนั้น z = 2 - 2i

$= 2\sqrt{2}\ (\cos 315^0 + i \sin 315^0)$



$$
\begin{aligned}
z &= -1-\sqrt{3}i \\
r &= \sqrt{a^2+b^2} \\
&= \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} \\
&= \sqrt{4} \\
&= 2 \\
\tan\theta &= \frac{b}{a} \\
&= \frac{-\sqrt{3}}{-1} \\
&= \sqrt{3} \\
\theta &= \frac{4\pi}{3}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $z = -1 - \sqrt{3}\,i$

$$= 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

การคูณและการหารจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

ทฤษฎีบท 3 ให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ และ $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ จะได้

1. $z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$
2. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$, $z_2 \neq 0$

พิสูจน์ 1. เนื่องจาก $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ และ $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\, r_2\, (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= r_1 r_2[\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2] \\
&= r_1 r_2[\cos\theta_1\cos\theta_2 + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2) - \sin\theta_1\sin\theta_2] \\
&= r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]
\end{aligned}
$$

พิสูจน์ 2. ให้ทำเป็นแบบฝึกหัด

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูป a + bi

1. 3 (cos 120^0+ isin 120^0)] [4$\sqrt{3}$ (cos 330^0+ i sin 330^0)]

2. $\dfrac{2(\cos 30^0 + i\sin 30^0)}{8(\cos 240^0 + i\sin 240^0)}$

วิธีทำ 1. 3 (cos 120^0+ isin 120^0)] [4$\sqrt{3}$ (cos 330^0 + i sin 330^0)]

= 3(4$\sqrt{3}$) [cos $(120 + 330)^0$+ i sin $(120 + 330)^0$]

= 12$\sqrt{3}$ [cos 90^0+ i sin 90^0]

= i 12$\sqrt{3}$

2. $\dfrac{2(\cos 30^0 + i\sin 30^0)}{8(\cos 240^0 + i\sin 240^0)} = \dfrac{2}{8}[\cos(30 - 240) + i \sin (30 - 240)]$

$= \dfrac{1}{4}(\cos 210^0 - i \sin 210^0)$

$= \dfrac{1}{4}[\dfrac{-\sqrt{3}}{2} + i\ \dfrac{1}{2}]$

$= \left[-\dfrac{\sqrt{3}}{8} + \dfrac{1}{8}i\right]$

ทฤษฎีบท 4 ถ้า z = r (cosθ + i sinθ) และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้

$z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$

ทฤษฎีบท 4 นี้มีชื่อเรียกว่าทฤษฎีบทของเดอร์มัวฟ์ (De Moivre's Theorem)

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ $\left(-\dfrac{3}{\sqrt{2}} + \dfrac{3}{\sqrt{2}}i\right)^{10}$

วิธีทำ เนื่องจาก $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$

ในที่นี้ z $= \left(-\dfrac{3}{\sqrt{2}} + \dfrac{3}{\sqrt{2}}i\right)$ และ n = 10

r $= \sqrt{\left(-\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}$

= 3

$$\tan\theta = \frac{\frac{3}{\sqrt{2}}}{-\frac{3}{\sqrt{2}}} = -1$$

$$\theta = 135^0$$

เมื่อ $z = \left(-\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}i\right)$

ดังนั้น $z = 3(\cos 135^0 + i \sin 135^0)$

และ $z^{10} = \left(-\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}i\right)^{10}$

$= 3^{10}[\cos 10(135)^0 + i \sin 10(135)^0]$

$= 3^{10}[\cos 270^0 + i \sin 270^0]$

$= -59049\ i$

การหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม ให้ x และ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ n เป็นจำนวนเต็มบวก x เป็นรากที่ n ของ z ก็ต่อเมื่อ $x^n = z$

ในการหารากที่ n ทั้งหมดของจำนวนเชิงซ้อน z ทำได้โดยใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5 ถ้า $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ แล้ว รากที่ n ของ z มีทั้งหมด n รากที่แตกต่างกันคือ

$$x = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

เมื่อ $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$

ตัวอย่างที่ 4 จงหารากที่ 4 ของ 8 i

$z = 0 + 8i$

ดังนั้น $\theta = \frac{\pi}{2}$ และ $r = 8$

ให้ x เป็นรากที่สี่ของ z จะได้

$$x = \sqrt[4]{8}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}\right)\right]$$

เมื่อ $k = 0$

$$x = \sqrt[4]{8}\left[\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right]$$

เมื่อ $k = 1$

$$x = \sqrt[4]{8}\left[\cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}\right]$$

เมื่อ $k = 2$

$$x = \sqrt[4]{8}\left[\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}\right]$$

เมื่อ $k = 3$

$$x = \sqrt[4]{8}\left[\cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8}\right]$$

แบบฝึกหัด 7.3

1. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว
   (1) $1 - i$ (2) $-2 - 2\sqrt{3}\,i$
   (3) $-3 + 3i$ (4) $\frac{1-i}{1+i}$
   (5) $2\sqrt{3} - 2i$ (6) $-4 + 4\sqrt{3}\,i$
2. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ในรูป $a + bi$
   (1) $(1 - i)^{10}$ (2) $\left(\sqrt{2} - \sqrt{2}i\right)^6$
   (3) $\left(1 + \sqrt{3}i\right)^8$
3. จงหารากที่สามของ -64
4. จงหารากที่สี่ของ $-81i$
5. จงหารากที่สี่ของ $-2 + 2\sqrt{3}\,i$

6. จงหาผลคูณและผลหารของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้โดยใช้รูปเชิงขั้ว

(1) $z_1 = -2 + 2\sqrt{3}i$, $z_2 = 3 - 3\sqrt{3}i$

(2) $z_1 = -\sqrt{3} + i$, $z_2 = 2\sqrt{3} + 2i$

(3) $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$, $z_2 = 3\sqrt{3} + 3i$

7.4 สมการพหุนาม

สมการพหุนามตัวแปรเดียวที่กล่าวในที่นี้คือ สมการที่อยู่ในรูป $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ เป็นสัมประสิทธิ์ของพหุนามที่เป็นจำนวนจริงโดยที่ $a_n \neq 0$ จะเรียกสมการดังกล่าวว่า "สมการพหุนามกำลัง n" ซึ่งสมการพหุนามกำลัง n ทุกสมการจะสามารถหาคำตอบหรือรากของสมการได้เสมอ

ทฤษฎีบท 6 ทฤษฎีบทพีชคณิตเบื้องต้น (The Fundamental Theorem of Algebra)

สมการพหุนามกำลัง n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกทุกสมการ จะมีรากของสมการอย่างน้อยหนึ่งราก

ในการหาคำตอบของสมการพหุนามกำลัง n นั้น ทำได้โดยพยายามเขียนพหุนามให้อยู่ในรูปพหุนามกำลัง 1 ในที่นี้จะแบ่งการหาคำตอบของสมการพหุนามกำลัง n เป็น 2 กรณี

กรณีที่ 1 สมการพหุนามกำลัง 2 หรือสมการควอดราติก

สมการควอดราติกจะอยู่ในรูป

$$ax^2 + bx + c = 0$$

หาคำตอบของสมการได้ดังนี้

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left[\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{4ac}{4a^2}\right] = 0$$

$$(x + \frac{b}{2a})^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{2a}\right)^2 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ถ้า $b^2 - 4ac < 0$ จะได้

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2}\, i}{2a}$$

หรือ $$x = \frac{-b \pm \sqrt{/b^2 - 4ac/}\, i}{2a}$$

นั่นคือคำตอบของสมการ $ax^2 + bx + c = 0$ โดยที่ a , b , c เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $a \neq 0$

คือ $x = \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2}}{2a}$ เมื่อ $b^2 - 4ac \geq 0$

หรือ $x = \frac{-b \pm \sqrt{/b^2 - 4ac/}\, i}{2a}$ เมื่อ $b^2 - 4ac < 0$

ตัวอย่างที่ 1 จงแก้สมการ $2x^2 - 3x + 4 = 0$

วิธีทำ เนื่องจาก $b^2 - 4ac = 9 - 4(2)(4) = -23$

ดังนั้น $x = \frac{-3 \pm \sqrt{23}\, i}{4}$

กรณีที่ 2 สมการพหุนามกำลังมากกว่า 2

ในการแก้สมการพหุนาม $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ ให้อยู่ในรูปผลคูณของพหุนามกำลัง 1 หรือกำลัง 2 จะอาศัยทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 7 ทฤษฎีบทเศษเหลือ (Remainder Theorem)

เมื่อ f(x) = $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ เป็นจำนวนจริง และ $a_n \neq 0$ ถ้าหารพหุนาม f(x) ด้วยพหุนาม x - c เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ แล้วเศษจะเท่ากับ f(c)

ทฤษฎีบท 8 ทฤษฎีบทตัวประกอบ (Factor Theorem)

เมื่อ f(x) = $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ เป็นจำนวนจริง และ $a_n \neq 0$ พหุนามนี้จะมี x - c เป็นตัวประกอบก็ต่อเมื่อ f(c) = 0

ทฤษฎีบท 9 ทฤษฎีบทตัวประกอบจำนวนตรรกยะ

เมื่อ f(x) = $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ เป็นจำนวนเต็ม และ $a_n \neq 0$

ถ้า x - $\frac{k}{m}$ เป็นตัวประกอบของพหุนาม f(x) โดยที่ m และ k เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง m $\neq$ 0 และ ห.ร.ม. ของ m และ k เท่ากับ 1 แล้ว m จะเป็นตัวประกอบของ a_n และ k เป็นตัวประกอบของ a_0

ตัวอย่างที่ 2 จงหาเศษเหลือจากการหาร $3x^3 - 4x^2 + 2x + 4$ ด้วย x - 1 และ x + 2

วิธีทำ ให้ $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2x + 4$

$f(1) = 3(1)^3 - 4(1)^2 + 2(1) + 4$

$= 3 - 4 + 2 + 4$

$= 5$

ดังนั้น $3x^3 - 4x^2 + 2x + 4$ หารด้วย x - 1 ได้เศษเหลือ 5

ให้ $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2x + 4$

$f(-2) = 3(-2)^3 - 4(-2)^2 + 2(-2) + 4$

$= -24 - 16 - 4 + 4$

$= -40$

ดังนั้น $3x^3 - 4x^2 + 2x + 4$ หารด้วย x +2 ได้เศษเหลือ -40

ตัวอย่างที่ 3 จงแสดงว่า $2 - \sqrt{3}i$ เป็นคำตอบของสมการ

$x^4 - 7x^2 + 20x + 14 = 0$ และหาคำตอบที่เหลือของสมการ

วิธีทำ ให้ $f(x) = x^4 - 7x^2 + 20x + 14$

$$f(2 - \sqrt{3}i) = (2 - \sqrt{3}i)^4 - 7(2 - \sqrt{3}i)^2 + 20(2 - \sqrt{3}i) + 14$$

$$= -47 - 8\sqrt{3}i - 7 + 28\sqrt{3}i + 40 - 20\sqrt{3}i + 14$$

$$= 0$$

ดังนั้น $2 - \sqrt{3}i$ เป็นคำตอบของสมการ $x^4 - 7x^2 + 20x + 14 = 0$

และจะได้ว่า $2 + \sqrt{3}i$ เป็นคำตอบของสมการ $x^4 - 7x^2 + 20x + 14 = 0$

นั่นคือ $[x - (2 - \sqrt{3}i)][x - (2 + \sqrt{3}i)] = 0$

$$x^2 - 2x - x\sqrt{3}i - 2x + x\sqrt{3}i + 4 + 3 = 0$$

$$x^2 - 4x + 7 = 0$$

และ $x^4 - 7x^2 + 20x + 14 = (x^2 + 4x + 2)(x^2 - 4x + 7)$

ดังนั้น $(x^2 + 4x + 2)(x^2 - 4x + 7) = 0$

จาก $(x^2 + 4x + 2) = 0$

จะได้ $x = -2 + \sqrt{2}$ หรือ $x = -2 - \sqrt{2}$

ดังนั้น คำตอบของสมการคือ $2 - \sqrt{3}i$, $2 + \sqrt{3}i$, $-2 + \sqrt{2}$ และ $-2 - \sqrt{2}$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาเซตคำตอบของสมการ $x^6 - 1 = 0$

วิธีทำ จาก $x^6 - 1 = 0$

จะได้ $x^6 = 1 = 1\,(\cos 0^0 + \sin 0^0)$

ดังนั้นคำตอบของสมการ $x^6 = 1$ คือรากที่ 6 ของ 1

โดยทฤษฎีบท 5 จะได้รากที่ 6 ของ 1 คือ

$$x = \sqrt[6]{1}\,[\cos\frac{2k\pi}{6} + i\sin\frac{2k\pi}{6}]$$

เมื่อ $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 5\}$

นั่นคือ เมื่อ $k = 0$ จะได้ $x = \cos 0 + i\sin 0 = 1$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $x = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $x = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

เมื่อ k = 3 จะได้ $x = \cos \pi + i\sin \pi = -1$

เมื่อ k = 4 จะได้ $x = \cos \frac{4\pi}{3} + i\sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

เมื่อ k = 5 จะได้ $x = \cos \frac{5\pi}{3} + i\sin \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

แบบฝึกหัด 7.4

1. จงแก้สมการต่อไปนี้

(1) $x^2 + 6x - 4 = 0$

(2) $x^2 + 16 = 0$

(3) $x^2 - 2x + 20 = 0$

(4) $x^2 - 2x - 40 = 0$

(5) $2x^2 + 6x - 14 = 0$

(6) $4x^2 + x + 1 = 0$

(7) $2x^2 + 5x + 12 = 0$

(8) $3x^2 + 5x - 16 = 0$

2. จงหาคำตอบของสมการต่อไปนี้

(1) $x^3 - i = 0$

(2) $x^3 + 8i = 0$

(3) $x^3 - 8 = 0$

(4) $2x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$

(5) $2x^4 - x^3 - 6x^2 + 4x - 8 = 0$

(6) $x^4 - x^3 - 7x^2 - 9x - 18 = 0$

(7) $x^5 + 8x^4 + 24x^3 + 26x^2 - 17x - 42 = 0$

3. จงแสดงว่า $-1 - \sqrt{3}i$ เป็นคำตอบของสมการ $x^5 + 9x^3 - 8x^2 - 72 = 0$ และหารากที่เหลือของสมการ

4. จงหาสมการพหุนามกำลัง 5 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม และมี 2 , -1 , $-\frac{2}{3}$, และ $3 - \sqrt{3}i$ เป็นคำตอบของสมการ

ตัวอย่างที่ 3 จงหาคำตอบของสมการ $x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 22x + 12 = 0$

วิธีทำ ให้ $f(x) = x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 22x + 12$

$f(1) = 1 - 6 + 15 - 22 + 12$

$= 0$

ดังนั้น $(x - 1)$ หาร $f(x)$ ได้ลงตัว

$$
\begin{array}{rl}
 & x^3 - 5x^2 + 10x - 12 \\
\cline{2-2}
x-1 \big) & x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 22x + 12 \\
 & \underline{x^4 - x^3} \\
 & \qquad -5x^3 + 15x^2 \\
 & \qquad \underline{-5x^3 + 5x^2} \\
 & \qquad\qquad 10x^2 - 22x \\
 & \qquad\qquad \underline{10x^2 - 10x} \\
 & \qquad\qquad\qquad -12x + 12 \\
 & \qquad\qquad\qquad \underline{-12x + 12}
\end{array}
$$

ให้ $q(x) = x^3 - 5x^2 + 10x - 12$

$q(3) = 27 - 45 + 30 - 12 = 0$

ดังนั้น $x - 3$ หาร $q(x)$ ได้ลงตัว

$$
\begin{array}{rl}
 & x^2 - 2x + 4 \\
\cline{2-2}
x-3 \big) & x^3 - 5x^2 + 10x - 12 \\
 & \underline{x^3 - 3x^2} \\
 & \qquad -2x^2 + 10x \\
 & \qquad \underline{-2x^2 + 6x} \\
 & \qquad\qquad 4x - 12 \\
 & \qquad\qquad \underline{4x - 12}
\end{array}
$$

ดังนั้น $q(x) = (x - 3)(x^2 - 2x + 4)$

จะได้ $p(x) = (x - 1)(x - 3)(x^2 - 2x + 4) = 0$

ดังนั้น $x = 1$ หรือ $x = 3$ หรือ $x^2 - 2x + 4 = 0$

หาคำตอบของสมการ $x^2 - 2x + 4 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-4(1)4}}{2(1)}$$

$x = 1 - i\sqrt{3}$ หรือ $x = 1 + i\sqrt{3}$

ดังนั้นคำตอบของสมการ $x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 22x + 12 = 0$

คือ 1 , 3 , $1 - i\sqrt{3}$ และ $1 + i\sqrt{3}$

ทฤษฎีบท 10 ถ้าสมการพหุนามกำลัง n

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ เป็นจำนวนจริง และ $a_n \neq 0$ มี a + bi เป็นคำตอบของสมการแล้ว a - bi จะเป็นคำตอบของสมการด้วย เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงโดยที่ $b \neq 0$

พิสูจน์ ให้ a + bi เป็นคำตอบของสมการพหุนาม

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

และ $a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

ดังนั้น $a_n[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n + a_{n-1}[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{n-1} + \ldots + a_1[r(\cos\theta + i\sin\theta)] + a_0 = 0$

$a_n[r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)] + a_{n-1}[r^{n-1}(\cos(n-1)\theta + i\sin(n-1)\theta)] + \ldots + a_1[r(\cos\theta + i\sin\theta)] + a_0 = 0$

แสดงว่า

$a_n r^n \cos n\theta + a_{n-1}r^{n-1}\cos(n-1)\theta + \ldots + a_1 r\cos\theta + a_0 = 0$ ....(1)

และ

$a_n r^n i\sin n\theta + a_{n-1}r^{n-1} i\sin(n-1)\theta + \ldots + a_1 r i\sin\theta = 0$ ....(2)

(1)-(2) จะได้

$a_n[r(\cos\theta - i\sin\theta)]^n + a_{n-1}[r(\cos\theta - i\sin\theta)]^{n-1} + \ldots + a_1[r(\cos\theta - i\sin\theta)] + a_0 = 0$

ดังนั้น $r(\cos\theta - i\sin\theta)$ เป็นคำตอบของสมการดังกล่าวด้วย

แต่ $a - bi = r(\cos\theta - i\sin\theta)$

นั่นคือ a – bi เป็นคำตอบของสมการพหุนาม

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ ด้วย